الجُمْهوريَّة العَربيَّة السُّوريَّة

وزارة التّربيَة

المركز الوطني لتطوير المناهج التربوية

الرّياضيّات

الصّفّ الأول الثّانوي

حلول تمارين كتاب الهندسة

العام الدراسي
٢٠١٥ - ٢٠١٦ م
١٤٣٦ - ١٤٣٧ هـ

طُبِع أوّل مرّةَ للعام الدراسي ٢٠١٥ - ٢٠١٦م

إعـداد

أ.د. عمران قوبا | ميكائيل الحمود | بسام بركات
أيشوع اسحاق | عصام علي | غدير اندراوس

المراجعة والتدقيق العلمي

الأستاذ الدكتور عمران قوبا

مُقدّمة

المُعدّون

المحتوى

1

التحويلات الهندسيّة في المستوي

1. التّحويلات المألوفة في المستوي
2. أثر التّحويلات الهندسيّة على الأشكال المألوفة
3. الخواصّ المشتركة للتّحويلات المألوفة

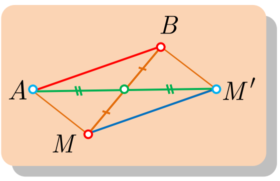
فكّر- صفحة 25

- إذا كانت النّقطة M' صورة نقطة M وفق انعكاسٍ محوره d، فما هي صورةُ النّقطة M' وفق هذا الانعكاس ؟
- إذا كان Δ و Δ' مستقيمين متقاطعين في نقطةٍ I وكانا متناظرين بالنسبة إلى مستقيمٍ d، فلماذا تقع النّقطة I على المستقيم d ؟

الحل

- إنّها النقطة M نفسها. لأنّه إذا كانت النقطة M غير واقعة على المستقيم d، كان هذا المستقيم محور القطعة المستقيمة $[MM']$ وكانت M صورةَ النقطة M' وفق الانعكاس الذي محوره d.
- لأنّ صورة نقطة تقاطع هذين المستقيمين I هي نقطة تقاطع صورتيهما وفق الانعكاس المعطى، فهي إذن النقطة I نفسها. إذن تنطبق I على صورتها وفق هذا الانعكاس ولا بُد أن تقع على محوره d

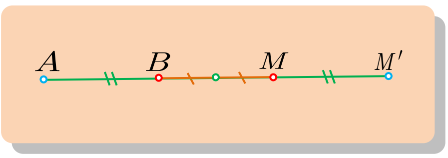
فكّر- صفحة 26



في التعريف السابق افترضنا أنّ النقاط A و B و M لا تقعُ على استقامة واحدة. يمكننا أن نضع تعريفاً يأخذ هذه الحالة في الحسبان بأن نقول أنّ M' هي نظيرة A وفق التّناظر المركزي بالنسبة إلى منتصف القطعة المستقيمة $[MB]$، علّل ذلك ؟

الحل

إذا افترضنا أنّ النّقاط A و B و M لا تقعُ على استقامة واحدة وكانت M' نظيرة A وفق التّناظر المركزي بالنسبة إلى منتصف القطعة المستقيمة $[MB]$، كان الرباعي $AMM'B$ متوازي الأضلاع لتناصف قطريه. وهو التعريف السابق نفسه.



أمّا إذا وقعت النقاط الثلاث A و B و M على استقامةٍ واحدةٍ و كانت M' نظيرة A وفق التّناظر المركزي بالنسبة إلى منتصف القطعة المستقيمة $[MB]$، كان $AB = MM'$ وكانت M' صورة M وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B في هذه الحالة أيضاً.

تدرّب-صفحة 27

① عيّن المقولات الصحيحة فيما يأتي وعلل إجاباتك:

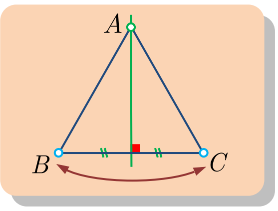
❶ للمثلّث المتساوي الأضلاع ثلاثة محاور تناظر.

❷ إذا كانت صورة نقطة B وفق الانسحاب $T_{I\to J}$ هي النقطة C، كانت القطعتان المستقيمتان $[BJ]$ و $[IC]$ متناصفتين.

❸ إذا كانت $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ دائرتين مركزاهما O و O' بالتّرتيب، ولهما نصف القطر نفسه وكانتا متقاطعتين في نقطتين A و B، كان المستقيمان (OO') و (AB) محوري تناظر للشّكل المكوّن من الدّائرتين.

❹ إذا كانت N صورة نقطة M وفق دورانٍ مركزه O وزاويته 60° كان المثلّث MON متساوي الأضلاع.

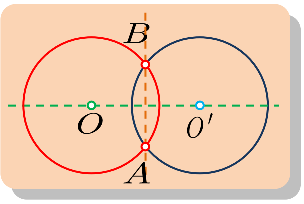
الحل



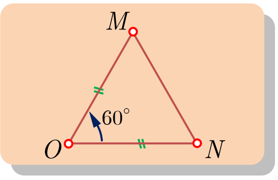
❶ للمثلّث المتساوي الأضلاع ثلاثة محاور تناظر، هي محاور أضلاع المثلث، إذ يمر محور كل ضلع بالرأس المقابلة فصورة المثلث وفق التناظر الذي محوره محور هذه الضلع هي المثلث نفسه.

❷ هذه النقطة صحيحة وهي موضوع السابقة.

❸ الدائرة متناظرة بالنسبة إلى كل قطر من أقطارها، وعليه يكون خط المركزين (OO') محور تناظر للشكل المكوّن من الدائرتين $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$.



ومن ناحية أخرى، نظراً إلى كون $OA = O'A$ و $OB = O'B$ استنتجنا أنّ (AB) هو محور القطعة المستقيمة $[OO']$، والنقطة O' هي صورة O وفق الانعكاس الذي محوره (AB) فالدائرة $\mathcal{C}'$ هي صورة $\mathcal{C}$ وفق هذا الانعكاس المحوري. هذا يبرهن أنّ (AB) هو أيضاً محور تناظر للشكل المكوّن من الدائرتين $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$.



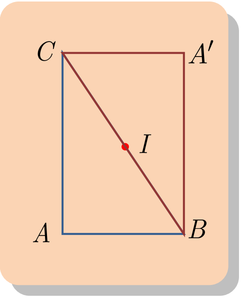
❹ هذا صحيح، لأنّ المثلث OMN مثلث متساوي الساقين فيه زاوية قياسها 60°.

② ليكن ABC مثلّثاً قائماً في A، ولتكن I منتصف القطعة $[BC]$. نرمز بالرّمز S_I إلى التّناظر الذي مركزه I.

❶ أنشئ صورة المثلّث ABC وفق التّحويل S_I.

❷لتكن A' صورة A وفق S_I. ما طبيعة الرباعي $ABA'C$ ؟

الحل



❶ I منتصف القطعة $[BC]$، إذن $\mathcal{S}_I(B)=C$ و $\mathcal{S}_I(C)=B$. يكفي إذن أن ننشئ A' نظيرة A بالنسبة إلى I.

❷ الرباعي $ABA'C$ متوازي الأضلاع لتناصف قطريه، وهو في الحقيقة مستطيل لأنّ فيه زاوية قائمة هي A.

تدرّب-صفحة 30

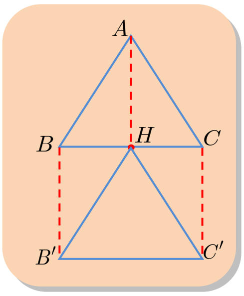
① ليكن المثلّث ABC. أنشئ النقطة C' صورة النقطة C وفق الانسحاب $T_{A\to B}$ أي الذي ينقل A إلى B. لماذا تكون أيضاً النقطة C' صورةَ النقطة B وفق الانسحاب $T_{A\to C}$؟

الحل

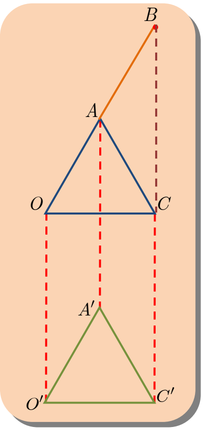
لأنّ I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$ هو نفسه I' منتصف القطعة $[CB]$! فنظيرة A بالنسبة إلى I وهي $T_{A\to B}(C)$ هي نفسها نظيرة A بالنسبة إلى I' وهي $T_{A\to C}(B)$.

② ليكن ABC مثلّثاً متساوي الأضلاع. وليكن H المسقط القائم للنقطة A على القطعة المستقيمة $[BC]$. أنشئ صورة المثلّث ABC وفق الانسحاب $T_{A\to H}$.

الحل



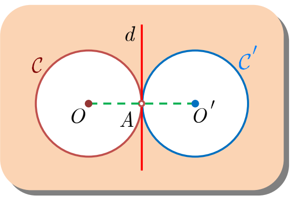
③ ليكن AOC مثلّثاً متساوي الأضلاع، طول ضلعه $2\,\text{cm}$. ولتكن B نظيرة النقطة O بالنسبة إلى النقطة A. أنشئ صورة المثلّث AOC وفق الانسحاب $T_{B\to C}$.



الحل

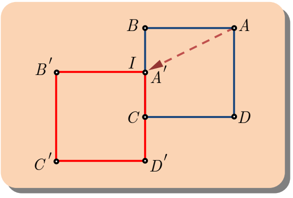
المثلث المتساوي الأضلاع $A'O'C'$ هو صورة المثلث AOC وفق الانسحاب $T_{B\to C}$.

④ لتكن $\mathcal{C}$ دائرة مركزها O، وليكن d مستقيماً مماسّاً لها في النقطة A. أنشئ الدّائرة $\mathcal{C}'$ صورة $\mathcal{C}$ وفق الانعكاس الذي محوره d.



تدرّب-صفحة 33

① ليكن المربّع $ABCD$، ولتكن النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$. أنشئ صورة المربّع $ABCD$ وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{A\to I}$ الذي ينقل A إلى I.



الحل

الانسحاب يحافظ على الأطوال والزوايا والتوازي، فصورة المربع وفق انسحاب هي مربعٌ أضلاعه توازي أضلاع المربع الأصلي. يكفي إذن أن نُنشئ المربع المنشود انطلاقاً من $\mathcal{T}_{A\to I}(A) = I = A'$ كما في الشكل.

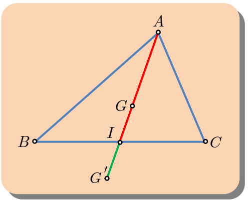
② ليكن المثلّث ABC، وليكن G مركز ثقله.

❶ أنشئ G' صورة النقطة G وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{A\to G}$ الذي ينقل A إلى G.

❷ ▲ لتكن I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$. أتكون I منتصف القطعة $[GG']$؟

▲ استنتج طبيعة الرباعي $BGCG'$.

الحل



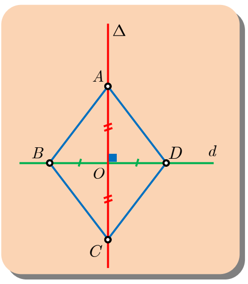
❶ نمدِّد AG إلى النقطة G' وبحيث $AG = GG'$. فنحصل على النقطة G' صورة النقطة G وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{A\to G}$.

❷ ▲ لمّا كانت G هي نقطة تلاقي متوسطات المثلث ABC استنتجنا أنّ (AG) يلاقي (BC) في I فالنقاط A و G و I و G' تقع على استقامة واحدة. ولما كان $IG = \frac{1}{2}AG = \frac{1}{2}GG'$ استنتجنا أنّ I تقع في منتصف $[GG']$.

▲ الشكل الرباعي $BGCG'$ متوازي أضلاع بسبب تناصف قطريه.

③ ليكن d و Δ مستقيمين متعامدين، ولتكن A نقطةً واقعةً على المستقيم Δ. أنشئ رباعيّاً $ABCD$ يكون المستقيمان d و Δ محوري تناظر له.

الحل



نفترض أنّ A مختلفة عن O نقطة تقاطع المستقيمين d و Δ. نختار بالمثل نقطة واقعة على d ومختلفة عن O. ثُم نعين C صورة A وفق الانعكاس المحوري بالنسبة إلى d، ونعين D صورة B وفق الانعكاس المحوري بالنسبة إلى Δ. فنحصل بذلك على الرباعي $ABCD$ المنشود.

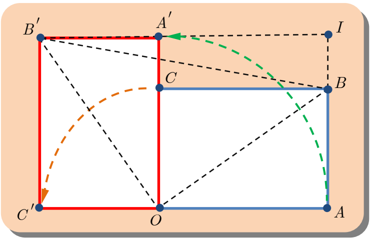
④ ليكن $OABC$ مستطيلاً فيه OA يساوي $8\,\text{cm}$ و OC يساوي $6\,\text{cm}$. وليكن $\mathcal{R}$ ربع دورة مباشرة مركزها O.

❶ أنشئ النقاط C' و A' و B' صور النقاط C و A و B وفق التّحويل $\mathcal{R}$ بالتّرتيب.

❷ ▲ بيّن أنّ المثلّث OBB' قائم ومتساوي الساقين.

▲ استنتج أنّ طول BB' يساوي $10\sqrt{2}$ سنتيمتراً.

الحل



❶ نعلم أنّ $OA'B'C'$ هو مستطيل لأنّه صورة المستطيل $OABC$. لذلك نُنشئ A' و C' صورتي A و C وفق $\mathcal{R}$ ثُمّ نتمم الشكل بإنشاء B' ليصبح $OA'B'C'$ مستطيلاً.

❷ ▲ إنّ B' هي صورة B وفق دوران ربع دورة مباشرة حول O، وهذا يقتضي أن يكون BOB' مثلثاً قائماً في O ومتساوي الساقين.

▲ لحساب طول BB' يمكن أن نستفيد من أحد المثلثين القائمين BOB' أو BIB'. فمثلاً من الأخير نجد اعتماداً على مبرهنة فيثاغورث :

$$BB'^2 = (8+6)^2 + (8-6)^2 = 2(64+36) = 2\times 100$$

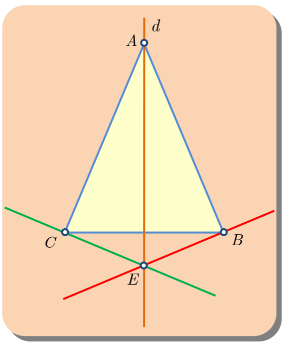
ومنه $BB' = 10\sqrt{2}$.

⑤ ليكن ABC مثلّثاً متساوي الساقين رأسه A، وليكن d محور تناظره. نرسم من B العمود على المستقيم (AB) فيقطع d في نقطة E.

❶ ما هي صورة المستقيم (BE) وفق الانعكاس الذي محوره d ؟

❷ استنتج أنّ المستقيمين (EC) و (AC) متعامدان.

الحل



❶ لنرمز بالرمز $\mathcal{S}_d$ إلى الانعكاس الذي محوره d.
لمّا كان $\mathcal{S}_d(E) = E$، و $\mathcal{S}_d(B) = C$، استنتجنا أنّ المستقيم (CE) هو صورة (BE) وفق $\mathcal{S}_d$.

❷ وكذلك نرى أنّ المستقيم (AC) هو صورة المستقيم (AB) وفق $\mathcal{S}_d$. ولكنّ الانعكاس المحوري يحافظ على التعامد، إذن $(AC) \perp (CE)$ لأنّ كان $(AB) \perp (BE)$.

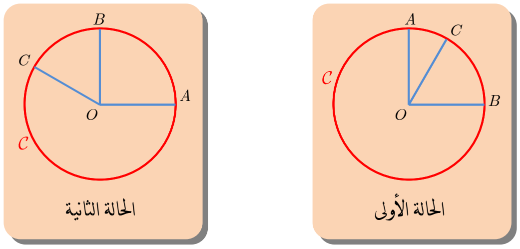
⑥ لتكن A و B نقطتين على الدائرة $\mathcal{C}$ التي مركزها O، تُحقِّقان $\angle AOB = 90^\circ$. ليكن $\mathcal{R}$ دوراناً مباشراً مركزه O وزاويته 60°.

❶ أنشئ النقطة C صورة النقطة B وفق $\mathcal{R}$.

❷ احسب قياسات زوايا المثلّث ABC.

ملاحظة : في هذا التمرين هناك حالتان.

الحل



❶ نرسم النقطة C على الدائرة بحيث يكون $BOC = 60^\circ$ والانتقال من A إلى C دوران مباشرٌ (عكس جهة دوران عقارب الساعة)، فتكون C صورة B وفق $\mathcal{R}$. ويمكن أنْ نكتب ذلك كما يأتي $\mathcal{R}_{O,60^\circ}\ A = C$. فنحصل على حالتين كما في الشكل.

❷ نناقش كلَّ حالة على حدتها :

الحالة الأولى:

$$ABC = \frac{1}{2}AOC = \frac{1}{2}(90^\circ - 60^\circ) = 15^\circ$$
$$BAC = \frac{1}{2}BOC = 30^\circ$$
$$ACB = 180^\circ - \quad 30^\circ + 15^\circ \quad = 135^\circ$$

الحالة الثانية:

$$ACB = \frac{1}{2}AOB = \frac{1}{2}(90^\circ) = 45^\circ$$
$$BAC = \frac{1}{2}BOC = 30^\circ$$
$$CBA = 180^\circ - \quad 30^\circ + 45^\circ \quad = 105^\circ$$

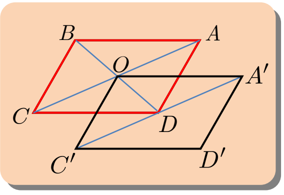
تمرينات ومسائل

1 ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O.

❶ أنشئ صورة $ABCD$ وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{O\to D}$ الذي ينقل O إلى D.

❷ إنّ صورة $ABCD$ وفق $\mathcal{T}_{O\to D}$ هي متوازي أضلاع، أثبت أنّ D مركزه.

الحل



❶ لمّا كان الانسحاب يحافظ على التوازي وعلى قياسات الزوايا، كانت صورة متوازي الأضلاع $ABCD$ وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{O\to D}$ هي متوازي الأضلاع $A'OC'D'$ كما هو موضَّحٌ في الرسم. حيث أنَّ صورة النقطة B وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{O\to D}$ هي O.

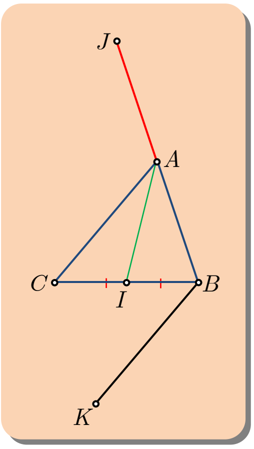
❷ لمّا كانت O هي منتصف $[BD]$ استنتجنا أنّ صورتها D وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{O\to D}$ هي منتصف $[OD']$، فهي إذن مركز متوازي الأضلاع $A'B'C'D'$.

2 ليكن لدينا المثلّث ABC، والنقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$. لتكن J نظيرة النقطة B بالنسبة إلى النقطة A.

❶ أنشئ النقطة K صورة B وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{A\to C}$ الذي ينقل A إلى C.

❷ ما هي صورة النقطة J وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{C\to K}$ ؟

الحل



❶ نمدد (BA) باتجاه A ونحدد على الجزء الممدد النقطة J بحيث تكون النقطة A منتصف القطعة المستقيمة $[BJ]$ فتكون J نظيرة النقطة B بالنسبة إلى النقطة A، كما هو موضح في الرسم.

نكمل رسم متوازي الأضلاع $ABKC$ فتكون النقطة K صورة B وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{A\to C}$.

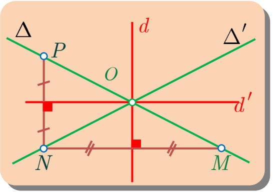
❷ لمّا كان $AC = BK$ وكان الرباعي $ABCK$ متوازي أضلاع وجدنا أنَّ $CK = AB$ وبالتالي $CK = JA$ ومنه فإنَّ النقطة A صورةالنقطة J وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{C\to K}$ لأنَّ الرباعي $CKAB$ متوازي الأضلاع.

3 ليكن Δ و Δ' مستقيمين متقاطعين في نقطةٍ O، وليكن d و d' منصّفي الزاويتين المكوَّنتين بهذين المستقيمين، وأخيراً لتكن M نقطة واقعة على المستقيم Δ.

❶ أنشئ النقطة N صورة النقطة M وفق الانعكاس الذي محوره d، والنقطة P صورة النقطة M وفق الانعكاس الذي محوره d'.

❷ علّل كون المثلّث PMN قائم الزّاوية.

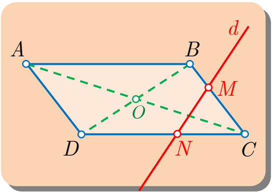
الحل



❶ المستقيم d منصّف إحدى الزاويتين بين Δ و Δ' ، إذن المستقيم Δ' صورة المستقيم Δ وفق انعكاس محوره d. و لمّا كانت $M \in \Delta$ استنتجنا أنَّ $N \in \Delta'$. ونجد بالمثل أنّ $P \in \Delta$. فالنقاط M و O و P تقع على استقامة واحدة.

❷ إنّ $OM = ON$ (لأنَّ d محور $[MN]$). وكذلك $OP = ON$ (لأنَّ d' محور $[PN]$)، نستنتج إذن منتصف الضلع $[MP]$ في المثلث PMN هو مركز الدائرة المارة برؤوسه، فهو مثلث قائم في N.

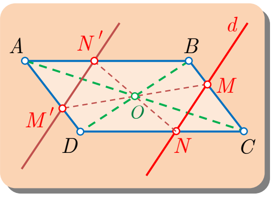
4 ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O. d مستقيمٌ متوضّعٌ كما في الشّكل المجاور، ويقطع القطعة المستقيمة $[CD]$ في N، كما يقطع القطعة المستقيمة $[BC]$ في M. ليكن S_O التناظر الذي مركزه O.



❶ أنشئ النقطتين M' و N' صورتي النقطتين M و N وفق S_O بالتّرتيب.

❷ استنتج أنّ المستقيم $(M'N')$ يوازي المستقيم d.

الحل

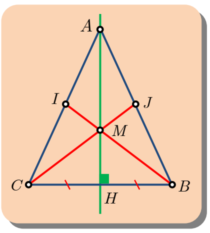


❶ لتكن M' نقطة تقاطع (MO) مع $[AD]$. لما كانت القطعة المستقيمة $[AD]$ صورة $[CB]$ وفق S_O، استنتجنا أنّ صورة M وفق S_O تقع في آن معاً على كل من (OM) و (AD) فهي إذن M'. أي $S_O(M) = M'$. ونجد بالمثل أنّ $N' = S_O(N)$ هي نقطة تقاطع ON مع $[AB]$.

❷ الشكل $NMN'M'$ متوازي الأضلاع لتناصف قطريه، وعلى الخصوص $(M'N') \parallel (MN)$ وهي الخاصة المطلوبة.

5 ليكن ABC مثلّثاً متساوي السّاقين رأسه A، وليكن H المسقط القائم للنقطة A على $[BC]$، ولتكن M نقطة من $[AH]$ مختلفة عن A وعن H. يقطع المستقيمُ (BM) المستقيمَ (AC) في I، ويقطع المستقيمُ (CM) المستقيمَ (AB) في J. ليكن S الانعكاس الذي محوره (AH).

❶ ▲ علّل كون المستقيم (CJ) صورة المستقيم (BI) وفق الانعكاس S.



▲ ما صورة المستقيم (AC) وفق S ؟

▲ استنتج أنّ $S(I) = J$.

❷ علّل كون الرّباعي $BJIC$ شبه منحرف متساوي السّاقين.

الحل

❶ ▲ لمّا كان الارتفاع المتعلق بالقاعدة محوراً للقاعدة في المثلث المتساوي الساقين، وجدنا أنَّ C صورة B وفق الانعكاس S، أي إنّ $S(B) = C$، والنقطة M تقع على محور التناظر (AH)

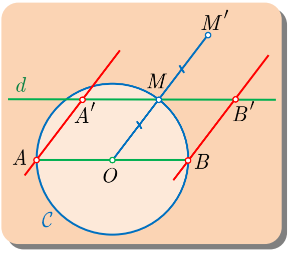
إذن $\mathcal{S}(M)=M$، وعليه صورة المستقيم $(BM)=(BI)$، وفق $\mathcal{S}$، هي المستقيم $(CM)=(CJ)$.

▲ صورة النقطة A وفق الانعكاس $\mathcal{S}$ هي A نفسها وصورة النقطة C هي النقطة B ومنه نستنتج أنَّ صورة المستقيم (AC) وفق $\mathcal{S}$ هي المستقيم (AB).

