متتاليات

الإثبات بالتدريج (الاستقراء الرياضي)

الخطوات

1- نرمز القضية المطلوبة:
2- نثبت صحة القضية من أجل $n = n_0$ حيث (n_0 هو المبدء الذي تفرضه القضية).
3- نفرض صحة القضية من أجل n
4- نثبت صحة القضية من أجل $n+1$

إذا تحققت الخطوات الثلاث نقول:

نقول القضية محققة ($n \in N$)

ملاحظات

1. في الخطوات الثلاثة نثبت ... من أجل $n+1$
. إذا كانت مساواه (=) نبدأ من الطرف الأول نتبع الطرف الثاني.
. إذا كانت متراجحة ($>$ و $<$ و $\geq$ و $\leq$) لدينا طريقتين وكلاهما يبدأ من الفرض

إما بفرض تابع ← دراسة إطراده ← بتصوير الطرفين أطراف المتتالية (لكل الحالات)

أو القيام بالعمليات كضرب والقسمة بتبع $n+1$ (لبعض الحالات)

ملاحظة: إذا كانت المتتالية معرفة بالتدريج يمكن التعويض حسب المعطيات.

مثال: لتكن المتتالية $(E_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق $E_n : 2^{3n} - 1$

أثبت أن E_n مضاعف للعدد 7

① نرمز للقضية: $E_n : 2^{3n} - 1$

② نثبت صحة القضية من أجل $n = 0$

$2^0 - 1 = 0$

$1 - 1 = 0$ محققة

③ نفرض صحة القضية من أجل n:

$2^{3n} - 1 = 7K$ $\quad K \in \mathbb{N}$

④ نثبت صحة القضية من أجل $n+1$:

$2^{3(n+1)} - 1 = 2^{3n+3} - 1$

$2^{3n} \cdot 2^3 - 1 = 2^{3n} \times 8 - 1$

$= 2^{3n}(7+1) - 1$

$= 2^{3n} \times 7 + 2^{3n} - 1$

$= 2^{3n} + 7 + 7K$

$= 7(2^{3n} + K)$

محققة عند $n+1$ فهي محققة من أجل n.

مثال (2):

$$\overbrace{1+2+3+\dots+n}^{P_1} = \overbrace{\frac{n(n+1)}{2}}^{P_2}$$

- أثبت صحة القضية من أجل $n \geq 1$

① نثبت صحة القضية من أجل $n=1$

$P_1 = 1$

$P_2 = 1\left(\frac{1+1}{2}\right) = 1 \Rightarrow P_1 = P_2$

فهي محققة عندما $n=1$

② نفرض صحة القضية من أجل n:

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(1+n)}{2}$$

③ نثبت صحة القضية من أجل $n+1$:

$$1+2+3+\dots+n+n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

الإثبات:

$$P_1 = 1+2+3+\dots+n+n+1$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)}{1}$$

$$\frac{n(1+n)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = P_2$$

محققة أياً كانت $n \in \mathbb{N}$.

سؤال: $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = \frac{3U_n + 2}{2U_n + 6}$

عند كل $n \geq 0$

① أثبت أن التابع $x \to \frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً واستنتج

أنّ $\frac{1}{2} < U_n \leq 1$ ، أياً كان العدد n .

② أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً ،

[1] $U_0 = 1$ $\quad U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 2}{2U_n + 6}$

① أثبت أن f متزايد تماماً : $F(x) = \dfrac{3x+2}{2x+6}$

$$F'(x) = \frac{3(2x+6) - 2(3x+2)}{(2x+6)^2}$$

$$F'(x) = \frac{\cancel{6x} + 18 - \cancel{6x} - 4}{(2x+6)^2} = \frac{14}{(2x+6)^2} > 0$$

f متزايد تماماً ،

② استنتج أنّ $\frac{1}{2} < U_n \leq 1$

- من أجل $n=0$ $\quad \frac{1}{2} < U_0 = 1 \leq 1$ محققة

- نفرض محققة من أجل n : $\frac{1}{2} < U_n \leq 1$

- نثبت من أجل $n+1$: $\frac{1}{2} < U_{n+1} \leq 1$

الإثبات : $\frac{1}{2} < U_n \leq 1$

f متزايد $\quad f(\frac{1}{2}) < f(u_n) \leq f(1)$

$$\frac{3\times5}{7} < \frac{3u_n+2}{2u_n+6} \leq \frac{5}{8}$$

$\frac{1}{2} < u_{n+1} \leq 1$ محققة

$\boxed{2}$- أثبت أن المتتالية متناقصة تماماً.

$E(n): \quad u_{n+1} < u_n$

$E(0): \quad u_1 = \frac{5}{8} < u_0 = 1$ محققة

نفرض صحة القضية من أجل n:

$u_{n+1} < u_n$

نثبت صحتها عند $n+1$: $\quad u_{n+2} < u_{n+1}$

الإثبات: من الفرض: $\quad u_{n+1} < u_n$

f متزايد $\quad f(u_{n+1}) < f(u_n)$

$u_{n+2} < u_{n+1}$ محققة

$\Leftarrow$ المتتالية متناقصة تماماً.

