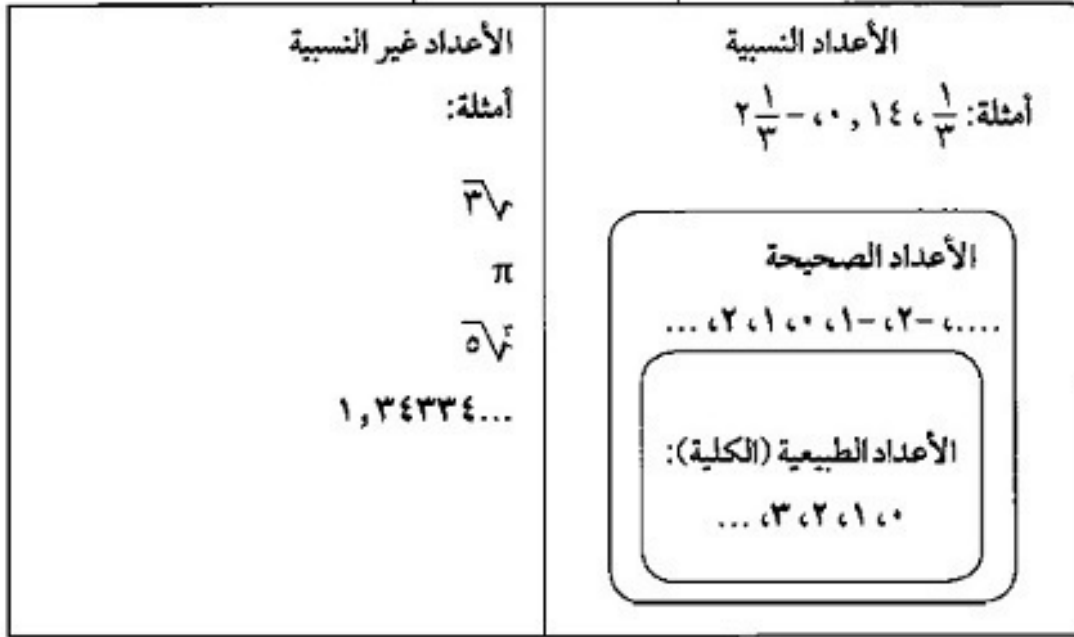


يوضح المخطط التالي العلاقات بين مجموعات الأعداد.
عمل الاستاذ / أحمد نصار
٦٧٧٧٢٨٦٤

الأعداد الحقيقية



(٥) الفترات : الفترة مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية

أولاً : الفترات المحدودة

الجدول التالي يوضح أنواع الفترات المحدودة: لنكن a, b أعدادًا حقيقية.

رمز الفترة	نوع الفترة	رمز المشابته	التمثيل البياني
$[a, b]$	مغلقة	$a \leq x \leq b$	
(a, b)	مفتوحة	$a < x < b$	
$[a, b)$	نصف مفتوحة أو نصف مغلقة	$a \leq x < b$	
$(a, b]$	نصف مفتوحة أو نصف مغلقة	$a < x \leq b$	

الأعداد a, b هما نقطتا الحدود لكل فترة حيث a الحد الأدنى للفترة، b الحد الأعلى للفترة.

ثانياً : الفترات غير المحدودة :

الجدول التالي يوضح بعض الفترات غير المحدودة: لنكن $a, b \in \mathbb{R}$.

رمز الفترة	نوع الفترة	رمز المشابته	التمثيل البياني
$(-\infty, a]$	نصف مغلقة وغير محدودة من الأعلى	$x \leq a$	
$(-\infty, a)$	مفتوحة وغير محدودة	$x < a$	
(a, ∞)	نصف مغلقة وغير محدودة من الأسفل	$x > a$	
(a, ∞)	مفتوحة وغير محدودة من الأسفل	$x \geq a$	

١ إذا كان p عددًا حقيقيًا موجبًا فإن حل المعادلة $|s| = p$ هو: $s = p$ أو $s = -p$ وتكون مجموعة الحل $\{-p, p\}$.

٢ إذا كان p عددًا حقيقيًا سالبًا فإن المعادلة $|s| = p$ مجموعة حلها \emptyset

٣ إذا كان $p = 0$ فإن $|s| = p$ مجموعة حلها $\{0\}$.