▲ لمَّا كانت النقطة I هي نقطة تقاطع المستقيمين (AC) و (BM) وجب أن تكون صورتها وفق $\mathcal{S}$ نقطة تقاطع صوتيهما وفق $\mathcal{S}$ أي نقطة تقاطع المستقيمين (AC) و (CM) وهي J إذن $\mathcal{S}(I)=J$.

❷ لمَّا كان $\mathcal{S}(I)=J$ و $\mathcal{S}(C)=B$ كان $(BC)\parallel(IJ)$ لأنّ هذين المستقيمين عموديان على (AH). فالرباعي $BJIC$ شبه منحرف. وهو متساوي الساقين لأن المستقيم (AH) محور تناظر له. حيث إنّ الانعكاس المحوري $\mathcal{S}$ يحافظ على الرباعي $BJIC$.

6 تعرّفُ التحويلات

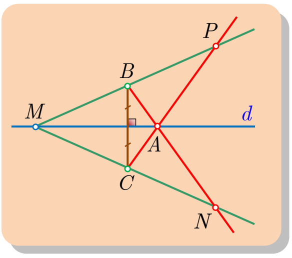


$\mathcal{C}$ دائرة مركزها O و $[AB]$ أحد أقطارها. M نقطة واقعة على $\mathcal{C}$ مختلفة عن A وعن B. d مستقيمٌ يمر بالنقطة M موازياً المستقيم (AB). نرسم من A و B مستقيمين يوازيان المستقيم (OM) فيقطعان المستقيم d في A' و B' بالترتيب. لتكن M' صورة O وفق التّناظر الذي مركزه M. أثبت أنّ المثلّث $A'M'B'$ مثلّثٌ قائم.

الحل

ليكن $\mathcal{T}=\mathcal{T}_{O\to M}$ الانسحاب الذي ينقل O إلى M. لما كان كل من $OAA'M$ و $OBB'M$ متوازي الأضلاع، استنتجنا أنّ $\mathcal{T}(A)=A'$ و $\mathcal{T}(B)=B'$. ولدينا إنشاءً $\mathcal{T}(M)=M'$. إذن المثلث $A'B'M'$ هو صورة المثلث ABM وفق الانسحاب $\mathcal{T}$. ولكن هذا الأخير مثلث قائم في M (لأن الزاوية AMB تقابل قوس نصف الدائرة)، فلابد أن يكون $A'B'M'$ أيضاً قائماً في M'.

7 صورة تقاطع مستقيمات



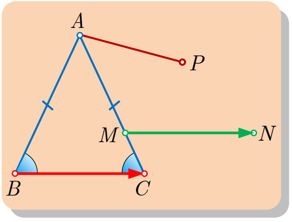
d محور قطعة مستقيمة $[BC]$. A و M نقطتان واقعتان على d نفترض أنّ المستقيمين (AB) و (CM) يتقاطعان في N، وأنّ المستقيمين (AC) و (BM) يتقاطعان في P. أثبت أنّ النقطة P هي صورة النقطة N وفق الانعكاس الذي محوره d.

الحل

لنرمز بالرمز $\mathcal{S}$ إلى التناظر الذي محوره d. لمّا كان d محور القطعة المستقيمة $[BC]$ استنتجنا أنّ $\mathcal{S}(B)=C$ و $\mathcal{S}(C)=B$. ومن ناحية أخرى، لمّا كانت النقطتان A و M تنتميان إلى محور التناظر d استنتجنا أيضاً أنّ $\mathcal{S}(A)=A$ و $\mathcal{S}(M)=M$.

إذن صورة المستقيم (MC) وفق $\mathcal{S}$ هي المستقيم (MB)، وصورة المستقيم (BA) وفق $\mathcal{S}$ هي المستقيم (CA)، عليه تكون صورة N (نقطة تقاطع المستقيمين (MC) و (AB)) هي نقطة تقاطع الصورتين (MB) و (CA) أي النقطة P: $\mathcal{S}(N) = P$. وهي النتيجة المنشودة.

8 استعمال التعاريف

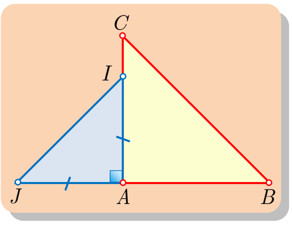


ABC مثلّث متساوي السّاقين، M نقطة من القطعة المستقيمة $[AC]$، N صورة النقطة M وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{B\to C}$ الذي ينقل B إلى C، و P صورة النقطة M وفق الدوران المباشر $\mathcal{R}$ الذي مركزه A والذي ينقل النقطة B إلى C. أثبت أنّ المثلّث PCN متساوي السّاقين.

الحل

لمّا كان $\mathcal{R}(B) = C$ و $\mathcal{R}(M) = P$ استنتجنا أنّ صورة القطعة المستقيمة $[BM]$ وفق $\mathcal{R}$ هي $[CP]$ وبوجه خاص $CP = BM$. ولمّا كان $MBCN$ متوازي الأضلاع لأن $\mathcal{T}_{B\to C}(M) = N$ استنتجنا أيضاً أنّ $CN = BM$. وعليه نرى أنّ $CN = CP$ والمثلث PCN متساوي السّاقين.

9 استعمال ربع الدورة



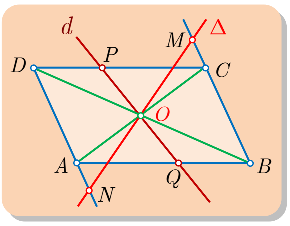
ABC مثلّث قائمٌ ومتساوي السّاقين رأسه A، I نقطة من القطعة المستقيمة $[AC]$، IAJ مثلّث قائمٌ ومتساوي السّاقين في A والنقطة J تقع خارج القطعة المستقيمة $[AB]$. أثبت أنّ المستقيمين (BI) و (CJ) متعامدان.

الحل

ليكن $\mathcal{R}$ الدوران المباشر ربع دورة الذي مركزه A، إنّ C هي صورة B وفق $\mathcal{R}$ وكذلك تكون J صورة I وفق $\mathcal{R}$، إذن المستقيم (CJ) هو صورة BI وفق $\mathcal{R}$، وعليه $(CJ) \perp (BI)$.

ونترك لكم استكشاف طرائق أخرى لحل هذه المسألة دون استعمال التحويلات الهندسية، ولكن هذا ليس موضوع البحث.

10 تعرُّف التّناظر المركزيّ



$ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O، d مستقيمٌ مارّ بالنقطة O ويقطع المستقيم (DC) في P ويقطع المستقيم (AB) في Q، Δ مستقيمٌ مار بالنقطة O ويقطع المستقيم (AD) في N ويقطع المستقيم (BC) في M. أثبت أنّ الرّباعي $MPNQ$ متوازي الأضلاع.

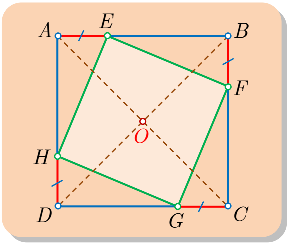
الحل

ليكن $\mathcal{S}_O$ التناظر المركزي حول O. الذي هو مركز تناظر متوازي الأضلاع $ABCD$. لمّا كان

$$\mathcal{S}_O(d)=d \text{ و } \mathcal{S}_O\ (CD)\ =(AB)$$

استنتجنا أنّ صورة P، (التي هي نقطة تقاطع (CD) و d)، وفق $\mathcal{S}_O$ هي نقطة تقاطع (AB) و d وهي Q. أي $\mathcal{S}_O(P)=Q$. ونبرهن بأسلوب مماثل أنّ $\mathcal{S}_O(M)=N$. إذن O هي منتصف كل من القطعتين المستقيمتين $[PQ]$ و $[MN]$، والرباعي $MPNQ$ متوازي الأضلاع لتناصف قطريه.

11 استعمال الدوران



ليكن $ABCD$ مربّعاً مركزه O. نتأمّل على القطعة المستقيمة $[AB]$ نقطة E، وعلى القطعة المستقيمة $[BC]$ نقطة F، ونقطة G على القطعة المستقيمة $[CD]$، ونقطة H على القطعة المستقيمة $[AD]$ بحيث يكون $AE=BF=CG=DH$. أثبت أنّ $EFGH$ مربّع.

الحل

ليكن $\mathcal{R}$ الدوران المباشر ربع دورة حول O. لمّا كان $\mathcal{R}([BA])=[AD]$ والدوران يحافظ على الأطوال استنتجنا أنّ صورة E (الواقعة على $[BA]$) وفق $\mathcal{R}$، هي نقطة من $[AD]$ تبعد عن $D=\mathcal{R}(A)$ بمقدار AE (أي بُعد A عن E)، فهي إذن H. أي $\mathcal{R}(E)=H$. ونبرهن بالمثل أنّ

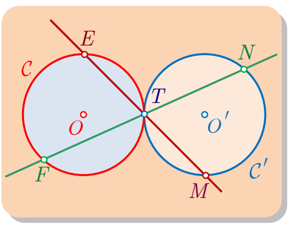
$$\mathcal{R}(F)=H \text{ و } \mathcal{R}(G)=F \text{ و } \mathcal{R}(H)=G$$

هذا يبرهن أنّ الرباعي $EFGH$ مربعٌ، مثلاً لأنّ

$$\mathcal{R}([GF])=[FH] \text{ و } \mathcal{R}([HG])=[GF] \text{ و } \mathcal{R}([EH])=[HG]$$

فالأضلاع متساوية الطول ومتعامدة.

12 استعمال التّناظر المركزيّ



$\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ دائرتان متماسّتان خارجاً في T، مركزاهما O و O' بالتّرتيب، ونصفا قطريهما متساويان. E و F نقطتان من الدائرة $\mathcal{C}$، مختلفتان عن T. المستقيم (ET) يقطع الدّائرة $\mathcal{C}'$ في نقطة M، ويقطع المستقيم (FT) الدّائرة $\mathcal{C}'$ في نقطة N. برهن أنّ الرّباعيّ $ENMF$ متوازي الأضلاع.

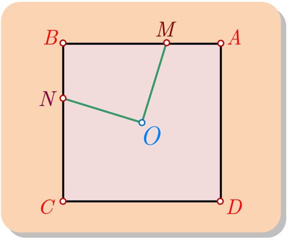
الحل

ليكن $\mathcal{S}_T$ التناظر المركزي حول T. نقطة التماس تقع على خط المركزين (OO') ولدينا استناداً إلى الفرض $TO=TO'$. نستنتج إذن أنّ $\mathcal{S}_T(O)=O'$ و $\mathcal{S}_T(\mathcal{C})=\mathcal{C}'$.

النقطة $\mathcal{S}_T(F)$ نقطة مشتركة بين المستقيم $(FT) = \mathcal{S}_T\ (FT)$ والدائرة $\mathcal{C}' = \mathcal{S}_T(\mathcal{C})$ فهي إذن N أي $\mathcal{S}_T(F) = N$.

ونرى بالمثل أنّ النقطة $\mathcal{S}_T(E)$ هي نقطة مشتركة بين المستقيم $(ET) = \mathcal{S}_T\ (ET)$ والدائرة $\mathcal{C}' = \mathcal{S}_T(\mathcal{C})$ فهي إذن M أي $\mathcal{S}_T(E) = M$. إذن T هي منتصف كل من القطعتين المستقيمتين $[FN]$ و $[EM]$، والرباعي $ENMF$ متوازي الأضلاع لتناصف قطريه.

13 استعمال الدوران بربع دورة



$ABCD$ مربّعٌ مركزه O، M نقطة واقعة على القطعة المستقيمة $[AB]$، و N نقطة من القطعة المستقيمة $[BC]$ تُحقِّق $\angle MON = 90°$.

برهن أنّ المثلث MON قائمٌ متساوي السّاقين.

الحل

ليكن $\mathcal{R}$ الدوران ربع دورة حول O الذي ينقل A إلى B. فيكون $\mathcal{R}([AB]) = [BC]$. لتكن M' صورة M وفق $\mathcal{R}$. إنّ M' نقطة من القطعة المستقيمة $[BC]$ وهي تقع أيضاً على المستقيم الذي يصنع مع (OM) زاوية قائمة فهي إذن N. أي $\mathcal{R}(M) = N$. ومنه $ON = OM$، والمثلث MON قائمٌ متساوي السّاقين.

14

ليكن $ABCD$ مربّعاً مركزه O، وليكن ABI و ADJ مثلّثين متساويَي الأضلاع مرسومين خارج المربّع $ABCD$. ليكن $\mathcal{S}$ الانعكاس الّذي محوره (AC).

① ❶ برهن أنّ $\angle JAC = \angle IAC = 105°$.

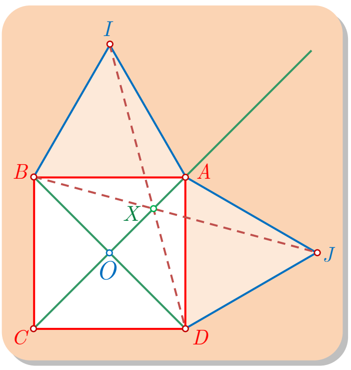
❷ استنتج أنّ المستقيم (AC) ينصّف الزّاوية $\angle JAI$ وأنّه عمودي على (JI).

❸ برهن أنّ $\mathcal{S}(I) = J$.

② ❶ ما هي صورة المستقيم (DI) وفق الانعكاس $\mathcal{S}$ ؟

❷ استنتج أنّ المستقيمات (DI) و (BJ) و (AC) تتلاقى في نقطة واحدة.

الحل



① ❶ من الواضح أنّ

$$\angle JAC = \angle JAD + \angle DAC = 60° + 45° = 105°$$

ونجد بالمثل $\angle IAC = 105°$.

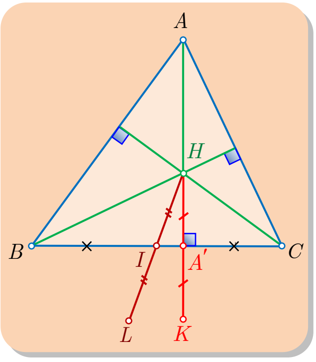
❷ نستنتج مما سبق أنّ (AC) منصف لزاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين IAJ (لأنّ $AJ = AD = AB = AI$)، فهو إذن محور القطعة المستقيمة $[IJ]$، وبوجه خاص $(AC) \perp (IJ)$.

❸ وجدنا أنّ (AC) هو محور القطعة المستقيمة $[IJ]$، إذن $\mathcal{S}(I) = J$.

② ❶ لمّا كان (AC) محور القطعة المستقيمة $[BD]$ (لأنّ A متساوية البعد عن B و D وكذلك بالنسبة إلى C)، استنتجنا أنّ $\mathcal{S}(D) = B$ ورأينا أنّ $\mathcal{S}(I) = J$، إذن $\mathcal{S}\ (ID)\ = (JB)$.

❷ لتكن X نقطة تقاطع المستقيمين (ID) و (JB). إنّ النقطة $\mathcal{S}(X)$ نقطة مشتركة بين صورتي المستقيمين (ID) و (JB) وفق $\mathcal{S}$، أي بين المستقيمين (ID) و (JB) نفسيهما، فهي إذن النقطة X ذاتها، أي $\mathcal{S}(X) = X$، فالنقطة X تقع على محور التناظر (AC) والمستقيمات (DI) و (BJ) و (AC) تتلاقى في نقطة واحدة.

15 ليكن ABC مثلّثاً. ولتكن I منتصف الضلع $[BC]$، و H نقطة تلاقي ارتفاعات المثلّث ABC. نسمّي K نظيرة النقطة H بالنّسبة إلى المستقيم (BC)، ونسمّي L نظيرة H بالنسبة إلى I.



① ❶ أثبت أنّ $BHCL$ متوازي أضلاع.

❷ استنتج أنّ المثلّثين ABL و ACL قائمان.

② ❶ أثبت أنّ (KL) يوازي (BC).

❷ استنتج أنّ المثلّث AKL قائم.

③ أثبت أنّ النقاط A و B و C و K تقع على الدّائرة التي قطرها $[AL]$.

④ أثبت صحّة الخاصّة : «إذا كانت H هي نقطة تلاقي ارتفاعات مثلّث ABC، وقعت نظائر النقطة H بالنسبة إلى أضلاع المثلّث على الدائرة المارّة برؤوس المثلّث».

الحل

① ❶ لمّا كانت I منتصف كل من $[BC]$ و $[HL]$ استنتجنا أنّ الرباعي $BHCL$ متوازي الأضلاع لتناصف قطريه.

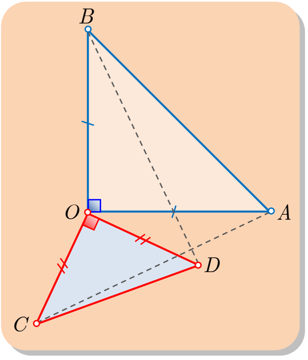
❷ استناداً إلى تعريف H لدينا $(HC) \perp (AB)$ ولكن $(HC) \parallel (BL)$ لأن $BHCL$ متوازي الأضلاع إذن $(LB) \perp (AB)$. ونبرهن بالمثل أنّ $(LC) \perp (AC)$. فالمثلثان ABL و ACL قائمان.

② ❶ لتكن A' نقطة تقاطع HK مع $[BC]$. لما كان (BC) محور القطعة $[KH]$ استنتجنا أنّ A' منتصف $[KH]$. إذن في المثلث AKL المستقيم (IA') يصل بين منتصفي الضلعين $[HL]$ و $[HK]$، فهو يوازي الثالثة أي $(LK) \parallel (BC)$.

❷ لما كان (BC) عمودي على (AK) وهو يوازي (KL) استنتجنا أن $(AK) \perp (KL)$ فالمثلث AKL قائم في K.

③ إنّ $[AL]$ وترٌ مشتركٌ في المثلثات القائمة ABL و AKL و ACL، فالدائرة التي AL قطر فيها، تمر برؤوس هذه المثلثات. والنقاط A و B و C و K تقع على هذه الدائرة.

④ أثبتنا فيما سبق أن النقطة K نظيرة النقطة H بالنسبة إلى (BC) تقع على الدائرة المارة برؤوس المثلث ABC. وبأسلوب مماثل نجد أنَّ نظيرة النقطة H بالنسبة إلى كل من الضلعين (AB) و (CA) تقع أيضاً على هذه الدائرة.



16 OAB و OCD مثلّثان قائمان ومتساويا السّاقين يشتركان بالرأس O. ليكن الدوران ربع الدورة المباشر $\mathcal{R}$ الذي مركزه O.

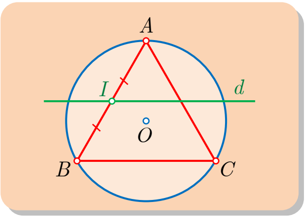
① ما هي صورة النقطة A وفق $\mathcal{R}$ ؟ ما صورة النقطة C ؟

② استنتج أنّ $AC = BD$، وأنّ $(AC) \perp (BD)$.

الحل

① وضوحاً لدينا $\mathcal{R}(A) = B$ و $\mathcal{R}(C) = D$.

② مما سبق نجد أنّ $[BD] = \mathcal{R}\ [AC]$، إذن $AC = BD$ و $AC \perp BD$.



17 لتكن O مركز الدّائرة $\mathcal{C}$ المارة برؤوس المثلّث المتساوي الأضلاع ABC، ولتكن I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$، و d مستقيمٌ يمرُّ بالنقطة I موازياً (BC). نرمز بالرمز $\mathcal{R}$ إلى الدوران المباشر الذي مركزه O وزاويته $120°$.

① ❶ ما صورة القطعة المستقيمة $[AB]$ وفق $\mathcal{R}$ ؟

❷ استنتج أنّ صورة النقطة I وفق $\mathcal{R}$ هي النقطة J منتصف $[BC]$.

② ❶ ما صورة المستقيم (BC) وفق $\mathcal{R}$ ؟

❷ استنتج أنّ صورة المستقيم d وفق $\mathcal{R}$ هي المستقيم (IJ).

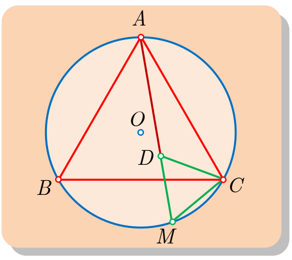
الحل

① ❶ وضوحاً لدينا $\mathcal{R}([AB]) = [BC]$ استناداً إلى خواص المثلث المتساوي الأضلاع.

❷ الدوران يحافظ على منتصف قطعة مستقيمة، إذن صورة I منتصف $[AB]$ وفق $\mathcal{R}$ هي النقطة J منتصف $[BC]$.

② ❶ صورة المستقيم (BC) وفق $\mathcal{R}$ هي المستقيم (CA).

❷ المستقيم d يوازي (BC)، ويمر بالنقطة I منتصف $[AB]$، فصورته $\mathcal{R}(d)$ مستقيم يمر بالنقطة $J = \mathcal{R}(I)$ منتصف $[BC]$ موازياً $(CA) = \mathcal{R}\ (BC)$، فهو إذن (IJ) المار بمنتصفي الضلعين $[BC]$ و $[BA]$. إذن $\mathcal{R}(d) = (IJ)$.



18 لتكن O مركز الدّائرة $\mathcal{C}$ المارة برؤوس المثلث المتساوي الأضلاع ABC، ولتكن M نقطة من القوس BC الذي لا يحوي A. D هي نقطة من $[AM]$ تُحقّق $MD = MC$.

① أثبت أنّ المثلّث DMC متساوي الأضلاع ؟

② نرمز بالرمز $\mathcal{R}$ إلى الدّوران المباشر الذي مركزه C وينقل A إلى B.

❶ ما صورة المثلّث ADC وفق $\mathcal{R}$ ؟

❷ استنتج أنّ $BM = AD$ وأنّ $MB + MC = MA$.

الحل

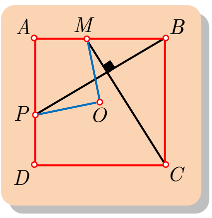
① لمّا كان $\angle AMC = \angle ABC = 60°$، لأنّ كان ABC مثلث متساوي الأضلاع والزوايا المحيطية في الدائرة التي تقابل القوس نفسه متساوية في قياساتها، استنتجنا أنّ المثلث المتساوي الساقين MDC متساوي الأضلاع لأن قياس إحدى زواياه يساوي $60°$.

② ❶ لدينا $\mathcal{R}(A) = B$ و $\mathcal{R}(D) = M$. ومنه صورة المثلث ADC وفق الدوران $\mathcal{R}$ هي المثلث BMC.

❷ نستنتج من كون $\mathcal{R}([AD]) = [BM]$ أنّ $AD = BM$. ولدينا $MD = MC$ إذن

$$MB + MC = AD + DM = AM$$

وهي النتيجة المطلوبة.

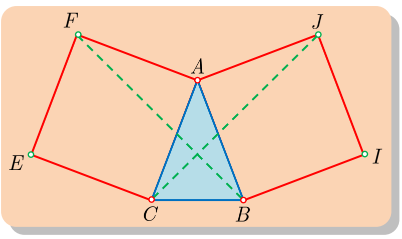


19 $ABCD$ مربّع مركزه O. M نقطة من الضلع $[AB]$. يقطع المستقيمُ المار بالنقطة B عموديّاً على المستقيم (CM) في (AD) في P. بالاستعانة بتحويل تختاره، أثبت أنّ المثلّث POM مثلّث قائم ومتساوي الساقين.

الحل

ليكن $\mathcal{R}$ الدوران ربع دورة حول O وينقل B إلى A. إنّ المستقيم (CM) $\mathcal{R}$ هو المستقيم العمودي على (CM) والمار بالنقطة $\mathcal{R}(C) = B$، فهو إذن (BP).

النقطة M هي نقطة تقاطع المستقيمين (CM) و (AB) فصورتها وفق $\mathcal{R}$ هي نقطة تقاطع صورتيهما وفق $\mathcal{R}$ أي (BP) و (AD) فهي إذن النقطة P. أي $\mathcal{R}(M) = P$. وهذا يبرهن أن المثلث POM متساوي الساقين وقائم في O.



20 ليكن ABC مثلّثاً متساوي الساقين، رأسه A. ننشئ خارجه مربّعين $ABIJ$ و $ACEF$. بالاستعانة بتحويل تختاره، أثبت أنّ $JC = BF$، وأنّ المستقيمين (CJ) و (BF) متعامدان.

الحل

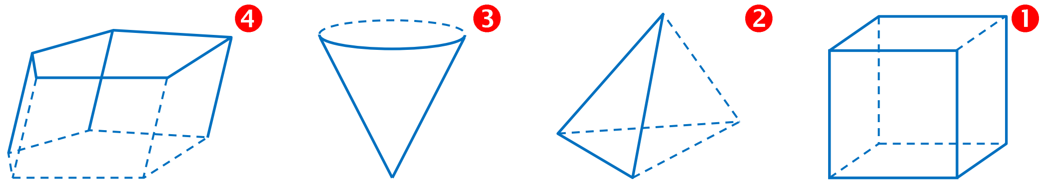
ليكن $\mathcal{R}$ الدوران ربع دورة الذي مركزه A وينقل F إلى C، إنَّ الدوران $\mathcal{R}$ ينقل B إلى J. نستنتج إذن أنّ $\mathcal{R}([FB]) = [CJ]$ ومنه $FB = CJ$ و $(FB) \perp (CJ)$، وهي النتيجة المرجوة.

