الملخص الشامل
و المراجعه المركزه

للسادس العلمي (التطبيقي والاحيائي)

للاستاذ حمزة حازم الكربلائي

07828808092

"اياك ان تيأس , فكل الصابرين قد حيروا"

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة :-

عزيزي الطالب هذا الملخص هو مختصر للكتاب يحتوي على جميع مواضيع الكتاب وجميع الملاحظات مع اهم الأسئلة .

سوف نقسم الملزمه الى قسمين وكما يلي :-

القسم الاول :-مفتاح الحل لكل فصل بالتفصيل يعني شنو(راح تلكه بهذا القسم كل طرق الحل والملاحظات مع اهم الامثله والافكار

القسم الثاني:-يحتوي على اختبارات (امتحانات لكل فصل) تمتحن نفسك من تكمل وتلكه الجواب بالقناة (@asin180) .

كملنه المقدمة هسه شنو نحتاج حتى تبدي تقره

كوب جاي_اقلامك_دفتر المسوده مالتك وبدي سج ....

مدرس الرياضيات

حمزة حازم الكربلائي

٠٧٨٢٨٨٠٨٩٢

القسم الاول | الفصل الاول (الاعداد المركبة)

شكل العدد المركب $c = a + bi$

c هو رمز العدد المركب a هو الجزء الحقيقي bi هو العدد التخيلي

انواع الاسئله علمود تعرف شوكت يريد من عند العدد المركب

1-جد العدد المركب

2-جد الصيغه الجبريه

3-جد الصيغه العاديه

مثال حول شكل العدد المركب $1 + 3i$

قاعده

a- وين متشوف i^2 تعوض مكانه -1

b- وين متشوف i^3 تعوض مكانه –i

c- وين متشوف i^4 تعوض مكانه 1

زين استاذ اذا انطاني اس اعله من الي منطيهم انته شلون باوع عله هاي القاعده

$i^n \rightarrow \quad n \rightarrow$ هو اس اعله من 4

1- اذاجان الاس يقبل القسمه على 4 بدون باقي الناتج مالتنه 1

2- اذا جان الاس يقبل القسمه على 4 والباقي 1 الناتج مالتنه *i*

3- اذا جان الاس يقبل القسمه على 4 والباقي 2 الناتج مالتنه-1

4- اذا جان الاس يقبل القسمه على 4والباقي 3 الناتج مالتنه -*i*

ملاحظه:-اذا جان الاس مال i اكبر من 100 نقسم بس الاحاد والعشرات على 4 والباقي هو اس مالi الجديد

ملاحظه:-اذا جان عدنه بالسوال عدد مركب يتكون من جزء حقيقي بس (نكمله احنه) واذا جان جزء تخيلي بس (نكمله احنه) زين شلون استاذ ؟ نكمله باضافه 0 اذا جان بس تخيلي ونكمله باضافه 0i اذا جان بس حقيقي

1) $5 \rightarrow$ عدد مركب غير كامل $\rightarrow 5 + 0i$ عدد مركب كامل

2) $5i \rightarrow$ عدد مركب غير كامل $\rightarrow 0 + 5i$ عدد مركب كامل

ملاحظه:- يمكن ان نضع $i=\sqrt{-1}$ ((انتبه))(في حالات خاصه وليس في كل الامثله)

امثله :-

$1) i^2=-1$
$2) i^3=-i$
$3) i^4=1$
$4) i^6=-1$
$5) \mathrm{i}^{13}=\mathrm{i}$
$6) i^{150}=i^{50}=i^2=-1$

ملاحظه / اذا جان عندي الاس مال i سالب (الحل انزل الi اسه سالب للمقام بعدها نعوض مكان ال1 الي بالبسط i اسه اعله من المقام يقبل القسمه عله 4 بدون باقي وراها نستعمل خاصيه عند القسمه تطرح الاسس)

مثال /جد ناتج مايلي

$$1) i^{-15}=\frac{1}{i^{15}}=\frac{i^{16}}{i^{15}}=i^{16-15}=i$$

يحل بطريقة ثانية (حاول بنفسك)

ملاحظه :-اذا جان اس i يتكون من حدين واحد من الحدين بيه حرف (متغير) الحرف ينهمل وناخذ الحد الي يكون رقم صافي مثال :-

$$1) i^{4n+2}=i^2=-1$$
$$2) i^{12n+93}$$
$$=i^{93}=1$$

تستخدم الطريقة الي فوك اذا جان معامل ال n من مضاعفات ال4 اما اذا جان مو من مضاعفات ال4 شنسوي

شوف المثال :-

$$3) i^{6n+8}$$

الخطوه الاولى مستخدم خاصيه عند الضرب تجمع الاسس لذلك نرجعه لاصله

$$=i^{6n}.i^8 \rightarrow i^{6n}.1 \rightarrow (i^6)^n.1$$

الخطوه الثانيه ناخذ ال*n* اما عدد فردي او عدد زوجي

$$=(i^2)^n \rightarrow (-1)^n \rightarrow \text{اما } n=\text{فردي}=-1$$
$$\rightarrow \text{او } n=\text{زوجي}=1$$

ملاحظه / اذا جان عدنه سالب جوه الجذر التربيعي (نشيل السالب نحط بمكانه i عله يمين الجذر)

$$\sqrt{-\text{عدد}} = \sqrt{\text{عدد}}\, i$$

$$\sqrt{-16} = \sqrt{16}i = 4i$$

مثال //اكتب الاعداد الاتيه على الصيغه العاديه $a+bi$

$$1) -5 = -5 + 0i$$
$$2)\sqrt{-100} = \sqrt{100}i = 10i = 0 + 10i$$
$$3) -1 - \sqrt{-5} = -1 - \sqrt{5}i$$
$$4) \frac{1+\sqrt{-25}}{4} = \frac{1+\sqrt{25}i}{4} = \frac{1}{4} + \frac{5}{4}i$$

