معهد واحة النور

المدرس: عدنان كيخيا

حلب - دير جمال

اختبار الأشعة في الفراغ

الثالث الثانوي العلمي

الرياضيات

الاسم:

الدرجة: ٦٠

المدة: ساعتان فقط

التاريخ: 21/10/2018

---

1 في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطتان $A(1,2,-3)$ ، $B(6,3,1)$

والشعاعان $\vec{u}(2,1,1)$ ، $\vec{v}(1,-1,2)$

d هو المستقيم المار بالنقطة A والموجه بالشعاع $\vec{u}$

d' هو المستقيم المار بالنقطة B والموجه بالشعاع $\vec{v}$

والمطلوب: أثبت أن المستقيمين d ، d' متقاطعان ثم عين إحداثيات I نقطة تقاطعهما.

---

2 نتأمل في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط التالية:

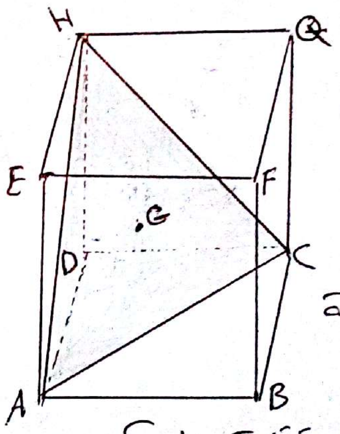
$A(4,2,-10)$ ، $B(3,10,5)$ ، $C(2,3,-7)$

و $D(5,4,-7)$ والمطلوب:

أثبت انتماء النقطة B إلى المستوي (ACD).

---

3 لتكن ABCDEFQH متوازي سطوح ولتكن G مركز ثقل المثلث $\hat{AHC}$.



والمطلوب:

بالاستفادة من علاقة شال وبتطبيق قواعد الحساب على الأشعة أثبت أن النقاط G ، D ، F تقع على استقامة واحدة.

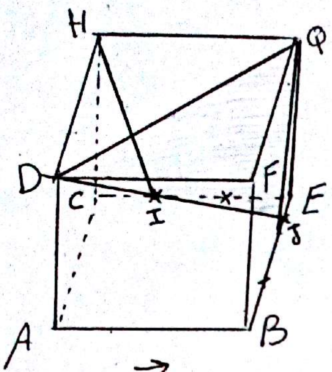
---

4 1- أوجد معادلة الكرة التي مركزها $A(2,1,-3)$ وطول نصف قطرها $[AB]$ حيث $B(2,4,1)$.

2- هل النقطة $M(2,-2,5)$ تنتمي للمستقيم (AB) بين ذلك؟

---

5 لتكن المكعب ABCDFQH ولتكن المعلم المتجانس $(A;\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD})$ والمطلوب:



1. أوجد إحداثيات نقاطه.
2. أوجد إحداثيات مركز ثقل المثلث $\hat{AHQ}$.
3. لتكن $\vec{CI}=\frac{1}{3}\vec{CE}$ و $\vec{BJ}=\frac{2}{3}\vec{BE}$ هل الشعاع $\vec{HI}$ يوازي المستوي (DJQ)؟ بين ذلك.
4. أوجد $\|\vec{AQ}\|$.

---

6 لتكن ABCD رباعي وجوه فيه: $2\vec{JB}=-3\vec{JC}$ ، $\vec{AI}=\frac{1}{2}\vec{AD}$ والمطلوب:

1. عين G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ ، $(B,2)$ ، $(C,3)$ ، $(D,1)$ مع الرسم.
2. أثبت أن النقاط G ، I ، J تقع على استقامة واحدة.
3. لتكن M نقطة من الفراغ أوجد:

$$\|\vec{MD}+\vec{MA}+2\vec{MB}+3\vec{MC}\|$$

---

7 أوجد معادلة الاسطوانة التي محورها $(O,\vec{i})$ ومركز قاعدتها $A(0,0,1)$ ونصف قطرها (4) وارتفاعها (6).

