

الجزء الأول

الجلسة الأولى، المتاليات

تعريف المتالية (1)

(2) طريقة التعبير عن المتالية ثلاث طرق

(3) دراسة اطراد المتالية أربع طرق

(4) أنواع المتاليات

(أ) حسابية

(ب) هندسية



$$u_{2n-3} = 2(2n-3) + 5$$

$$= u_{2n-3} \text{ (عبر عن)}$$

$$u_{2n-3} = 4n - 1$$

مثال (2)

$$u_n = \frac{n+1}{n+2}$$

$$u_0 = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2}$$

$$u_1 = \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3}$$

$= u_{n+1}$ (عبر عن)

$$u_{n+1} = \frac{n+1+1}{n+1+2} = \frac{n+2}{n+3}$$

$$u_{n+2} = \frac{n+2+1}{n+2+2} = \frac{n+3}{n+4}$$

$= u_{n+2}$ (عبر عن)

نعر عن متالية باسندة تدريس

$$u_{n+a} = f(u_n)$$

$$u_0 = a \text{ شرط البدء}$$

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - 1 \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

مثال

أجب u_1, u_2, u_3, u_4

$$\begin{aligned}
 u_1 &= 2u_0 - 1 = 2(2) - 1 = 3 \\
 u_2 &= 2u_1 - 1 = 2(3) - 1 = 5 \\
 u_3 &= 2u_2 - 1 = 2(5) - 1 = 9 \\
 u_4 &= 2u_3 - 1 = 2(9) - 1 = 17
 \end{aligned}$$

2 طريقة صيغة

$$\begin{cases}
 u_{n+1} = \frac{1}{u_n} \\
 u_0 = 2
 \end{cases}$$

مثال 2

حسب u_4, u_3, u_2, u_1

$$u_1 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{2}$$

$$u_2 = \frac{1}{u_1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$u_3 = \frac{1}{u_2} = \frac{1}{2}$$

$$u_4 = \frac{1}{u_3} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

(الطريقة الثالثة)

تحويل المتتالية إلى تابع عددي $f(x)$ وحساب $f(x)$

$$u_n = 5n + 2 \Rightarrow f(x) = 5x + 2$$

$$u_0 \Rightarrow f(0) = 2$$

$$u_1 \Rightarrow f(1) = 7$$

التعبير عن المتتالية

تحويل متتالية إلى
تابع ومعاكسة
عند u_0

طريقة تكريرية

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

$$u_0 = a$$

$u_n = f(n)$
 كتابة u_n بدلالة n

دراسة إطراد متتالية ((تزايد - تناقص - ثبات))

$u_{n+1} > u_n$

متتالية قزائرية تماماً

$u_{n+1} \gg u_n$

قزائرية

$u_{n+1} < u_n$

متناقصة تماماً

$u_{n+1} \leq u_n$

متناقصة

$u_{n+1} = u_n$

ثابتة

نعتمد الإطراد على المقارنة بين u_{n+1} و u_n

دراسة إطراد متتالية

طريقة (1)

نوجد أولاً u_{n+1} باستبدال n بـ $n+1$
 ثم نطرح المتحدين $u_{n+1} - u_n$ ونقارن الناتج بالـ صفر.

$$u_{n+1} - u_n = 0$$

ثابتة

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

تناقصية تماماً

$$u_{n+1} - u_n > 0$$

تزايدية تماماً

* مثال 1 ادرس اطراد متتالية .

$$u_n = 3n + 4$$

$$u_{n+1} = 3(n+1) + 4 = 3n + 3 + 4 = 3n + 7$$

$$u_{n+1} - u_n = 3n + 7 - 3n - 4 = 3 > 0$$

تزايدية تماماً

$$u_n = -2n + 2$$

$$u_{n+1} = -2(n+1) + 2$$
$$= -2n - 2 + 2$$

$$u_{n+1} - u_n = -2n + 2n - 2 = -2 < 0$$

تناقصية تماماً

$$u_n = \frac{n+1}{n+2}$$

$$u_{n+1} = \frac{n+2}{n+3}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2}$$

