# الجزء الأول

## الجلسة الأولى: المتتاليات

1) تعريف المتتالية:

2) طريقة التعبير عن المتتالية: ثلاث طرق

3) دراسة اطراد المتتالية: أربع طرق

4) أنواع المتتاليات

أ) حسابية

ب) هندسية

$$U_{2n-3} = 2(2n-3)+5$$ : $U_{2n-3}$ عبّر عن

$$U_{2n-3} = 4n-1$$

مثال (2) :

$$U_n = \frac{n+1}{n+2}$$

$$U_0 = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2}$$

$$U_1 = \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3}$$

: $U_{n+1}$ عبّر عن

$$U_{n+1} = \frac{n+1+1}{n+1+2} = \frac{n+2}{n+3}$$

: $U_{n+2}$ عبّر عن

$$U_{n+2} = \frac{n+2+1}{n+2+2} = \frac{n+3}{n+4}$$

نعبر عن متتالية بصيغة تدريجية

$$\begin{cases} U_{n+a} = f(U_n) \\ U_0 = a \end{cases}$$ شرط البدء

مثال

$$\begin{cases} U_{n+1} = 2U_n - 1 \\ U_0 = 2 \end{cases}$$

أحسب $U_1$ ، $U_2$ ، $U_3$ ، $U_4$ :

$$u_1 = 2u_0 - 1 = 2(2) - 1 = 3$$
$$u_2 = 2u_1 - 1 = 2(3) - 1 = 5$$
$$u_3 = 2u_2 - 1 = 2(5) - 1 = 9$$
$$u_4 = 2u_3 - 1 = 2(9) - 1 = 17$$

$\boxed{2}$ نهاية صفحة

مثال 3

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

احسب $u_1$ ، $u_2$ ، $u_3$ ، $u_4$ :

$$u_1 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{2}$$
$$u_2 = \frac{1}{u_1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$
$$u_3 = \frac{1}{u_2} = \frac{1}{2}$$
$$u_4 = \frac{1}{u_3} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

## الطريقة الثالثة

تحويل المتتالية إلى تابع عددي $f(x)$ وحساب $f(a)$ .

$$u_n = 5n + 2 \Rightarrow F(x) = 5x + 2$$
$$u_0 \Rightarrow F(0) = 2$$
$$u_1 \Rightarrow F(1) = 7$$

## التعبير عن المتتالية

- $u_n = f(n)$ كتابة $u_n$ بدلالة $n$
- صيغة تراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$ ، $u_0 = 9$
- تحويل متتالية إلى تابع وحساب $f(0)$ عند $u_0$

دراسة إطراد متتالية (تزايد - تناقص - ثبات)

- متتالية متزايدة تماماً: $u_{n+1} > u_n$
- متزايدة: $u_{n+1} \geq u_n$
- متناقصة تماماً: $u_{n+1} < u_n$
- متناقصة: $u_{n+1} \leq u_n$
- ثابتة: $u_{n+1} = u_n$
- نعتمد الإطراد على المقارنة بين $u_n$ و $u_{n+1}$ .
- دراسة إطراد متتالية

### طريقة (1)

نوجد أولاً $u_{n+1}$ باستبدال كل $n$ بـ $n+1$

ثم نطرح المقدارين $u_{n+1} - u_n$ ونقارن الناتج بالصفر.

$u_{n+1} - u_n > 0$ متزايدة تماماً

$u_{n+1} - u_n < 0$ متناقصة تماماً

$u_{n+1} - u_n = 0$ ثابتة

* مثال 1 ادرس إطراد متتالية .

$u_n = 3n + 4$

$u_{n+1} = 3(n+1) + 4 = 3n + 3 + 4 = 3n + 7$

$u_{n+1} - u_n = 3n + 7 - 3n - 4 = 3 > 0$

متزايدة تماماً .

مثال 2

$u_n = -2n + 2$

$u_{n+1} = -2(n+1) + 2$

$= -2n - 2 + 2$

$u_{n+1} - u_n = -2n + 2n - 2 = -2 < 0$

متناقصة تماماً

مثال 3

$u_n = \frac{n+1}{n+2}$

$u_{n+1} = \frac{n+2}{n+3}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2}$

$(n+2) \qquad (n+3)$

$$= \frac{(n+2)^2}{(n+2)(n+3)} - \frac{(n+1)(n+3)}{(n+3)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2+4n+4}{(n+2)(n+3)} - \frac{n^2+3n+n+3}{(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{n^2+4n+4-n^2-3n-n-3}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{(n+2)(n+3)} > 0$$

متزايدة تماماً.

