السؤال الأول :

احسب كلاً مما يأتي :

1) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x+3} - x$

2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}$

3) $\lim_{x\to-1} \dfrac{1+x+x^2+x^3+x^4+x^5}{1-x^6}$

4) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1+\cos 2x}{2\cos x}$

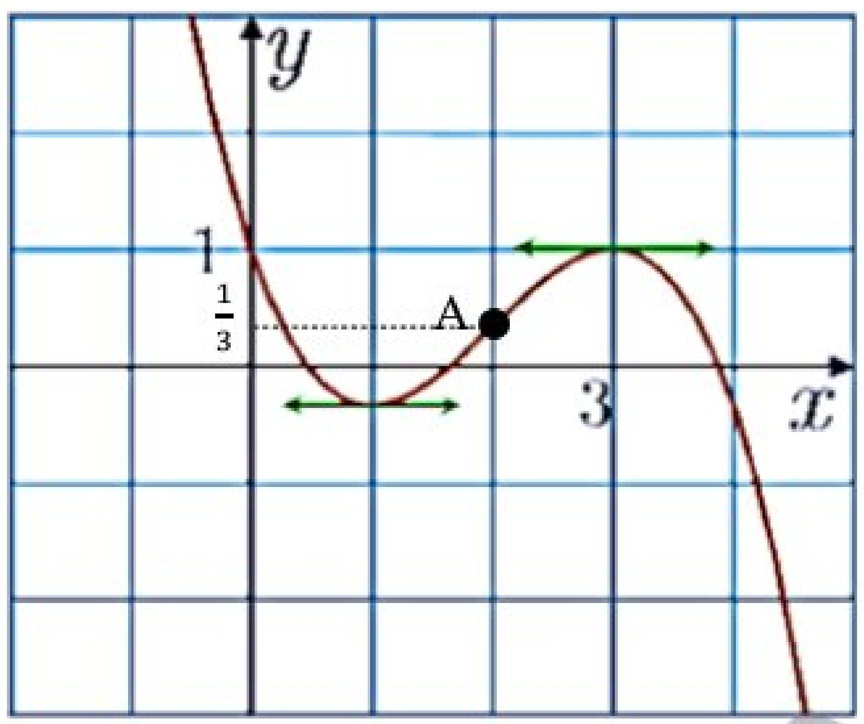
السؤال الثاني :

f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ وفق : $f(x) = \frac{x^2+3x+2+\cos x}{x+2}$

١) تحقق أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب مائل للخط البياني C_f في جوار $+\infty$.

٢) ادرس الوضع النسبي بين C_f و مقاربه على المجال $[\pi, 2\pi]$.

السؤال الثالث :



تأمل في الشكل المجاور الخط البياني لتابع f معرف على $\mathbb{R}$:

١) احسب $f(0)\,, f(3)$.

٢) ما حلول المعادلة $f(x) = 1$ ؟

٣) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

٤) استنتج $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$

٥) أوجد العددين الحقيقيين $a\,, b$ إذا علمت أن :

$$f(x) = ax^3 + 2x^2 - 3x + b$$

٦) عين إحداثيات نقطة تناظر المنحني C_f .

السؤال الرابع :

f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق : $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

١) احسب نهايات التابع عند أطراف مجموعة تعريفه ، واكتب معادلة كل مقارب وجدته .

٢) أوجد A التي تحقق : إذا كان $x > A$ كان $f(x)$ في المجال $]1.95\,, 2.05[$.

السؤال الخامس :

عين قيمة m التي تجعل التابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} & x \neq 3 \\ m & x = 3 \end{cases}$ مستمراً عند 3 .

-انتهت الأسئلة-

السؤال الأول :

1) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+3}-x=\infty-\infty$ حالة عدم تعيين نزيلها بالضرب بالمرافق :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+3}-x=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}-x\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+2x+3}+x}{\sqrt{x^2+2x+3}+x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x+3-x^2}{\sqrt{x^2+2x+3}+x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+2x+3}+x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x(2+\frac{3}{x})}{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})}+x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x(2+\frac{3}{x})}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+x}\right)$$

بما أن $x\to+\infty$ أي $x>0$ ومنه $|x|=+x$:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+3}-x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x(2+\frac{3}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}=1$$

---

2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}=\frac{0}{0}$ حالة عدم تعيين نزيلها

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}=2\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}=2\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\frac{\pi}{4}\sin x-\sin\frac{\pi}{4}\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}$$

حسب القاعدة : $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}=2\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\frac{\pi}{4}\sin x-\sin\frac{\pi}{4}\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}=2\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{x-\frac{\pi}{4}}=2(1)=2$$

لأن :

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

حيث $t=x-\frac{\pi}{4}$

---

3) $\lim_{x\to-1}\frac{1+x+x^2+x^3+x^4+x^5}{1-x^6}=\frac{0}{0}$

حالة عدم تعيين . لدينا $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$ يمثل مجموع حدود متوالية من متتالية هندسية أساسها $q=x$:

$$x^0+x^1+x^2+x^3+x^4+x^5=\frac{1-x^6}{1-x}$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{1+x+x^2+x^3+x^4+x^5}{1-x^6}=\lim_{x\to-1}\frac{1-x^6}{(1-x)(1-x^6)}=\lim_{x\to-1}\frac{1}{(1-x)}=\frac{1}{2}$$

$$4)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2\cos x} = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين نزيلها :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos^2 x}{2\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x = 0$$