(n+2) (n+3)

$$= \frac{(n+2)^2}{(n+2)(n+3)} - \frac{(n+1)(n+3)}{(n+3)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2 + 4n + 4}{(n+2)(n+3)} - \frac{n^2 + 3n + n + 3}{(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{n^2 + 4n + 4 - n^2 - 3n - n - 3}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{(n+2)(n+3)} > 0$$

متزايدة تماماً

طريقة (2)

لا تستخدم هذه الطريقة
إلا إذا كانت متكرر
المسألة عويصة
تماماً

متزايدة تماماً

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$

متناقصة تماماً

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

ثابتة

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$$

ادرس إشارات متسلسلة

مثال

$$u_n = 2^n$$

$$u_{n+1} = 2^{n+1} = 2^n \cdot 2$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^n \cdot 2}{2^n} = 2 > 1$$

متزايدة تماماً

تماماً

ادرس اطرادها (مثال 2)

$$u_n = \frac{2}{n^2}$$

$$u_{n+1} = \frac{2}{(n+1)^2}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2}{(n+1)^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{2n^2}{2(n+1)^2} = \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 < 1$$

متناقصة تماماً

كل كسر بسطه

أصغر من مقامه

هو كسر أقل من 1

طريقة 3: تحويل متسلسلة إلى تابع $f(x)$ واعتماد المشتق $f'(x)$ لدراسة اطرادها.

متزايدة تماماً

$$f'(x) > 0$$

متناقصة تماماً

$$f'(x) < 0$$

ثابتة

$$f'(x) = 0$$

$$u_n = 3n + 4$$

$$f(x) = 3x + 4$$

$$f'(x) = 3 > 0$$

متزايدة

7

دراسة إطراد متتالية

تحويل إلى تابع
و اعتماد
 $f(x)$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$$

$$u_{n+1} - u_n > 0$$

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

$$u_{n+1} - u_n = 0$$

أنواع المتتالية

للمتتالية الحسابية: كل حد فيها يتبع عن سابقه في إضافة عدد معين r
يسمى أساس المتتالية الحسابية

1, 2, 3, 4, 5

الأعداد الطبيعية

متتالية حسابية أساسها 1

2, 4, 6, 8, 10

الأعداد الزوجية

متتالية حسابية أساسها 2

$$u_{n+1} = u_n + r$$

الصيغة العامة:

$$u_{n+1} - u_n = r = \text{const}$$

ثابت

أي المتتاليتين اللاتيين حسابية

فقال

$$u_n = 3n + 4$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3(n+1) + 4 \\ &= 3n + 3 + 4 \\ &= 3n + 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3n + 7 - 3n - 4 \\ &= 3 > 0 \end{aligned}$$

متساوية أو متساوية 3

$$u_n = 2n^2 + 1$$

$$u_{n+1} = 2(n+1)^2 + 1$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2(n^2 + 2n + 1) + 1 \\ &= 2n^2 + 4n + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2n^2 + 4n + 3 - 2n^2 - 1 \\ &= 4n + 2 \end{aligned}$$

ليس متساوية

يمكن معرفة الأعداد r

$u_m \leftarrow u_n$
 $u_p \leftarrow$

$$r = \frac{u_m - u_p}{m - p}$$

متساوية u_n

$$u_7 = 12$$

$$u_4 = 3$$

أضرب r

مثال

$$r = \frac{u_7 - u_4}{7 - 4} = \frac{12 - 3}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