العمليات على مجموعه الاعداد المركبه

1-جمع الاعداد المركبه

شلون نجمع عددين مركبين شوف صديقي لاتحير بيها مجرد (نجمع العدد الحقيقي مع الحقيقي يعني الي مابيهم i + التخيلي مع التخيلي الي بيهم i)

مثال / اجمع الاعداد المركبه التاليه

$$1)(3 + 4\sqrt{2}i) \ (5 - 2\sqrt{2}i)$$
$$(3 + 4\sqrt{2}i) + (5 - 2\sqrt{2}i) = (3 + 5) + (4\sqrt{2} - 2\sqrt{2})i$$
$$= 8 + 2\sqrt{2}\, i$$
$$2)\ 3\ ,\quad 2 - 5i$$
$$(3 + 0i) + (2 - 5i) = (3 + 2) + (0 - 5)i = 5 - 5i$$
$$3)(2 + \sqrt{-36})\ .2 + 3i$$
$$(2 + \sqrt{36}i) + (2 - 3i) = (2 + 6i) + (2 - 3i) = 4 + 3i$$

خواص عمليه الجمع في الاعداد المركبه (اطلاع عليهم فهم)

1-الخاصيه الابداليه :-

عمليه الجمع ابداليه يعني تكدر تبدل مكان الاعداد مثل هذا C1+C2=C2+C1

2-الخاصيه التجميعيه:-

عمليه الجمع تجميعيه يعني اذا عندك ثلاث اعداد تكدر تجمع الاول والثاني وبعدين ويه الثالث وبالعكس
C1+(C2+C3)=(C1+C2)+C3

3-خاصيه النظير الجمعي مهم جدا

النظير الضربي (هو تغير اشاره الجزء الحقيقي والجزء التخيلي)

عدد مركب 4+3i نظيره الجمعي -4-3i

4- خاصيه العنصر المحايد

الصفر هو العنصر المحايد لان اي عدد تجمعه وياه يبقه نفسه

طرح الاعداد المركبه :-

نحول عملية الطرح الى عملية جمع شلون (ندخل اشاره ال – على القوس الثاني)وراها نجمع

مثال / جد ناتج

$$1)\ (7-13i)-(9+4i)$$
$$=(7-13i)+(-9-4i)=-2-17i$$

ضرب الاعداد المركبه

ضرب الاعداد المركبه ضرب توزيعي

(الاول * الاول ±حسب الاشاره (الاول*الثاني)± حسب الاشاره (الثاني *الاول)± حسب الاشاره الثاني * الثاني)

س/ جد ناتج مايأتي

$$1)\ (2-3i)(3-5i)=6-10i-9i+15i^2=6-19i-15=-9-19i$$

$$2)\ (3+4i)^2=9+24i+16i^2=9+24i-16=-7+24i$$

$$3)\ i(1+i)=i+i^2=i-1=-1+i$$

$$4)\ (1-i)^8$$
$$=[(1-i)^2]^4=(1-2i-1)^2=(-2i)^4=16i^4=16$$

ملاحظه:- الاس اذا جان كبير نكدر نجزءه مثل مثال رقم 4 (حسب الخاصيه عند الرفع تضرب الاسس)

(خواص عمليه ضرب الاعداد المركبه)

1-الخاصيه الابداليه :-

نفس الجمع (الفرق هنا ضرب فلاتخربط) $C1.C2=C2.C1$

2-الخاصيه التجميعيه:-

نفس الجمع (الفرق هنا ضرب) $C1(C2.C3)=(C1.C2).C3$

3-العنصر المحايد لعملية الضرب :-

العنصر المحايد هو 1 لان اي رقم تضربه في1 يبقه نفسه

4-النظير الضربي :-مهم جد

النظير الضرب للعدد المركب هو مقلوب العدد يعني تجيب 1 تخليه بالبسط وتخلي العدد بالمقام وهاي صيغتة $\frac{1}{C}$

بشرط $C \neq 0$ (مثلا العدد $6+3i$ نظيره الضربي $(\frac{1}{6+3i}$

مرافق العدد المركب

مرافق العدد المركب هو مجرد تغير اشاره الجزء التخيلي يعني اشاره i تغيرها

مثال :- جد مرافق العدد المركب 5+10i

$sol: -5+10i \rightarrow$ مرافقه $\rightarrow 5-10i$

خواص المرافق :-

1-المرافق يتوزع عله عمليه الجمع $\overline{C1+C2}=\overline{C1}+\overline{C2}$

2-مرافق يتوزع عله عمليه الطرح $\overline{C1-C2}=\overline{C1}-\overline{C2}$

3-المرافق يتوزع على عمليه القسمه $\overline{(\frac{C1}{C2})}=\frac{\overline{C1}}{\overline{C2}}$

4-جمع اي عدد مركب ويه مرافقه هو ضعف الحقيقي

$$(a+bi)+(a-bi)=2a$$

5-طرح اي عدد مركب من مرافقه =ضعف التخيلي **2bi**

6-ضرب اي عددين مركبين مترافقين (حسب الملاحظه ادناه)

