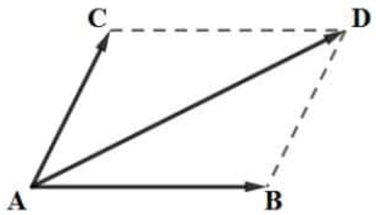
BAC MATHS	مذاكرة (الأشعّة في الفراغ) الدرجة الكاملة : 300	الاسم :

أوّلاً: أجب عن السؤالين الآتيين : (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: $ABDC$ متوازي أضلاع . **المطلوب :**



1) عيّن النقطة M التي تحقّق العلاقة : $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.
2) عبّر عن النقطة D كونها مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقّلة (A,α) ,(B,β),(C,γ) حيث α , β , γ أعداد حقيقيّة يُطلَب تعيينها .

السؤال الثاني: نتأمّل النقطتين $A(0,2,-2)$, $B(2,0,0)$. **المطلوب :**

1) اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.
2) اكتب معادلة الكرة التي قطرها AB .

ثانياً: حل التمرينين الآتيين : (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس لتكن النقاط $A(3,2,1)$, $B(0,2,4)$, $C(1,2,7)$, $D(1,2,0)$. **المطلوب :**

1) أوجد إحداثيّات النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$, $(B,2)$, $(C,3)$, $(D,4)$.
2) حدّد Γ مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ من الفراغ التي تحقّق $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} + 4\overrightarrow{MD}\| = 20$.
3) جد معادلة للمجموعة Γ .

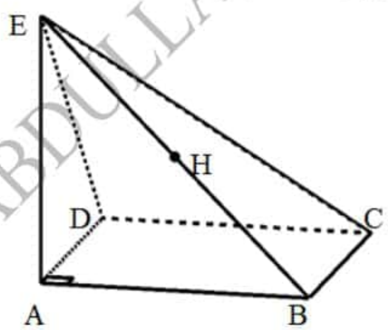
التمرين الثاني: نتأمل في معلم متجانس النقاط : $A(1,1,1)$, $B(0,2,1)$, $C(2,1,2)$, $D(2,3,4)$. **المطلوب :**

1) أثبت أنّ النقاط A , B , C ليست على استقامة واحدة .
2) عيّن العددين الحقيقيّين α , β اللذين يحقّقان : $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ و استنتج أنّ النقاط A , B , C , D تقع في مستوٍ واحد .
3) جد إحداثيّات النقطة N التي تجعل الرباعي $ABNC$ متوازي أضلاع .

ثالثاً: حل المسألة الآتية : (100 درجة)

$(EABCD)$ هرم رباعي رأسه E , قاعدته مربع طول ضلعه 2 , $[AE]$ عمودي على المستوي $(ABCD)$ و $EA = 2$.

H منتصف $[EB]$, نختار المعلم المتجانس $(A ; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} , \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} , \frac{1}{2}\overrightarrow{AE})$. **المطلوب :**



1) عيّن إحداثيات A , B , C , D , E , H .
2) أثبت أنّ معادلة المستوي (EBC) هي $x + z - 2 = 0$.
3) أثبت أنّ المستقيم (AH) عمودي على المستوي (EBC) .
4) احسب حجم الهرم $EABCD$.

-------- انتهت الأسئلة --------

حل مذاكرة الأشعة في الفراغ "أ"

أولاً: السؤال الأول:

1)

$$2\vec{AM} = \vec{AD} + \vec{BC}$$

$$2\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{BC}$$

حسب شال

$$2\vec{AM} = \vec{AC} + \vec{AC}$$

$$2\vec{AM} = 2\vec{AC}$$

$$\boxed{M \equiv C}$$

2) نعلم أنّ:

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$$

$$\vec{AD} = (\vec{AD} + \vec{DB}) + (\vec{AD} + \vec{DC})$$

$$\vec{AD} = 2\vec{AD} + \vec{DB} + \vec{DC}$$

$$\vec{AD} + \vec{DB} + \vec{DC} = \vec{0}$$

$$-\vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC} = \vec{0}$$

فالنقطة D مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقّلة $(A,-1)$, $(B,1)$, $(C,1)$

أي $\alpha = -1 \quad \beta = 1 \quad \gamma = 1$

أو: $\alpha = 1 \quad \beta = -1 \quad \gamma = -1$

وتقبل أي نتيجة صحيحة أخرى.