عند حل المعادلة $|s| = |ص|$ نستخدم طريقة المساواة، نضع $س = ص$ أو $س = -ص$. ونحل المعادلات أو نستخدم طريقة تربيع الطرفين ثم نحل المعادلة الناتجة ونتحقق من القيم بالتعويض عن المجهول لتحديد مجموعة الحل.

تعميم

رأس منحنى الدالة $ص = |س| + ب$ هو النقطة $(-\frac{ب}{٢}, ج)$

ملاحظة: رأس منحنى الدالة $ص = |س| + ب$ هو النقطة $(-\frac{ب}{٢}, ٠)$

١) أوجد مجموعة حل النظام $\left. \begin{array}{l} ٢س + ص = ٥ \\ -س + ص = ١ \end{array} \right\}$ بيانيًا وتحقق من الحل.

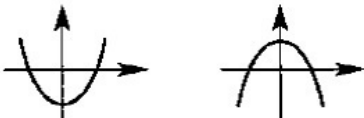

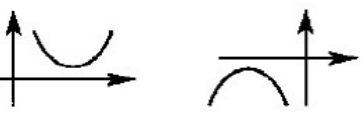
			س
			ص


			س
			ص


يمكن حل نظام معادلتين خطيتين جبرياً بطريقة الحذف. نستخدم خاصية الجمع والضرب في المعادلات.

يمكن أيضاً حل نظام معادلتين جبرياً بطريقة التعويض.

حدّد قيمة أحد المتغيرين بدلالة الآخر في إحدى المعادلتين، وعوّض عنه بقيمته في المعادلة الثانية.

المميز	نوع جذري المعادلة	التمثيل البياني للدالة
$\Delta = b^2 - 4ac < 0$ (عدد موجب)	الجذران حقيقيان (مختلفان)	
$\Delta = b^2 - 4ac = 0$	الجذران حقيقيان متساويان	
$\Delta = b^2 - 4ac > 0$ (عدد سالب)	جذران غير حقيقيين	

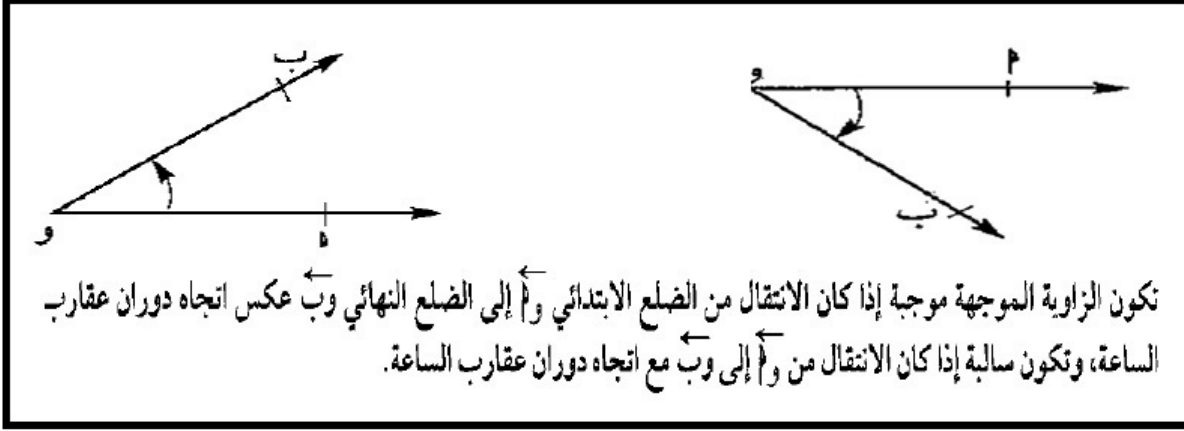
١ إذا كانت إشارة معامل a موجبة يكون المنحنى بالشكل .

٢ إذا كانت إشارة معامل a سالبة يكون المنحنى بالشكل .