ملاحظه مهمه جدا:-كل عدد مركب تضربه في مرافقه الناتج يكون (الاول تربيع +معامل *i* تربيع فقط بدون *i*)

بهل صيغه

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$$

مثال :- جد ناتج (3+2i).(3-2i)

$$(3+2i).(3-2i)=3^2+2^2=9+4=13$$

استاذ:- انته اخذت النه مرافق العدد زين شنو نستفاد منه ؟ ج/ علمود نتخلص من كل i بالمقام ليش ؟

ج\ دير بالك احنه منريد اي i بالمقام فنتخلص منه حسب الملاحظه ادناه

ملاحظه مهمه جد :- اذا جان عدنه i بالمقام فنتخلص منه بضرب البسط والمقام في مرافق المقام

مثال:-

$$\frac{2-i}{3+4i}\rightarrow\frac{2-i}{3+4i}.\frac{3-4i}{3-4i}=\frac{6-8i-3i+4i^2}{9+16}=\frac{6-11i-4}{25}=\frac{2-11i}{25}=\frac{2}{25}-\frac{11}{25}i$$

مثال مهم جدا/اذا كان $C1=1+i$ $C2=3-2i$ فتحقق من ان

$$\overline{C1+C2}=\overline{C1}+\overline{C2}$$
$$\overline{C1-C2}=\overline{C1}-\overline{C2}$$
$$\overline{C1.C2}=\overline{C1}.\overline{C2}$$
$$\overline{\left(\frac{C1}{C2}\right)}=\frac{\overline{C1}}{\overline{C2}}$$

ملاحظه:مهمه:-اذا جانت هاي العلامه -موجوده فوك عددين مركبين(متصله) نعوفها ع حالها ونجمع اونطرح او نضرب وبعدين تشيلها وتغير اشاره الجزء التخيلي (يعني مرافق الناتج هاي اذا جانت متصله يعني فوكهم ثنينهم)اذا جانت منفصله هنا تسوي للعدد مرافقه وتحل عتيادي شوف الحل وتاكد

Sol/ 1) $\overline{C1+C2}=\overline{C1}+\overline{C2}$

$$\overline{C1+C2}=\overline{(1+i)+(3-2i)}=\overline{4-i}=4+i$$
$$\overline{C1}+\overline{C2}=\overline{(1+i)}+\overline{(3-2i)}=(1-i)+(3+2i)=4+i$$

$$\overline{C1+C2}=\overline{C1}+\overline{C2}$$

2) $\overline{C1-C2}=\overline{C1}-\overline{C2}$

$$\overline{C1-C2}=\overline{(1+i)-(3-2i)}=\overline{(1+i)+(-3+2i)}=\overline{-2+3i}$$
$$=-2-3i$$

$\overline{C1}+\overline{C2}=\overline{(1+i)}-\overline{(3-2i)}=(1-i)-(3+2i)$
$=(1-i)+(-3-2i)=-2-3i$
$\overline{C1+C2}=\overline{C1}+\overline{C2}$

3) $\overline{C1.C2}=\overline{C1}.\overline{C2}$

$\overline{C1.C2}=\overline{(1+i).(3-2i)}=\overline{(3-2i+3i+2)}=\overline{(5+i)}=5-i$

$\overline{C1}.\overline{C2}=\overline{(1+i)}\overline{(3-2i)}=(1-i)(3+2i)=(3+2i-3i+2)$

$=5-i$

4) $\overline{\left(\frac{C1}{C2}\right)}=\frac{\overline{C1}}{\overline{C2}}$

$\overline{\left(\frac{C1}{C2}\right)}=\overline{\left(\frac{1+\iota}{3-2\iota}\right)}=\overline{\left(\frac{1+\iota}{3-2\iota}.\frac{3+2\iota}{3+2\iota}\right)}=\overline{\left(\frac{3+2\iota+3\iota-2}{9+4}\right)}=\overline{\left(\frac{1+5\iota}{13}\right)}$

$=\overline{\left(\frac{1}{13}+\frac{5}{13}\iota\right)}=\frac{1}{13}-\frac{5}{13}i$

$\frac{\overline{C1}}{\overline{C2}}=\frac{\overline{(1+\iota)}}{\overline{(3-2\iota)}}=\frac{1-i}{3+2i}$

$\frac{1-i}{3+i}.\frac{3-2\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}=\frac{3-2\mathrm{i}-3\mathrm{i}-2}{9+4}=\frac{1-5\mathrm{i}}{13}=\frac{1}{13}-\frac{5}{13}\mathrm{i}$

مثال واجب $\frac{3+2i}{2-5i}+\frac{3-2i}{2+5i}=\frac{-8}{29}$ (ناخذ الطرف الايسر نحله لازم يطلع نفس الطرف الايمن)

(تساوي عددين مركبين او ايجاد قيم x,y الحقيقيه)

اول شي التساوي معنا نساوي الجزء الحقيقي ويه الحقيقي والتخيلي مع التخيلي بدون i ثاني شي منكدر نشتغل اذا مو الطرفين عدد مركب بصيغه عاديه زين استاذ شنو نستفاد؟ نستفاد منه ايجاد قيمه x,y

$Ex\backslash (x+yi)(3-2i)-(1-2i)=4+3i$

$sol\backslash\ (x+yi)(3-2i)=(4+3i)+(1-2i)$
$(x+yi)(3-2i)=(5+i)$
$x+yi=\frac{5+i}{3-2i}*\frac{3+2i}{3+2i}$
$x+yi=\frac{15+10i+3i-2}{9+4}\rightarrow x+yi=\frac{13+13i}{13}$
$x+yi=\frac{13}{13}+\frac{13}{13}i\rightarrow x+yi=1+i\rightarrow x=1\,,y=1$