سؤال: $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية معرفة وفق $u_0=1$ و

$u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$ عند كل $n\geq0$.

① أثبت أن $0 \le u_n < 2$ أياً كان العدد الطبيعي n

② أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \ge 0}$ متزايدة تماماً.

$$u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \quad \text{و} \quad u_0 = 1$$

أ- أثبت أن $0 \le u_n < 2$

$E(n): \quad 0 \le u_n \le 2$

نثبت صحة القضية من أجل $n=0$:

$0 \le u_0 = 1 \le 2$ محققة.

نفرض صحة القضية من أجل n :

$0 \le u_n \le 2$

نثبت صحة القضية من أجل $n+1$:

$0 \le u_{n+1} \le 2$

الإثبات:

من الفرض : $0 \le u_n \le 2$

نضيف (2) . $2 \le 2+u_n \le 4$

الجذر تابع متزايد $\sqrt{2} \le \sqrt{2+u_n} \le \sqrt{4}$

$0 \le u_{n+1} \le 2$ محققة

ب- أثبت أن المتتالية متزايدة تماماً.

$E(n): \quad u_{n+1} > u_n$

من أجل $n=0$: $u_1 = \sqrt{2+u_0} = \sqrt{3} > u_0 = 1$

نثبت صحة القضية من أجل n : $u_{n+1} > u_n$

نثبت صحة القضية من أجل $n+1$: $u_{n+2} > u_{n+1}$

الإثبات: من الفرض: $u_{n+1} > u_n$

نضيف (2) $2+u_{n+1} > 2+u_n$

الجذر تابع متزايد $\sqrt{2+u_{n+1}} > \sqrt{2+u_n}$

محققة $u_{n+2} > u_{n+1}$

$\Leftarrow$ المتتالية متزايدة تماماً.

سؤال: نعرف في حالة عدد طبيعي $n \geq 1$ المقدار

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

① احسب S_1 و S_2 و S_3 و S_4 ثم عبّر عن S_{n+1} بدلالة S_n و n

② اثبت بالتدريج أنه في حالة أية عدد طبيعي $n \geq 1$

لدينا: $$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

① الحل: $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

$S_1 = 1^2 = 1$

$S_2 = 1^2 + 2^2 = 5$

$S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$

$S_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$

عبّر عن S_{n+1} بدلالة S_n و n :

$$S_{n+1} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2$$

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$$

②- أثبت بالتراجع أنه في حال أية عدد طبيعي $n \geq 1$ لدينا:

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

من أجل $n=1$

$$P_1 = S_1 = 1$$

$$P_2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{2\times 3}{6} = 1$$

محققة من أجل $n=1$ ، $P_1 = P_2$

نفرض صحتها من أجل n : $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

نثبت صحتها من أجل $n+1$:

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+1)(2n+3)}{6}$$

الإثبات:

$$P_1 = S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$$

$$S_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{(n+1)^2}{1}$$

$$S_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6}$$

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)[2n^2+n+6n+6]}{6}$$

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)[2n^2+7n+6]}{6}$$

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+1)}{6}$$

محققة

$$2n^2+7n+6=0$$

$$\Delta = b^2-4ac$$

$$\Delta = 49-48 = 1 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 1 \Rightarrow n_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7+1}{4}$$

$$n_1 = \frac{-6}{4} = \boxed{-\frac{3}{2}}$$

$$n_2 = \frac{-7-1}{4} = -\frac{8}{4} = \boxed{-2}$$

تحليل:

$$a(n-n_1)(n-n_2)$$

$$2\left(n+\frac{3}{2}\right)(n+2)$$

$$(2n+3)(n+2)$$

ليكن $x > -1$ في حالة عدد طبيعي n نرمز $E(n)$ إلى

المتراجحة $(1+x)^n \geq 1+nx$. أثبت أن المتراجحة $E(n)$ محققة أياً كان العدد الطبيعي n .

الحل: $x > -1$ ، نرمز $E(n)$ للمتراجحة $(1+x)^n \geq 1+nx$

- نثبت صحة القضية من أجل $n=0$

$$b_1 = (1+x)^0 = 1$$

$$b_2 = 1+(0)x = 1$$

$\Rightarrow b_1 = b_2$ محققة.

- نفرض صحة القضية من أجل n :

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

- نثبت من أجل $n+1$:

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$$

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+nx+x$$

الإثبات: من الفرض:

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

بما أن $x > -1 \Leftarrow x+1>0$

نضرب الطرفين بـ $(1+x)$

$$(1+x)(1+x)^n \geq (1+nx)(1+x)$$

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+x+nx+nx^2$$

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+nx^2+(1+n)x$$

ولأن $1 + nx^2 + (1+n)x > 1 + nx + x$

$\Rightarrow (1+x)^{n+1} > 1 + nx + x$

محققة أيّاً كانت n من $\mathbb{N}$.