حساب r

$$u_{10} = 35$$

$$u_3 = 7$$

مثال 2 حساب u_n

$$r = \frac{u_{10} - u_3}{10 - 3} = \frac{35 - 7}{7} = \frac{28}{7} = 4$$

حساب r

$$u_7 = 14$$

$$u_3 = 5$$

حساب u_n

مثال

$$r = \frac{u_7 - u_3}{7 - 3} = \frac{14 - 5}{4} = \frac{9}{4} = 2.25$$

حساب أساساً $\frac{9}{4}$

يمكن معرفة أي حد آخر

إذا علم منا r و u_p

$$u_m = u_p + (m - p)r$$

حساب u_7

$$r = 3$$

$$u_2 = 5$$

حساب u_n

مثال 3

$$u_7 = u_2 + (7-2)r$$

$$= 5 + 5 \times 3 = 20$$

u_{20} (أحد) - 3 أساساً \leftarrow حسابية u_n

$$u_8 = 4$$

$$u_{20} = u_8 + (20-8)r$$

$$u_{20} = 4 + (12)(3)$$

$$u_{20} = 4 - 36 = -32$$

تحويل u_n (حسابية من صيغة فردية إلى كتابة u_n بدلالة n)

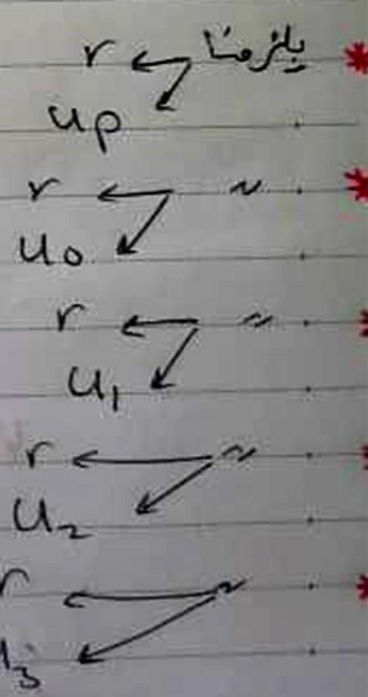
$$u_n = u_p + (n-p)r$$

$$u_n = u_0 + n \cdot r$$

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

$$u_n = u_2 + (n-2)r$$

$$u_n = u_3 + (n-3)r$$



(كتب u_n بدلالة n)

5 أساساً

$$u_1 = -2$$

u_n حسابية

$$U_n = U_1 + (n-1)r$$

$$= -2 + 5n - 5$$

$$U_n = 5n - 7$$

اكتب U_n بدلالة n

$$r = 3$$

$$U_2 = 5$$

U_n صابية

$$U_n = U_2 + (n-2)r$$

$$U_n = 5 + 3n - 6$$

$$U_n = 3n - 1$$

ثلاث حدود متوالية a, b, c

$$b = \frac{a+c}{2}$$

$$U_2 = \frac{U_1 + U_3}{2}$$

$$U_1 \quad U_2 \quad U_3$$

2 و 4 و 6 و 8 و 10 ...

مثال

قانون جمع الحدود متوالية من الح n ابي

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$$

$$S = \frac{(\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}) \times \text{عدد الحدود}}{2}$$

$$S = \frac{n(U_1 + U_n)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 10$$

سوال

$$S = 10 \left[\frac{1+10}{2} \right] = 5(11) = 55$$

$$1 + 2 + \dots + 20$$

$$S = 20 \left[\frac{1+20}{2} \right] = 10 \times 21 = 210$$

$$S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + 3 + \dots + 10$$

$$S = 20 \left[\frac{\frac{1}{2} + 10}{2} \right] = 10 \times 10,5$$

$$S = 105$$

نضرب طرفي الماداة بـ 2

طريقة 2

$$2S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 20$$

$$= 20 \left[\frac{1+20}{2} \right]$$

$$2S = 210$$

$$S = \frac{210}{2} = 105$$

$$S = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1 + \frac{5}{4} + \frac{6}{4} + \frac{7}{4} + 2 + \dots + 10$$

$$S = 40 \left(\frac{\frac{1}{4} + 10}{2} \right) = 20 \left(\frac{41}{4} \right)$$

$$S = 205$$

طريقة (2) ضرب بـ 4

$$4S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + \dots + 40$$

$$= 40 \left(\frac{1 + 40}{2} \right)$$

$$4S = 20(41) \Rightarrow S = 5(41) = 205$$

متتالية هندسية:

كل حد فيها ينتج عن سابقه بـ ضربته بعدد معين q
(يسمى أساس المتتالية الهندسية)

$$U_{n+1} = U_n \cdot q \quad \text{الصفة الرابعة}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = q = \text{const} \quad \text{نسبة أن } U_n \text{ هندسية}$$

$$U_n = 2^n \quad \text{مثال 11}$$

$$U_{n+1} = 2^{n+1} = 2^n \cdot 2$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^n \cdot 2}{2^n} = 2$$

هندسية أساس 2

$$u_n = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}$$

أثبت أنها هندسية

مثال 2

$$u_{n+1} = \frac{2^{n+2}}{3^{n+3}} = \frac{2^n \cdot 2^2}{3^n \cdot 3^3} = \frac{2^n \times 4}{3^n \times 27}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^n \times 4}{3^n \times 27}}{\frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}} = \frac{2^n \times 4 \times 3^{n+2}}{3^n \times 27 \times 2^{n+1}} = \frac{2}{3}$$

هندسية (أساس $\frac{2}{3}$)

u_n هندسية $\left\{ \begin{array}{l} u_m \\ u_p \end{array} \right.$ يمكن معرفة (أساس q)

$$q = \frac{u_m}{u_p} \quad m-p$$

u_n هندسية $\left. \begin{array}{l} u_7 = 81 \\ u_4 = 3 \end{array} \right\}$ أجب q

مثال

$$q = \frac{u_7}{u_4} = \frac{81}{3} = 27 = 3^3 \Rightarrow q = 3$$

u_n هندسية (أساس موجب لدينا) $u_4 = 25$ و $u_6 = 100$ مثال

أجب q

$$q = \frac{u_6}{u_4} = \frac{100}{25} = 4$$

$$q^2 = \frac{100}{25} = 4 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} q = 2 \\ q = -2 \end{cases} \text{ حرفت}$$

u_n هيسيت علمت ز سلسله q بكن معرفه زي حد آخر

$$u_m = u_p \cdot q^{m-p}$$

u_p

؛ u_{10} احسا $u_6 = 2$ و $q = 2$ هيسيت u_n

مثال:

$$u_{10} = u_6 \cdot q^{10-6} = 2(2)^4 = 2 \times 16 = 32 \quad \boxed{192}$$

؛ u_8 احسا $u_5 = 4$ و $q = 3$ هيسيت u_n

مثال:

$$u_8 = u_5 \cdot q^{8-5} = 4(3)^3 = 4 \times 27 = 108$$

$$u_n = u_p \cdot q^{n-p}$$

كتابة u_n هيسيت بلكل n .

$$u_n = u_0 \cdot q^n$$

$$\begin{matrix} q \\ u_0 \end{matrix} \rightarrow$$

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$$

$$\begin{matrix} q \\ u_1 \end{matrix} \rightarrow$$

$$u_n = u_2 \cdot q^{n-2}$$

$$\begin{matrix} q \\ u_2 \end{matrix} \rightarrow$$

مثال U_n هندسية $U_1 = -2$ و $q = 2$ اكتب U_n بعبارة n :

$$U_n = U_1 \cdot q^{n-1} = -2(2)^{n-1}$$

إذا كانت a, b, c ثلاث أعداد متوالية $b^2 = a \cdot c$

$$b = a \cdot q$$

$$c = a \cdot q^2$$

لذا

قانون جمع

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

$$S = U_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1}$$

$$S = 1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

$$1 + \left[\frac{1}{2}\right]^1 + \left[\frac{1}{4}\right]^2 + \left[\frac{1}{8}\right]^3 + \dots + \left[\frac{1}{2}\right]^{n+1}$$

$$S = 1 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}$$

$$S = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$u_4 = 32 \quad \& \quad u_1 = 4$$