السؤال الثاني:

1) لتكن النقطة $M(x,y,z)$ التي تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ فهي تحقق:

$$MA = MB$$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2+(z+2)^2} = \sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2}$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 4y + 4 + \cancel{z^2} + 4z + 4 = \cancel{x^2} - 4x + 4 + \cancel{y^2} + \cancel{z^2}$$

$$-4y + 4z + 8 = -4x + 4$$

$$4x - 4y + 4z + 4 = 0$$

$$\boxed{x - y + z + 1 = 0}$$

2)

$$2r = AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2 + (y_B-y_A)^2 + (z_B-z_A)^2}$$

$$= \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}$$

$$\boxed{r = \sqrt{3}}$$

مركز الكرة هي النقطة I منتصف $[AB]$:

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

$$I(1, 1, -1)$$

معادلة الكرة من الشكل:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$$

$$\boxed{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 3}$$

ثانيا : التمرين الأول :

1) $$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C + \delta x_D}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}$$

$$x_G = \frac{(1)(3)+(2)(0)+(3)(1)+(4)(1)}{1+2+3+4}$$

$$x_G = \frac{10}{10} = 1$$

$$y_G = \frac{(1)(2)+(2)(2)+(3)(2)+(4)(2)}{10} = \frac{20}{10} = 2$$

$$z_G = \frac{(1)(1)+(2)(4)+(3)(7)+4(0)}{10} = \frac{30}{10} = 3$$

$$\boxed{G(1,2,3)}$$

2) $$\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \gamma\vec{MC} + \delta\vec{MD} = (\alpha+\beta+\gamma+\delta)\vec{MG}$$

$$\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC} + 4\vec{MD} = 10\vec{MG}$$

$$10\,MG = 20$$

$$MG = 2$$

Γ هي كرة مركزها G ونصف قطرها $r=2$.

3) $$(x-x_G)^2 + (y-y_G)^2 + (z-z_G)^2 = r^2$$

$$\boxed{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4}$$

التمرين الثاني :

1) $\vec{AB}(-1,1,0)$ ، $\vec{AC}(1,0,1)$ ، $\vec{AB} \neq \alpha \vec{AC}$

الشعاعان غير مرتبطين خطيا

فالنقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة.

2) $$\vec{AD} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AC}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\alpha+\beta\\ \alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

بالمطابقة نجد أن: $\alpha = 2$ و $\beta = 3$

محققة: $\beta - \alpha = 3 - 2 = 1$

ومنه $\vec{AD} = 2\vec{AB} + 3\vec{AC}$

الأشعة $\vec{AB}$ ، $\vec{AC}$ ، $\vec{AD}$ مرتبطة خطيا.

فالنقاط A, B, C, D تقع في مستو واحد.

3) $$\vec{AB} = \vec{CN}$$

$$N(x, y, z)$$

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-2\\y-1\\z-2\end{pmatrix}$$

بالمطابقة:

$-1 = x - 2 \Rightarrow x = 1$

$1 = y - 1 \Rightarrow y = 2$

$0 = z - 2 \Rightarrow z = 2$

$$\boxed{N(1,2,2)}$$

ثالثاً:

1) $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$

$C(2,2,0)$, $D(0,2,0)$, $E(0,0,2)$

H منتصف $[EB]$

$H\left(\frac{x_B+x_E}{2}, \frac{y_B+y_E}{2}, \frac{z_B+z_E}{2}\right)$

$\boxed{H(1,0,1)}$

2) يكفي إثبات أنّ النقاط E,B,C تحقق المعادلة $x+z-2=0$

$E:\ 0-2+2=0$ محققة

$B:\ 2+0-2=0$ محققة.

$C:\ 2+0-2=0$ محققة.

ومنه نستنتج أنّ معادلة المستوي (EBC) هي $x+z-2=0$.

3) يكفي إثبات أن الشعاع AH مرتبط خطياً مع ناظم المستوي EBC .

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AH}(1,0,1)\\ \overrightarrow{n}_{EBC}(1,0,1)\end{array}\right\}\ \overrightarrow{AH}=\overrightarrow{n}_{EBC}$

فالمستقيم (AH) عمودي على المستوي (EBC).

4) $V_{E-ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot h$

$S=2^2=4$, $h=EA=2$

$\boxed{V=\frac{8}{3}}$