إذا كان جذرا المعادلة: $ax^2 + bx + c = 0$ هما m, n

$$\text{فإن: } m + n = -\frac{b}{a}, \quad m \times n = \frac{c}{a}$$

المعادلة على الصورة: $ax^2 - (m+n)x + mn = 0$



Quarter Angle

الزاوية الربعية

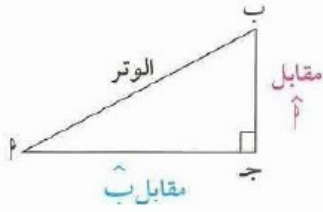
هي زاوية موجبة في الوضع القياسي ينطبق ضلعها النهائي على أحد محوري الإحداثيات مثل الزوايا $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ أو $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$.

تعريف:
 القياس الدائري لزاوية مركزية في دائرة = $\frac{\text{طول القوس الذي تحصره هذه الزاوية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$
 ويرمز إليه بالرمز $ه'$.
 فإذا رمزنا إلى طول القوس بالرمز (ل) وإلى طول نصف القطر بالرمز $ق$.
 فإن $ه' = \frac{ل}{ق}$ ومنها $ل = ه' ق$.
 وحدة قياس الزوايا لهذا النوع من القياس تسمى الراديان ويرمز لها بالرمز (ر).

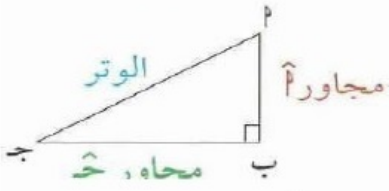
قانون: إذا كان لدينا زاوية قياسها الدائري $ه'$ وقياسها الستيني $س^\circ$ فإن:

$$\frac{ه'}{س^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$$
 ومنها $س^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \times ه'$

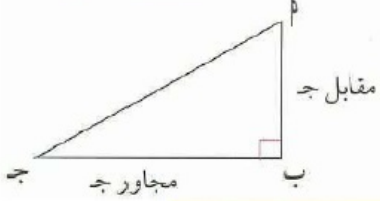
$$ه' = س^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}$$



$$\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \text{جيب الزاوية}$$



$$\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \text{جيب تمام الزاوية}$$

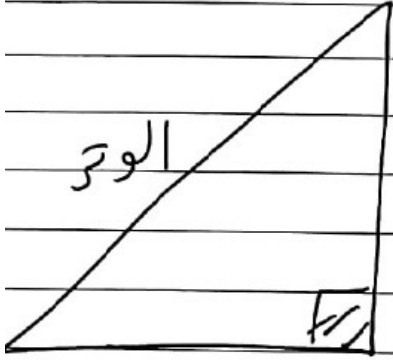


$$\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \text{ظل الزاوية}$$

$$\text{قنا} = \frac{1}{\text{جتا}} \neq \text{جتا}$$

$$\text{قنا} = \frac{1}{\text{جا}} \neq \text{جا}$$

نظريّة فيثاغورس : أطول أضلاع

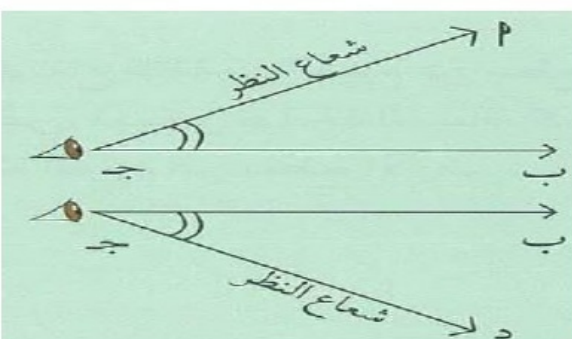
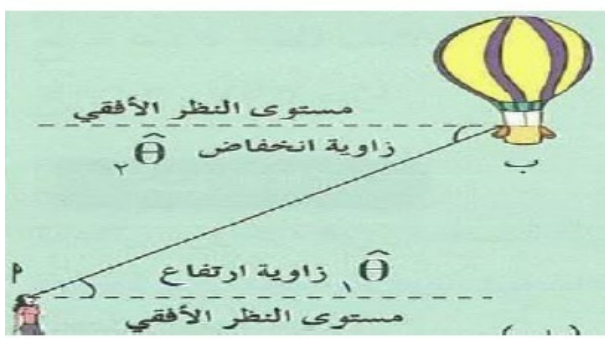