هذه سوية

مثال

1. احسب q

2. اكتب u_n بدلالة n

3. احسب u_6

4. احسب $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_6$

$$q^3 = \frac{u_4}{u_1} \Rightarrow q^3 = \frac{32}{4} = 8 = 2^3$$

$$\Rightarrow q = 2$$

$$q = 2 \leftarrow u_n$$
$$u_1 = 4 \leftarrow$$

$$u_n = u_1 q^{n-1}$$

$$u_n = 4 (2)^{n-1} = 4 (2^n \times \frac{1}{2})$$
$$= 2 \times 2^n = 2^{n+1}$$

$$u_6 = 2^{6+1} = 2^7 = 128$$

$$S = u_1 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 4 \frac{1-2^7}{1-2}$$

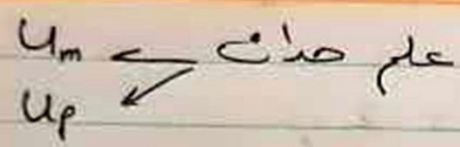
$$S = -4 [1 - 2^7] = -4 [-127] = 508$$

الاجسامية

كل عدد فيل ينتج عن سابقه بعد ضربه بعدد حقيقي q يسمى أساساً هذه المتتالية

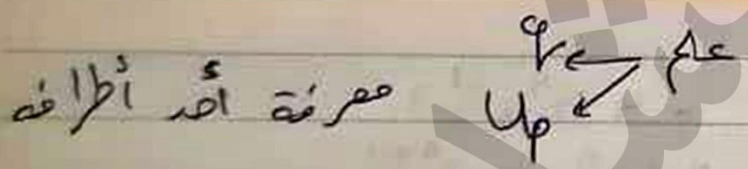
إثبات أنل اجسامية

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = r = \text{كابت}$$



معرفة الأساس q

$$q = \frac{U_m}{U_p}$$



$$U_m = U_p (q)^{m-p}$$

كتابة U_n بدلالة n

$U_n = U_0 q^n$ ← علم q
 U_0 ←

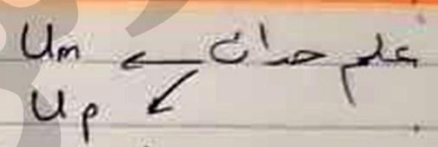
$U_n = U_1 (q)^{n-1}$ ← علم q
 U_1 ←

الاجسامية

كل عدد فيل ينتج عن سابقه بإضافة عدد حقيقي r يسمى أساساً هذه المتتالية

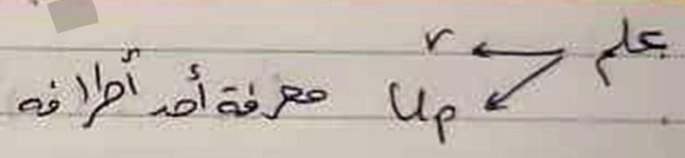
إثبات أنل اجسامية

$$U_{n+1} - U_n = r = \text{كابت}$$



معرفة الأساس r

$$r = \frac{U_m - U_p}{m - p}$$



$$U_m = U_p + (m-p)r$$

كتابة U_n بدلالة n

$U_n = U_0 + n.r$ ← علم r
 U_0 ←

$U_n = U_1 + (n-1)r$ ← علم r
 U_1 ←

قانون الجمع :

$$S = 1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

ا، ب و ج نقاط متوالية

$$b = a \cdot q \quad \text{و} \quad b^2 = a \cdot c$$
$$c = a \cdot q^2$$

قانون الجمع :

$$S = n \frac{(u_p + u_m)}{2}$$

ا، ب و ج نقاط متوالية

$$b = \frac{a + c}{2}$$