2 الهندسة الفراغيّة

1. رسم المجسّمات بالمنظور
2. قواعد التّلاقي
3. التّوازي في الفراغ
4. التّعامد في الفراغ

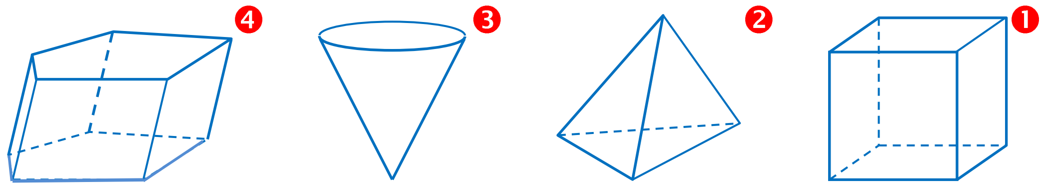
تدرّب – صفحة 7

① بيّن أيَّ الرُّسوم التالية، لا يمثّل مجسّماً تمثيلاً منظوريّاً، وأعدْ رسمه مُصحّحاً في دفترك.

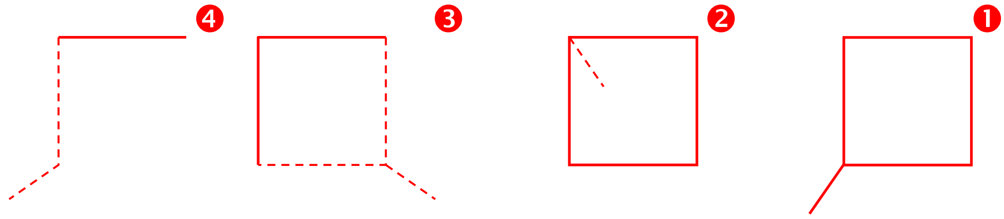


الحل

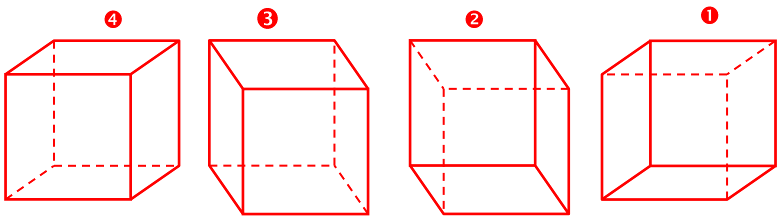
جميع الأشكال المعطاة لا تمثل مجسمات تمثيلاً منظورياً صحيحاً. لنصحّحها كما يأتي:



② أكملْ كلاً من الرّسوم التّاليةِ لتمثّل مكعّباً مرسوماً منظوريّاً.

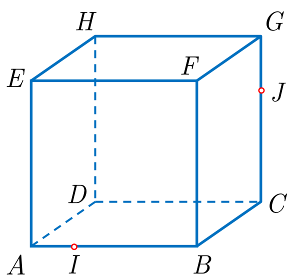


الحل



تدرّب – صفحة 9

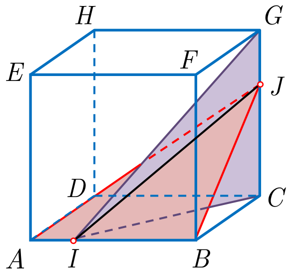
① ليكن $ABCDEFGH$ مكعّباً. ولتكن I نقطةً من الحرف $[AB]$ و J نقطة من الحرف $[CG]$.



❶ بالاستفادة من قواعد التّلاقي، أثبت أنّ النّقطتين I و J تنتميان في آن معاً إلى المستويين (ABJ) و (CGI).

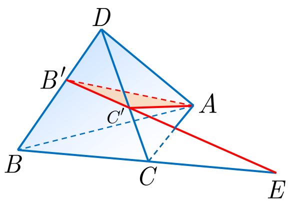
❷ ما هو إذن تقاطعُ المستويين (ABJ) و (CGI)؟

الحل



❶ I نقطة من المستقيم (AB) المحتوى في المستوي (ABJ) فهي نقطة من المستوي (ABJ)، وهي وضوحاً تنتمي إلى المستوي (CGI)، فهي تنتمي إذن إلى تقاطع المستويين (ABJ) و (CGI). ونبرهن بالمثل أنّ النقطة J تنتمي إلى تقاطع المستويين (ABJ) و (CGI).

❷ المستويان (ABJ) و (CGI) غير منطبقين، لأنّ G لا تنتمي إلى المستوي (ABC)، وهما يشتركان بالنقطتين I و J ، فتقاطعهما هو المستقيم (IJ).



② ليكن $ABCD$ رباعي وجوه. ولتكن B' نقطةً من الحرف $[BD]$ مختلفة عن B و D، و C' نقطةً من الحرف $[CD]$ مختلفةً عن C و D. نفترض أنّ المستقيمين $(B'C')$ و (BC) يتقاطعان في نقطة E. عيّن تقاطع المستويين (ABC) و $(AB'C')$.

الحل

من جهة أولى النقطة A تنتمي إلى كلٍّ من المستويين (ABC) و $(AB'C')$. ومن جهة ثانية تنتمي النقطة E إلى المستوي (ABC) لأنّها نقطة من المستقيم (BC) المحتوى فيه، وهي تنتمي كذلك إلى المستوي $(AB'C')$ لأنّها نقطة من المستقيم $(B'C')$. إذن يتقاطع المستويان (ABC) و $(AB'C')$ بالفصل المشترك (AE).

تدرّب – صفحة 12

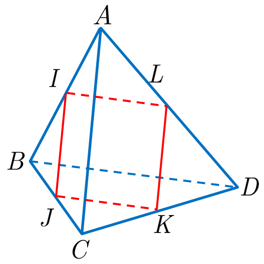
① في رباعيّ الوجوه $ABCD$، لتكن I منتصفَ $[AB]$، و J منتصفَ $[BC]$، و K منتصفَ $[CD]$، وأخيراً L منتصف $[AD]$.

❶ أثبت أنّ المستقيمين (IL) و (JK) متوازيان، وأنّ المستقيمين (IJ) و (KL) متوازيان.

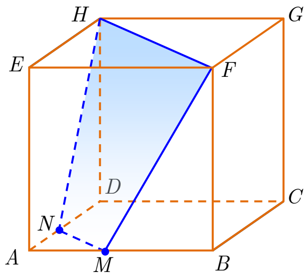
❷ ما نوعُ الرّباعي $IJKL$ ؟

الحل

الخاصة الأساسية التي علينا أن نتذكرها هي أنّ القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالثة، ولها نصف طولها.



❶ من المثلث ABD، نستنتج أنّ $(IL) \parallel (BD)$، ومن المثلث CBD نستنتج أنّ $(BD) \parallel (JK)$، إذن $(JK) \parallel (IL)$، لأنّ كلاً منهما يوازي (BD).
وبالمثل نجد أن $(LK) \parallel (IJ)$ لأن كلاً منهما يوازي (AC).
❷ الرباعي $IJKL$ متوازي أضلاع لتوازي كل ضلعين متقابلين فيه.

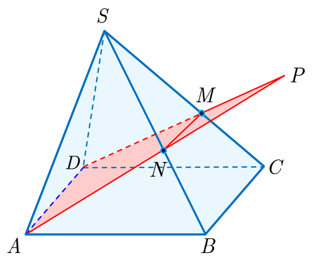


② ليكن لدينا المكعّب $ABCDEFGH$. ولتكن M نقطةً من $[AB]$، ولتكن N نقطة تقاطعِ المستوي (FHM) مع المستقيم (DA). أثبت توازي المستقيمين (FH) و (MN).

الحل

الفصل المشترك للمستويين $HFMN$ و $ABCD$ هو المستقيم MN . والفصل المشترك للمستويين $HFMN$ و $EFGH$ هو المستقيم HF . ولمّا كان المستوي $HFMN$ قاطعاً لمستويين متوازيين، كان الفصلان المشتركان لهذين المستويين $ABCD$ و $EFGH$ مع المستوي القاطع $HFMN$ متوازيين، أي $(HF) \parallel (MN)$.

③ ليكن لدينا الهرمُ $SABCD$ الّذي رأسه S وقاعدته متوازي الأضلاع $ABCD$. ولتكن M نقطةً من $[SC]$ ولتكن N نقطةً من $[SB]$. نفترض أنّ (MN) يوازي (BC).



❶ أثبت أنّ المستقيمين (AD) و (NM) متوازيان.
❷ في المستوي $(ADMN)$، يتقاطع المستقيمان (AN) و (DM) في النّقطة P.
☝ أثبت أنّ P تنتمي إلى كلٍّ من المستويين (SAB) و (SDC).
✌ أثبت أنّ المستقيم (SP) هو الفصل المشترك للمستويين (SAB) و (SDC).
👌 استنتج أنّ (SP) يوازي (AB).

الحل

❶ في متوازي الأضلاع $ABCD$ كل ضلعين متقابلين متوازيان، أي $(AD) \parallel (BC)$، ولدينا فرضاً أنّ $(BC) \parallel (MN)$، إذن $(AD) \parallel (MN)$ (لماذا ؟)

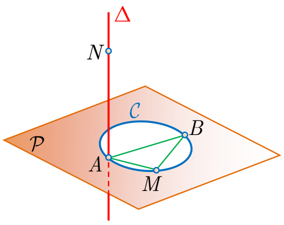
❷ المستقيم AN محتوى في المستوي SAB والنقطة P نقطة من هذا المستقيم، إذن P تنتمي إلى المستوي SAB . وبالمماثلة، المستقيم DM محتوى في المستوي SDC والنقطة P نقطة من هذا المستقيم إذن P تنتمي إلى المستوي SDC

لمّا كانت النقطتان S و P نقطتين مشتركتين بين المستويين SAB و SDC ، استنتجنا أنّ SP هو الفصل المشترك لهذين المستويين SAB و SDC .

لما كان $ABCD$ متوازي الأضلاع، كان $(AB) \parallel (DC)$، ولكن المستقيم AB محتوى في المستوي SAB والمستقيم DC ومحتوى في المستوي SDC ، فالفصل المشترك لهذين المستويين يوازي كلاً من المستقيمين AB و DC ، إذن $(AB) \parallel (SP)$.

تدرّب - صفحة 15

لتكن $\mathcal{C}$ دائرةً في المستوي P قطرها $[AB]$، وليكن Δ المستقيم العموديّ في A على المستوي P . نتأمّل نقطة M من $\mathcal{C}$، ونقطة N من Δ.



❶ أثبت أنّ المستقيمين (MA) و (MB) متعامدان.

❷ أثبت أنّ المستقيم (MB) عموديٌّ على المستوي (AMN).

❸ استنتج أنّ المستقيمين (MB) و (MN) متعامدان.

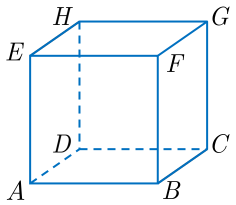
الحل

❶ الزاوية AMB محيطية تحصر قوس نصف الدائرة فهي قائمة في M إذن $(MA) \perp (MB)$.

❷ (MB) عمودي على كل من (MA) و (AN) إذن (MB) عمودي على المستوي (AMN).

❸ (MB) عمودي على (AMN) و (MN) محتوى في المستوي (AMN) إذن $(MN) \perp (MB)$.

تمرينات ومسائل



1 نتأمّل المكعّب $ABCDEFGH$. بيّن الإجابات الصحيحة من بين الإجابات الثّلاث المقترحة فيما يأتي:

♣ المستقيم (EA) يوازي :

① المستوي (HFB). ☑ ② المستقيم (HB). ③ المستقيم (CG). ☑

♣ المستوي (EAB) يوازي :

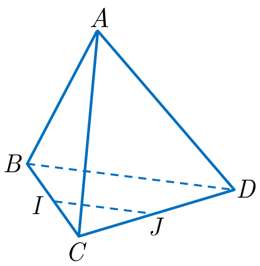
① المستقيم (HD). ☑ ② المستوي (HGC). ☑ ③ المستوي (HGB).

♣ المستقيم (HG) عمودي على :

① المستوي (FGC). ☑ ② المستوي (EAD). ☑ ③ المستقيم (AE). ☑

♣ إذا كان $AB = 2$ فطول القطعة المستقيمة $[HB]$ يساوي :

① $2\sqrt{3}$. ☑ ② $\sqrt{3}$. ③ $\sqrt{12}$. ☑



2 نتأمّل رباعيّ وجوه منتظم $ABCD$، أي وجوهه مثلّثات متساوية الأضلاع. لتكن النّقطة I منتصفَ $[BC]$ والنّقطة J منتصفَ $[CD]$.

بيّن الإجابات الصحيحة من بين الإجابات الثّلاث المقترحة فيما يأتي :

♣ المستقيم (IJ) يوازي :

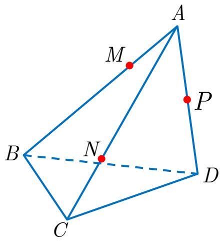
① المستقيم (BD). ☑ ② المستوي (BAD). ☑ ③ المستقيم (AB).

♣ تقاطع المستويين (AIJ) و (ABC) هو :

① المستقيم (AB). ② المستقيم (AI). ☑ ③ المستقيم (IJ).

♣ في رباعي الوجوه $ABCD$ يكون :

① $AI = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$. ☑ ② AIJ متساوي السّاقين. ☑ ③ AIJ متساوي الأضلاع.

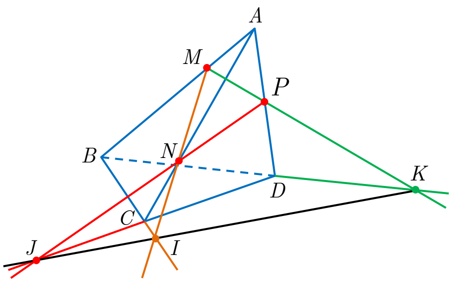


3 نتأمّل رباعي وجوه $ABCD$. النّقطة M هي النّقطة من القطعة المستقيمة $[AB]$ التي تُحقِّق المساواة $AM = \frac{1}{4}AB$، والنّقطة N هي النّقطة من $[AC]$ الّتي تُحقّق المساواة $AN = \frac{3}{4}AC$، وأخيراً، النّقطة P هي منتصف $[AD]$.

① أثبت أنّ (MN) يقطع (BC)، وأنّ (NP) يقطع (CD)، وأنّ (MP) يقطع (BD).

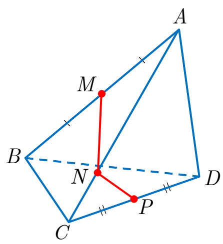
② نسمّي I و J و K نقاط التّقاطع السّابقة بالتّرتيب. أثبت وقوعَ هذه النّقاط على استقامةٍ واحدة.

الحل



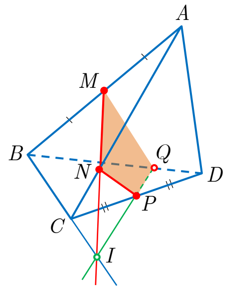
① يقع المستقيمان (MN) و (BC) في المستوي (ABC)، ولدينا $\frac{AN}{AC} = \frac{3}{4}$ و $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{4}$ إذن $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$، فهما غير متوازيين ولا بُدّ أن يتقاطعا في نقطة نسميها I.
ونبرهن بالمثل أنّ المستقيمين (MP) و (BD) يتقاطعان في نقطة نسميها K، و أنّ المستقيمين (NP) و (CD) يتقاطعان نقطة نسميها J.

② النقطة I تقع على المستقيم (BC) فهي نقطة من المستوي (BCD)، وكذلك نجد أنّ النقطتين J و K تنميان إلى المستوي (BCD). وبالمثل نرى أنّ النقاط I تقع على المستقيم (MN) فهي نقطة من المستوي (MNP)، وكذلك تنتمي النقطتان J و K تنميان إلى المستوي (MNP).
إذن تنتمي النقاط I, J, K إلى الفصل المشترك للمستوين (BCD) و (MNP) فهي تقع على استقامة واحدة.



4 نتأمّل رباعيّ وجوهٍ $ABCD$. لتكن M منتصف $[AB]$، ولتكن P منتصفَ $[CD]$، وأخيراً لتكن N نقطةً من $[AC]$ تُحقِّق $AN = \frac{3}{4}AC$.
المطلوب هو رسم تقاطع المستوي (MNP) مع وجوه رباعيّ الوجوه $ABCD$.

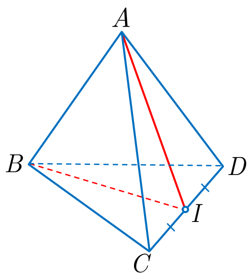
الحل



M و N نقطتان مشتركتان بين الوجهين ABC و MNP إذن MN هو الفصل المشترك لهذين المستويين، وبالمثل نجد أن NP هو الفصل المشترك للمستويين ACD و MNP .

من جهة أخرى يقع المستقيمان MN و BC يقعان في المستوي ABC وهما غير متوازيين لأنّ $\frac{AN}{CN} \neq \frac{AM}{BM}$. لتكن I نقطة تقاطعهما.

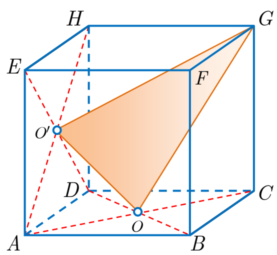
I و P نقطتان مشتركتان بين الوجهين BCD و MNP ، إذن المستقيم IP هو الفصل المشترك لهذين المستويين. لتكن Q نقطة تقاطع المستقيم IP مع (BC)، فتكون القطعة المستقيمة $[PQ]$ هي تقاطع الوجه BCD مع المستوي (MNP). وأخيراً نرى أنّ القطعة المستقيمة $[QM]$ هي تقاطع الوجه ABD مع المستوي (MNP). بالنتيجة: تقاطع المستوي (MNP) مع رباعي الوجوه $ABCD$ هو الشكل الرباعي $MNPQ$.



5 نتأمّل رباعيَّ وجوهٍ منتظماً $ABCD$. ونضعُ عليه النقطة I منتصف $[CD]$. نرسم القطعتين المستقيمتين $[AI]$ و $[BI]$. المطلوب إثبات أنّ المستقيمين (AB) و (CD) متعامدان.

الحل

كل وجه من رباعي الوجوه المنتظم هو مثلث متساوي الأضلاع. $[AI]$ متوسط في المثلث ACD فهو محور القطعة $[CD]$ إذن $(CD) \perp (AI)$، وبالمثل نجد أن $(CD) \perp (BI)$. إذن (CD) عمودي على مستقيمين متقاطعين في المستوي (ABI)، فهو إذن عمودي على جميع مستقيمات هذا المستوي وخصوصاً على المستقيم (AB).



6 نتأمّل مكعّباً $ABCDEFGH$ طول ضلعه $4\,\text{cm}$. فيه O و O' مركزا الوجهين $ABCD$ و $ADHE$ بالترتيب. احسب أطوال أضلاع المثلّث OGO' .

الحل

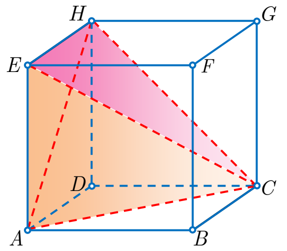
عندما نريد حساب أطوال أو زوايا في الفراغ نبحث عن أشكال مستوية حتى نتمكن من الاستفادة من المبرهنات المعروفة مثل مبرهات تالس، وفيثاغورث وغيرهما.

في المثلث AHC، تصل القطعة المستقيمة $[OO']$ بين منتصفي الضلعين $[AC]$ و $[AH]$، فهي توازي الضلع الثالثة، وطولها يساوي نصف طول الضلع الثالثة $[HC]$، التي هي قطر المربع $CGHD$. إذن $HC = 4\sqrt{2}$ و $OO' = 2\sqrt{2}$.

$[OG]$ هو وتر في المثلث القائم OGC القائم في C. إذن استناداً إلى مبرهنة فيثاغورث نجد

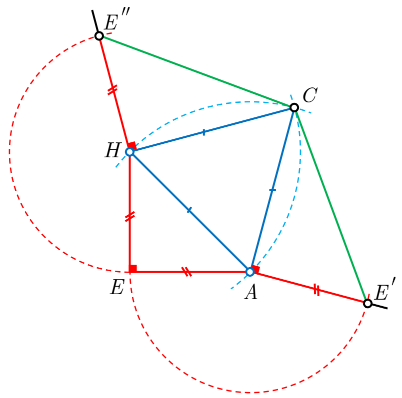
$$OG^2 = OC^2 + CG^2 = 8 + 16 = 24$$

ومنه $OG = 2\sqrt{6}$. وأخيراً، $O'G = OG = 2\sqrt{6}$، لتطابق المثلثين OCG و OHG.



7 نتأمّل مكعّباً $ABCDEFGH$ طول ضلعه $4\,\text{cm}$. ارسم مخططاً شبكيّاً يمثّل الشّكل المستوي المتّصل الممثِّل لسطح رباعيّ الوجوه $EACH$.

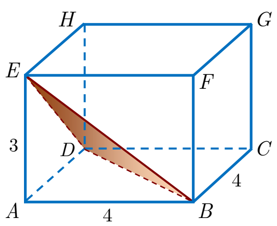
الحل



1. أسهل الوجوه رسماً هو المثلث AEH لأنه قائم في E وطول ضلعه القائمة $4\,\text{cm}$ فنرسمه أولاً.
2. المثلث HAC مثلث متساوي الأضلاع، ولقد أنشأنا الضلع $[HA]$ فهذا ما يسمح لنا برسم النقطة C.
3. المثلث CAE مثلث قائم في A، فنقوم بإنشائه على $[AC]$.
4. المثلث CHE مثلث قائم في H، فنقوم بإنشائه على $[HC]$.

انظر الشكل المجاور.

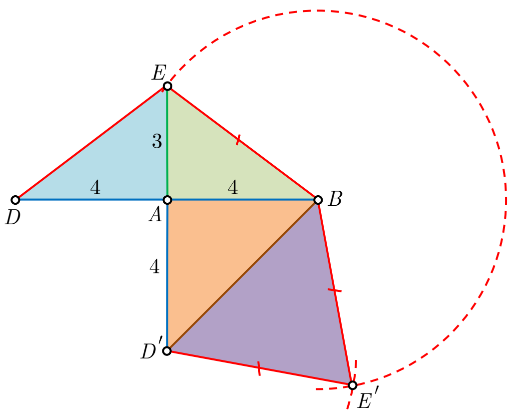
8 ليكن $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات، فيه : $AB = BC = 4\,\text{cm}$ و $AE = 3\,\text{cm}$.



① أثبت أنّ المثلّثَ EBD مثلّثٌ متساوي السّاقين.

② ارسم بالقياس الحقيقيّ مخططاً شبكيّاً يمثّل الشّكل المستوي المتّصل الموافق لسطح $EABD$.

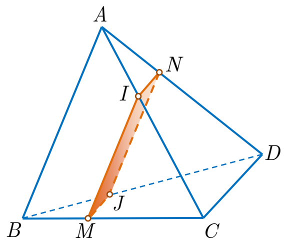
الحل



① المثلثان EAB و EAD، القائمان في A، طبوقان لأن $AB = AD = 4\text{cm}$، و $[EA]$ ضلع مشتركة. إذن $EB = ED$.

② انظر الشكل المجاور.

9 ليكن لدينا رباعيُّ الوجوه $ABCD$. ولتكن M نقطة من $[BC]$.
نرسمُ من M مستقيماً موازياً للمستقيم (AB) فيقطعُ (AC) في I،
ونرسمُ كذلك مستقيماً موازياً للمستقيم (CD) فيقطعُ (BD) في J،
المستوي (MIJ) يقطع المستقيم (AD) في N.



① أثبت أنّ كلاً من المستقيمين (IN) و (MJ) يوازي المستقيم (CD).
② أثبت أنّ كلاً من المستقيمين (JN) و (IM) يوازي المستقيم (AB).
③ ما نوع الرباعيّ $IMJN$؟

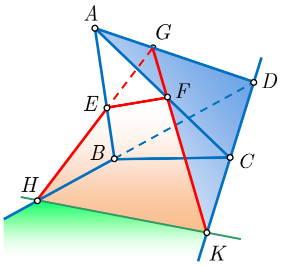
الحل

① لما كان $(MJ) \parallel (CD)$، والمستقيم (MJ) محتوى في (MIJ)، و (CD) محتوى في (ACD) استنتجنا أن الفصل المشترك (IN) لهذين المستويين مستقيم يوازي (CD).