$$\text{الوتر} = \sqrt{(\text{ضلع ١})^2 + (\text{ضلع ٣})^2}$$

$$\text{ضلع ١} = \sqrt{(\text{الوتر})^2 - (\text{ضلع ٣})^2}$$

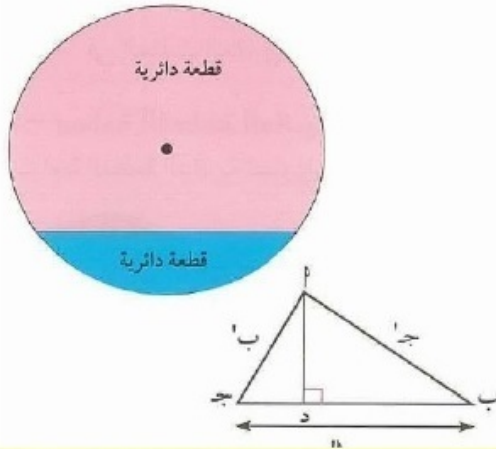
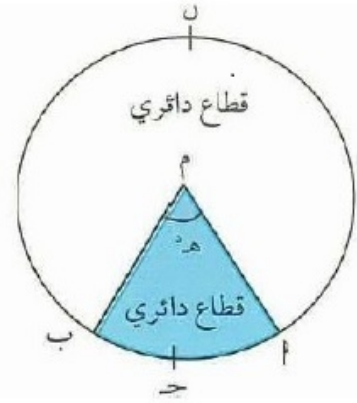
$$\text{ضلع ٣} = \sqrt{(\text{الوتر})^2 - (\text{ضلع ١})^2}$$

عكس نظريّة فيثاغورس ← لا تثبات أن الزاوية = ٩٠°



مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{4} \text{ ل } \text{نم}$

$\frac{1}{4} \text{ هـ}^2 \text{ نم}^2 =$



القطعة الدائرية، Circular Segment

القطعة الدائرية هي جزء من سطح الدائرة محدود بقوس فيها وتر.

مساحة المثلث، Area of a Triangle

مساحة المثلث $\text{أب ج} = \frac{1}{2} \text{ ب ج} \times \text{أد}$

$\therefore \text{أد} = \frac{\text{أب} \times \text{جأب}}$

لكن $\frac{\text{أد}}{\text{أب}} = \text{جأب}$

مساحة المثلث $\text{أب ج} = \frac{1}{2} \text{ ب ج} \times \text{أب} \times \text{جأب}$.

مساحة المثلث $\text{أب ج} = \frac{1}{2} \text{ ب ج} \times \text{أب} \times \text{جأب}$

$\frac{1}{2} \text{ ب ج} \times \text{أج} \times \text{جأب} =$

$\frac{1}{2} \text{ أب} \times \text{أج} \times \text{جأب} =$

أي أن مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولي أي ضلعين \times جيب الزاوية المحددة بهما

وباختصار نكتب مساحة المثلث $\text{أب ج} = \frac{1}{2} \text{ أب} \times \text{جأب}$

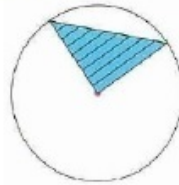
$\frac{1}{2} \text{ أب} \times \text{جأب} =$

$\frac{1}{2} \text{ أب} \times \text{جأب} =$

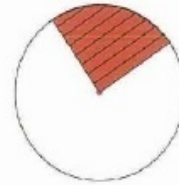
مساحة القطعة الدائرية، Area of a Circular Segment

مساحة القطعة الدائرية تساوي مساحة القطاع الدائري مطروحاً منه مساحة المثلث.

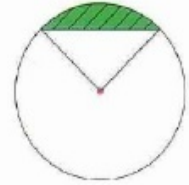
مساحة القطعة الدائرية = $\frac{1}{4} \text{ نم}^2$ (هـ - جأه)



مساحة المثلث



مساحة القطاع الدائري



مساحة القطعة الدائرية

=

ليكن $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$

إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ فإنه يقال إن a, b, c, d أعداد متناسبة.

وإذا كانت a, b, c, d أعداد متناسبة فإن $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

ويسمى a, d طرفي التناسب، كما يسمى b, c وسطى التناسب.

ولأن في هذه الحالة $ad = bc$ خاصية الضرب التقاطعي

فإن: حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين.