طريقة (2)

لا تستخدم هذه الطريقة إلا إذا كانت حدود المتتالية موجبة تماماً

$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ متزايدة تماماً

$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ متناقصة تماماً

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ ثابتة

مثال: ادرس إطراد متتالية،

$$u_n = 2^n$$

$$u_{n+1} = 2^{n+1} = 2^n . 2^1$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^n . 2}{2^n} = 2 > 1$$

متزايدة تماماً.

مثال (2) ادرس اطرادها

$$U_n = \frac{2}{n^2}$$

$$U_{n+1} = \frac{2}{(n+1)^2}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{2}{(n+1)^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{2n^2}{2(n+1)^2} = \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 < 1$$ متناقصة تماماً

كل كسر بسطه أصغر من مقامه هو كسر أقل من 1

طريقة 3: تحويل متتالية إلى تابع $f(x)$ واعتماد المشتق $f'(x)$ لدراسة اطرادها.

$f'(x) > 0$ متزايدة تماماً

$f'(x) < 0$ متناقصة تماماً

$f'(x) = 0$ ثابتة

$$U_n = 3n + 4$$

$$F(x) = 3x + 4$$

$$F'(x) = 3 > 0$$ متزايدة

## دراسة اطراد متتالية :

تحويل إلى تابع واعتماد $f'(x)$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$$

$u_{n+1} - u_n > 0$

$u_{n+1} - u_n < 0$

$u_{n+1} - u_n = 0$.

## أنواع المتتاليات

المتتالية الحسابية : كل حد فيها ينتج عن سابقه في إضافة عدد حقيقي r

يسمى أساس المتتالية الحسابية

مثال

الأعداد الطبيعية $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

متتالية حسابية أساسها $\boxed{1}$

الأعداد الزوجية $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$ حسابية أساسها 2

الصيغة العامة : $u_{n+1} = u_n + r$

أثبت أنها حسابية $u_{n+1} - u_n = r = \text{const}$ ثابت

مثال أي المتتاليتين الآتيتين حسابية

$$U_n = 3n + 4$$

$$U_{n+1} = 3(n+1) + 4$$
$$= 3n + 3 + 4$$
$$= 3n + 7$$

$$U_{n+1} - U_n = \cancel{3n} + 7 - \cancel{3n} - 4$$
$$= 3 > 0$$

حسابية أساسها 3

$$U_n = 2n^2 + 1$$

$$U_{n+1} = 2(n+1)^2 + 1$$

$$U_{n+1} = 2(n^2 + 2n + 1) + 1$$
$$= 2n^2 + 4n + 3$$

$$U_{n+1} - U_n = \cancel{2n^2} + 4n + 3 - \cancel{2n^2} - 1$$
$$= 4n + 2$$

ليست حسابية

$U_n$ حسابية $\rightarrow u_m$, $u_p$

يمكن معرفة الأساس $r$

$$r = \frac{u_m - u_p}{m - p}$$

مثال

$U_n$ حسابية

$u_7 = 12$

$u_9 = 3$

أحسب $r$

$$r = \frac{U_7 - U_4}{7-4} = \frac{12-3}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

مثال 2

$U_n$ حسابية $U_{10} = 35$ ، $U_3 = 7$ إذا احسب $r$

$$r = \frac{U_{10} - U_3}{10-3} = \frac{35-7}{7} = \frac{28}{7} = 4$$

مثال

$U_n$ حسابية $U_7 = 14$ ، $U_3 = 5$ احسب $r$

$$r = \frac{U_7 - U_3}{7-3} = \frac{14-5}{4} = \frac{9}{4} = 2.25$$

حسابية أساسها $\frac{9}{4}$

إذا علم منها $r$ ، $U_p$ يمكن معرفة أي حد آخر

$$U_m = U_p + (m-p)\,r$$

مثال 1

$U_n$ حسابية $r = 3$ ، $U_2 = 5$ احسب $U_7$

$u_7 = u_2 + (7-2)\,r$

$= 5 + 5 \times 3 = 20$

$u_n$ حسابية ← أساسها $-3$ ، $u_8 = 4$ أحسب $u_{20}$

$u_{20} = u_8 + (20-8)\,r$

$u_{20} = 4 + (12)(-3)$

$u_{20} = 4 - 36 = -32$

تحويل الحسابية $u_n$ من صيغة عامة إلى كتابة $u_n$ بدلالة $n$.