وهل النقطة $(9,\sqrt{7},7)$ تنتمي لهذه الاسطوانة.

---

8 نتأمل في معلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط:

$A(2,1,4)$ ، $B(3,6,2)$ ، $C(5,1,-3)$

و $M(1,m,7)$ والمطلوب:

1. عين قيمة $m\in\mathbb{R}$ حتى تكون النقطة M من المستوي (ABC).
2. ما نوع المثلث $\hat{ABC}$.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتنا لكم بالنجاح والتوفيق

إدارة المعهد:
أ. محمد عمر

مدرس المادة:
أ. عدنان كيخيا

[1] في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا
النقطتان $A(1,2,-3)$ ، $B(6,3,1)$
والشعاعان $\vec{u}(2,1,1)$ ، $\vec{v}(1,-1,2)$
d هو المستقيم المار بالنقطة A وموجه بالشعاع $\vec{u}$
d' هو المستقيم المار بالنقطة B وموجه بالشعاع $\vec{v}$
المطلوب: أثبت أن المستقيمين d, d' متقاطعين ثم عين إحداثيات I نقطة التقاطع

الحل: لتعيين تقاطع مستقيمين في الفراغ نتبع الخطوات التالية:

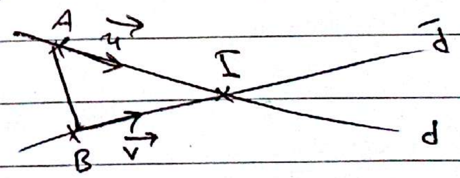
الخطوة الأولى: إثبات أن المستقيمين غير متوازيين
أي أن الشعاعين $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً
نلاحظ أن:

$$\vec{u}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \vec{v}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$$

$$\frac{2}{1}=2, \quad \frac{1}{-1}=-1, \quad \frac{1}{2}=0,5$$

إذاً المركبات غير متناسبة ومنه الشعاعان $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً أي غير متوازيين أي متقاطعين

الخطوة الثالثة: إثبات وقوع المستقيمان في مستوٍ واحد



حتى تقع المستقيمات d, d' في مستوٍ واحد يجب أن تكون الأشعة $\vec{AB}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{u}$ مرتبطة خطياً
وبما أن $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً إذاً يجب أن:

$$\vec{AB} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \; ; \; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\begin{bmatrix}5\\1\\4\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$$

ومنه نكون ثلاث معادلات:

$$2\alpha + \beta = 5 \quad (1)$$
$$\alpha - \beta = 1 \quad (2)$$
$$\alpha + 2\beta = 4 \quad (3)$$

بجمع (1)+(2) نجد $3\alpha = 6 \Rightarrow$ $\boxed{\alpha = 2}$

نعوض في (2) نجد $\beta = \alpha - 1 = 2-1 = 1$

إذاً $\boxed{\alpha = 2}$ ، $\boxed{\beta = 1}$

نعتبر في المعادلة (3).
نعوض $L_1 = 2+2(1) = 4 = L_2$

إذاً $\boxed{\vec{AB} = 2\vec{u} + \vec{v}}$

ومنه الأشعة الثلاثة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{AB}$ مرتبطة خطياً وتقع في مستوٍ واحد.

الخطوة الثالثة: إيجاد إحداثيات $I(x,y,z)$
من الشكل وحسب علاقة شال نجد

$$\vec{AB} = \vec{AI} + \vec{IB}$$

لكن $\vec{AI}$ ، $\vec{u}$ مرتبطان خطياً إذاً $\vec{AI} = a\vec{u}$
و $\vec{IB}$ ، $\vec{v}$ مرتبطان خطياً إذاً $\vec{IB} = b\vec{v}$

$$\vec{AB} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

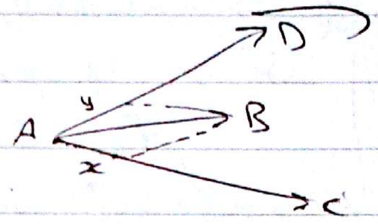
لكن وجدنا سابقاً $\vec{AB} = 2\vec{u} + \vec{v}$
إذاً $\vec{AI} = a\vec{u} = 2\vec{u}$
أي $\vec{AI} = 2\vec{u}$
نعوض

$$\begin{bmatrix}x-1\\y-2\\z+3\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\2\\2\end{bmatrix}$$