إذا كانت a, b, c أعدادًا متناسبة

مع الأعداد d, e, f ، فإن:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = m$$

حيث m عدد ثابت

ليكن $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$

إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ فإنه يقال إن a, b, c, d في تناسب متسلسل (أو تناسب هندسي)

وبالعكس: إذا كانت a, b, c, d في تناسب متسلسل فإن $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

ويسمى b الوسط المتناسب للعددين a, c أو الوسط الهندسي لهما كما يسمى a, c طرفي التناسب.

$$\frac{\text{المسافة على الخريطة}}{\text{المسافة الحقيقية}} = \text{مقياس الرسم}$$

إذا كانت v تتغير طردياً مع s أي $v \propto s$ فإن:
 $v = k s$ حيث k ثابت لا يساوي الصفر
والعكس صحيح.

$$\text{فمعنى ذلك أن } \frac{v_1}{s_1} = \frac{v_2}{s_2}$$

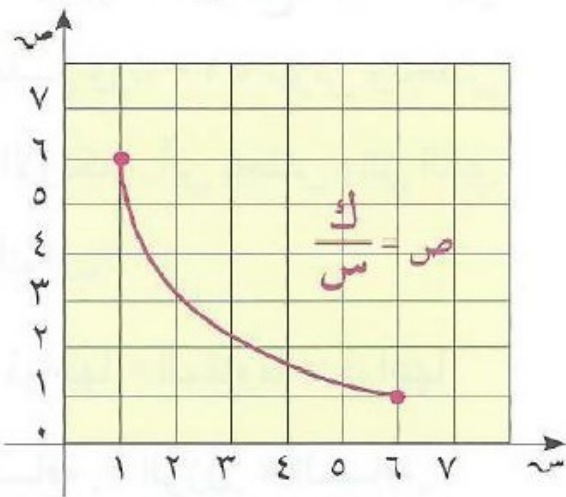
التناسب في التعبير عن التغير العكسي

$$v \propto \frac{1}{s}, \text{ أي } v = \frac{k}{s} \text{ فإن}$$

$$s_1 v_1 = s_2 v_2 = k$$

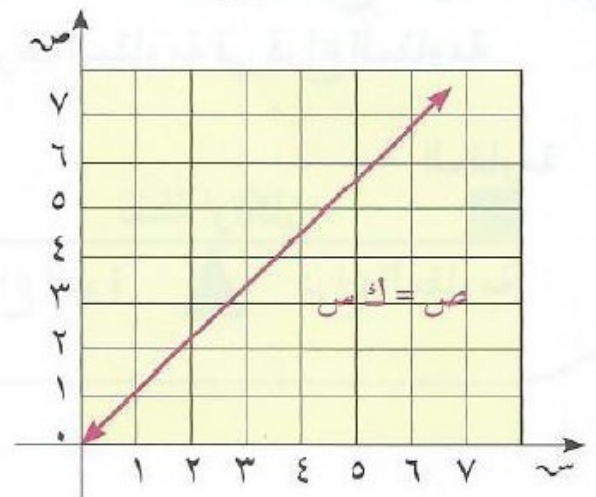
$$\text{ومن ذلك نستنتج أن } \frac{v_1}{s_1} = \frac{v_2}{s_2}$$

تغير عكسي



$ص \propto \frac{1}{س}$
 $ص = \frac{ك}{س} : ك < 0$
 $ك = س \cdot ص$
 = ثابت التغير

تغير طردي

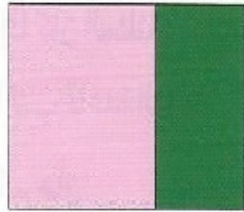


$ص \propto س$
 $ص = ك \cdot س : ك < 0$
 $ك = \frac{ص}{س}$
 = ثابت التغير

يقال لمضلعين (لهما العدد نفسه من الأضلاع) إنهما متشابهان إذا تحقق الشرطان التاليان معاً:
- قياسات زواياهما المتناظرة متساوية.
- أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة.
والعكس صحيح.

وتسمى النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين نسبة التشابه.

المضلعان المتطابقان يكونان متشابهين.