$u_n = u_p + (n-p)\,r$ يلزمنا $r$ ، $u_p$

$u_n = u_0 + n \cdot r$ " $r$ ، $u_0$

$u_n = u_1 + (n-1)\,r$ " $r$ ، $u_1$

$u_n = u_2 + (n-2)\,r$ " $r$ ، $u_2$

$u_n = u_3 + (n-3)\,r$ " $r$ ، $u_3$

$u_n$ حسابية أساسها $5$ ، $u_1 = -2$ أكتب $u_n$ بدلالة $n$

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$
$$= -2 + 5n - 5$$
$$u_n = 5n - 7$$

$u_n$ حسابية $\left.\begin{array}{l} r = 3 \\ u_2 = 5 \end{array}\right\}$ اكتب $u_n$ بدلالة $n$.

$$u_n = u_2 + (n-2)r$$
$$u_n = 5 + 3n - 6$$
$$u_n = 3n - 1$$

$a, b, c$ ثلاث حدود متوالية

$$b = \frac{a+c}{2}$$

$u_1 \quad u_2 \quad u_3$

$$u_2 = \frac{u_1 + u_3}{2}$$

مثال: $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$

قانون جمع الحدود متوالية في الحسابية

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

$$S = \text{عدد الحدود} \; \frac{(\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول})}{2}$$

$$S = n \, \frac{(u_1 + u_n)}{2}$$

مثال

$1+2+3+4+\dots\dots+10$

$$S = 10\left[\frac{1+10}{2}\right] = 5(11) = 55$$

$1+2+\dots+20$

$$S = 20\left[\frac{1+20}{2}\right] = 10\times 21 = 210$$

$$S = \frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+2+\frac{5}{2}+3+\dots+10$$

$$S = 20\left[\frac{\frac{1}{2}+10}{2}\right] = 10\times 10.5$$

$$S = 105$$

طريقة 2 نضرب طرفي المساواة بـ 2.

$$2S = 1+2+3+4+5+\dots+20$$

$$= 20\left[\frac{1+20}{2}\right]$$

$$2S = 210$$

$$S = \frac{210}{2} = 105$$

$$S = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+1+\frac{5}{4}+\frac{6}{4}+\frac{7}{4}+2+\dots+10$$

$$S = \frac{40\left(\frac{1}{4} + 10\right)}{2} = 20\left(\frac{41}{4}\right)$$

$$S = 205$$

طريقة ② نضرب بـ 4

$$4S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + \dots + 40$$

$$= \frac{40\,(1 + 40)}{2}$$

$$4S = 20\,(41) \Rightarrow S = 5\,(41) = 205$$

متتالية هندسية:

كل حد فيها ينتج عن سابقه بضربه بعدد حقيقي $q$ (يسمى أساس متتالية هندسية)

الصيغة التراجعية $U_{n+1} = U_n \cdot q$

أثبت أن $U_n$ هندسية $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q = const$ ثابت

مثال ① $U_n = 2^n$ أثبت أنها هندسية

$$U_{n+1} = 2^{n+1} = 2^n \cdot 2$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^n \cdot 2}{\cancel{2^n}} = 2$$

هندسية أساسها ②

مثال ③ أثبت أن هندسية $U_n = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}$

$$U_{n+1} = \frac{2^{n+2}}{3^{n+3}} = \frac{2^n \cdot 2^2}{3^n \cdot 3^3} = \frac{2^n \times 4}{3^n \times 27}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{2^n \times 4}{3^n \times 27}}{\frac{2^n \cdot 2}{3^n \cdot 9}} = \frac{2^n \times 4 \times 3^n \times 9}{3^n \times 27 \times 2^n \times 2} = \frac{2}{3}$$

هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ ،

$U_n$ هندسية $\begin{cases} U_m \\ U_p \end{cases}$ يمكن معرفة أساسها $q$

$$q^{m-p} = \frac{U_m}{U_p}$$

مثال: $U_n$ هندسية $\begin{cases} U_7 = 81 \\ U_4 = 3 \end{cases}$ أحسب $q$

$$q^{7-4} = \frac{U_7}{U_4} = \frac{81}{3} = 27 = 3^3 \Rightarrow q = 3$$

مثال: $U_n$ هندسية أساسها موجب لدينا $U_4 = 25$ , $U_6 = 100$

أحسب $q$

$$q^{6-4} = \frac{U_6}{U_4}$$

$$q^2 = \frac{100}{25} = 4 \Rightarrow \begin{cases} q = 2 \\ q = -2 \text{ مرفوض} \end{cases}$$