ومنه

$$x-1=4 \Rightarrow x=5$$
$$y-2=2 \Rightarrow y=4$$
$$z+3=2 \Rightarrow z=-1$$
$$\Rightarrow I(5,4,-1)$$

2) نتأمل في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط
$A(4,2,-10)$ ، $B(3,10,5)$ ،
$C(2,3,-7)$ ، $D(5,4,-7)$ والمطلوب
أثبت انتماء النقطة B إلى (ACD)



حتى تنتمي النقطة B إلى المستوي (ADC)
يجب أن تتحقق العلاقة الشعاعية
$\vec{AB} = x\vec{AC} + y\vec{AD}$; $x,y \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ 15 \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ +3 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ +3 \end{bmatrix}$$

نحصل على 3 معادلات :

$-2x+y=-1$ (1)

$x+2y=8$ (2)

$3x+3y=15$ (3)

نضرب المعادلة (2) بالعدد 2 فنجد

$2x+4y=16$ (4)

نجمع (1)+(4) فنجد

$5y=15 \Rightarrow \boxed{y=3}$

نعوضها في (2) $x=8-2(3)=2$

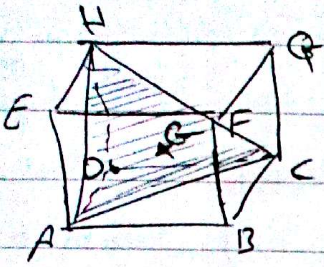
نختبر في (3) $\boxed{x=2}$ $\boxed{y=3}$

$L_1 = 3(2)+3(3)=6+9=15=L_2$

محققة إذاً فعلاً

$\vec{AB}=2\vec{AC}+3\vec{AD}$

والأشعة الثلاثة تقع في مستوٍ واحد.



3) لدينا ABCDEFGH
متوازي سطوح وليكن G
مركز ثقل المثلث $A\hat{H}C$
المطلوب:
بالاستفادة من علاقة شال
وبالاعتماد على قواعد الحساب بالأشعة
أثبت أن النقاط :
G ، D ، F تقع على استقامة واحدة.

الحل:
بما أن G مركز ثقل المثلث $A\hat{H}C$ فإنه يتحقق :

$\vec{GH}+\vec{GA}+\vec{GC}=\vec{0}$

يجب أن نثبت علاقة ارتباط خطي بين $\vec{DG},\vec{GF}$
نعوض حسب شال :

$\vec{GD}+\vec{DH}+\vec{GD}+\vec{DA}+\vec{GF}+\vec{FC}=\vec{0}$

$2\vec{GD}+\vec{GF}+\vec{DE}+\vec{FC}=\vec{0}$

حيث إن : $\vec{DH}+\vec{DA}=\vec{DE}$ متوازي أضلاع

لكن $\vec{ED}=\vec{FC}$ نعوض

$2\vec{GD}+\vec{GF}+\vec{DE}+\vec{ED}=\vec{0}$

ومنه $2\vec{GD}+\vec{GF}=0$

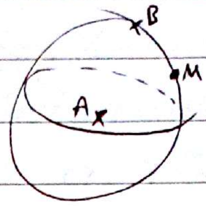
ومنه $\boxed{\vec{GF}=-2\vec{GD}}$

إذاً النقاط G ، D ، F على استقامة واحدة
لأن الشعاعان $\vec{GD}$ ، $\vec{GF}$ مرتبطان خطياً.