② وكذلك لما كان $(MI) \parallel (AB)$، والمستقيم (MI) محتوى في (MIJ)، و (AB) محتوى في (ABD) استنتجنا أن الفصل المشترك (NJ) لهذين المستويين مستقيمٌ يوازي (AB).

③ وجدنا أنّ $(MJ) \parallel (IN)$ و $(MI) \parallel (JN)$ فالرباعي $IMJN$ متوازي أضلاع لأن كل ضلعين متقابلين فيه فمتوازيان.

10 ليكن لدينا رباعيُّ الوجوه $ABCD$. ولتكن E نقطةً من $[AB]$، و F نقطةً من $[AC]$، و G نقطةً من $[AD]$. نفترض أنّ المستقيمين (EF) و (BC) غير متوازيين. وكذلك الأمر بالنّسبة إلى المستقيمين (FG) و (CD) والمستقيمين (EG) و (BD).



① عيّن تقاطع المستوي (EFG) مع كلٍّ من المستويات (ABC) و (ACD) و (ABD).
② لإنشاء تقاطع المستوي (EFG) مع المستوي (BCD) فعلنا ما يأتي :
" عرّفنا K نقطة تقاطع (GF) مع (CD)، وعرّفنا H نقطة تقاطع (GE) مع (BD).
فيكون المستقيم (HK) هو تقاطع المستويين (EFG) و (BCD). "
أثبت صحّة هذا الإنشاء.
③ لتكن I نقطة تقاطع (EF) مع (BCD). هل تتقاطعُ المستقيماتُ (BC) و (HK) و (EF) في I؟

الحل

① وضوحاً لدينا

$$(EFG)\cap(ABD)=(EG) \text{ و } (EFG)\cap(ACD)=(FG) \text{ و } (EFG)\cap(ABC)=(EF)$$

② K هي نقطة تقاطع المستقيم (GF) المحتوى في المستوي (EFG) مع المستقيم (CD) المحتوى في المستوي (BCD) ، فالنقطة K تنتمي إلى الفصل المشترك لهذين المستويين. وكذلك نرى أنّ النقطة H تنتمي إلى الفصل المشترك للمستويين (EFG) و (BCD). إذن (HK) هو الفصل المشترك للمستويين المذكورين.

③ تنتمي النّقطة I إلى المستقيم (EF) وتنتمي كذلك إلى المستوي (BCD). ولما كان (EF) هو الفصل المشترك للمستويين (EFG) و (ABC) وجدنا أنّ النّقطة I تنتمي إلى المستوي (ABC)، إذن تنتمي I تنتمي إلى الفصل المشترك (BC) للمستويين (ABC) و (BCD).

ولما كان (HK) هو الفصل المشترك للمستويين (EFG) و (BCD) وجدنا أنّ النّقطة I تنتمي إلى المستقيم (HK)، ونعلم أنّ I تقع على (EF)، إذن I هي نقطة مشتركة بين المستقيمات الثلاثة (BC) و (HK) و (EF).

11 ليكن $ABCDEFGH$ مكعّباً طول ضلعه $4\,\text{cm}$، وليكن O مركز المربّع $EFGH$.

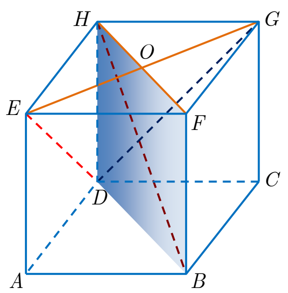
① أثبت أنّ المستقيم (OD) هو الفصل المشترك للمستويين (EDG) و $(HDBF)$.

② ارسم بالقياس الحقيقيّ المستطيل $HFBD$ وعيّن عليه النّقطة O.

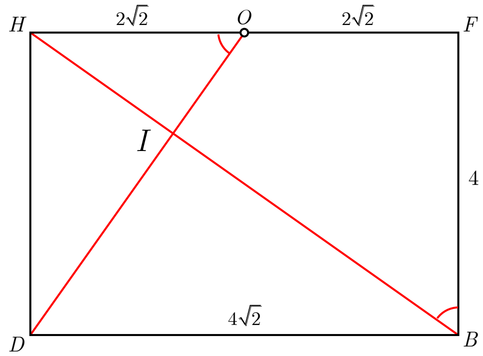
③ أثبت أنّ المستقيمين (HB) و (OD) متعامدان.

④ أثبت كذلك تعامد المستقيمين (HD) و (EG). واستنتج أنّ (EG) عموديٌّ على المستوي $(HFBD)$، وأنّه عموديٌّ على (HB).

⑤ أثبت أنّ (HB) عموديٌّ على المستوي (DEG).



الحل

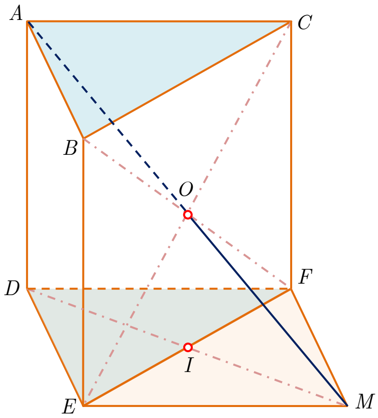


① تقع النقطة O على المستقيم (EG)، فهي تنتمي إلى المستوي (EDG)، وهي تقع أيضاً على المستقيم (HF) فهي تنتمي إلى المستوي $(HDBF)$. فالنقطتان O و D نقطتان مشتركتان بين المستويين (EDG) و $(HDBF)$، فالمستقيم (OD) هو الفصل المشترك لهذين المستويين.

③ لمّا كان $\tan FBH = \dfrac{4\sqrt{2}}{4} = \dfrac{4}{2\sqrt{2}} = \tan HOD$ استنتجنا أنّ $HOD = FBH$ لأنّ هاتين الزاويتين حادتان، فالرباعي $OIBF$ دائري ومن ثَمّ $OIB = OFB = \dfrac{\pi}{2}$ أو $(OD)\perp(HB)$.

④ المستقيم (HD) عمودي على المستوي $(EFGH)$ فهو عمودي على جميع المستقيماتالمحتواة فيه، وعلى $(HD) \perp (EG)$؛ وفي الوقت نفسه $(HF) \perp (EG)$ لأنّ قطري المربع متعامدان. إذن (EG) عمودي على مستقيمين متقاطعين في المستوي $HFBD$ فهو عمودي على المستوي، ومنه EG يعامد أي مستقيم محتوى في هذا المستوي. وبوجه خاص $(HB) \perp (EG)$.

⑤ وجدنا أنّ $(OD) \perp (HB)$ وأنّ $(EG) \perp (HB)$، إذن (HB) عمودي على مستقيمين متقاطعين في المستوي (DEG)، فهو عمودي على هذا المستوي.



12 ليكن $ABCDEF$ موشوراً قائماً قاعدتاه ABC و DEF.
ولتكن النّقطة I منتصف (EF) و O مركز المستطيل $BCFE$. وأخيراً لتكن M نقطة تقاطع (AO) مع المستوي (DEF). أثبت أنّ الرباعي $EDFM$ متوازي الأضلاع.

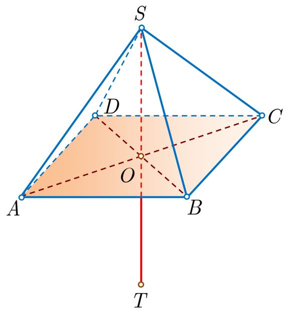
الحل

F و M نقطتان مشتركتان بين المستويين (OAB) و (DEF)، إذن (FM) هو الفصل المشترك لهذين المستويين. ولكن (AB) مستقيم من (OAB) و (DE) مستقيم من (DEF) وهذان المستقيمان متوازيان لأنّ $ABED$ مستطيل، إذن الفصل المشترك (FM) يوازي (DE).

وبالمثل E و M نقطتان مشتركتان بين المستويين (OAC) و (DEF)، إذن (EM) هو الفصل المشترك لهذين المستويين. ولكن (AC) مستقيم من (OAC) و (DF) مستقيم من (DEF) وهذان المستقيمان متوازيان لأنّ $ACFD$ مستطيل، إذن الفصل المشترك (EM) يوازي (DF).

نستنتج مما سبق أنّ $EDFM$ متوازي الأضلاع لأنّ $(FM) \parallel (DE)$ و $(EM) \parallel (DF)$.

13 ليكن $SABCD$ هرماً منتظماً قاعدته المربّع $ABCD$ الذي مركزه O. نفترض أنّ:



$$OS = OA = OB = OC = OD = a$$

ونعرّف T نظيرة S بالنّسبة إلى O.

① أثبت أنّ $SAC = 45°$ و $SBD = 45°$.

② أثبت أنّ الرباعيَّين $SATC$ و $SBTD$ مربّعان.

③ أثبت أنّ الوجوه الثمانية للمجسّم $SABCDT$ مثلّثاتٌ متساوية الأضلاع. ما اسم هذا المجسّم؟

الحل

① لما كان $SABCD$ هرماً منتظماً استنتجنا أنّ SOA قائم في O ومن ثَمّ

$$\tan SAO = \frac{OS}{OA} = 1$$

وعليه $SAC = 45^\circ$. ونجد بالمثل أنّ $SBD = 45^\circ$.

② قطرا الرباعي $SATC$ متعامدان ومتناصفان ومتساويان. إذن $SATC$ مربّع، وكذلك نجد أنّ $SBTD$ مربّع أيضاً.

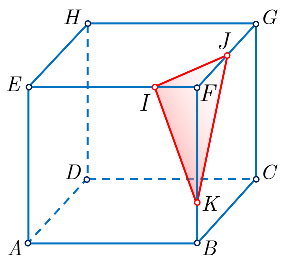
③ لاحظ أنّ كل حرف من حروف هذا المجسم هو وتر مثلث قائم ومتساوي الساقين طول ضلعه يساوي a ، فطول كل حرف يساوي $a\sqrt{2}$ ، وجميع وجوه المجسم مثلثات متساوية الأضلاع. يسمى هذا المجسم ثماني وجوه منتظم.

14 ليكن $ABCDEFGH$ مكعّباً طول ضلعه $4\,\text{cm}$. ولتكن I نقطة من $[FE]$، و K نقطة من $[FB]$ و J نقطة من $[FG]$ تُحقّق الشروط:

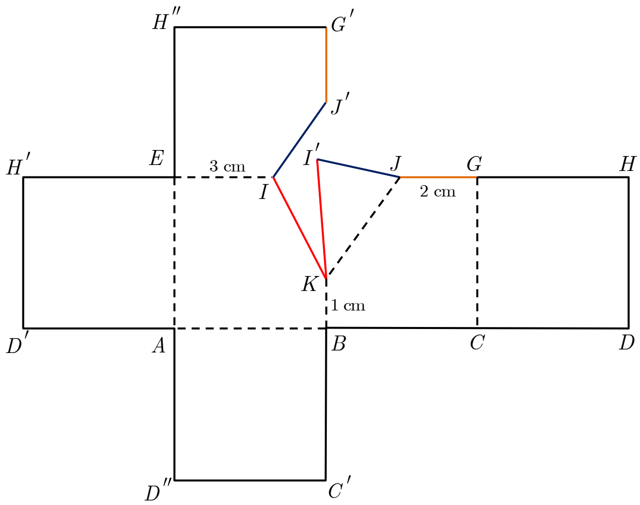
$$FI = 1\,\text{cm} \quad \text{و} \quad FJ = 2\,\text{cm} \quad \text{و} \quad FK = 3\,\text{cm}$$

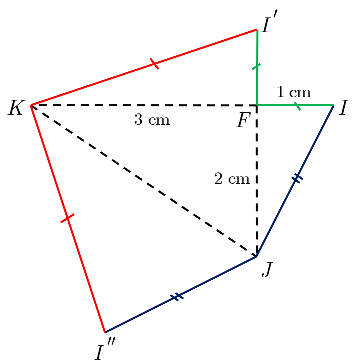
ارسم بالقياس الحقيقي مخطّطاً شبكيّاً مستوياً متّصلاً لسطحَيْ جزأَيْ المكعّب بعد قطعه وفق المستوى (IJK) .

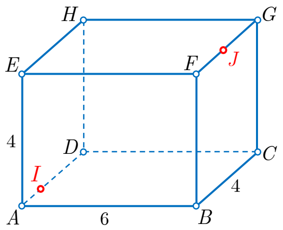
مساعدة : استعمل الفرجار لتتجنّب حساب IJ و JK و KI .



الحل







15 لتكن $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات، فيه:

$AE = BC = 4\,\text{cm}$ و $AB = 6\,\text{cm}$.

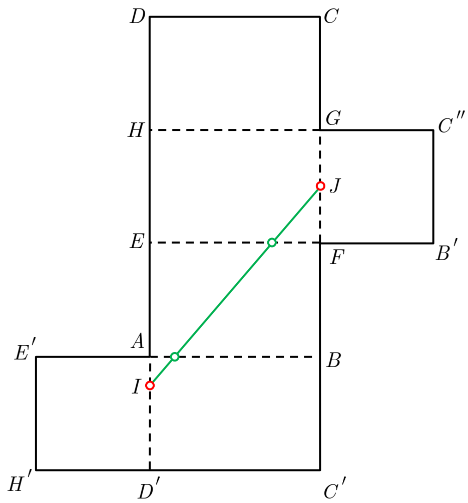
لتكن النقطة J منتصف $[FG]$، والنقطة I من $[AD]$ التي تحقّق الشّرط $AI = 1\,\text{cm}$.

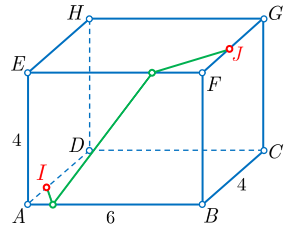
ارسم، على سطح متوازي المستطيلات هذا، أقصر طريق يصل بين I و J .

مساعدة : ارسم بالقياس الحقيقيّ مخطّطاً شبكيّاً مستوياً متّصلاً مناسباً لسطح $ABCDEFGH$.

الحل

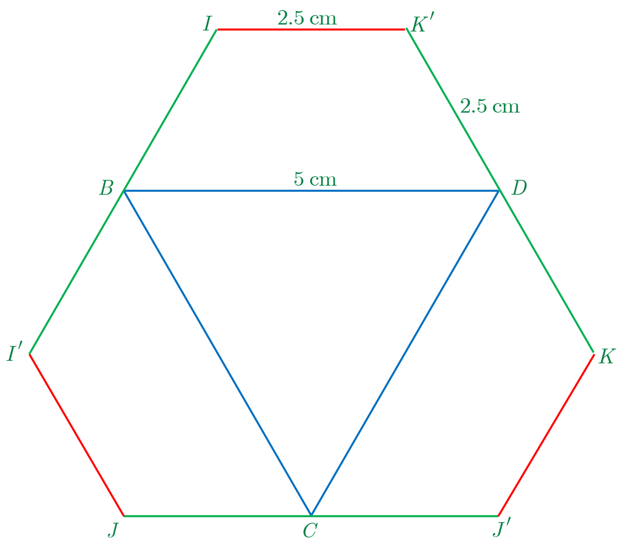
تجب مناقشة الحلول المختلفة الممكنة، وتعيين أقصر الطرق بين I و J. الشكل المجاور يبين أنّ طول أقصر طريق يساوي $\sqrt{85}$، ولقد رسمناه على متوازي المستطيلات كما يلي :



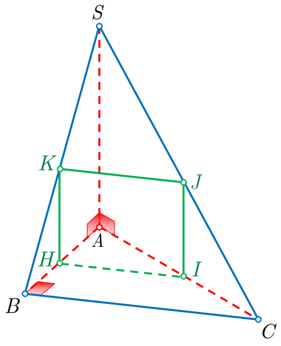


16 لتكن لدينا رباعيّ الوجوه المنتظم $ABCD$، نفترض أنّ $AB = 5\,\text{cm}$. ولتكن I و J و K منتصفات حروفه $[AB]$ و $[AC]$ و $[AD]$ بالترتيب. ارسم بالقياس الحقيقيّ مخطّطاً شبكيّاً مستوياً متّصلاً يمثّل سطح المجسّم الذي نحصل عليه بعد حذف رباعيّ الوجوه $AIJK$ من رباعيّ الوجوه $ABCD$.

الحل



17 ليكن رباعيّ الوجوه $SABC$ الذي نفترض فيه أنّ (SA) عموديٌّ على (ABC) وأنّ المثلّث ABC قائمٌ في B.



① ❶ أثبت أنّ المستقيمين (BC) و (SA) متعامدان.

❷ أثبت أنّ المثلّث SBC قائم في B.

② لتكن H نقطة من $[AB]$، نرسم المستوي المارّ بالنّقطة H عموديّاً على (AB)، فيقطع (AC) في النّقطة I، ويقطع (SC) في J، ويقطع (SB) في K.

❶ أثبت أنّ المستقيمين (BC) و (HI) متوازيان.

❷ أثبت أنّ المستقيمين (HI) و (KJ) متوازيان.

❸ أثبت كذلك أنّ المستقيمين (KH) و (SA) متوازيان. واستنتج توازي (KH) و (IJ).

❹ أثبت أنّ $HIJK$ مستطيل.

③ نفترض أنّ $AB = 1$ وأنّ $SA = BC = 2$ وأنّ $AH = x$.

❶ أثبت أنّ $HI = 2x$ بتطبيق نظريّة تالس في المثلّث ABC.

❷ أثبت أنّ $HK = 2\ 1-x$ بتطبيق نظريّة تالس في المثلّث SAB.

❸ احسب $\mathcal{A}(x)$: مساحة المستطيل $HIJK$ بدلالة x.

④ ❶ أثبت أنّ $4x\ 1-x\ = 1-\ 1-2x\ ^2$.

❷ ما هي قيمة x الّتي تجعل $\mathcal{A}(x)$ أكبر ما يمكن؟ عيّن عندئذ موضع H على $[AB]$ وبيّن طبيعةَ الرّباعيّ $HIJK$ في هذه الحالة.

الحل

① ❶ (SA) عمودي على المستوي (ABC) الذي يحوي المستقيم (BC) إذن $(SA) \perp (BC)$.

❷ المستقيم (BC) عمودي على المستقيمين المتقاطعين (AB) و (SA) فهو عمودي على المستوي (SAB)، فهو عمودي على جميع مستقيمات هذا المستوي وخصوصاً المستقيم (SB). المثلث SBC قائم في B.

② ❶ لما كان $(AB) \perp (HIJK)$ ، كان $(AB) \perp (HI)$. و لدينا فرضاً أنّ $(AB) \perp (BC)$ لأنّ المثلث ABC قائم في B. وهكذا يكون المستقيمان (BC) و (HI) من المستوي (ABC) عموديين على المستقيم (AB) فهما متوازيان.

❷ يتقاطع المستويان (SBC) و $(HIJK)$ بالفصل المشترك (JK). والمستقيم (BC) من المستوي (SBC) يوازي المستقيم (HI) من المستوي $(HIJK)$ ففصلهما المشترك (JK) يوازي كلاً من المستقيمين (BC) و (HI).

❸ لما كان $(AB) \perp (AS)$ و $(AB) \perp (KH)$، كان المستقيمان (AS) و (HK) من المستوي (SAB) عموديين على المستقيم (AB) فهما متوازيان.

يتقاطع المستويان (SAC) و $(HIJK)$ بالفصل المشترك (IJ). والمستقيم (AS) من المستوي (SAC) يوازي المستقيم (HK) من المستوي $(HIJK)$ ففصلهما المشترك (IJ) يوازي كلاً من المستقيمين (AS) و (HK).

❹ الرباعي $HIJK$ متوازي أضلاع فيه $(AS) \perp (HI)$ فهو مستطيل.

③❶ في المثلث ABC لدينا $HI \parallel BC$ ، نجد حسب المبرهنة الأساسية في التشابه:

$$\frac{HI}{BC} = \frac{AH}{AB} \text{ أو } \frac{HI}{2} = \frac{x}{1} \text{ ومنه } HI = 2x .$$

❷ في المثلث SAB لدينا $KH \parallel AS$ ، إذن حسب المبرهنة الأساسية في التشابه نجد

$$\frac{HK}{SA} = \frac{BH}{AB} \text{ أو } \frac{HK}{2} = \frac{1-x}{1} \text{ و منه } HK = 2\ \ 1-x$$

❸ مساحة المستطيل $HIJK$ تساوي:

$$\mathcal{A}(x) = HI \cdot HK = 2x \cdot 2(1-x) = 4x \cdot (1-x)$$

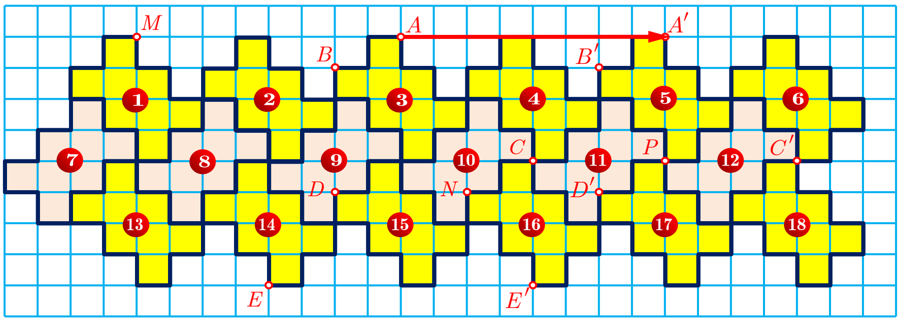
④❶ وضوحاً.

❷ يبلغ المقدار $\mathcal{A}(x) = 1-(1-2x)^2$ أكبر قيمة له عندما يبلغ المقدار $1-2x\ ^2$ أصغر قيمة له وهي 0، عندما $x = \frac{1}{2}$، وعندها تكون مساحة المستطيل $1 = 1 - 0 = \frac{1}{2}\ \ \mathcal{A}$، حيث تقع H في منتصف $[AB]$ ويكون $HK = HI = 1$ والرباعيُّ $HIJK$ مربّعاً.

3 الأشعّة والهندسة التّحليليّة

1. مقدّمة عامّة
2. الأشعّة والمساواة الشّعاعيّة
3. جمع الأشعّة وطرحها
4. ضرب شعاع بعدد حقيقيّ
5. الارتباط الخطيّ لشعاعين
6. مقدّمة في الهندسة التّحليليّة

لنتأمّل الشّكل الآتي النّاتج عن رصف مقاطع زخرفيّة متماثلة، ولنحاول الإجابة عن الأسئلة الآتية :



① انسحابات مختلفة

❶ في كلٍّ من الحالات الآتية عيّن صورة كلٍّ من المقطعين ❸ و ❹ وفق الانسحاب:

- $T_{A\to A'}$ الّذي ينقل A إلى A'.
- $T_{A\to P}$ الّذي ينقل A إلى P.
- $T_{A\to M}$ الّذي ينقل A إلى M.
- $T_{D\to N}$ الّذي ينقل D إلى N.

❷ لنحاول فهم لماذا كان لهذه الانسحابات تأثيرات مختلفة على المقاطع الزخرفية.

- أيكون للمستقيمين (AA') و (AP) **المنحى** نفسه ؟ أي هل هما متوزيان ؟
- للمستقيمات (AA') و (AM) و (DN) المنحى نفسه. قارن **جهة** الانتقال، من A إلى A'، ومن A إلى M، ومن D إلى N.
- قارن **طولَي** AA' و DN.

الحل

❶

- $T_{A\to A'}(❸)=❺$ و $T_{A\to A'}(❹)=❻$.
- $T_{A\to P}(❸)=⓱$ و $T_{A\to P}(❹)=⓲$.
- $T_{A\to M}(❸)=❶$ و $T_{A\to M}(❹)=❷$.
- $T_{D\to N}(❸)=❹$ و $T_{D\to N}(❹)=❺$.

❷

- لا ليس للمستقيمين (AA') و (AP) المنحى نفسه، فهما غير متوازيين.
- نعم للمستقيمات (AA') و (AM) و (DN) المنحى نفسه.

جهة الانتقال من A إلى A' هي نفسه جهة الانتقال من D إلى N ، أما جهة الانتقال من A إلى M فهي جهة معاكسة لجهة الانتقال من A إلى A'.

- طولُ AA' لا يساوي طول DN.

② انسحابات متماثلة

❶ في كلٍّ من الحالات الآتية عيّن صورة كلٍّ من المقاطع ❷ و ❸ و ❹ و ❼ وفق الانسحاب:

- $T_{A\to A'}$ الّذي ينقل A إلى A'.
- $T_{B\to B'}$ الّذي ينقل B إلى B'.
- $T_{C\to C'}$ الّذي ينقل C إلى C'.
- $T_{D\to D'}$ الّذي ينقل D إلى D'.
- $T_{E\to E'}$ الّذي ينقل E إلى E'.