EX $(x+yi)^2(1+2i)=11+2i$

sol

$$(x+yi)^2=\frac{11+2i}{1+2i}\rightarrow x^2+2xyi+y^2i^2=\frac{11+2i}{1+2i}$$

$$x^2-y^2+2xyi=\frac{11+2i}{1+2i}*\frac{1-2i}{1-2i}$$

$$x^2-y^2+2xyi=\frac{11-22i+2i-4i^2}{1+4}$$

$$x^2-y^2+2xyi=\frac{11-20i+4}{5}\rightarrow x^2-y^2+2xyi=\frac{15-20i}{5}$$

$$x^2-y^2+2xyi=\frac{15}{5}-\frac{20}{5}i$$

$x^2-y^2+2xyi=3-4i$ من التساوي

$$x^2-y^2=3\ldots\ldots\ldots 1$$

$$2xy=-4\ ]\div 2\rightarrow xy=-2\rightarrow x=\frac{(-2)}{y}\ldots\ldots..2$$

$\left(\frac{-2}{y}\right)^2-y^2=3$ 1في 2 نعوض $\rightarrow \frac{4}{y^2}-y^2=3$ (y^2نضرب في)

$$4-y^4=3y^2\rightarrow y^4+3y^2-4=0$$

$$(y^2+4)(y^2-1)=0$$

$if\ y^2+4=0\rightarrow y^2=-4$ تهمل

$or\ y^2-1=0\rightarrow y^2=1\rightarrow y=\mp 1$

$$when\ y=1\rightarrow x=\frac{-2}{1}\rightarrow x=-2$$

$$when\ y=-1\rightarrow x=\frac{-2}{-1}\rightarrow x=2$$

مثال واجب :- $(3x+2y)^2=\frac{200}{4+3i}$

ملاحظه مهمه جدا :-من يكلك العددين مترافقين مباشرا قبل الحل تسوي مرافق لاحد الكسرين او العددين بعدها نحل

مثال/ اذا كان $\frac{3-2i}{i}$, $\frac{x-yi}{1+5i}$ مترافقان جد قيمه كل من $x,y\in R$

$$\frac{3-2i}{i}=\overline{\left(\frac{x-yi}{1+5i}\right)}\rightarrow\frac{3-2i}{i}=\frac{x+yi}{1-5i}$$

$$(x+yi).i=(3-2i)(1-5i)$$

$$(x+yi)i=3-15i-2i+10^2$$

$$(x+yi)i=-7-17i\rightarrow(x+yi)=\frac{-7-17i}{i}$$

$$(x+yi)=\frac{-7-17i}{i}*\frac{-i}{-i}\rightarrow(x+yi)=\frac{+7i+17i^2}{1}$$

$x+yi=-17+7i$ من التساوي

$x=-17 \quad y=7$

التحليل الى عاملين

نستخدمه اذا جان عدنه حدين بينهم جمع منكدر نحللهم نستخدمه باضافه $-i^2$ للحد الثاني علمود نكدر نحلل فرق بين مربعين

a^2+b^2 (نلكي هذا) $\rightarrow a^2-b^2i^2$ من تضيف هيج يصير

هسه تكدر تحلل المقدار

$$4y^2+9=4y^2-9i^2\rightarrow(2y-3i)(2y+3i)$$

ملاحظه:- من ينطي فقط عدد ويكلك حلل (هذه العدد نجزءه الى عددين الهم جذر تربيعي علمود نكدر نطبق خاصيه التحليل)

مثال

$$10=9+1\ \rightarrow 10=9-1i^2\rightarrow(3-i)(3+i)$$

ملاحظه:-مرات اكو حدوديات ثلاثيه وبيها i بالحد الوسط من نحلل ميطلع الحد الوسط لذلك نضرب الحد الاخير بـ$-i^2$ بعدها نحلل

$$y^2+4yi+5=0\rightarrow y^2+4yi-5i^2=0\rightarrow(y+5i)(y-i)=0$$

مثال / اذا كان $\frac{9y^2+49}{3y+7i} = (2+xi)(-x+i)$ فجد قيمة x,y الحقيقيه .(مهم جدا)

$$-2x+2i-x^2i+xi^2 = \frac{9y^2-49i^2}{3y+7i}$$

$$-2x+2i-x^2i-x = \left(\frac{(3y-7i)\cancel{(3y+7i)}}{\cancel{3y+7i}}\right)$$

$$-3x+(2-x^2)i = 3y-7i$$
$$-3x = 3y \rightarrow -x = y$$
$$2-x^2 = -7 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \mp 3$$
$$when\ x = 3 \rightarrow -3 = y \rightarrow :.y = -3$$
$$whenx = -3 \rightarrow -(-3) = y \rightarrow :.y = 3$$

الجذران التربيعيان للعدد المركب

اذا نريد نطلع الجذرين سواء جان عدد مركب كامل او بس جزء منه نتبع هل خطوات بس ومابيها كل صعوبه