$U_n$ هندسية علم أساسها $q$ و $U_p$ يمكن معرفة أي حد آخر

$$U_m = U_p \cdot q^{m-p}$$

مثل: $U_n$ هندسية $q = 2$ ، $U_6 = 2$ احسب $U_{10}$ :

$$U_{10} = U_6\, q^{10-6} = 12(2)^4 = 12 \times 16 = \boxed{192}$$

مثال: $U_n$ هندسية $q = 3$ ، $U_5 = 4$ احسب $U_8$ :

$$U_8 = U_5\, q^{8-5} = 4(3)^3 = 4 \times 27 = 108$$

كتابة $U_n$ هندسية بدلالة $n$.

$$U_n = U_p \cdot q^{n-p}$$

$q$ ، $U_0$ > $U_n = U_0\, q^n$

$q$ ، $U_1$ > $U_n = U_1\, q^{n-1}$

$q$ ، $U_2$ > $U_n = U_2\, q^{n-2}$

مثال $U_n$ هندسية $q=2$ ، $U_1=-2$ ، اكتب $U_n$ بدلالة n :

$$U_n = U_1 q^{n-1} = -2(3)^{n-1}$$

إذا كانت $a, b, c$ ثلاث حدود متتالية .

$$b^2 = a \cdot c$$

$$b = a \cdot q$$

$$c = a \cdot q^2$$

عام

قانون جمع :

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

$$S = U_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1}$$

$$S = 1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

مثال

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

$$1 + \left[\frac{1}{2}\right]^1 + \left[\frac{1}{4}\right]^2 + \left[\frac{1}{8}\right]^3 \dots + \left[\frac{1}{2}\right]^{n+1}$$

$$S = 1 \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}$$

$$S = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

مثال هندسية $u_4 = 32$ ، $u_1 = 4$

1. احسب $q$
2. اكتب $u_n$ بدلالة $n$.
3. احسب $u_6$
4. احسب $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_6$

الحل

$$q^{4-1} = \frac{u_4}{u_1} \Rightarrow q^3 = \frac{32}{4} = 8 = 2^3$$

$$\Rightarrow q = 2$$

مثال 2 $u_n$ ← $q = 2$ ، $u_1 = 4$

$$u_n = u_1 \, q^{n-1}$$

$$u_n = 4(2)^{n-1} = 4(2^n \times 2^{-1})$$
$$= 2 \times 2^n = 2^{n+1}$$

مثال 2 احسب $u_6$ :

$$u_6 = 2^{6+1} = 2^7 = 128$$

$$S = u_1 \frac{1-q^6}{1-q} = 4 \frac{1-2^6}{1-2}$$

$$S = -4[1-4^6] = -4[-63] = \boxed{252}$$

## الحسابية

كل حد فيها ينتج عن سابقه بإضافة عدد حقيقي r ويسمى أساس هذه المتتالية.

### إثبات أنها حسابية

$U_{n+1} - U_n = r =$ ثابت

علم حدان $U_m$ ، $U_p$ ← معرفة الأساس r

$$r = \frac{U_m - U_p}{m - p}$$

علم r ، $U_p$ ← معرفة أحد أطرافه

$$U_m = U_p + (m-p)\,r$$

### كتابة $U_n$ بدلالة n :

r ، $U_0$ → $U_n = U_0 + n.r$

r ، $U_1$ → $U_n = U_1 + (n-1)\,r$

## الهندسية

كل حد فيها ينتج عن سابقه بعد ضربه بعدد حقيقي q يسمى أساس هذه المتتالية

### إثبات أنها هندسية

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = r =$ ثابت

علم حدان $U_m$ ، $U_p$ ← معرفة الأساس q .

$$q = \frac{U_m}{U_p}$$

علم q ، $U_p$ ← معرفة أحد أطرافه

$$U_m = U_p\,(q)^{m-p}$$

### كتابة $U_n$ بدلالة n :

q ، $U_0$ → $U_n = U_0\, q^n$

q ، $U_1$ → $U_n = U_1\,(q)^{n-1}$

قانون الجمع:

$$S = n\,\frac{(U_p + U_m)}{2}$$

a و b و c نقاط متوالية

$$b = \frac{a+c}{2}$$

قانون الجمع:

$$S = 1\,\frac{1-q^n}{1-q}$$

a و b و c نقاط متوالية.

$b^2 = a.c$ عمة $b = a.q$

$c = a.q^2$