المدرس: عدنان كيف

[4] ① أوجد معادلة الكرة التي مركزها $A(2,1,-3)$ وطول نصف قطرها $[AB]$. حيث $B(2,4,1)$

② هل النقطة $M(2,-2,5) \in (AB)$ المستقيم .



الحل:

إذاً هذه الكرة مركزها A وطول نصف قطرها $[AB]$

نوجد $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(2-2)^2+(4-1)^2+(1+3)^2} = 5$

لنفرض $M(x,y,z)$ نقطة ما من محيط الكرة عندئذ

$AM = 5 = R$

بالتربيع $AM^2 = 25$

ومنه بتطبيق قانون المسافة بين نقطتين

$$\boxed{(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=25}$$

وهي معادلة الكرة المطلوبة.

② هل تنتمي النقطة $M(2,-2,5)$ للمستقيم (AB)

A M B

يجب أن يتحقق

$\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB} \; : \; t \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix}0\\-3\\8\end{bmatrix} = t\begin{bmatrix}0\\3\\4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\-3\\8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\3t\\4t\end{bmatrix}$$

نعوض $-3 = 3t \Rightarrow \boxed{t=-1}$

$8 = 4t \Rightarrow \boxed{t=2}$

إذاً المركبات غير متناسبة وبالتالي لا تنتمي M إلى (AB) .

---

[5] ليكن المكعب ~~ABED~~ . $ABECDFQH$

وليكن المعلم المتجانس $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$

المطلوب:

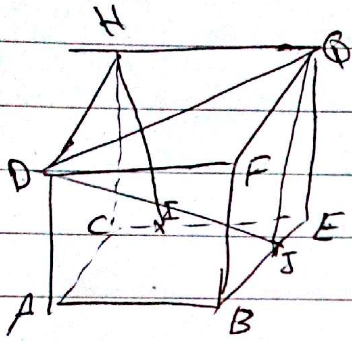
① أوجد إحداثيات نقاطه .

② أوجد إحداثيات مركز ثقل المثلث $\hat{AHQ}$.

③ ليكن $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CE}$ و $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$

هل الشعاع $\overrightarrow{HI}$ يوازي المستوي (DJQ) ؟ بين ذلك .

④ أوجد $\|\overrightarrow{AQ}\|$.



الحل:

① $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $E(1,1,0)$

$C(0,1,0)$, $D(0,0,1)$, $F(1,0,1)$

$H(0,1,1)$, $Q(1,1,1)$.

② إحداثيات G مركز ثقل $\hat{AHQ}$ تحقق:

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GQ} = \vec{0}$

نجد بعد تعويض الإحداثيات نجد

$x_G = \left(\frac{x_A+x_H+x_Q}{3}\right) = \frac{1}{3}$

$y_G = \left(\frac{y_A+y_H+y_Q}{3}\right) = \frac{2}{3}$

$z_G = \left(\frac{z_A+z_H+z_Q}{3}\right) = \frac{2}{3}$

ومنه $G\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

③ بما أن $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CE}$

فإن $I(\frac{1}{3}, 1, 0)$

بما أن $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$

فإن $J(1, \frac{2}{3}, 0)$

حتى يكون الشعاع $\overrightarrow{HI}$ يوازي (DJQ)

يجب أن تكون الأشعة $\overrightarrow{DJ}$ ، $\overrightarrow{DQ}$ ، $\overrightarrow{HI}$

مرتبطة خطياً أي :

$\overrightarrow{HI} = a\,\overrightarrow{DJ} + b\,\overrightarrow{DQ} \quad : a, b \in R$

نعوض

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ -1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ومنه نجد 3 معادلات

$a + b = \frac{1}{3}$ ①

$\frac{2}{3}a + b = 0$ ②

$-a = -1$ ③

من ③ نجد $\boxed{a = 1}$ نعوض في ② فنجد

$b = \frac{-2}{3}a = \frac{-2}{3}(1) = \frac{-2}{3}$

إذاً $\boxed{a = 1}$ ، $\boxed{b = \frac{-2}{3}}$ نختبر في ①

$L_1 = a + b = 1 + \frac{-2}{3} = \frac{3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} = L_2$

المساواة محققة ومنه الأشعة مرتبطة خطياً

ومنه الشعاع $\overrightarrow{HI}$ يوازي المستوي (DJQ) .