1-نجيب العدد نحطه جوه الجذر التربيعي ونساوي ويه x+yi يعني بهل صيغه

$$\sqrt{a+bi} = x+yi$$

2-نربع الطرفين

$$(a+bi) = (x+yi)^2$$

3-نساوي الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي بعد منفتح الطرف الايمن مربع حدانيه

$$a+bi = (x^2-y^2)+2xyi$$

$a = x^2-y^2$ هاي المعادله الاولى , $b = 2xy$ هاي المعادله الثانيه

هاي الخطوات ثابته افهمهم زين

مثال / جد الجذران التربيعيان للاعداد المركبه

$$c = 8+6i$$

$$\sqrt{a+bi} = x+yi$$

$$8+6i = (x-yi)^2$$

$$8+6i = (x^2-y^2)+2xyi$$

$$x^2-y^2 = 8 \ldots\ldots\ldots 1$$

$$2xy = 6 \rightarrow x = \frac{6}{2y} \rightarrow x = \frac{3}{y} \dots\dots\dots 2$$

نعوض معادله 2 في معادله 1

$\left(\frac{3}{y}\right)^2 - y^2 = 8 \rightarrow \left[\frac{9}{y^2} - y^2 = 8\right] . y^2$ نضرب المعادله ب

$9 - y^4 = 8y^2 \rightarrow y^4 + 8y^2 - 9 = 0$

$(y^2 + 9)(y^2 - 1) = 0$

اما $y^2 + 9 = 0$ تهمل

$y = \mp 1 \rightarrow if\, y = 1 \rightarrow x = \frac{3}{1} = 3 \quad (3 + i)$

$if\, y = -1 \rightarrow x = \frac{3}{-1} \rightarrow x = -3 \quad (-3 - i)$

ملاحظه:-اذا انطاني فقط جزء واحد حقيقي او تخيلي (نكمل العدد المركب ياله نحل حسب الخطوات)

مثال واجب (جد الجذران التربيعيان للعدد 8i)

ملاحظه :- مايصير نطلع الجذر التربيعي للعدد المركب اله وهوه بالصيغه العاديه

مثال / جد الجذر التربيعي للعدد $\frac{14+2i}{1+i}$(واجب)

مثال\ اذا كان $z = \frac{7-4i}{2+i}$ حيث z=a+bi فاوجد الجذور التربيعيه للمقدار 2a-bi

حل المعادلات التربيعيه في c

حل المعادله ب 3 طرق وهي (لو نستخدم التحليل الى عاملين من نلكي مجموع مربعين او نحلل بالتجربه او نحلل بالدستور)

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ قانون الدستور

$a \rightarrow x^2$ معامل

$b \rightarrow x$ معامل

$c \rightarrow x$ الحد الخالي من

ملاحظه:- شوكت نحل بالتجربه وشوكت بالدستور شوف مرات عدنه معادله ثلاث حدود نحاول وياها بالتجربه متنحل مادام منحلت نروح لقانون الدستور

$EX/x^2+4x+5=0$

a=1 , b=4 , c=5

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4(1)(5)}}{2(1)}$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}\rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{-4}}{2}\rightarrow x=\frac{-4\mp 2i}{2}$$

$$x=-2\mp i$$

$$\therefore x=-2+i \ \ or \ \ x=-2-i$$

مثال مهم جدا وكذلك الفكره مهمه جدا(هي تحل بالدستور لكن يضهر لنا جذر لايمكن الحل فنستخدم (ايجاد الجذر التربيعي)

$EX\backslash\ z^2-3z+3+i=0$

$sol\ \backslash a=1 \quad b=-3 \quad c=3+i$

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\rightarrow z=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4(1)(3+i)}}{2(1)}$$

$$z=\frac{3\pm\sqrt{9-12-4i}}{2}\rightarrow z\frac{3\pm\sqrt{-3-4i}}{2}$$

$$x+yi=\sqrt{-3-4i}$$

$$(x+yi)^2=-3-4i\rightarrow x^2+2xyi-y^2=-3-4i$$

$$x^2-y^2=-3\ldots\ldots\ldots 1$$

$$2xy=-4\rightarrow xy=-2\rightarrow x=\frac{-2}{y}\ \ldots\ldots\ldots 2$$

$\left(-\frac{2}{y}\right)^2-y^2=-3\rightarrow\frac{4}{y^2}-y^2=-3$ نعوض 2 في 1

$$[4-y^4=-3y^2].y^2$$

$$\therefore y^4-3y^2-4=0$$

$$(y^2-4)(y^2+1)=0\ n$$

اما $y^2+1=0\rightarrow y^2=-1$ (يهمل)

او $y^2-4=0\rightarrow y^2=4\rightarrow y=\mp 2$

عندما $y=2\rightarrow x=\frac{-2}{2}=-1\rightarrow(-1+2i)$

عندما $y=-2 \rightarrow x=\frac{-2}{-2}=1 \rightarrow [1-2i]$

اما :. $x=\frac{3-1+2i}{2}=\frac{2}{2}+\frac{2}{2}i=1+i$

او $x=\frac{3+1-2i}{2}=\frac{4-2i}{2} \rightarrow x=2-i$

$s=[1+i\,,2-i]$

يجاد المعادله التربيعيه اذا علم جذراها

ينطي النه جذرين مجرد مطلوب منك (تجمع الجذرين)(وتضرب الجذرين) وتنزلهم بهاي المعادله

[x^2- (مجموع الجذرين) $x+$ حاصل ضرب الجذرين $=0$]

ملاحظه مهمه جدا :-اذا كال بالسوال (مترافقان او ذكر معاملات حقيقيه او $R\in$ معنا الجذر الثاني هو مرافق الجذر الاول ويذكر ذني العبارات من ينطي فقط جذر واحد)