❷ اشرح لماذا كان لهذه الانسحابات التأثير نفسه على المقاطع الزخرفيّة.

❸ باستعمال نقاط أخرى من الشّكل، اذكر انسحاباً آخر تأثيره على المقاطع الزخرفية يماثل تأثير الانسحاب $T_{A\to A'}$.

الحل

- $T_{A\to A'}(❷) = ❹$ و $T_{A\to A'}(❸) = ❺$ و $T_{A\to A'}(❹) = ❻$ و $T_{A\to A'}(❼) = ❾$.
- ونحصل على النتائج نفسها في حالة الانسحابات $T_{B\to B'}$ و $T_{C\to C'}$ و $T_{D\to D'}$ و $T_{E\to E'}$.

❷ لأنها تشترك بالمنحى والجهة ومسافة الانتقال.

❸ الانسحاب $T_{M\to A}$ مثلاً.

③ الأشعّة

❶ يقول ساطع "الشّعاعان $\overrightarrow{AA'}$ و $\overrightarrow{A'A}$ متماثلان". اشرح لماذا جافاه الصواب.

❷ باستعمال النّقاط في الشّكل، اذكر أشعة أخرى تمثّل كلاً من الشّعاعين $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{ED}$.

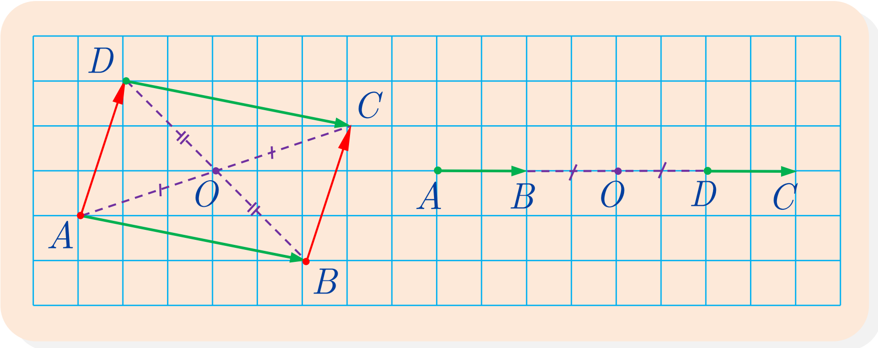
الحل

❶ لأن مبدأ الشعاع $\overrightarrow{AA'}$ هو النّقطة A و نهايته النّقطة A'، في حين أنّ مبدأ الشعاع $\overrightarrow{A'A}$ هو النّقطة A' و نهايته النّقطة A، فليس لهما الجهة نفسها.

❷ أشعة أخرى تمثّل الشعاع $\overrightarrow{BC}$ هي $\overrightarrow{B'C'}$ و $\overrightarrow{DE'}$، أشعة أخرى تمثّل الشعاع $\overrightarrow{ED}$ هي $\overrightarrow{E'D'}$ و $\overrightarrow{CB'}$.

فكّر - صفحة 47

أَصحيح أنّ الشّرط اللازم والكافي لتحقُّق المساواة الشّعاعيّة $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ هو أن تكون القطعتان المستقيمتان $[AC]$ و $[BD]$ متناصفتين، أي أن يكون منتصف $[AC]$ منطبقاً على منتصف $[BD]$ ؟



الحل

لقد رأينا سابقاً أن كون C صورة D وفق الانسحاب $T_{A\to B}$ الذي ينقل A إلى B يُكافئ كون C نظيرة A بالنسبة إلى منتصف $[DB]$ وهذا بدوره يُكافئ كون القطعتين المستقيمتين $[AC]$ و $[BD]$ متناصفتين. ومن جهة أخرى القول $T_{A\to B}(D)=C$ يُكافئ المساواة الشعاعية $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. إذن المقول المشار إليها صحيحة:

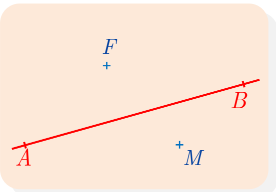
$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \quad \Leftrightarrow \quad \text{القطعتان المستقيمتان } [AC] \text{ و } [BD] \text{ متناصفتان}$$

تدرّب- صفحة 48

① ليكن $\vec{u}$ الشّعاع الذي منحاه (AB) وجهته من A إلى B وطوله $3\,\text{cm}$.

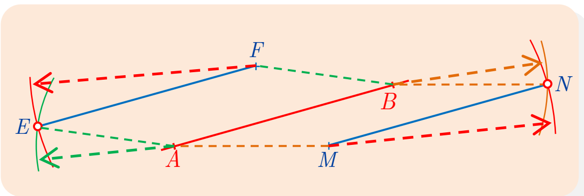
❶ ارسم الشّكل المجاور في دفترك.

❷ أنشئ الشّعاعين $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{EF}$ بحيث $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{MN}=\vec{u}$.

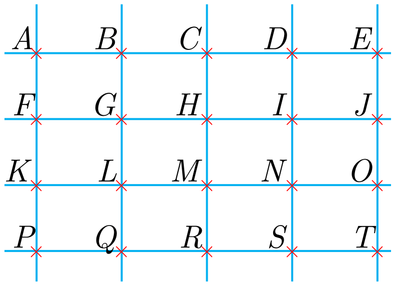


الحل

نتمّم بواسطة الفرجار المثلث ABF إلى متوازي الأضلاع $ABFE$، وكذلك مع BAM فنُنشئ متوازي الأضلاع $BAMN$، كما في الشكل الآتي :



② تأمّل الشّكل التالي، ثُمّ املأ الفراغات $\square$ فيما يلي.



❶ $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{M\square}$ ، ❷ $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{M\square}$ ، ❸ $\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{\square O}$.

❹ $\overrightarrow{NR} = \overrightarrow{\square L}$ ، ❺ $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{H\square}$ ، ❻ $\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{G\square}$.

❼ النّقطة I هي صورة $\square$ وفق الانسحاب الّذي شعاعه $\overrightarrow{KC}$.

❽ النّقطة $\square$ هي صورة P وفق الانسحاب الّذي شعاعه $\overrightarrow{GD}$.

❾ النّقطة T هي صورة G وفق الانسحاب الّذي شعاعه $\overrightarrow{\square S}$.

❿ النّقطة N هي صورة C وفق الانسحاب الّذي شعاعه $\overrightarrow{G\square}$.

الحل

❶ $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{MT}$ ، ❷ $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MJ}$ ، ❸ $\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{RO}$.

❹ $\overrightarrow{NR} = \overrightarrow{HL}$ ، ❺ $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{HR}$ ، ❻ $\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{GJ}$.

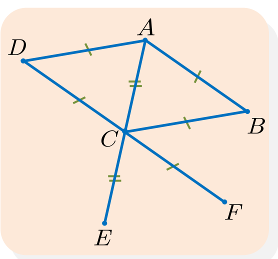
❼ النّقطة I هي صورة Q وفق الانسحاب الّذي شعاعه $\overrightarrow{KC}$.

❽ النّقطة M هي صورة P وفق الانسحاب الّذي شعاعه $\overrightarrow{GD}$.

❾ النّقطة T هي صورة G وفق الانسحاب الّذي شعاعه $\overrightarrow{FS}$.

❿ النّقطة N هي صورة C وفق الانسحاب الّذي شعاعه $\overrightarrow{GR}$.

③ نتأمّل في الشّكل المجاور معيّناً $ABCD$. لتكن E و F نظيرتي A و D بالنّسبة إلى C بالترتيب. علّل ما يأتي:



❶ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CF}$

❷ $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$

❸ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CE}$

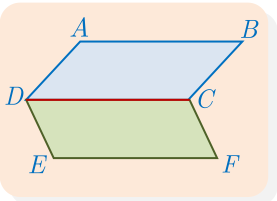
الحل

❶ لمّا كان الرباعي $ABCD$ معيّناً استنتجنا أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$، ولمّا كانت F نظيرة D بالنّسبة إلى C كان $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{DC}$.

❷ لما كان $ABCD$ معيّناً استنتجنا أن $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$، و لمّا كانت E و F نظيرتي A و D بالنّسبة إلى C كان $ADEF$ متوازي أضلاع ومنه $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DA}$.

❸ من ❶ لدينا $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CF}$ ومنه $ABCF$ متوازي أضلاع، ومنه $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BF}$. ولما كانت E نظيرة A بالنّسبة إلى C كان $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CE}$.

④ $ABCD$ و $CDEF$ هما متوازيا أضلاع بحيث لا تقع النّقاط A و B و E و F على استقامة واحدة.
أثبت أنّ الرّباعيّ $ABFE$ متوازي أضلاع.



الحل

لمّا كان $ABCD$ متوازي أضلاع كان ① $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

لمّا كان $CDEF$ متوازي أضلاع كان ② $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{EF}$.

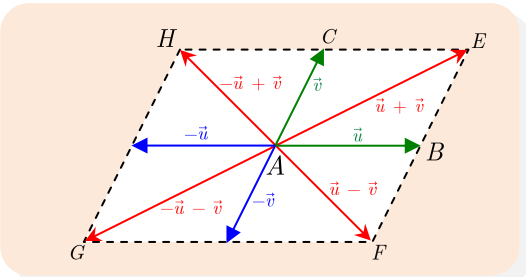
من ① و ② نجد أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EF}$، فالرّباعيّ $ABFE$ متوازي الأضلاع لأن النّقاط A و B و E و F لا تقع على استقامة واحدة.

تدرّب – صفحة 50

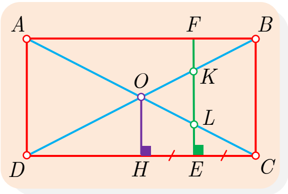
① لتكن A و B و C ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة. نضع $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$. أنشئ النّقاط E و F و G و H التي تُحقّق

$$\overrightarrow{AE}=\vec{u}+\vec{v},\quad \overrightarrow{AF}=\vec{u}-\vec{v},\quad \overrightarrow{AG}=-\vec{u}-\vec{v},\quad \overrightarrow{AH}=-\vec{u}+\vec{v}$$

الحل



تدرّب-54



① تأمّل الشّكل المجاور، ثُمّ املأ الفراغات فيما يأتي بالأعداد المناسبة

❶ $\overrightarrow{AC} = \cdots\cdots \overrightarrow{OC}$ ❷ $\overrightarrow{AB} = \cdots\cdots \overrightarrow{FB}$ ❸ $\overrightarrow{HD} = \cdots\cdots \overrightarrow{DC}$

❹ $\overrightarrow{AB} = \cdots\cdots \overrightarrow{HE}$ ❺ $\overrightarrow{FB} = \cdots\cdots \overrightarrow{ED}$ ❻ $\overrightarrow{CB} = \cdots\cdots \overrightarrow{KE}$

الحل

❶ $\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{OC}$ ❷ $\overrightarrow{AB} = 4\,\overrightarrow{FB}$ ❸ $\overrightarrow{HD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

❹ $\overrightarrow{AB} = 4\,\overrightarrow{HE}$ ❺ $\overrightarrow{FB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{ED}$ ❻ $\overrightarrow{CB} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{KE}$

② بيّن الصواب من الخطأ في العبارات الآتية مُعلِّلاً إجابتك :

❶ إذا كان ABC مثلّثاً متساوي السّاقين كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

❷ إذا كان $ABCD$ متوازي الأضلاع كان $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$.

❸ إذا كان $[AI]$ متوسّطاً في المثلّث ABC كان $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

❹ إذا كان $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$ كان $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BA}$.

❺ إذا كانت C نظيرة A بالنّسبة إلى منتصف $[BD]$ كان $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

الحل

❶ خطأ لأن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ تقتضي أن يكون $AB \parallel AC$.

❷ صح استناداً إلى طريقة متوازي الأضلاع.

❸ صح إذ لدينا

$$① \quad \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} \quad و \quad ② \quad \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI}$$

بجمع المساواتين ① و ② نجد $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI}$ ولما كانت النّقطة I منتصفَ $[BC]$ كان الشّعاعان $\overrightarrow{BI}$ و $\overrightarrow{CI}$ متعاكسين أي $\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI} = \vec{0}$. إذن

$$2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

❹ خطأ، فإذا كان $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$ كان $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$.

❺ صح، استناداً إلى طريقة متوازي الأضلاع.

تدرّب – صفحة 56

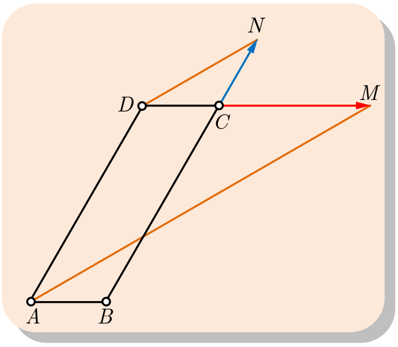
① نتأمّل متوازي أضلاع $ABCD$. ونعرّف النّقطتين M و N بالعلاقتين

$$\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

❶ ارسم شكلاً مناسباً.

❷ استنتج أنّ المستقيمين (AM) و (DN) متوازيان.

الحل



❶ الرسم.

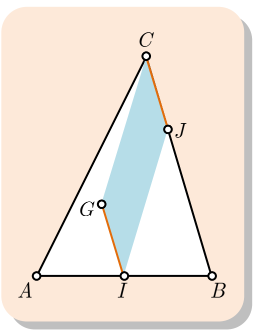
❷ نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{CM}$ و $\overrightarrow{CN}$ معرّفين بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$

إذن لنحاول التعبير عن الشعاعين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{DN}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ أيضاً مستفيدين من علاقة شال.فنجد

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DN} &= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} \\ &= 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{DN} \end{aligned}$$

إذن، نستنتج أنّ الشّعاعين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{DN}$ مرتبطان خطياً فالمستقيمان (AM) و (DN) متوازيان.

② ليكن ABC مثلّثاً. لتكن I منتصف $[AB]$، و J النّقطة المُعرّفة بالمساواة $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$. وأخيراً لتكن G النّقطة التي تجعل الرّباعيّ $JCGI$ متوازي الأضلاع.



❶ أثبت أنّ النّقطة G هي منتصف $[AJ]$.

يكفي أن نبرهن أنّ G تحقّق إحدى الخواص المميّزة لنقطة المنتصف كأن نبرهن أنّ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GJ} = \vec{0}$ باستعمال علاقة شال.

❷ أثبت أنّ النّقطة G هي مركز ثقل المثلّث ACI.

الحل

❶ لنبدأ باختيار شعاعين مستقلين خطياً مثل $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ ولنحاول التعبير عن الأشعة التي تهمنا بدلالة هذين الشعاعين. مثلاً: لأنّ I منتصف $[AB]$، نجد $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

وبالاستفادة من علاقة شال ومن كون $JCGI$ متوازي الأضلاع، نجد

$$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{JC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

ومن جهة أخرى

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GJ}&=\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{BC}\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

نستنتج إذن أنّ $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{GJ}$، فالنقطة G هي منتصف $[AJ]$.

❷ لنحسب المقدار $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GC}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GC}&=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JC}\\&=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GJ}+\cancel{\overrightarrow{JC}}+\cancel{\overrightarrow{CJ}}=\vec{0}\end{aligned}$$

إذن $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$، وهذا يبرهن على أنّ G هي مركز ثقل المثلث ACI.

فكّر – 62

لماذا لا يمكن استعمال علاقة المسافة بين نقطتين في مَعْلَم غير متجانس ؟

الحل

لأننا استندنا عند إثبات العلاقة على مبرهنة فيثاغورث، وعلى أنّ واحدة الأطوال على محوري الإحداثيات هي نفسها.

تدرّب – 62

① ادرس، في الحالات الآتية، ارتباط الشّعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$:

❶ $\vec{u}\ \ 2,-3$ و $\vec{v}\ \ -6,9$.

❷ $\vec{u}\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{2}\right)$ و $\vec{v}\left(\frac{2}{5},-\frac{3}{5}\right)$.

❸ $\vec{u}\ \ 3,-2$ و $\vec{v}\ \ 6,-1$.

❹ $\vec{u}\ \ 10,-5$ و $\vec{v}\ \ -4,2$.

الحل

❶ يمكننا بسهولة ملاحظة التّناسب بين مركّبات الشّعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

$\vec{u}$	2	-3
$\vec{v}$	-6	9

$\times\ -3$

نستنتج إذن أنّ $\vec{v}=-3\vec{u}$ والشّعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطياً.

❷ هنا لا نرى تناسباً واضحاً بين مركّبات الشّعاع $\vec{u}$ ومركّبات الشّعاع $\vec{v}$. نلجأ إذن إلى شرط الارتباط وهنا لدينا :

$$xy'-x'y=\frac{1}{3}\times\left(-\frac{3}{5}\right)-\frac{2}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=0$$

فالشّعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطياً.

❸ انطلاقاً من شرط الارتباط الخطي نلاحظ أنّ:

$$x'y - xy' = (6\times -2) - (-1\times 3) = -9 \neq 0$$

فالشّعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقلان خطياً.

❹ نجد بأسلوب مماثل لما سبق أنّ الشّعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً في هذه الحالة.

② نتأمّل في مَعْلَم النّقاط $A(-2,4)$ و $B(4,2)$ و $C(0,-1)$ و $D(-3,0)$. لتكن E منتصف $[AB]$.
عيّن طبيعة الرّباعيَّن $ABCD$ و $AECD$.

الحل نلاحظ أنّ

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 4-(-2) \\ 2-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{DC} = \begin{bmatrix} 0-(-3) \\ -1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

إذن، $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC}$ والرباعي، $ABCD$ شبه منحرف لأنّ فيه $(AB) \parallel (DC)$.
من جهة أخرى، لأنّ E منتصف $[AB]$ استنتجنا أنّ $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$، فالرباعي $AECD$ متوازي الأضلاع.

③ نتأمّل في مَعْلَم متجانس النّقاط $A(-1,2)$ و $B(2,1)$ و $C(-2,-1)$ احسب أطوال أضلاع المثلّث ABC واستنتج نوعه.

الحل

تعطى المسافة بين نقطتين U و V بالعلاقة $UV = \sqrt{(x_v - x_u)^2 + (y_v - y_u)^2}$. بالتعويض نجد

$$AB = \sqrt{(2+1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$
$$AC = \sqrt{(-2+1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$
$$BC = \sqrt{(-2-2)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

ولما كان $AB = AC$ و $BC^2 = AC^2 + AB^2$ استنتجنا أنّ ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين.

④ نتأمّل في مَعْلَم متجانس النّقاط $A(-2,3)$ و $B(4,5)$ و $C(0,5)$ و $D(5,1)$.

❶ احسب محيط المثلّث ABC.

❷ احسب إحداثيتي N منتصف القطعة CB ثم استنتج طول المتوسّط AN.

❸ احسب مركّبات الشّعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$.

❹ أثبت أنّ المستقيمين (AB) و (CD) متقاطعان.

فيما يلي، نفترض k عدداً حقيقياً.

❺ اكتب، بدلالة k، إحداثيّتي النّقطة M التي تحقّق $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.

❻ احسب، بدلالة k، مركّبات الشّعاع $\overrightarrow{CM}$.

❼ عيّن k كي يكون الشّعاعان $\overrightarrow{CM}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطّياً. واستنتج إحداثيتي نقطة تقاطع المستقيمين (AB) و (CD).

الحل

❶ تعطى المسافة بين نقطتين U و V بالعلاقة $UV=\sqrt{(x_v-x_u)^2+(y_v-y_u)^2}$. بالتعويض نجد

$$AB=\sqrt{(4+2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$
$$AC=\sqrt{(0+2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$
$$BC=\sqrt{(0-4)^2+(5-5)^2}=\sqrt{16+0}=4$$

وعليه يعطى محيط المثلّث ABC بالعلاقة

$$AB+AC+BC=2\sqrt{10}+2\sqrt{2}+4$$

❷ إحداثيا النّقطة N هما: $x_N=\dfrac{x_C+x_B}{2}$ ، $y_N=\dfrac{y_C+y_B}{2}$ إذن $N\ \ 2,5$

وعليه يحسب طول المتوسّط AN بالصيغة

$$AN=\sqrt{(2+2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

❸ لإيجاد مركبتي كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ نكتب

$$\overrightarrow{CD}=\begin{bmatrix}5-0\\1-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-4\end{bmatrix}\quad \text{و} \quad \overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}4-(-2)\\5-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix}$$

❹ لإثبات أنّ المستقيمين (AB) و (CD) متقاطعان نكتفي بإثبات عدم الارتباط الخطي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ فنحسب

$$x'y-xy'=(6\times -4)-(5\times 2)=-24-20=-44\neq 0$$

فالشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مستقلان خطياً، والمستقيمان (AB) و (CD) متقاطعان.

❺ لاحظ أنّ إحداثيتي النقطة M هما مركّبتا الشعاع $\overrightarrow{OM}$. ولكن العلاقة $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$ تقتضي أنّ

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{AB}$$

وعليه

$$\begin{bmatrix}x_M\\y_M\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2+6k\\3+2k\end{bmatrix}$$

❻ لحساب مركّبات الشّعاع $\overrightarrow{CM}$، بدلالة k، نكتب

$$\overrightarrow{CM}=\begin{bmatrix}x_M-x_C\\y_M-y_C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2+6k-0\\3+2k-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2+6k\\-2+2k\end{bmatrix}$$

❼ كي يكون الشّعاعان $\overrightarrow{CM}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطّياً يجب أن يتحقق شرط الارتباط الخطي أي

$$x'y-xy'=(-4)(6k-2)-5(2k-2)=$$
$$=-24k+8-10k+10=-34k+18=0$$

وحلُّ هذه المعادلة يعطي قيمة k الآتية $k=\dfrac{18}{34}=\dfrac{9}{17}$، وتكون النقطة $M\ \frac{20}{17},\frac{69}{17}$ الموافقة هي نقطة تقاطع المستقيمين (AB) و (CD).

تمرينات ومسائل

1

بيّن الإجابات الصّحيحة من بين الإجابات المقترحة في كلّ من الحالات الآتية:

- ليكن ABC مثلّثاً، مركز ثقله G، ومنتصف القطعة $[AC]$ هو J، عندئذ :

❶ $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$ ❷☑ $\overrightarrow{GJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$ ❸ $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{AB}$

- في المَعْلَم $O;\vec{i},\vec{j}$ ، نفترض أنّ $\overrightarrow{OM}=-2\vec{i}+3\vec{j}$ و $\overrightarrow{ON}=\vec{i}-1.5\vec{j}$، عندئذ :

❶ OMN مثلّث. ❷☑ O و M و N على استقامة واحدة. ❸☑ $\overrightarrow{MN}=3\vec{i}-4.5\vec{j}$.

- لنتأمّل في المَعْلَم المتجانس $O;\vec{i},\vec{j}$ النّقاط $A(4,5)$ و $B(2,1)$ و $C(8,3)$. عندئذ :

❶ $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{BC}$ مرتبطان. ❷ $\overrightarrow{BC}=\sqrt{2}\ \overrightarrow{AB}$. ❸☑ ABC قائم ومتساوي السّاقين.

- لنتأمّل في المَعْلَم $O;\vec{i},\vec{j}$ النّقاط $A(2,0)$ و $B(6,2)$ و $C(3,5)$ و $D(1,4)$. عندئذ :

❶ (AB) و (CD) متقاطعان. ❷☑ $\overrightarrow{CD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ❸☑ $ABCD$ شبه منحرف.

- لنتأمّل في المَعْلَم $O;\vec{i},\vec{j}$ النّقطة $A(2,0)$، والشّعاع $\vec{u}=3\vec{i}-2\vec{j}$. ولتكن النّقطة $M\ \ x,y$ المحقّقة للعلاقة $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$ عندئذ :

❶ $x=1$ و $y=-7$. ❷ $x=1$ و $y=3$. ❸☑ M هي صورة A وفق الانسحاب الّذي شعاعه $\vec{u}$.

2

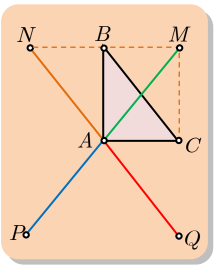
ليكن ABC مثلّثاً قائماً في A. عيّن النّقاط M و N و P و Q المعرّفة بالعلاقات :

$$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\ ,\qquad \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\ ,\qquad \overrightarrow{AP}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}$$

الحل

- النقطة M هي النقطة التي تجعل $BACN$ متوازي الأضلاع.
- النقطة N تحقّق $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{CB}$، فهي صورة A وفق انسحاب شعاعه $\overrightarrow{CB}$.
- النقطة Q تحقّق $\overrightarrow{AQ}=-\overrightarrow{AN}$، فالنقطة Q نظير N بالنسبة إلى A.
- النقطة P تحقّق $\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{AM}$، فالنقطة P نظير M بالنسبة إلى A.