Golden Rectangle

المستطيل الذهبي

هو مستطيل يمكن تقسيمه إلى جزئين، أحدهما مربع والآخر مستطيل.
والمستطيل الناتج يكون مستطيلاً ذهبياً آخر ويكون مشابهاً للمستطيل الأصلي.
يبين الشكل المقابل نمطاً من المستطيلات الذهبية.

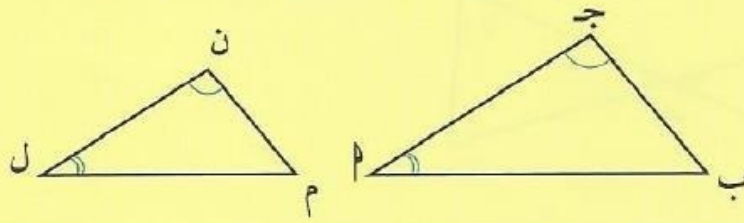
Golden Ratio

النسبة الذهبية

في كل مستطيل ذهبي، نسبة طول الضلع الأكبر إلى طول الضلع الأصغر
تسمى النسبة الذهبية وتساوي $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ أي حوالي 1,618.

نظرية (١)

يتشابه المثلثان إذا تطابقت زاويتان في أحد المثلثين مع زاويتين في المثلث الآخر.



$\Delta م ب ج \sim \Delta م ل ن$.

نظرية (٢)

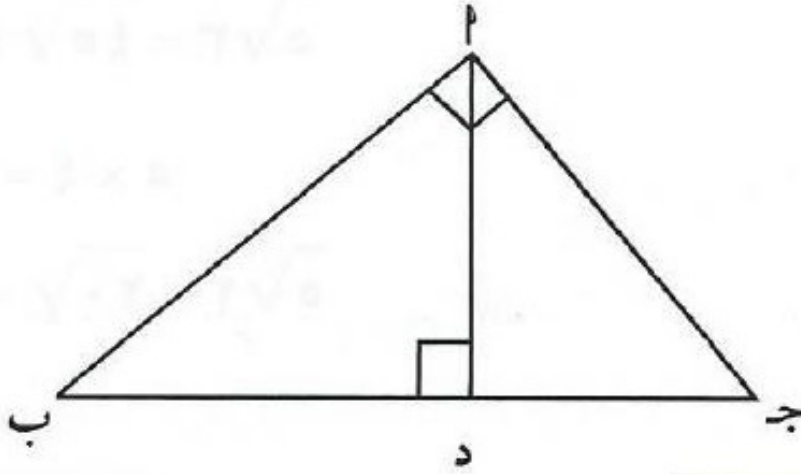
يتشابه المثلثان إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فيهما.

نظرية (٣)

يتشابه المثلثان إذا تطابقت زاوية في أحدهما مع زاوية في المثلث الآخر، وتناسب طول الأضلاع المحددين لهاتين الزاويتين.

نظرية (١)

العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين وكل منهما يشابه المثلث الأصلي.



$$PD^2 = BD \times DJ$$

$$PB^2 = PD \times PJ$$

$$PJ^2 = PD \times PB$$

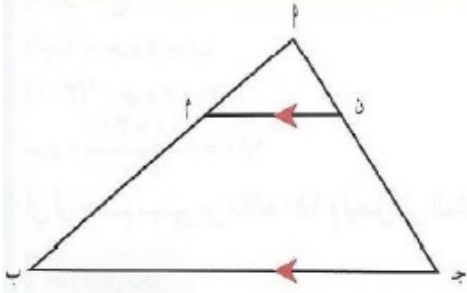
$$PB \times PJ = PD \times BJ$$

Parallel Line Theory

نظرية المستقيم الموازي

نظرية (١)

إذا وازى مستقيم أحد أضلاع مثلث وقطع ضلعيه الآخرين، فإنه يقسم هذين الضلعين إلى أجزاء أطوالها متناسبة.