ملاحظه :-اذا جان الجذران مترافقان الناتج يكون عدد حقيقي

مثال / جد المعادله التي جذراها $\mp(2+2i)$

$(2+2i),(2-2i)$

$(2+2i)+(2-2i)=0$

$(2+2i)(2-2i)=-4-4i-4i-4i^2=-4-8i+4=-8i$

$x^2-(0)x-8i=x^2-8i=0$

مثال / كون المعادله التربيعيه التي معاملاتها حقيقيه واحد جذريها $\frac{4i}{i-3}$

$\frac{4i}{-3+i}\cdot\frac{-3-i}{-3-i}=\frac{-12i-4i^2}{9+1}=\frac{4-12i}{10}=\frac{4}{10}-\frac{12}{10}i$

$=\frac{2}{5}-\frac{6}{5}i$ جذر الاول

$\frac{2}{5}+\frac{6}{5}i$ الجذر الثاني

$\left(\frac{2}{5}+\frac{6}{5}i\right)+\left(\frac{2}{5}-\frac{6}{5}i\right)=\frac{4}{5}$

مثال :-اذا كان 3+2i احد جذري المعادله $x^2-(4-2i)x+a=0$ فما قيمة a وماهو الجذر الاخر

$h=3+2i$ نفرض الجذر الاول k الجذر الثاني

$h+k=(4-2i)$ من المعادله

$3+2i+k=4-2i \rightarrow k=(4-2i)-(3+2i) \rightarrow k=1-4i$

$h.k=a \rightarrow (3+4i)(1-4i)=3-12i+2i-8i^2 \rightarrow a=11-10i$

مثال واجب :-

اوجد عددين مركبين مجموعهما 4 وحاصل ضربهما 15؟

التمثيل الهندسي للاعدد المركبه

التمثيل الهندسي اول شي اذا جان مطلوب منك تسوي مرافق او تضرب في سالب او نضير جمع تكمله من بعده يكلك ضع على شكل ارجاند مجرد تخلي العدد المركب بالصيغه الديكارتيه يعني زوج مرتب وتحط على الرسم

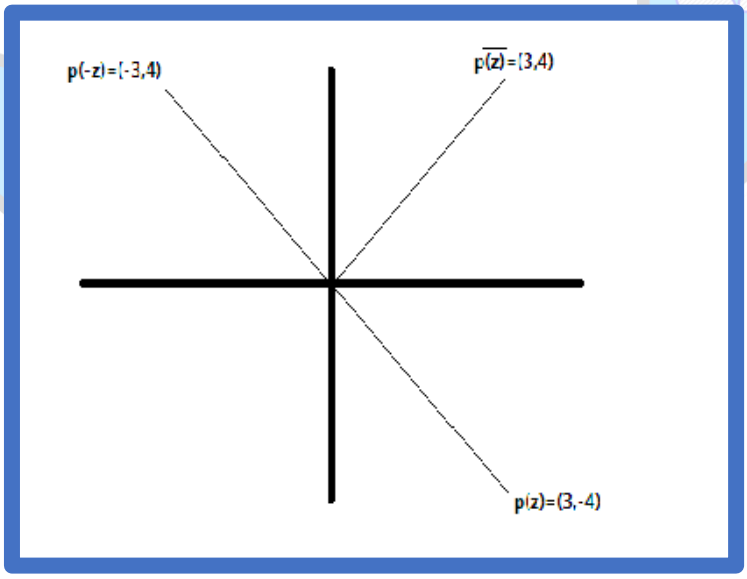
1-اذا راد جمع عددين مركبين بياني (فمجرد انته ترسم العددين الي هم بالصيغه الديكارتيه زوج مرتب نقطه التقاء الرسم هو الناتج مال الجمع والطرح بنفس الاسلوب فقط تغير الاشاره)

2-اذا راد منك ضرب العددين بياني نفس الحاله بس هنا انو نضرب العدد الناتج من الالتقاء بالعدد المركب الاصلي

مثال / اذا كان $z=3-4i$ فضع علئ شكل ارجاند كلامماياتي

$z \quad .\bar{z} \quad .-z$

$sol \quad \backslash\backslash z=3-4i \quad \bar{z}=\overline{3-4i}=3+4i \quad .-z=(-3,4)$



الصيغه القطبيه

احتاج منك 3 قوانين علمود نطلعها الي هي

1- قانون z او r نفس المعنى نصيحلهم مقياس العدد المركب هذا القانون

$$||z|| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

قوانين القيمه الاساسيه لسعه العدد

2- نحتاج نعرف قانون sin وهو $sin\theta = \frac{y}{r}$

3- نحتاج نعرف قانون cos وهو $cos\theta = \frac{x}{r}$

النقطه الثانيه والثالثه نصيحلهم زاويه الاسناد والي هيه مرات تبقه نفسها ومرات تتغير شوكت تبقه وشوكت تتغير

1- تبقه اذا جان بالربع الاول

2- تتغير حسب قانون الربع اذا جانت اباقي الارباع

a- الربع الثاني قانونه/ $\theta = \pi -$ زاويه الاسناد

b- الربع الثالث قانونه/ $\theta = \pi +$ زاويه الاسناد

c- الربع الرابع قانونه/ $\theta = 2\pi -$ زاويه الاسناد

زين استاذ اشلون نعرف الربع نعرفه حسب الاشاره

الربع الاول كل الزوايا موجبه / الربع الثاني بس sin الربع الثالث بسtan الربع الرابع بس cos

ونحفظهم بهاي العباره

كل جيب يضلل جيب تمام (كل معناها كلهم موجب / جيب معناها بس ساين / الظل بس تان / جيب تمام كوساين) ونختار الربع