3

لتكن A و B و C و D أربع نقاط في المستوي. أثبت أنّ :

- $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA})=\overrightarrow{DA}$.
- $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

الحل

- لنرمز بالرمز $\mathcal{L}$ إلى الطرف الأيسر من العلاقة المعطاة $\mathcal{L}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA})$. إنّ

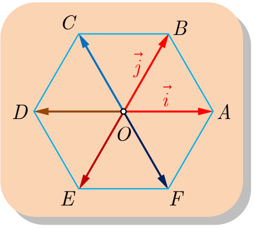
$$\begin{aligned}\mathcal{L}&=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}\\&=\vec{0}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA}\end{aligned}$$

- لنرمز بالرمز $\mathcal{D}$ إلى الفرق بين طرفي المساواة المطروحة $\mathcal{D}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}-(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})$:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}&=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}\\&=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB}\\&=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}\end{aligned}$$

فالمساواة المقترحة صحيحة.

4 ليكن $ABCDEF$ مسدّساً منتظماً مركزه O . نضع $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{OB}=\vec{j}$. اكتب الأشعّة $\overrightarrow{AF}$ و $\overrightarrow{FE}$ و $\overrightarrow{ED}$ و $\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BF}$ و $\overrightarrow{FD}$ و $\overrightarrow{DB}$ بدلالة الشّعاعين $\vec{i}$ و $\vec{j}$.



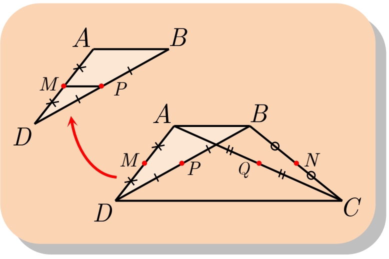
الحل

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BO}=-\vec{j}\\&\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AO}=-\vec{i}\\&\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{j}-\vec{i}\\&\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OB}=\vec{j}\\&\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OA}=\vec{i}\,.\\&\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\vec{i}-\vec{j}\\&\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{OB}=\vec{i}-2\vec{j}\\&\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OF}=-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{BA}=\vec{j}-2\vec{i}\\&\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD}=\vec{j}+\vec{i}\end{aligned}$$

5 الوقوع على استقامة واحدة

الفرْض : ليكن $ABCD$ رباعيّاً فيه $\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{AB}$، ولتكن M منتصف $[AD]$، و N منتصف $[BC]$، و P منتصف $[BD]$، وأخيراً Q منتصف $[AC]$.

الطلب : إثبات أنّ النّقاط M و N و P و Q تقع على استقامة واحدة.



الحل

- نستنتج من العلاقة $\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{AB}$ أن $(DC)\parallel(AB)$ والرباعي $ABCD$ شبه منحرف.
- في المثلث ABD، النّقطة M منتصف $[AD]$، و P منتصف $[BD]$ إذن $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
- في المثلث ADC، النّقطة M منتصف $[AD]$، و Q منتصف $[AC]$ إذن $\overrightarrow{MQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

إذن $(MQ)\parallel(DC)\parallel(AB)\parallel(MP)$، والنقاط M و P و Q تقع على استقامة واحدة. وكذلك

- في المثلث BDC، النّقطة P منتصف $[BD]$، و N منتصف $[BC]$ إذن $\overrightarrow{PN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.
- في المثلث ABC، النّقطة Q منتصف $[AC]$، و N منتصف $[BC]$ إذن $\overrightarrow{QN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

إذن $(NQ)\parallel(AB)\parallel(DC)\parallel(NP)$، والنقاط N تقع أيضاً على المستقيم (PQ). والنقاط الأربع M و N و P و Q تقع على استقامة واحدة.

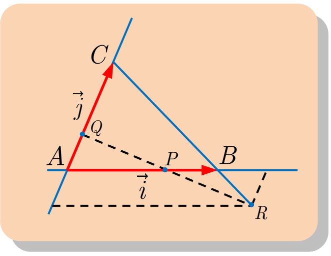
6 ترجمة العلاقات الشّعاعيّة

الفرْض : ليكن ABC مثلّثاً. نعرّف $\overrightarrow{AB}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{AC}=\vec{j}$، والنّقاط P و Q و R بالعلاقات :

$$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\vec{i},\quad \overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\vec{j},\quad \overrightarrow{BR}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

الطلب : إثبات أنّ النّقطة P هي منتصف القطعة المستقيمة $[QR]$.

الحل



- نتعرّف مباشرة الشّكل المفتاحي 4. ولدينا فرضاً عبارة الشّعاعين $\overrightarrow{AP}$ و $\overrightarrow{AQ}$ بدلالة $\vec{i}$ و $\vec{j}$.

إذن في المعلم $A;\vec{i},\vec{j}$ لدينا $P(\frac{2}{3},0)$ و $Q(0,\frac{1}{3})$.

- في المساواة الشّعاعيّة $\overrightarrow{BR}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$، إحداثيّات B و C معروفة، إذن يمكننا منها استنتاج إحداثيّتي R في المَعْلَم نفسه، فنكتب :

$$\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BR}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$$

ومنه

$$\overrightarrow{AR}=\vec{i}-\frac{1}{3}(\vec{j}-\vec{i})=\frac{4}{3}\vec{i}-\frac{1}{3}\vec{j}$$

إذن في المعلم $A;\vec{i},\vec{j}$ لدينا $R(\frac{4}{3},-\frac{1}{3})$.

- إنّ إحداثيتي النقطة M منتصف القطعة $[QR]$ في المعلم $A;\vec{i},\vec{j}$ هما

$$x_M=\frac{x_Q+x_R}{2}=\frac{2}{3} \text{ و } y_M=\frac{y_Q+y_R}{2}=0$$

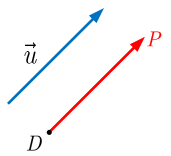
وهما إحداثيّتا النقطة P نفسها. فالنقطة P هي منتصف القطعة المستقيمة $[QR]$.

7 نقاط معرّفة بعلاقات شعاعيّة

ليكن المثلّث ABC . أنشئ النّقطتين M و N المعرّفتين بالعلاقتين الشّعاعيّتين الآتيتين :

$$\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AB} \qquad (1)$$
$$\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{AC} \qquad (2)$$

الحل



بوجه عام، إذا كانت النّقطة D معطاة، وكان الشّعاع $\vec{u}$ معلوماً، أمكننا تعيين النّقطة P المحقّقة للعلاقة $\overrightarrow{DP}=\vec{u}$. ومن هنا تأتي فكرة تحويل كلّ من العلاقتين (1) و (2) إلى هذه الحالة.

- في العلاقة (1) تظهر النّقطة M ، المراد تعيينها، مرّة واحدة وهذا يدعونا إلى كتابة العلاقة بالصِيغة $\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$. أو

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM}&=-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AB}\\&=\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BA}\end{aligned}$$

وبجمع الشعاع $\overrightarrow{BC}$ إلى طرفي المساواة السابقة واستعمال علاقة شال نجد

$$\overrightarrow{BM}=2(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})$$

ومنه الإنشاء المبين في الشكل.

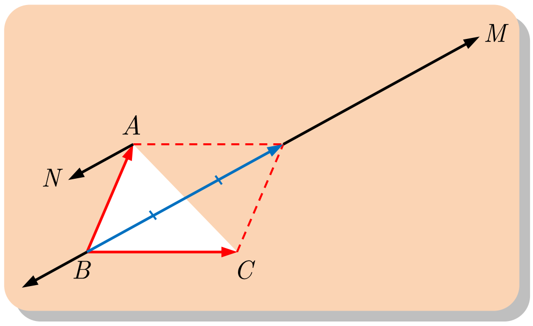
- في العلاقة (2) تظهر النّقطة المراد تعيينها مرّتين فعلينا إذن تحويل العلاقة (2) باستعمال علاقة شال.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}&=\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{NA}+2(\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AB})\\&=3\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AN}+2\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

إذن

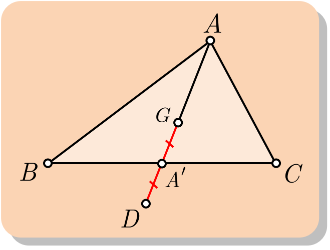
$$\begin{aligned}3\overrightarrow{AN}&=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=-(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})\end{aligned}$$

ومنه الإنشاء المبين في الشكل.



8 إثبات شعاعي

لنتأمّل مثلّثاً ABC مركز ثقله G، ولتكن A' منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$، و D نظيرة G بالنِّسبة إلى النّقطة A' . أثبت شعاعيّاً أنّ G منتصف القطعة $[AD]$.



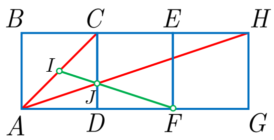
الحل

- لنرسم مثلّثاً ABC ولنعيّن عليه النّقاط A' و G و D.
- لمّا كان G مركز ثقل المثلّث ABC استنتجنا أنّ

$$\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GA'}$$

- ومن ناحية أخرى، لأنّ D نظيرة G بالنسبة إلى A' استنتجنا أنّ $\overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GA'}$. مما سبق نستنتج أنّ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$، وهذا يعني أنّ G هي منتصف $[AD]$.

9 ثلاثة مربعات



$ABCD$ و $DCEF$ و $FEGH$ ثلاثة مربّعات طولُ ضلع كلّ منها يساوي 1. النقطة I منتصف القطعة $[AC]$، و J نقطة تقاطع المستقيمين (CD) و (AH). مستعيناً بمَعْلَم مناسب أثبت أنّ النّقاط I و F و J تقع على استقامة واحدة.

الحل

- لنرسم أوّلاً الشّكل رسماً دقيقاً ولنختر المَعْلَم $A;\vec{i},\vec{j}$ حيث $\overrightarrow{AD} = \vec{i}$ و $\overrightarrow{AB} = \vec{j}$. يجعل هذا الاختيار إحداثيّات رؤوس المربّعات أعداداً صحيحة. ونجد أن

$$A(0,0), F(2,0), C(1,1), H(3,1), I(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})$$

- نريد إثبات وقوع النّقاط I و J و F على استقامة واحدة، علينا إذن البحث عن إحداثيّتي النّقطة J . ولكن $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AH}$، إذن $J(1,\frac{1}{3})$.
- لنحسب إذن مركّبات كل من الشعاعين $\overrightarrow{JI}$ و $\overrightarrow{FJ}$ فنجد

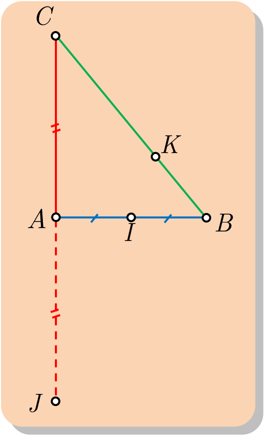
$$\overrightarrow{JI} = (\tfrac{1}{2} - 1, \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) = (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{6})$$
$$\overrightarrow{FJ} = (1 - 2, \tfrac{1}{3} - 0) = (-1, \tfrac{1}{3})$$

إذن $\overrightarrow{FJ} = 2\overrightarrow{JI}$، و $\overrightarrow{JI}$ و $\overrightarrow{FJ}$ مرتبطان خطياً، فالنقاط I و F و J واقعة على استقامة واحدة.

10 الوقوع على استقامة واحدة بطريقتين

لنتأمّل مثلّثاً ABC قائم الزّاوية في A، وليكن I منتصف القطعة $[AB]$، و J نظير C بالنسبة إلى النّقطة A، وأخيراً لتكن K النّقطة المحقّقة للعلاقة $\overrightarrow{BK} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

أثبت أنّ النّقاط I و J و K تقع على استقامة واحدة.



الحل

- لنعبّر أولاً عن $\overrightarrow{AJ}$ بدلالة $\overrightarrow{AC}$. لمّا كانت J نظيرة C بالنسبة إلى A استنتجنا أنّ $\overrightarrow{AJ}=-\overrightarrow{AC}$. ولأنّ I منتصف $[AB]$ استنتجنا أنّ $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BI}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
- لإثبات وقوع النّقاط I و J و K على استقامة واحدة، علينا إثبات ارتباط الشّعاعين $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}$. هناك طريقتان:
  - الطريقة الأولى

نختار المَعْلَم $A;\vec{i},\vec{j}$ حيث $\overrightarrow{AB}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{AC}=\vec{j}$. يجعل هذا الاختيار إحداثيّات رؤوس المثلّث ABC أعداداً صحيحة، كما يجعل من السهل تحديد إحداثيّات باقي النّقاط. فنجد أنّ

$$A(0,0),B(1,0),C(0,1),I(\tfrac{1}{2},0),J(0,-1)$$

لتعيين (x,y) إحداثيّتي K نلاحظ أنّ المساواة الشعاعية $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ تكتب كما يأتي:

$$\begin{bmatrix}x-1\\y-0\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0-1\\1-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

فإحداثيّتا النقطة K هما $(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$. وهكذا يمكننا حساب مركّبات الشعاعين $\overrightarrow{IK}$ و $\overrightarrow{IJ}$ فنجد

$$\overrightarrow{IK}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{IJ}=\begin{bmatrix}0-\frac{1}{2}\\-1-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

إذن $\overrightarrow{IJ}=-3\overrightarrow{IK}$، فالشعاعان $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}$ مرتبطان خطياً والنقاط I و J و K تقع على استقامة واحدة.

  - الطريقة الثانية

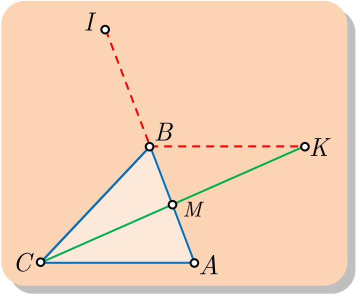
لإثبات ارتباط الشّعاعين $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}$ نفرّق كلاً منهما إلى مجموعٍ شعاعيّ. فنعلم أنّ $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}$ فنستنتج من ذلك أنّ $\overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

للتعبير عن $\overrightarrow{IK}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ نكتب ما يلي :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IK}&=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

وهنا نلاحظ مجدداً أنّ $\overrightarrow{IJ}=-3\overrightarrow{IK}$، فالشعاعان $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}$ مرتبطان خطياً والنقاط I و J و K تقع على استقامة واحدة.

11 لنتأمّل مثلّثاً ABC، ولتكن I نظيرة A بالنّسبة إلى النّقطة B، و K صورة B وفق انسحاب شعاعه $\overrightarrow{CA}$، و M نقطة تقاطع المستقيمين (CK) و (AB).



① أثبت أنّ النّقطة M هي منتصف القطعة $[KC]$.

② ما العلاقة التي تربط الشّعاعين $\overrightarrow{BI}$ و $\overrightarrow{BM}$ ؟ استنتج أنّ B هي مركز ثقل المثلّث CKI.

الحل

① لما كانت K صورة النّقطة B وفق انسحاب شعاعه $\overrightarrow{CA}$ كان $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{CA}$ و الرباعي $ACBK$ متوازي أضلاع قطراه $[AB]$ و $[KC]$، ولما كان قطرا متوازي الأضلاع متناصفان كانت النّقطة M منتصف كل من $[KC]$ و $[AB]$. وبوجه خاص $[IM]$ متوسّط في المثلث ICK.

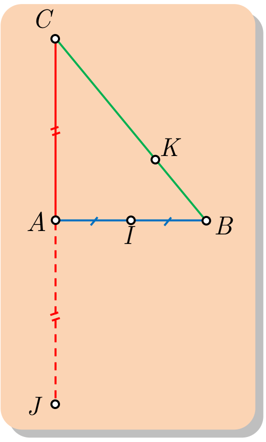
② لما كانت النّقطة I نظيرة A بالنسبة إلى B كانت B منتصف القطعة المستقيمة $[AI]$ أي $\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{BA}$. ولقد رأينا أنَّ M هي منتصف $[AB]$ إذن $\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{BM}$، ومنه $\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{BM}$. فالنقطة B هي نقطة من المتوسط $[IM]$ في المثلث ICK تبعد عن الرأس I مثلي بعدها عن منتصف الضلع المقابلة، فهي إذن نقطة تلاقي متوسطات المثلث ICK، أو مركز ثقله.

ويمكن بأسلوب آخر أن نلاحظ أنّ

$$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$

فالنقطة B هي نقطة تلاقي متوسطات المثلث ICK.

12 نتأمّل مثلّثاً ABC، ونسمّي I منتصف القطعة $[AB]$.



① ❶ أنشئ النّقطة J التي تحقّق $\overrightarrow{AJ}=-\overrightarrow{AC}$.

❷ استنتج أنّ $\overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

② لتكن النّقطة K المحقّقة للعلاقة $2\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$.

❶ اكتب $\overrightarrow{BK}$ بدلالة $\overrightarrow{BC}$ ثمّ أنشئ النّقطة K.

❷ استنتج أنّ $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ وأن $\overrightarrow{IJ}=-3\overrightarrow{IK}$. ماذا يمكنك القول عن النّقاط I و J و K في هذه الحالة ؟

الحل

① نعلم أنّ $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}$ فنستنتج من ذلك أنّ $\overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

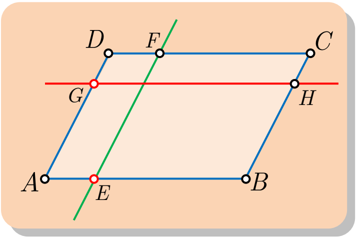
② ❶ من العلاقة $2\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$ نستنتج أنّ $2\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$، ومنه $3\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BC}$.

② ❷ للتعبير عن $\overrightarrow{IK}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ نكتب ما يلي :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IK} &= \overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\\ &=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\\ &=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

وهنا نلاحظ أنّ $\overrightarrow{IJ}=-3\overrightarrow{IK}$، فالشعاعان $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}$ مرتبطان خطياً والنقاط I و J و K تقع على استقامة واحدة.

13 ليكن متوازي الأضلاع $ABCD$، ولتكن E النّقطة التي تحقّق $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ و G النّقطة التي تحقّق $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$. نرسم من E مستقيماً يوازي المستقيم (AD) فيقطع المستقيم (CD) في النّقطة F، ونرسم من G مستقيماً يوازي المستقيم (AB) فيقطع المستقيم (BC) في النّقطة H.



① أثبت أنّ $\overrightarrow{GF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ وأنّ $\overrightarrow{EH}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

② أثبت أنّ المستقيمات (FG) و (EH) و (AC) متوازية.

الحل

① نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GF} &= \overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AG}\\ &=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

وأن

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EH} &= \overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AG}\\ &=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

② نستنتج من المساواتين الشعاعيتين $\overrightarrow{GF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{EH}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ أنّ المستقيمات (FG) و (EH) و (AC) متوازية.

14 نزوّد المستوي بمَعْلَم متجانس $O;\vec{i},\vec{j}$. بيّن في كلٍّ من الحالات التالية إذا كانت النّقاط M و N و P تقع على استقامة واحدة.

- $P(-5,5)$ ، $N(7,-3)$ ، $M(4,-1)$
- $P(-5,14)$ ، $N(-3,7)$ ، $M(-2,3)$.
- $P(0,1)$ ، $N(3,-1)$ ، $M\left(2,-\frac{1}{3}\right)$

الحل

- في الحالة الأولى $\overrightarrow{PN} = \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ و $\overrightarrow{PM} = \begin{bmatrix} 9 \\ -6 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ فالشعاعان مرتبطان خطياً والنقاط M و N و P تقع على استقامة واحدة.
- في الحالة الثانية $\overrightarrow{PN} = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix}$ و $\overrightarrow{PM} = \begin{bmatrix} 3 \\ -11 \end{bmatrix}$ فالشعاعان مستقلان خطياً $(\frac{3}{2} \neq \frac{11}{7})$ والنقاط M و N و P لاتقع على استقامة واحدة.
- وأخيراً $\overrightarrow{PN} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ و $\overrightarrow{PM} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4/3 \end{bmatrix} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PN}$ فالشعاعان مرتبطان خطياً والنقاط M و N و P تقع على استقامة واحدة.

15 لتكن النّقاط $A(3,7)$ و $B(8,2)$ و $C(-4,-2)$ والشّعاع $\vec{u}$ $2,5$. نقرن بكلّ عدد حقيقيّ k النّقطة M المحقّقة للعلاقة : $\overrightarrow{CM} = k\vec{u}$.

① احسب إحداثيّتي النّقطة M بدلالة k واستنتج مركّبات الشّعاع $\overrightarrow{AM}$.

② باستعمال الشرط التحليليّ لارتباط الشّعاعين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ احسب العدد الحقيقيّ k الّذي يجعل M نقطة من المستقيم (AB).

الحل

① إذا رمزنا (x,y) إلى إحداثيتي النقطة M استنتجنا من المساواة $\overrightarrow{CM} = k\vec{u}$ أنّ

$$\begin{bmatrix} x+4 \\ y+2 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k \\ 5k \end{bmatrix}$$

ومنه $M(2k-4, 5k-2)$، ومركّبتا الشعاع $\overrightarrow{AM}$ تعطى بالصيغة $\overrightarrow{AM} = \begin{bmatrix} 2k-4-3 \\ 5k-2-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k-7 \\ 5k-9 \end{bmatrix}$.

② لمّا كان $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 8-3 \\ 2-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ استنتجنا أنّ الشرط اللازم والكافي لارتباط الشّعاعين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ هو $2k-7+5k-9=0$ أو $k = \frac{16}{7}$. وهي قيمة k التي تجعل M نقطة من (AB).

16 نزوِّد المستوي بمَعْلَم متجانس $O;\vec{i},\vec{j}$ ، ونتأمّل النّقاط A $-3,0$ و B $6,3$ و C $1,8$.

نهدف إلى حساب (x,y) إحداثيّتي النقطة K مركز الدّائرة المارّة برؤوس المثلّث ABC.

① القول إنّ K مركز الدّائرة المارّة برؤوس المثلّث ABC، يكافئ القول إنّ K متساوية البعد عن رؤوس المثلّث، إذن $KA = KC$ و $KA = KB$. احسب المقادير KA^2 و KB^2 و KC^2 بدلالة x و y ثمّ اكتب العلاقات النّاتجة من الشّرط السّابق.

② استنتج أنّ $x+2y=7$ و $3x+y=6$.

③ احسب إحداثيّتي النقطة K.

الحل

① اعتماداً على صيغة المسافة بين نقطتين لدينا

$$KA^2 = (x+3)^2 + y^2$$
$$KB^2 = (x-6)^2 + (y-3)^2$$
$$KC^2 = (x-1)^2 + (y-8)^2$$

② بإصلاح المساواة $KA^2 = KC^2$ و $KA^2 = KB^2$ نجد $x + 2y - 7 = 0$ ، و $3x + y = 6$.

③ بالحل المشترك لجملة المعادلتين

$$x + 2y = 7$$
$$3x + y = 6$$

نجد $x = 1$ و $y = 3$. فإحداثيتا النقطة K هما $(1,3)$.

17 ليكن متوازي الأضلاع $OIJK$ ، ولتكن النقاط A و B و G المعرّفة بالعلاقات :

$$\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OI}, \quad \overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OK}, \quad \overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$$

اختر مَعْلَماً مناسباً وأثبت أنّ النقاط O و G و J على استقامة واحدة.

الحل

لنختر المَعْلَم $O;\vec{i},\vec{j}$ حيث $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ و $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$. فيكون

$$\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OK} = 2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$

ومن جهة أخرى

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} = \vec{i} + \frac{3}{5}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$
$$= \vec{i} + \frac{3}{5}(\vec{j} - \vec{i}) = \frac{2}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}$$

إذن $\overrightarrow{OJ} = 5\overrightarrow{OG}$ ، فالشعاعان $\overrightarrow{OJ}$ و $\overrightarrow{OG}$ مرتبطان خطياً والنّقاط O و G و J واقعة على استقامة واحدة.

18 لتكن النّقاط $A\ 1,2$ و $B\ 6,0$ و $C\ 2,5$. احسب إحداثيّتي النّقطة G مركز ثقل المثلّث ABC .

الحل

هذا تطبيق مباشر للعلاقتين : $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$ و $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$ ، فنجد $G(3, \frac{7}{3})$.

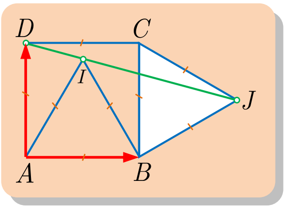
19 ليكن المربّع $ABCD$. AIB و BJC مثلّثان متساويا الأضلاع ومتوضّعان كما هو مبيّن في الشّكل المجاور. يهدف التّمرين إلى إثبات أنّ النقط D و I و J تقع على استقامة واحدة بأسلوبين مختلفين.