④

$\|\overrightarrow{AQ}\| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2} = \sqrt{3}$

المدرس عرسان كيجو

⑤ ليكن $ABCD$ رباعي الوجوه فيه :

$2\overrightarrow{JB} = -3\overrightarrow{JC}$ ، $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ والمطلوب

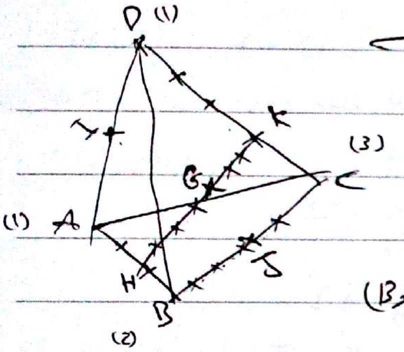
① عين G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة

$(A,1)$ ، $(B,2)$ ، $(C,3)$ ، $(D,1)$ ثم

② أثبت أن النقاط J و I و G تقع على استقامة واحدة

③ ليكن M نقطة من الفراغ أوجد :

$\|\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\|$.



الحل :

①

نوجد H مركز الأبعاد المتناسبة

للنقطتين $(A,1)$ و $(B,2)$

فيكون

$\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

نوجد K مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$(C,3)$ و $(D,1)$ فيكون

$\overrightarrow{DK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$

حسب الخاصة التجميعية G مركز الأبعاد المتناسبة

للنقاط المثقلة $(A,1)$ ، $(B,2)$ ، $(C,3)$ ، $(D,1)$

هي نفسها G مركز الأبعاد $(H,3)$ و $(K,4)$

إذاً $\overrightarrow{HG} = \frac{4}{7}\overrightarrow{HK}$

② بما أن $2\overrightarrow{JB} = -3\overrightarrow{JC}$

إذاً $2\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$

بالمقارنة مع $\boxed{\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}}$ نستنتج أن :

J هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة

$(B,2)$ ، $(C,3)$

أي $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$

بما أن $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AD}$

بالمقارنة $\boxed{\vec{AG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\vec{AB}}$ نلاحظ أن

I هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة

(A,1) و (D,1).

إذاً I تقع منتصف AD.

ب) الأماكن المعلومة G مركز الأبعاد

المتناسبة للنقاط المثقلة

(A,1)، (B,2)، (C,3) و (D,1)

هي نفس مركز الأبعاد للنقاط

(I,2) و (J,5) أي أن

$\vec{IG} = \frac{5}{7}\vec{IJ}$ أو

$\vec{JG} = \frac{2}{7}\vec{JI}$

ومنه النقاط J، I، G تقع على استقامة واحدة.

لأن G نقطة وحيدة حسب المرجح.

3) بما أن M نقطة من الفراغ و G هو مركز الأبعاد للنقاط المثقلة.

ج) اختزال العبارة:

$\alpha\vec{MA}+\beta\vec{MB}+\gamma\vec{MC}+\delta\vec{MD} = (\alpha+\beta+\gamma+\delta)\vec{MG}$

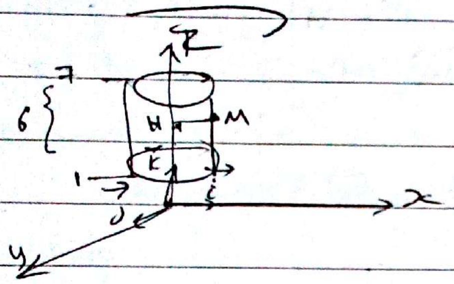
أي أن:

$\|\vec{MD}+\vec{MA}+2\vec{MB}+3\vec{MC}\| = \|(1+1+2+3)\vec{MG}\|$

$= \|7\vec{MG}\|$

[7] أوجد معادلة الاسطوانة التي محورها $(O,\vec{k})$ وقاعدتها $A(0,0,1)$ ونصف قطرها 4 وارتفاعها 6.