زين استاذ خلصت كلشي بقن الزوايا شلون نحفظهم راح اعلمك طريقه وهي

كل كبير مع كبير ينطيني $\frac{1}{2}$ وكل صغير مع صغير كذالك $\frac{1}{2}$

كل مختلفات يعني كبير مع صغير ينطي $\frac{\sqrt{3}}{2}$

استاذ مفهمت كبير شنو

باوع 60 معناها كبير 30 معناها صغيره

كوساين باللفظ كبيره ساين باللفظ صغيره

يعني يجتمع الداله والرقم اشوفهم صغيرات لو كبيرات لو مختلفات

زين استاذ حفظت 60 و 30 بقت بس 45 هاي سهله وثابته هي $\frac{1}{\sqrt{2}}$

الزاويه	0	30	45	60	90	180	270	360
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

مثال / جد المقياس والقيمه الاساسيه للسعه z في كل مماياتي لكل من الاعداد المركبه الاتيه.

$Ex\backslash\ z = 1 - \sqrt{3}i$

$\therefore z = (1.\sqrt{3}) \rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2}$

$r = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$cos\emptyset = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$.

$sin\emptyset = \frac{(-\sqrt{3})}{2}$ زاويه الاسناد هي $\frac{\pi}{3}$ تقع في الربع الرابع|

$\therefore \emptyset = 2\pi -$ زاويه الاسناد

$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi - \pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

استاذ شو شرحت مكتلي وين اخلي الي ستخرجتهم اني اكلك نحطهم بهذا القانون الي هو مال الصيغه القطبيه

$r(cos\,\theta + isin\theta)$

$2\left(cos\frac{5\pi}{3} + isin\frac{5\pi}{3}\right)$ الصوره القطبيه للعدد المركب هو

$$z=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^5$$

$$z=\left(\frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\right)^5=\left(\frac{1-i-i+i^2}{1+1}\right)^5=\left(\frac{1-2i-1}{2}\right)^5$$

$$=\left(\frac{-2i}{2}\right)^5=(-i)^5=-i^5=-i=0-i$$

$$\therefore r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{0+1}=\sqrt{1}=1$$

$$cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{0}{1}=0$$

$$sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-1}{1}=-1\ \theta=\frac{3\pi}{2}\ \therefore$$

حاول ان تكمل الحل بنفسك

ملاحظه 1/اذا جان العدد المركب مالتنه مو كامل نكمله ونشتغل شغل أعتيادي ونطلع الصيغة القطبية اله

2-اونتبع الطريقه:-اذا جان العدد المركب حقيقي بس او تخيلي نتبع هاي الصيغه

$$1)\ \ 1=cos0+isin0$$

$$2)\ -1=cos\pi+isin\pi$$

$$3)\ i=cos\frac{\pi}{2}+isin\frac{\pi}{2}$$

$$4)\ -i=cos\frac{3\pi}{2}+isin\frac{3\pi}{2}$$

مثال:-عبر عن كل مماياتي بالصيغه القطبيه

$$1)\ 2\ =2(1)=2(cos0+isin0)$$

$$2)\frac{1}{3}i=\frac{1}{3}\left(cos\ \frac{\pi}{2}+isin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$3)\ -6i=6(-i)=6(cos\frac{3\pi}{2}+isin\frac{3\pi}{2})$$

عزيزي الطالب توجد طريقة خاصه للزاويا ص 46

مبرهنه ديموافر

حالات مبرهنه ديموافر

الحاله الاولى :-يكون بيها الاس مالتنه موجب والقانون بهل صيغه

$$r(cos\theta + isn\theta)^{n}\text{موجب}$$

الحل / الاس يصير اس للr والاس ينضرب بالزاويه ويصير هيج

$$r^n(cos\, n\theta + isin\ n\vartheta)$$

الحاله الثانيه:- الي يكون بيها الاس سالب (هنا نفس الحاله الاولى بس الاشاره البنص تتغير)

لاحظ القانون شلون يصير صيغته قبل الحل وصيغته من تحل

$$r(cos\theta + isin\theta)^{-n}\text{سالب}$$

نفس خطوات حال الحاله الاولى فقط لاحظ التغير

$$\frac{1}{r^n}(cos\, n\, \theta - isin\, n\, \theta)$$

الحاله الثالثه / الي هي كسر هنا مجرد قانون هاي الصيغه

$$r(cos\theta + isin\theta)^{\frac{1}{n}}$$

هم يصير اس عل r بس راح يتغير القانون يصير بهل صيغه وتحل

$$r^{\frac{1}{2}}(cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + isin\frac{\theta + 2k\pi}{n})$$

ملاحظه:-نستخدم الحاله 3 اذا طلب من عدنه جذور تربيعيه او تكعيبيه او غيرها وكذالك قيمة عدد مركب مرفوع الى اس كسر

استاذ k شنو صديقي هاي من يطلب منك جذ الجذور التربيعيه او جد الجذور التكعيبيه او جد الجذور الخمسه k تبدي تعوض من 0 لحد متوصل 5 تعويضات وتوكف وها كل ماتعوض اطلع حل

مثال/احسب $\frac{1}{\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)^3}$

$$\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)^{-3}=\cos\frac{5\pi}{12}*3-i\sin\frac{5\pi}{12}*3$$
$$=\cos\frac{5\pi}{4}-i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$Ex\backslash(1+i)^{11}$

$sol\backslash z=1+i\rightarrow z=(1,1)\rightarrow r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$sin\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ وان θ تقع في الربع الاول .: زاويه الاسناد $=\frac{\pi}{4}$