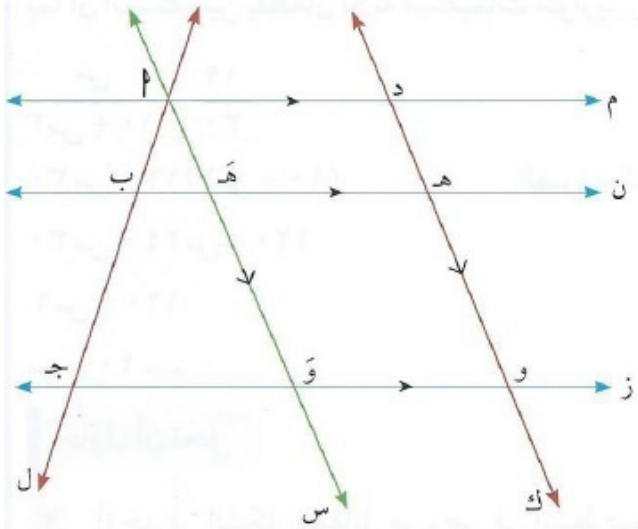
$$\therefore \frac{م ن}{ن ج} = \frac{ا م}{م ب}$$

Thales Theory

نظرية طاليس

نظرية (٢)

إذا قطع مستقيمان ثلاثة مستقيمتان متوازيتان أو أكثر فإن أطوال القطع المستقيمة الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.

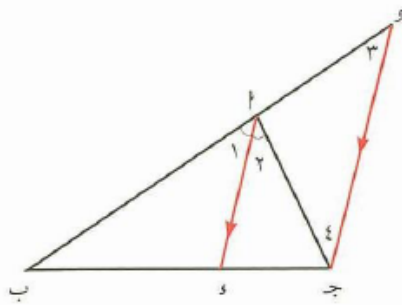


$$\frac{د هـ}{هـ و} = \frac{ا ب}{ب ج}$$

نظرية (٣)

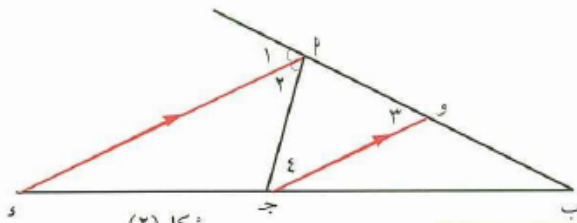
نظرية منصف الزاوية في مثلث

إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس، قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو من الخارج إلى جزئين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين للمثلث.



شكل (١)

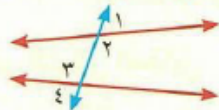
$$\frac{BP}{PC} = \frac{BA}{AC}$$



شكل (٢)

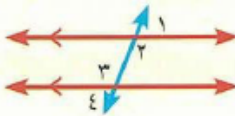
$$\frac{BP}{PC} = \frac{BA}{AC}$$

معلومة رياضية:



(٢)، (٣): زاويتان متبادلتان داخلياً

(١)، (٤): زاويتان متبادلتان خارجياً



∠(٢) = ∠(٣): التوازي والتبادل الداخلي

∠(١) = ∠(٤): التوازي والتبادل الخارجي

ـ (ملخص لآهم قوانين الوحدة الخامسة)ـ

- في المتالفة الحابفة $ع - ع_{1+n} = د$ عدد ثابت يسر أسس المتالفة

- الحد النوفف للمتالفة الحابفة $ع_1 = د + (1-n)د$

- اذا كوت $ع_1$ ب $ع_2$ متالفة حابفة فون ب = $\frac{ع_2 + ع_1}{2}$

وهو الوط الحابف ل $ع_1$ ب

- في المتالفة الهندسفة: $ع = ع_{1+n} \cdot ر$ عدد ثابت يسر

أسس المتالفة الهندسفة.

- الحد النوفف للمتالفة الهندسفة $ع_1 = ع \cdot ر^{1-n}$

- اذا كوت $ع_1$ ب $ع_2$ متالفة هندسفة فون ب = $\sqrt[2]{ع_1 \cdot ع_2}$

وهو الوط الهندسف ل $ع_1$ ب

- مجموع ن حدأ سة متالفة حابفة:

$$ج_1 = (ع + ع_1) \cdot \frac{ن}{2} \quad \text{أو} \quad ج_1 = \frac{ن}{2} [ع + (1-n)د]$$

- مجموع ن حدأ سة متالفة هندسفة:

$$ج_1 = ع \cdot \frac{1 - ر^n}{1 - ر}$$

- مجموع الأعداد المحسفة المرعبة الأول الت عددان = $\frac{ن(ن+1)}{2}$