وهل النقطة $(9,\sqrt{7},7)$ تنتمي لهذه الاسطوانة



نفرض $M(x,y,z)$ نقطة من الاسطوانة

$H(0,0,z)$ المسقط العمودي لـ M على OZ،

بحيث المسافة

$MH = 4$

$MH^2 = 16$

$(0-\cancel{x})^2+(0-y)^2+(z-z)^2 = 16$

$\boxed{x^2+y^2=16}$ $\quad 1 \le z \le 7$:

وهي معادلة الاسطوانة.

اختبار النقطة $(9,\sqrt{7},7)$ تحقق معادلة الاسطوانة

محقق $1 \le 7 \le 7$

$x^2+y^2=16$

$L_1 = (9)^2+\sqrt{7}^2 = 81+7 = 88 \ne 16 = L_2$

إذاً غير محقق النقطة لا تنتمي لهذه الاسطوانة

المدرس: عدنان كبير

8 تعامل في معلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط

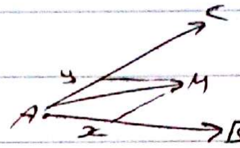
$A(2,1,4)$ ، $B(3,6,2)$ ، $C(5,1,-3)$

$M(1,m,7)$ والمطلوب :

① عين قيمة $m\in R$ حتى تكون النقطة M من المستوي (ABC).

② ما نوع المثلث $\hat{ABC}$.

الحل: حتى تكون النقطة M من المستوي (ABC) يجب أن يتحقق :



$\vec{AM}=x\vec{AB}+y\vec{AC}$

$x,y\in R$: نعوض

$\vec{AM}=x\vec{AB}+y\vec{AC}$

$$\begin{bmatrix}-1\\m-1\\3\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}1\\5\\-2\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}3\\0\\-7\end{bmatrix}$$

نحصل على ثلاث معادلات

$x+3y=-1$ ①

$5x=m-1$ ②

$\boxed{-2x-7y=3}$ ③

نضرب المعادلة ① بالعدد 2 فنحصل

$\boxed{2x+6y=-2}$ ④

نجمع ③ + ④ فنجد $-y=+1$

$\boxed{y=-1}$

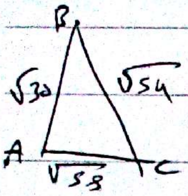
نعوض في ① فنجد $\boxed{x=+2}$

إذاً نعوض في ② فنجد

$5x=m-1 \Rightarrow 5(2)=m-1$

ومنه $\boxed{m=11}$ ،

② نوع المثلث $\hat{ABC}$:



نوجد أطوال أضلاعه.

حسب قانون المسافة بين نقطتين

$AB=\sqrt{(3-2)^2+(6-1)^2+(2-4)^2}=\sqrt{1+25+4}=\sqrt{30}$

$AC=\sqrt{(5-2)^2+(1-1)^2+(-3-4)^2}=\sqrt{9+49}=\sqrt{58}$

$BC=\sqrt{(5-3)^2+(1-6)^2+(-3-2)^2}=\sqrt{4+25+25}=\sqrt{54}$

واضح أن المثلث ليس تام حسب عكس فيثاغورث

ليس متساوي الساقين

ليس متساوي الأضلاع

إذاً المثلث $\hat{ABC}$ مختلف الأضلاع

انتهى الحل

بالتوفيق

أ. عدنان لكحو

22/10/2018