① الطريقة الأولى. استعمال الزّوايا.

❶ احسب قياس كلٍّ من الزّوايا $\angle DIA$ و $\angle AIB$ و $\angle BIJ$.

❷ بيّن أنّ $\angle DIJ = 180°$. ماذا تستنتج؟

② الطريقة الثانية. اختيار مَعْلَم مناسب.اختر مَعْلَماً مناسباً، ثُمّ احسب إحداثيّات النّقاط D و I و J ثمّ أثبت أنّها تقع على استقامة واحدة.



الحل

① الطريقة الأولى.

❶ المثلث AIB متساوي الأضلاع إذن $\angle IAB = 60°$، و منه

$$\angle DAI = \angle DAB - \angle IAB = 90° - 60° = 30°$$

ولكن المثلث AID متساوي الساقين رأسه A. فقياس كل من زاويتي القاعدة يساوي $75°$. أي إنَّ $\angle AID = 75°$.

وكذلك فإن المثلث IBJ مثلث متساوي قياس زاوية الرأس فيه $\angle IBJ = 30° + 60° = 90°$، فقياس كل من زاويتي قاعدته يساوي $45°$ أي إنَّ $\angle BIG = 45°$.

❷ لمّا كان $\angle AIB = 60°$ استنتجنا أنّ

$$\angle DIJ = \angle DIA + \angle AIB + \angle BIJ = 75° + 60° + 45° = 180°$$

فالنقاط الثلاث D و I و J تقع على استقامة واحدة.

② الطريقة الثانية.

لنختر المَعْلَم $O;\vec{i},\vec{j}$ حيث $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$ و $\overrightarrow{AD} = \vec{j}$. فيكون لدينا

$A\ 0,0$ و $B\ 1,0$ و $C\ 1,1$ و $D\ 0,1$ و $I\ \frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $J\ 1+\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}$.

ومن ثَمّ $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}\vec{i} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\vec{j}$ و $\overrightarrow{DJ} = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$

نطبق شرط الارتباط الخطي لشعاعين لإثبات ارتباط الشعاعين $\overrightarrow{DJ}$ و $\overrightarrow{DI}$ فنجد

$$xy' - yx' = \frac{1}{2} \times -\frac{1}{2} \ - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$$

$$= -\frac{1}{4} - \ \frac{3}{4} - 1 \ = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

فالشعاعان $\overrightarrow{DJ}$ و $\overrightarrow{DI}$ مرتبطان خطياً والنقاط D و I و J واقعة على استقامةٍ واحدةٍ.

20 ليكن ABC مثلثاً. ولتكن A' و B' و C' منتصفات الأضلاع $[BC]$، $[CA]$ و $[AB]$ بالتّرتيب، ولتكن النّقطة O مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث ABC. ثُمّ لنتأمّل النّقطة H التي تحقّق

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

① ❶ أثبت أنّ $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$.

❷ استنتج أنّ (AH) هو الارتفاع النازل من الرأس A في المثلّث ABC.

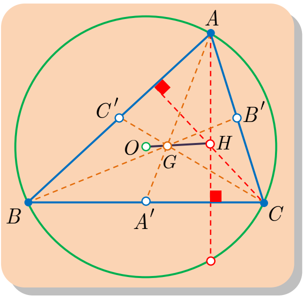
❸ أثبت بأسلوب مماثل أنّ (BH) هو الارتفاع النازل من الرأس B في المثلث ABC. ماذا تمثّل النّقطة H بالنِّسبة إلى المثلّث ABC ؟

② لتكن النّقطة G مركز ثقل المثلّث ABC.

❶ أثبت أنّه أياً كانت النّقطة M من المستوي كان $3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

❷ أثبت بالاستفادة من الفقرة السابقة أنّ $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$. ماذا تستنتج بشأن النّقاط O و G و H ؟

الحل



① ❶ لمّا كانت A' منتصف $[BC]$ استنتجنا أنّ

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'C}$$
$$= 2\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = 2\overrightarrow{OA'} + \vec{0} = 2\overrightarrow{OA'}$$

وعليه نستنتج من $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ أنّ

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$$

❷ لمّا كانت A' منتصف الوتر $[BC]$ استنتجنا أنّ (OA') هو محور $[BC]$، فهو عمودي على $[BC]$، ونستنتج من المساواة $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$ أنّ $(AH) \parallel (OA')$ إذن $(AH) \perp (BC)$، فالمستقيم (AH) هو الارتفاع النازل من A في المثلث ABC.

❸ نستنتج بأسلوب مماثل أنّ (HB) عمودي على (AC) فالمستقيم (BH) هو الارتفاع النازل من B في المثلث ABC. فالنقطة H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC.

② ❶ انطلاقاً من المساواة $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ نستنتج أنّ

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MG} = \vec{0}$$

وهذا يُكافئ $3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

❷ باختيار M منطبقة على O نستنتج أنّ

$$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$$

فالنقاط O و H و G تقع على استقامة واحدة. يسمّى هذا المستقيم، في حالة مثلث غير متساوي الأضلاع، مستقيم أويلر.

4

معادلة مستقيم وجمل المعادلات الخطيّة

تدرّب

① تأمّل المعادلة $(\mathcal{E})$ التالية : $-2x+3y=5$. عيّن، من بين الثنائيّات الآتية ، تلك التي تمثّل حلولاً للمعادلة $(\mathcal{E})$:

❶ $\left(\frac{1}{4},\frac{7}{4}\right)$ ❷ $\left(\frac{1}{3},2\right)$ ❸ $\left(-3,\frac{1}{3}\right)$

❹ $\left(0,\frac{3}{5}\right)$ ❺ $\left(\frac{1}{2},2\right)$ ❻ $-2,1$

الحل

❶ لا تمثّل الثّنائيّة $\left(\frac{1}{4},\frac{7}{4}\right)$ حلاً للمعادلة $(\mathcal{E})$، لأنّ $-2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{7}{4}=\frac{19}{4}\neq 5$.

❷ لا تمثّل الثّنائيّة $\left(\frac{1}{3},2\right)$ حلاً للمعادلة $(\mathcal{E})$ ، لأنّ $-2\times\frac{1}{3}+3\times 2=\frac{16}{3}\neq 5$.

❸ لا تمثّل الثّنائيّة $\left(-3,\frac{1}{3}\right)$ حلاً للمعادلة $(\mathcal{E})$ ، لأنّ $-2\times -3+3\times\frac{1}{3}=7\neq 5$.

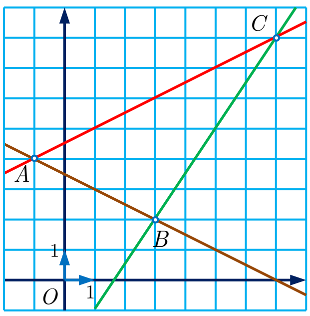
❹ لا تمثّل الثّنائيّة $\left(0,\frac{3}{5}\right)$ حلاً للمعادلة $(\mathcal{E})$، لأنّ $-2\times 0+3\times\frac{3}{5}=\frac{9}{5}\neq 5$.

❺ تمثّل الثّنائيّة $\left(\frac{1}{2},2\right)$ حلاً للمعادلة $(\mathcal{E})$، لأنّ $-2\times\frac{1}{2}+3\times 2=5$.

❻ لا تمثّل الثّنائيّة $-2,1$ حلاً للمعادلة $(\mathcal{E})$، لأنّ $-2\times -2+3\times 1=7\neq 5$.

② مثّلنا في مَعْلَم متجانس ، التوابع التآلفيّة ، (من الدّرجة الأولى) الآتية :

$f : x \to \frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$ ☝ $g : x \to \frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$ ✌ $h : x \to -\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$ 👌



❶ تنتمي النّقطة $A(-1,4)$ إلى مستقيمين، دلَّ عليهما ؟

❷ استنتج جملةَ معادلتين خطيّتين تكون إحداثيّات A حلاً لها.

❸ أعد حلّ الطّلبين السّابقين في حالة $B(3,2)$ ثُمّ $C(7,8)$.

الحل

❶ لنحسب قيمة كل من التوابع المعطاة عند $x=-1$ فنجد $f(-1)=4$ و $g(-1)=-4$ و $h(-1)=4$. نستنتج أنّ النقطة $A(-1,4)$ تحقق معادلة كل من الخطين البيانيين للتابعين f و h ولا تحقق معادلة الخط البياني للتابع g. فهي إذن تقع على المستقيمين اللذين معدلتاهما :

$$y=f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{9}{2} \quad \text{و} \quad y=h(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$$

❷ نستنتج أنّ $A(-1,4)$ هي الحل المشترك لجملة المعادلتين

$$\begin{cases} 2y = x+9 \\ 2y = -x+7 \end{cases}$$

❸ ونجد بالمثل أنّ $f(3)=6$ و $g(3)=2$ و $h(3)=2$. نستنتج أنّ النّقطة $B(3,2)$ تحقق معادلة كل من الخطين البيانيين للتابعين g و h ولا تحقق معادلة الخط البياني للتابع f. فهي إذن تقع على المستقيمين اللذين معدلتاهما :

$$y = h(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \quad \text{و} \quad y = g(x) = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$$

نستنتج أيضاً أنّ $B(3,2)$ هي الحل المشترك لجملة المعادلتين

$$\begin{cases} 2y = 3x-5 \\ 2y = -x+7 \end{cases}$$

وكذلك نجد أنّ $f(7)=8$ و $g(7)=8$ و $h(7)=0$. نستنتج أنّ النّقطة $C(7,8)$ تحقق معادلة كل من الخطين البيانيين للتابعين f و g ولا تحقق معادلة الخط البياني للتابع h. فهي إذن تقع على المستقيمين اللذين معدلتاهما :

$$y = g(x) = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \quad \text{و} \quad y = f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$$

نستنتج أيضاً أنّ $C(7,8)$ هي الحل المشترك لجملة المعادلتين

$$\begin{cases} 2y = x+9 \\ 2y = 3x-5 \end{cases}$$

مثال

ليكن f التابع التآلفي المعرف بالصيغة $f(x) = 2x - 3$.

① ❶ احسب المقادير $f(0)$ و $f(1)$ و $f(2)$. ثم ارسم بدقة النّقاط $A(0,f(0))$ و $B(1,f(1))$ و $C(2,f(2))$.

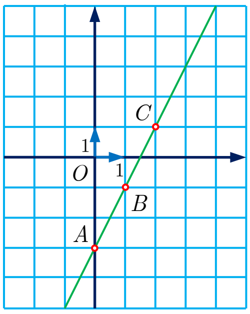
❷ أتقع النّقاط A و B و C على استقامة واحدة ؟

② ❶ ارسم المستقيم Δ المارّ بالنّقطتين A و B، واختر عليه نقطةً M واحسب من الشكل إحداثيتيها (u,v) مراعياً الدقة.

❷ أتتحقّق المساواة $v = f(u) = 2u - 3$ ؟

③ ماذا تستنتج من ① و ② ؟

الحل



① ❶ نجد مباشرة أنّ $f(0)=-3$ و $f(1)=-1$ و $f(2)=1$.

❷ ونلاحظ من الشكل أنّ النقاط $A(0,-3)$ و $B(1,-1)$ و $C(2,1)$ تقع على استقامة واحدة.

② نلاحظ من الشكل أنّ المستقيم يمر بالنقطة $M(3,3)$ ، ونلاحظ أيضاً أنّ إحداثيّتيها (u,v) تحققان $v=f(u)=2u-3$.

③ نستنتج أنّ المستقيم (AB) هو التمثيل البياني للتابع f .

فكّر

لتكن d_1 مجموعة نقاط المستوي $M(x,y)$ التي تحقّق إحداثياتها العلاقة $2y+3x=-1$ ، ولتكن d_2 مجموعة نقاط المستوي $M(x,y)$ التي تحقّق إحداثياتها العلاقة $y=-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$. قارن بين d_1 و d_2 . ماذا تستنتج بشأن معادلة مستقيم بوجه عام ؟ هل هي وحيدة ؟

الحل

نلاحظ أن المعادلتين $2y+3x=-1$ و $y=-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$ متكافئتان، فلهما مجموعة الحلول نفسها. أي إنّ $d_1=d_2$. ونستنتج أنّه بوجه عام لا تكون معادلة المستقيم وحيدة.

تدرّب–صفحة 80

① نزوِّد المستوي بمعلَم. بيّن الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الثلاث المقترحة فيما يأتي:

- $y=\frac{3}{2}x-1$ هي معادلة d . شعاعٌ موجّه للمستقيم d هو :

❶ $\vec{v}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$. ❷ $\vec{v}\begin{bmatrix}1\\1.5\end{bmatrix}$.☑ ❸ $\vec{v}\begin{bmatrix}-1\\1.5\end{bmatrix}$.

- $y=-\frac{1}{2}x+4$ هي معادلة d . شعاعٌ موجّه للمستقيم d هو :

❶ $\vec{v}\begin{bmatrix}-0.5\\4\end{bmatrix}$. ❷ $\vec{v}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$. ❸ $\vec{v}\begin{bmatrix}1\\-0.5\end{bmatrix}$ ☑.

- $\vec{v}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ هو شعاع موجِّه للمستقيم الذي معادلته:

❶ $y=3x+2$. ❷ $y=-\frac{3}{2}x+1$. ❸ $y=\frac{3}{2}x$ ☑.

- معادلة المستقيم d المارّ بالنّقطة $A\;\;2,1$ موازياً المستقيم Δ الذي معادلته $y=3x-1$ هي :

❶ $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$. ❷ $y=3x-5$ ☑. ❷ $y=3x$.

② ليكن d المستقيم الذي معادلته $y = \frac{3}{2}x - \frac{2}{5}$. عيّن العدد t كي تقع النّقطة $M(t,3)$ على d.

الحل

تقع النّقطة $M(t,3)$ على المستقيم d إذا وفقط إذا حققت إحداثيتا M معادلة المستقيم d، أي إذا تحققت المساواة $3 = \frac{3}{2}(t) - \frac{2}{5}$ أي $t = \frac{34}{15}$.

③ اكتب معادلة المستقيم d المار بالنّقطة A ويقبل $\vec{u}$ شعاعاً موجّهاً في الحالتين الآتيتين:

❶ $A(-4,3)$ و $\vec{u}\begin{bmatrix}5\\-3\end{bmatrix}$ ❷ $A(5,3)$ و $\vec{u}\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$

الحل

نعلم بوجه عام أن معادلة المستقيم المار بالنقطة (a,b) وشعاع توجيهه $\vec{u}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}$ هي

$$\alpha(y-b) - \beta(x-a) = 0$$

❶ في هذه الحالة المعادلة المطلوبة هي $5(y-3)+3(x+4)=0$ أو $5y+3x-3=0$.

❷ هنا المعادلة المطلوبة $0(y-3)-2(x-5)=0$ أو $x=5$.

④ اكتب معادلة المستقيم d المار بالنّقطتين A و B في الحالتين الآتيتين :

❶ $A(2,1)$ و $B(3,-1)$ ❷ $A(-5,0)$ و $B(2,-3)$

الحل

❶ يقبل المستقيم d المعادلة الآتية : $\frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A}$ أي $\frac{x-2}{3-2} = \frac{y-1}{-1-1}$ أو $y = -2x+3$.

❷ يقبل المستقيم d المعادلة الآتية : $\frac{x+5}{2+5} = \frac{y-0}{-3-0}$ أي $7y+3x+15=0$.

⑤ نتأمّل المثلّث ABC حيث $A(1,3)$ و $B(-3,5)$ و $C(-1,-1)$.

❶ عيّن إحداثيتي النّقطة A' منتصف $[BC]$، وإحداثيتي النّقطة B' منتصف $[AC]$.

❷ اكتب معادلة المتوسط d_1 المتعلق بالرأس A.

❸ اكتب معادلة المستقيم Δ المار بالنّقطتين A و B.

❹ اكتب معادلة المستقيم Δ' المار بالنّقطتين A' و B'. ماذا تقول عن المستقيمين Δ و Δ'.

الحل

❶ لما كانت إحداثيّات النّقطة A' منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$ تُعْطَى بالعلاقتين :

$$y_{A'} = \frac{y_B + y_C}{2} \quad \text{و} \quad x_{A'} = \frac{x_B + x_C}{2}$$

كانت

$$y_{A'} = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \text{و} \quad x_{A'} = \frac{-3-1}{2} = -2$$

ومنه $A'\ \ -2,2$ ، ونجد بالمثل أنّ

$$y_{B'} = \frac{3-1}{2} = 1 \quad \text{و} \quad x_{B'} = \frac{1-1}{2} = 0$$

ومنه $B'\ \ 0,1$.

❷ المتوسط d_1 هو المستقيم المار بالنقطتين $A(1,3)$ و $A'(-2,2)$. وهو يقبل المعادلة

$$\frac{y-3}{2-3} = \frac{x-1}{-2-1} \quad \text{أي} \quad \frac{y-y_A}{y_{A'}-y_A} = \frac{x-x_A}{x_{A'}-x_A}$$

ومنه $3y - x - 8 = 0$.

❸ Δ هو المستقيم المار بالنقطتين $A(1,3)$ و $B(-3,5)$. وهو يقبل المعادلة

$$\frac{y-3}{5-3} = \frac{x-1}{-3-1} \quad \text{أي} \quad \frac{y-y_A}{y_B-y_A} = \frac{x-x_A}{x_B-x_A}$$

ومنه $2y + x - 7 = 0$.

❹ Δ' هو المستقيم المار بالنّقطتين $A'(-2,2)$ و $B'(0,1)$ وهو يقبل المعادلة

$$\frac{y-1}{2-1} = \frac{x-0}{-2-0} \quad \text{أي} \quad \frac{y-y_{B'}}{y_{A'}-y_{B'}} = \frac{x-x_{B'}}{x_{A'}-x_{B'}} :$$

ومنه $2y + x - 2 = 0$.

نلاحظ أن للمستقيمين Δ و Δ' الميل نفسه $-\frac{1}{2}$ ، فهما متوزيان. وهذه المسألة توضح خاصة هندسيَّة معروفة : المستقيم الواصل بين منتصفي ضلعين في مثلث يوازي الضلع الثالثة.

تمرينات ومسائل

1 نزوِّد المستوي بمَعْلَم $O;\vec{i},\vec{j}$. ونتأمّل النّقاط $A(5,-2)$ و $B(11,0)$ و $C(-1,6)$، أوجد معادلة لكلٍّ من متوسطات المثلّث ABC .

الحل

✌ تعطى إحداثيّتا النّقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$ تعطى بالعلاقتين :

$$y_I = \frac{y_B + y_C}{2} \quad \text{و} \quad x_I = \frac{x_B + x_C}{2}$$

ومنه $I\ 5,3$.

المتوسط المتعلق بالرأس A هو المستقيم المار بالنّقطتين $A(5,-2)$ و $I(5,3)$. للنّقطتين A و I الفاصلة 5 نفسها. إذن $[AI]$ يوازي محور التراتيب ويقبل $x = 5$ معادلةً.

✌ نحسب بالمثل إحداثيّتي النّقطة J منتصف القطعة $[AC]$، فنجد $J(2,2)$. المتوسط المتعلق بالرأس B هو المستقيم المار بالنّقطتين $B(11,0)$ و $J(2,2)$. فهو يقبل المعادلة :

$$\frac{y-2}{0-2} = \frac{x-2}{11-2} \quad \text{أي} \quad \frac{y-y_J}{y_B-y_J} = \frac{x-x_J}{x_B-x_J}$$

ومنه $9y + 2x - 22 = 0$.

✌ وكذلك نحسب إحداثيّتي النّقطة K منتصف القطعة $[AB]$، فنجد $K(8,-1)$. المتوسط المتعلق بالرأس C هو المستقيم المار بالنّقطتين $C(-1,6)$ و $K(8,-1)$. فهو يقبل المعادلة :

$$\frac{y+1}{6+1} = \frac{x-8}{-1-8} \quad \text{أي} \quad \frac{y-y_K}{y_C-y_K} = \frac{x-x_K}{x_C-x_K}$$

ومنه $9y + 7x - 47 = 0$.

2 نزوِّد المستوي بمَعْلَم $O;\vec{i},\vec{j}$. ونتأمّل النّقاط $A\ 1,5$ و $B\ -1,-1$ و $C\ 5,2$، ونعرّف النقاط I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$، و J منتصف القطعة المستقيمة $[AC]$، و K منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$، أوجد معادلةً لكلٍّ من المستقيمات (IJ) و (IK) و (KJ).

الحل

✌ نجد مباشرة أنّ $I(0,2)$ و $J(3,\frac{7}{2})$ و $K(2,\frac{1}{2})$.

✌ وأنّ (IJ) يقبل معادلة $6y + 11x - 12 = 0$.

و (IK) يقبل معادلة $4y + 3x - 8 = 0$.

و (JK) يقبل معادلة $2y - 6x + 11 = 0$.

3 حلّ جمل المعادلات الآتية ، واشرح النتيجة هندسيّاً.

① $\left.\begin{array}{rcrcr} 5x & + & 3y & = & 5 \\ 2x & - & 3y & = & 2 \end{array}\right\}$ ② $\left.\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 4 \\ 5x & - & 5y & = & -1 \end{array}\right\}$

③ $\left.\begin{array}{rcrcr} 6x & - & y & = & -7 \\ x & + & 2y & = & 1 \end{array}\right\}$ ④ $\left.\begin{array}{rcrcr} 3x & + & y & = & 5 \\ 6x & + & 2y & = & 10 \end{array}\right\}$

⑤ $\left.\begin{array}{rcrcr} \frac{3}{2}x & + & \frac{9}{4}y & = & 0 \\ \frac{1}{3}x & + & \frac{1}{2}y & = & \frac{17}{36} \end{array}\right\}$ ⑥ $\left.\begin{array}{rcrcr} \frac{5}{3}x & - & \frac{1}{4}y & = & \frac{35}{8} \\ \frac{1}{3}x & - & \frac{1}{20}y & = & \frac{7}{8} \end{array}\right\}$

⑦ $\left.\begin{array}{rcrcr} 2\sqrt{2}\,x & - & y & = & 4-\sqrt{3} \\ 2y & - & x\sqrt{6} & = & 0 \end{array}\right\}$ ⑧ $\left.\begin{array}{rcr} 1-\sqrt{2}\;\; x-y & = & 1 \\ x+\;\; 1+\sqrt{2}\;\; y & = & -1-\sqrt{2} \end{array}\right\}$

الحل

① $\left.\begin{array}{rcrcr} 5x & + & 3y & = & 5 \\ 2x & - & 3y & = & 2 \end{array}\right\}$

نجمع المعادلتين طرفاً مع طرف فنجد $7x = 7$ ومنه $x = 1$. نعوّض قيمة x في المعادلة الأولى لنحسب y فنجد $y = 0$. فلهذه الجملة حلّ وحيد هو $1{,}0$.

المستقيمان : $d : 5x + 3y = 5$ و $d' : 2x - 3y = 2$ متقاطعان في النّقطة $1{,}0$.

② $\left.\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 4 \\ 5x & - & 5y & = & -1 \end{array}\right\}$

بطرح خمسة أمثال المعادلة الأولى من الثانية نصل إلى التناقض $-21 = 0$، هذا التناقض يبرهن أنه لا يوجد أي حل لهذه الجملة.

المستقيمان : $d : x - y = 5$ و $d' : 5x - 5y = -1$ متوازيان وغير منطبقين.

③ $\left.\begin{array}{rcrcr} 6x & - & y & = & -7 \\ x & + & 2y & = & 1 \end{array}\right\}$

من المعادلة الأولى نحسب $y = 6x + 7$، ثُمّ نعوّض في الثانية فنجد $x + 2(6x + 7) = 1$، ومنه $x = -1$، وبالعودة إلى قيمة y نجد $y = 1$. فلهذه الجملة حلّ وحيد هو $-1{,}1$.

المستقيمان : $d : 6x - y = -7$ و $d' : x + 2y = 1$ متقاطعان في النّقطة $-1{,}1$.

④ $\left.\begin{array}{rcrcr} 3x & + & y & = & 5 \\ 6x & + & 2y & = & 10 \end{array}\right\}$

نلاحظ أن المعادلة الثانية تنتج من الأولى بضرب طرفيها بالعدد 2، فالمعادلتان متكافئتان، وهناك عدد لا نهائي من الحلول لهذه الجملة : $\mathcal{S} = \{(x, 5 - 3x) : x \in \mathbb{R}\}$.

المستقيمان : $d : 3x + y = 5$ و $d' : 6x + 2y = 10$ منطبقان.