السؤال الثاني : ١)

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x+2+\cos x-(x+1)(x+2)}{x+2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x+2+\cos x-x^2-3x-2}{x+2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cos x}{x+2}\right)$$

$$-1 \le \cos x \le +1$$

نقسم على $(x+2)>0$:

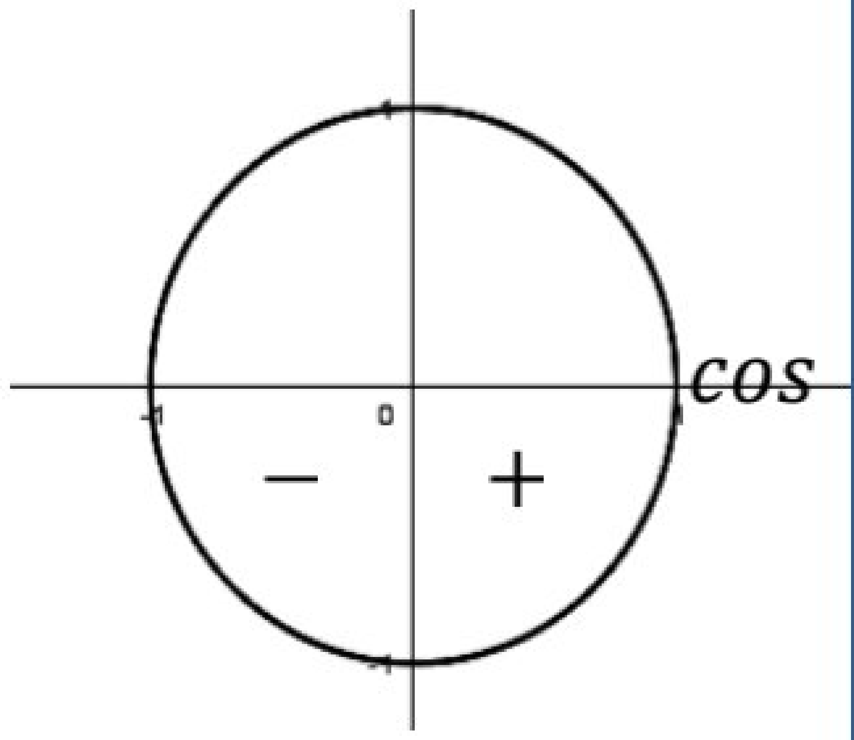
$$\frac{-1}{x+2} \le \frac{\cos x}{x+2} \le \frac{1}{x+2}$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+2}\right) = 0 \\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{x+2}\right) = 0 \end{cases} \ggg \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cos x}{x+2}\right) = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة . أي : $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$ فالمستقيم Δ الذي معادلته $y=x+1$ مقارب مائل للخط البياني C_f في جوار $+\infty$.

٢) $f(x)-y_\Delta = \frac{\cos x}{x+2}$

x	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	$- - - -$	0	$+ + + +$
$x+2$	$+ + + +$		$+ + + +$
$f(x)-y_\Delta$	$- - - -$	0	$+ + + +$
الوضع النسبي	C_f تحت Δ		C_f فوق Δ



ويتقاطع C_f مع مقاربه Δ عند $x=\frac{3\pi}{2}$ أي في النقطة $A(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}+1)$

السؤال الثالث :

١) $f(0)=1 \quad , \quad f(3)=1$

٢) حلول المعادلة $f(x)=1$ هي $x_1=0$ و $x_2=3$.

٣)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad و \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

٤)

$$\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{t\to-\infty} f(t) = +\infty$$

٥) $f(0) = 1 \quad \ggg \quad b = 1$

$$f(3) = 1 \quad \ggg \quad 27a + 18 - 9 + 1 = 1 \quad \ggg \quad a = \frac{-1}{3}$$

٦) إحداثيات نقطة تناظر المنحني C_f : $A(2, \frac{1}{3})$

السؤال الرابع : ١)

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \qquad , \qquad D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 2 \quad , \quad \lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$$

٢)

$f(x)$ في المجال $]1.95 , 2.05[$ أي :

$$1.95 < f(x) < 2.05$$

$$\ggg \quad 1.95 < \frac{2x-2+3}{x-1} < 2.05$$

$$1.95 < \frac{2(x-1)+3}{x-1} < 2.05$$

$$1.95 < 2 + \frac{3}{x-1} < 2.05 \quad \ggg \quad -0.05 < \frac{3}{x-1} < 0.05$$

$$\frac{3}{x-1} < \frac{5}{100}$$

نقلب : $\frac{x-1}{3} > \frac{100}{5}$

$$x - 1 > 3(20) \quad \ggg \quad x > 61$$

$A = 61$ (أو أي عدد أكبر من ٦١)

السؤال الخامس :

يجب تحقق الشرط :

$$f(3) = \lim_{x\to3} f(x)$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to3} f(x) = \lim_{x\to3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2} = \lim_{x\to3} \frac{\cancel{x-3}}{(\cancel{x-3})(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4} \\ f(3) = m \end{cases}$$

إذن $m = \frac{1}{4}$

-انتهى الحل-