⑤
$$\left.\begin{array}{rcrcr} \frac{3}{2}x & + & \frac{9}{4}y & = & 0 \\ \frac{1}{3}x & + & \frac{1}{2}y & = & \frac{17}{36} \end{array}\right\}$$

من المعادلة الأولى نستنتج أن $x=-\frac{3}{2}y$، وبالتعويض في الثانية نصل إلى التناقض $\frac{17}{36}=0$، إذن ليس هناك أي حل لهذه الجملة.

المستقيمان : $d:\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}y=0$ و $d':\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y=\frac{17}{36}$ متوازيان وغير منطبقين.

⑥
$$\left.\begin{array}{rcrcr} \frac{5}{3}x & - & \frac{1}{4}y & = & \frac{35}{8} \\ \frac{1}{3}x & - & \frac{1}{20}y & = & \frac{7}{8} \end{array}\right\}$$

نلاحظ أن المعادلة الثانية تنتج من الأولى بضرب طرفيها بالعدد $\frac{1}{5}$، فالمعادلتان متكافئتان، وهناك عدد لا نهائي من الحلول لهذه الجملة.

المستقيمان : $d:\frac{5}{3}x-\frac{1}{4}y=\frac{35}{8}$ و $d':\frac{1}{3}x-\frac{1}{20}y=\frac{7}{8}$ منطبقان.

⑦
$$\left.\begin{array}{rcrcr} 2\sqrt{2}\,x & - & y & = & 4-\sqrt{3} \\ 2y & - & x\sqrt{6} & = & 0 \end{array}\right\}$$

من المعادلة الثانية نجد $y=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x$، وبالتعويض في الأولى نجد: $2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\;x=4-\sqrt{3}$ ، أو بصيغة مُكافئة $\frac{1}{\sqrt{2}}x=4-\sqrt{3}\;\;4-\sqrt{3}$ ، أي $x=\sqrt{2}$، وبالعودة إلى y نجد $y=\sqrt{3}$. فللجملة حلّ وحيد هو $\sqrt{2},\sqrt{3}$.

والمستقيمان $d:2\sqrt{2}x-y=4-\sqrt{3}$ و $d':2y-\sqrt{6}x=0$ متقاطعان في النّقطة $\sqrt{2},\sqrt{3}$.

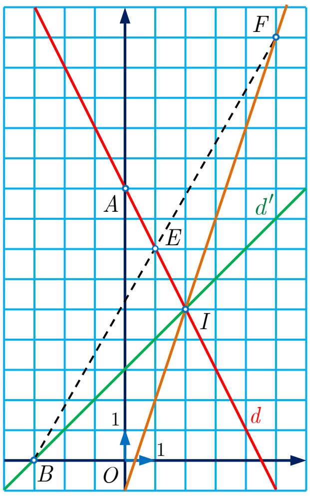
⑧
$$\left.\begin{array}{rcl} 1-\sqrt{2}\;\;x-y & = & 1 \\ x+\;\;1+\sqrt{2}\;\;y & = & -1-\sqrt{2} \end{array}\right\}$$

بملاحظة أنّ $1-\sqrt{2}\;\;1+\sqrt{2}\;\;=-1$ نستنتج أنّ ضرب المعادلة الثانية بالمقدار $1-\sqrt{2}$ يعطي المعادلة الأولى ذاتها. فللجملة عددٌ لا نهائي من الحلول. ومجموعة الحلول هي نقاط المستقيم الذي معادلته $1-\sqrt{2}\;\;x-y=1$.

4 إيجاد معادلة مستقيم

نزوّد المستوي بمَعْلَم $O;\vec{i},\vec{j}$. ليكن d المستقيم الذي معادلته $y=-2x+9$، وليكن d' المستقيم الذي معادلته $y=x+3$. يتقاطع المستقيمان d و d' في I. ويقطع d محور التراتيب في A، كما يقطع d' محور الفواصل في B. لتكن E منتصف $[AI]$، ولتكن F نظيرة النّقطة B بالنسبة إلى E. أوجد معادلة للمستقيم (IF).

الحل



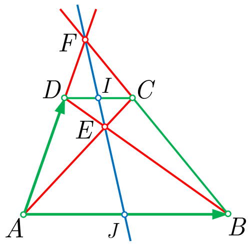
إحداثيّتا نقطة التقاطع I هما الحل المشترك لجملة معادلتي المستقيمين d و d' أي

$$\begin{cases} y = -2x + 9 \\ y = \quad x + 3 \end{cases}$$

فنجد $I(2,5)$ وهذا ما يتفق مع الشكل.

إنّ F هي نظيرة B بالنسبة إلى منتصف $[IA]$، فهي إذن صورة I وفق الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BA}$ أي $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{IF}$. المستقيم (IF) هو المستقيم المار بالنقطة I ويقبل الشعاع $\overrightarrow{BA}$ شعاعَ توجيه. ولكن $\overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$، فالمستقيم (IF) مستقيم يمر بالنقطة I وميله m يساوي 3، فهو يقبل معادلة : $y - y_I = m(x - x_I)$ أو $y - 5 = 3(x - 2)$ التي تأخذ بعد الاختصار الصيغة $y = 3x - 1$.

5 معادلة مستقيم والوقوع على استقامة واحدة



ليكن $ABCD$ شبه منحرف فيه $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. ولتكن E نقطة تقاطع قطري شبه المنحرف، و F نقطة تقاطع المستقيمين (AD) و (BC).

أثبت، باستعمال مَعْلَم من اختيارك ، أنّ المستقيم (EF) يمر بالنّقطة I منتصف $[DC]$ ، وبالنّقطة J منتصف $[AB]$.

الحل

نختار معلماً $(A;\vec{i},\vec{j})$ للمستوى فيه $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{j} = \overrightarrow{AD}$، فيكون $A(0,0)$ و $B(1,0)$ و $D(0,1)$. ولما كان

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{j} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \vec{j} + \tfrac{1}{3}\vec{i}$$

كان $C(\frac{1}{3},1)$. نكتب معادلةً للمستقيم (AC) ومعادلةً للمستقيم (BD) في المعلم $(A,\vec{i},\vec{j})$.

- المستقيم (AC) يمرُّ بالمبدأ $A(0,0)$ وبالنقطة $C(\frac{1}{3},1)$، فهو يقبل ❶ $y = 3x$ معادلةً.
- المستقيم (BD) يمر بالنّقطتين $B(1,0)$ و $D(0,1)$، فهو يقبل ❷ $y + x = 1$ معادلةً.

بحل جملة المعادلتين ❶ و ❷ نجد : $x = \frac{1}{4}$ ، $y = \frac{3}{4}$، إذن إحداثيتا النّقطة E هما $E(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$.

- المستقيم (BC) يمر بالنقطتين $B(1,0)$ و $C(\frac{1}{3},1)$. ولأنّه يمر بالنقطة B فهو يقبل معادلة من الشكل $y = m(x-1)$، حيث تتعين m بشرط مروره بالنقطة $C(\frac{1}{3},1)$ فنجد $m = -\frac{3}{2}$.

إذن $y=-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$ هي معادلة للمستقيم (BC). وهو محور التراتيب عند النّقطة $F(0,\frac{3}{2})$.

- المستقيم (EF) يمر بالنقطتين $E(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$ و $F(0,\frac{3}{2})$. ولأنّه يمر بالنقطة F فهو يقبل معادلة من الصيغة $y=mx+\frac{3}{2}$، حيث تتعين m بشرط مروره بالنقطة $E(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$ فنجد $m=-3$.

إذن $y=-3x+\frac{3}{2}$ هي معادلة للمستقيم (EF).

- منتصف القطعة المستقيمة $[DC]$ هو النقطة $I(\frac{1}{6},1)$، وإحداثيّتاها تحققان معادلة المستقيم (EF) وضوحاً، إذن تقع I على (EF).
- منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ هو النقطة $J(\frac{1}{2},0)$، وإحداثيّتاها تحققان معادلة المستقيم (EF) وضوحاً، إذن تنتمي النقطة J أيضاً إلى المستقيم (EF). وهي النتيجة المطلوب إثبات صحتها.

6 معادلة مستقيم والتناظر بالنسبة إلى نقطة

نزوِّد المستوي بمَعْلَم $O;\vec{i},\vec{j}$. ليكن d المستقيم الذي معادلته $y=\frac{3}{2}x+6$، ولتكن النّقطة $A(2,2)$. أعطِ معادلةً للمستقيم d' نظير المستقيم d بالنّسبة إلى النّقطة A.

الحل

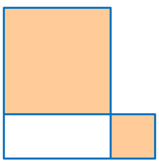
تكون $M'(x',y')$ نظيرة $M(x,y)$ بالنسبة إلى $A(2,2)$، إذا وفقط إذا كانت A منتصف القطعة $[MM']$، وهذا يُكافئ قولنا $x'=4-x$ و $y'=4-y$.

الآن، تنتمي النقطة $M(x,y)$ إلى المستقيم d'، إذا وفقط إذا انتمت نظيرتها $M'(4-x,4-y)$ إلى المستقيم d، أي إذا حققت إحداثيّتا هذه الأخيرة معادلة المستقيم d، وهذا الشرط يُكافئ

$$4-y=\frac{3}{2}(4-x)+6$$

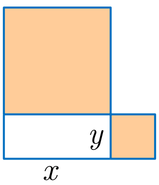
أو $y=\frac{3}{2}x-8$. إذن المعادلة $y=\frac{3}{2}x-8$ هي معادلةٌ للمستقيم d'.

7 مساحات السطوح ، وحلّ المعادلات



مساحة المستطيل في الشكل المجاور 60 سنتيمتراً مربّعاً، ومجموع مساحتي المربّعين 169 سنتيمتراً مربّعاً. أوجد بُعدي المستطيل.

الحل



نفترض أحد بُعدَي المستطيل x وبعدَه الآخر y. فتكون مساحة المستطيل :

$$x\cdot y=60 \quad ❶$$

ومجموع مساحتي المربعين

$$x^2+y^2=169 \quad ❷$$

نضرب طرفي المعادلة ❷ بالعدد (غير المعدوم) x^2، ونعوّض $x^2y^2=(xy)^2$ بقيمتها 3600 من ❶ فنجد

$$x^4-169x^2+3600=0 \quad ❸$$

ولكن

$$\begin{aligned} x^4 - 169x^2 + 3600 &= (x^2 - 25)(x^2 - 144) \\ &= (x-5)(x+5)(x-12)(x+12) \end{aligned}$$

فإذا تذكّرنا أنّ أبعاد المستطيل أعداد موجبة استنتجنا أنّ x هي 5، أو 12. وعندئذ نستنتج قيمة y من المعادلة ❶. وهكذا نرى أنّ بُعدا المستطيل المنشود هما 12 و 5.

8 المستقيمات المتلاقية

نزوِّد المستوي بمَعْلَم $O;\vec{i},\vec{j}$. ونتأمّل النّقاط $A(3,0)$ و $B(3,4)$ و $C(0,4)$، ثُمّ نعرّف I منتصف القطعة المستقيمة $[OA]$، و J منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$. أثبت أنّ المستقيمات (AC) و (IB) و (OJ) تتلاقى في نقطة واحدة.

الحل

طريقة أولى:

إحداثيتا I منتصف $[OA]$ هما $\left(\frac{3}{2},0\right)$ I، وإحداثيّتا J منتصف $[AB]$ هما $J(3,2)$.

- المستقيم (OJ) يمر بالمبدأ O وبالنقطة $J(3,2)$ فيقبل معادلةً $3y - 2x = 0$.
- يقبل المستقيم (IB) المعادلة الآتية :

$$\frac{x - x_I}{x_B - x_I} = \frac{y - y_I}{y_B - y_I} \quad \text{أو} \quad \frac{x - \frac{3}{2}}{3 - \frac{3}{2}} = \frac{y-0}{4-0}$$

أي $3y - 8x + 12 = 0$، وهي معادلةٌ للمستقيم (IB).

بحلّ جملة معادلتي المستقيمين (OJ) و (IB) نحصل على إحداثيّتي نقطة تقاطعهما : $M\left(2,\frac{4}{3}\right)$.

- يقبل المستقيم (AC) المعادلة الآتية : $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ أو $3y + 4x = 12$. تحقّق إحداثيّتا النقطة $M\left(2,\frac{4}{3}\right)$ معادلة المستقيم (AC) فهي تقع أيضاً على (AC) والمستقيمات (OJ) و (IB) و (AC) تتلاقى في نقطة واحدة.

طريقة ثانية:

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$ فالشكل $OABC$ متوازي الأضلاع، ولأنّ قطريه متناصفان استنتجنا أنّ (AC) متوسط في المثلث OAB. واستناداً إلى التعريف (OJ) و (BI) هما أيضاً متوسطان في المثلث نفسه، ولكن نعلم أن المتوسطات في مثلث تتلاقى في نقطة واحدة. فالمستقيمات (OJ) و (IB) و (AC) تتلاقى في نقطة واحدة.

9

الفرق بين عددين x و y يساوي 14، أمّا الفرق بين مربّعيهما فيساوي 616. احسب هذين العددين.

الحل

لنوضّح في البداية أنّ مقولة الفرق بين عددين تعني الكبير مطروحاً منه الصغير، وهي من ثَم المسافة التي تفصل بينهما على محور الأعداد.

يمكننا دون الإقلال من عمومية المسألة أن نفترض إذن أنّ x هو أكبر العددين وأنّ y هو أصغرهما، وهنا علينا أن نناقش حالتين :

- حالة $x^2 > y^2$. فتصبح المسألة تعيين x و y بحيث

$$x^2 - y^2 = 616 \quad \text{و} \quad x - y = 14$$

ولكن

$$616 = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 14(x+y)$$

إذن $x + y = 44$. بأخذ نصف مجموع المعادلتين $x - y = 14$ و $x + y = 44$ نستنتج أنّ $x = 29$ ومن ثَمّ نجد $y = 15$، فالعددان هما 29 و 15 في هذه الحالة.

- حالة $x^2 < y^2$. فتصبح المسألة تعيين x و y بحيث $x - y = 14$ و $y^2 - x^2 = 616$

وبأسلوب مماثل للحالة السابقة نستنتج أنّ $x + y = -44$.

ومجدداً بأخذ نصف مجموع المعادلتين $x - y = 14$ و $x + y = -44$ نستنتج أنّ $x = -15$ ومن ثَمّ نجد $y = -29$، فالعددان هما -29 و -15 في هذه الحالة.

10 x و y عددان. الفرق بين مقلوبيهما 6، والفرق بين مربّعي مقلوبيهما يساوي 12. احسب هذين العددين.

الحل

كما في المسألة السابقة، لنرمز إلى مقلوبَي العددين المطلوبين بالرمزين x و y ولنفترض أن $y < x$.

هنا علينا أن نناقش حالتين :

- حالة $x^2 > y^2$. فتصبح المسألة تعيين x و y بحيث

$$x^2 - y^2 = 12 \quad \text{و} \quad x - y = 6$$

ولكن

$$12 = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 6(x+y)$$

إذن $x + y = 2$. بأخذ نصف مجموع المعادلتين $x - y = 6$ و $x + y = 2$ نستنتج أنّ $x = 4$ ومن ثَمّ نجد $y = -2$، فالعددان هما $\frac{1}{4}$ و $-\frac{1}{2}$ في هذه الحالة.

- حالة $x^2 < y^2$. فتصبح المسألة تعيين x و y بحيث $x - y = 6$ و $y^2 - x^2 = 12$

وبأسلوب مماثل للحالة السابقة نستنتج أنّ $x + y = -2$.

ومجدداً بأخذ نصف مجموع المعادلتين $x-y=6$ و $x+y=-2$ نستنتج أنّ $x=2$ ومن ثَمّ نجد $y=-4$، فالعددان هما $-\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{2}$ في هذه الحالة.

11 الفرق بين عددين x و y يساوي 6، أمّا جداء ضربهما فيساوي 216. احسب هذين العددين.

الحل

يمكننا دون الإقلال من عمومية المسألة أن نفترض أنّ x هو أكبر العددين وأنّ y هو أصغرهما، فتصبح المسألة تعيين x و y بحيث $x-y=6$ و $xy=216$

أو إذا رمزنا $z=-y$ نجد $x+z=6$ و $xz=-216$

إذن x و z هما جذرا المعادلة $T^2-6T-216=0$ أو $(T-3)^2=225$. إذن x و z هما العددان 18 و -12. فإذا كان $x=18$ كان $y=12$ وهو الحل الأوّل، وإذا كان $x=-12$ كان $y=-18$ وهو الحل الثاني.

12 احسب بُعدَي حقل مستطيل مساحته 120 متراً مربّعاً، ومحيطه 44 متراً.

الحل

نفترض أنّ طول بُعدَي الحقل x و y فيكون $x\cdot y=120$ و $2x+2y=44$ أو $x+y=22$. إذن x و y عددان مجموعهما 22 وجداء ضربهما 120 فهما جذرا المعادلة $T^2-22T+120=0$.

وبالحل نجد أن x و y هما 10 و 12.

13 احسب أطوال أضلاع مثلّث متساوي السّاقين ABC رأسه A، ومحيطه 36 سنتيمتراً، وطول ارتفاعه النازل من A يساوي 12 سنتيمتراً.

الحل

لنرمز بالرمز x إلى **نصف** طول وتر المثلث. فيكون $\sqrt{x^2+12^2}$ طول الضلع القائمة في المثلث. أمّا محيطه فيساوي إذن $\qquad 2x+2\sqrt{x^2+144}=36$

أو $\sqrt{x^2+144}=18-x$. بتربيع الطرفين نرى أنّ أي حلّ x لهذه المعادلة يجب أن يحقق

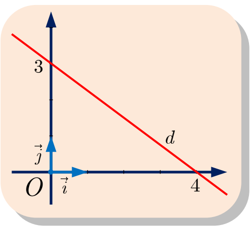
$$x^2+144=324-36x+x^2$$

أو بعد الإصلاح $x=5$. وبالعكس نتحقّق مباشرة أنّ $x=5$ هو حلٌّ للمعادلة

$$\sqrt{x^2+144}=18-x$$

فهو إذن حلها الوحيد. وأطوال أضلاع المثلث هي 13,13,10.

14 نزوّد المستوي بمَعْلَم متجانس $O;\vec{i},\vec{j}$. تأمّل الشّكل المجاور ثُمّ أجب عمّا يأتي :



① أوجد معادلة للمستقيم d.

② أوجد معادلة للمستقيم d_1 نظير المستقيم d بالنسبة إلى محور الفواصل.

③ أوجد معادلة للمستقيم d_2 نظير المستقيم d بالنسبة إلى محور التراتيب.

④ أوجد معادلة للمستقيم d_3 نظير المستقيم d بالنسبة إلى المبدأ O.

الحل

① المستقيم d يمر بالنّقطتين $B(0,3)$ و $A(4,0)$ فمعادلته $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$، أو $3x+4y=12$.

② إنّ نظيرة النقطة $M(x,y)$ بالنسبة إلى محور الفواصل هي $M'(x,-y)$، وعليه تقع $M(x,y)$ على d_1 إذا وفقط إذا وقعت نظيرتها $M'(x,-y)$ على d أي إذا كان $3x+4(-y)=12$، فالمستقيم d_1 يقبل $3x-4y=12$ معادلة.

③ إنّ نظيرة النقطة $M(x,y)$ بالنسبة إلى محور التراتيب هي $M'(-x,y)$، وعليه تقع $M(x,y)$ على d_2 إذا وفقط إذا وقعت نظيرتها $M'(-x,y)$ على d أي إذا كان $3(-x)+4y=12$، فالمستقيم d_2 يقبل $-3x+4y=12$ معادلة.

④ إنّ نظيرة النقطة $M(x,y)$ بالنسبة إلى المبدأ O هي $M'(-x,-y)$، وعليه تقع $M(x,y)$ على d_3 إذا وفقط إذا وقعت نظيرتها $M'(-x,-y)$ على d أي إذا كان $3(-x)+4(-y)=12$، فالمستقيم d_3 يقبل $3x+4y=-12$ معادلة.

15 سأل رجلٌ صديقَه عن عمره فأجابه : «عمري بقدر ضعفي عمرك الذي كنتَ فيه عندما كان عمري بقدر عمرك، وعندما يصبح عمرك بقدر عمري يصبح مجموع عمرينا 63 سنة». فكم عمر كلِّ من الصّديقين؟

الحل

تدل المقولة الثانية على أنَّ عُمر الصديق أكبر من عُمر الرجل. لنرمز إذن إلى عمر الصديق بالرمز x وبالرمز y إلى عمر الرجل. فيزيد عمر الصديق عن عمر الرجل بمقدار $x-y$.

	قبل $x-y$ سنة	الآن	بعد $x-y$ سنة
عمر الصديق	y	x	$2x-y$
عمر الرجل	$2y-x$	y	x

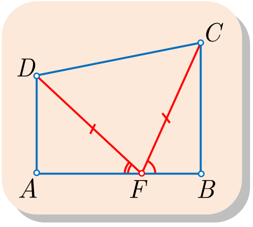
"عمري بقدر ضعفي عمرك الذي كنتَ فيه عندما كان عمري بقدر عمرك" أي $x=2(2y-x)$ أو

❶ $3x=4y$

"عندما يصبح عمرك بقدر عمري يصبح مجموع عمرينا 63 سنة" أي $(2x-y)+x=63$ أو

❷ $3x-y=63$

بحل جملة المعادلتين ❶ في ❷ نجد $y=21$ و $x=28$.



16 ليكن $ABCD$ شبه منحرف فيه الزاويتان A و B قائمتان. نفترض أنّ $AD = 3$ و $BC = 4$ و $AB = 5$ وجميع الأطوال مُقاسة بالمتر. نختار نقطة F من القطعة المستقيمة $[AB]$ تُحقّق $DF = FC$. احسب AF.

الحل

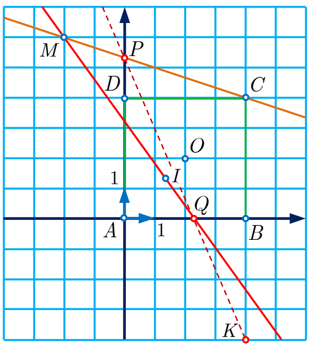
نختار معلماً متجانساً $(A;\vec{i},\vec{j})$ بحيث يكون $B(5,0)$ و $D(0,3)$، ويكون من ثَمّ $C(5,4)$، $F(x,0)$، والمطلوب عيين x. أمّا الشرط $DF^2 = FC^2$ فيُطتب بالشكل $x^2 + 9 = (5-x)^2 + 4^2$ وبالتربيع والإصلاح نجد $x = \frac{16}{5}$.

17 ليكن $ABCD$ مربّعاً مركزه O. ولتكن M نظيرة النّقطة O بالنّسبة إلى D، و K نظيرة C بالنّسبة إلى B. وأخيراً نرمز بالرّمز I إلى مركز ثقل المثلّث ADB.

① ليكن $(A;\vec{i},\vec{j})$ المَعلَم المتجانس الذي فيه $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i}$ و $\overrightarrow{AD} = 4\vec{j}$. أوجد إحداثيّات النقاط A و B و C و D و O و M و K و I.

② يقطع المستقيمُ (MI) المستقيمَ (AB) في Q، ويقطع المستقيمُ (MC) المستقيمَ (AD) في P. نريد إثبات وقوع النقاط K و Q و P على استقامة واحدة.

- اكتب معادلة للمستقيم (MI) واستنتج إحداثيتي النّقطة Q.
- اكتب معادلة للمستقيم (MC) واستنتج إحداثيّتي النّقطة P.
- أثبت أنّ النقاط K و Q و P تقع على استقامة واحدة.



الحل

① الرسم الدقيق يساعد، ونجد $A(0,0)$ و $B(4,0)$ و $C(4,4)$ و $D(0,4)$ و $M(-2,6)$ و $K(4,-4)$ وأخيراً $I(\frac{4}{3},\frac{4}{3})$.

② يقبل المستقيم MI المار بالنقطتين $M(-2,6)$ و $I(\frac{4}{3},\frac{4}{3})$. المعادلة الآتية : $(x_I - x_M)(y - y_M) - (y_I - y_M)(x - x_M) = 0$ التي تُكافئ $5y + 7x = 16$. يقطع هذا المستقيم محور الفواصل في النقطة $Q(\frac{16}{7},0)$.

يقبل المستقيم MC المار بالنقطتين $M(-2,6)$ و $C(4,4)$. المعادلة

$$y - 6 = -\frac{1}{3}(x+2)$$

التي تُكافئ $3y + x = 16$. يقطع هذا المستقيم محور التراتيب في النقطة $P(0,\frac{16}{3})$.

يقبل المستقيم (PQ) المعادلة $\frac{x}{16\,/\,7} + \frac{y}{16\,/\,3} = 1$ أو $7x + 3y = 16$. ونتحقّق مباشرة أنّ النقطة $K(4,-4)$ تُحقّق معادلة هذا المستقيم. فالنقاط K و Q و P تقع على استقامة واحدة.