$:.\theta=\frac{\pi}{4}$

$z=r[cos\theta+isin\theta]$

$:.z^n=r^2[cosn\theta+isin\,n\theta]$

$:.\ (1+i)^{11}=\left(\sqrt{2}\right)^{11}\left[cos\frac{\pi}{4}*11+isin\frac{\pi}{4}*11\right]$

$32\sqrt{11}\left[cos\frac{11\pi}{4}+isin\frac{11\pi}{4}\right]$

$32\sqrt{2}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right]=32(-1+i)$

$Ex\backslash(-2i)^{\frac{1}{2}}$

$sol\backslash z=0-2i\rightarrow z=(0,-2)$

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(0)^2+(-2)^2}=\sqrt{0+4}=\sqrt{4}=2$

$cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{0}{2}=0$

$sin\theta=\frac{y}{r}=-\frac{2}{2}=-1:\rightarrow\theta=\frac{3\pi}{2}$

$z=r[cos\theta+isin\theta]$.: الصوره القطبيه هي

$z=2\left[cos\frac{3\pi}{2}+isin\frac{3\pi}{2}\right]$

$$\therefore (-2i)^{(\frac{1}{n})} = \sqrt[n]{r}[\cos\frac{\theta+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta+2\pi k}{n}]$$

$$\sqrt{2}[\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{2} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{2}]$$

$$= \sqrt{2}[\cos\frac{3\pi+4\pi k}{4} + i\sin\frac{3\pi+4\pi k}{4}]$$

$$\therefore k = 0,1$$

$$Z1 = \sqrt{2}[\cos\frac{3\pi+4\pi(0)}{4} + i\sin\frac{3\pi+4\pi(0)}{4}]$$

$$Z1 = \sqrt{2}[\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}] = \sqrt{2}\left[\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \rightarrow Z1 = -1 + i$$

$$2 - when\ k = 1$$

$$Z2 = \sqrt{2}[\cos\frac{3\pi+4\pi(1)}{4} + i\sin\frac{3\pi+4\pi(1)}{4}]$$

$$= \sqrt{2}[\cos\frac{3\pi+4\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi+4\pi}{4}]$$

$$= \sqrt{2}[\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}] \rightarrow Z2 = \sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right] = 1 - i$$

ملاحظه مهمه جد :- اذا جان الاس هو رقم عله رقم يعني الرقم الي بالبسط مو 1 غيره (معناه نطبق حالتين معا)طرقه الحل

1-ناخذ البسط الاس ونطبق

$$z^{\text{رقم البسط}} = r^{\text{رقم البسط}}[\cos\theta_{\text{رقم البسط}} + i\sin\theta_{\text{رقم البسط}}]$$

2-من اخذنه البسط راح يبقه 1عله عدد نجي نخليه اس للناتج الي طلع من 1

مثال /اوجد الصيغه القطبيه للعدد $(\sqrt{3}+i)^{\frac{2}{5}}$ باستخدام ديموافر :

$$z = \sqrt{3} + i \rightarrow z = (\sqrt{3},1) \rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$$ زاويه الاسناد $= \frac{\pi}{6}$ وتقع في الربع الاول

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$$

$z^{\text{رقم البسط}} = r^{\text{رقم البسط}}[cos\,\text{رقم البسط}\,\theta + isin\text{رقم البسط}\theta]$

$\therefore (\sqrt{3}+i)^2 = (2)^2\left[cos2*\frac{\pi}{6}+isin\,2*\frac{\pi}{6}\right]$

$= 4\left[cos\frac{\pi}{3}+isin\frac{\pi}{4}\right]$ نجيب الاس البقه نخليه عله هذه الناتج

$\therefore Z^{\frac{1}{2}} == \sqrt[n]{r}[\cos\frac{\theta+2\pi k}{n}+isin\frac{\theta+2\pi k}{n}]$

$= \sqrt[5]{4}[\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{5}+isin\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{5}]$

$= \sqrt[5]{4}[\cos\frac{\pi+6\pi k}{15}+isin\frac{\pi+6\pi k}{15}]$

$1-when\ k=0 \rightarrow = \sqrt[5]{4}[\cos\frac{\pi}{15}+isin\frac{\pi}{15}]$

$2-when\ k=1 \rightarrow = \sqrt[5]{4}[\cos\frac{7\pi}{15}+isin\frac{7\pi}{15}]$

$3-when\ k=2 \rightarrow = \sqrt[5]{4}[\cos\frac{13\pi}{15}+isin\frac{13\pi}{15}]$

$4-when\ k=3 \rightarrow = \sqrt[5]{4}[\cos\frac{19\pi}{15}+isin\frac{19\pi}{15}]$

$5-when\ k=4 \rightarrow = \sqrt[5]{4}[\cos\frac{25\pi}{15}+isin\frac{25\pi}{15}]$

$= \sqrt[5]{4}[\cos\frac{5\pi}{3}+isin\frac{5\pi}{3}]$

مثال / اثبت ان $\frac{[cos30+isin30]^5[cos40+isin40]^6}{[cos300+isin300]} = i$

$L.H.S = \frac{[cos30+isin30]^5[cos40+isin40]^6}{[cos300+isin300]}$

$= \frac{[cos10+isin10]^{15}[cos10+isin10]^{24}}{[cos10+isin10]^{30}}$

$= \frac{[cos10+isin10]^{39}}{[cos10+isin10]^{30}} = [cos10+isin10]^{39-30}$

$= [cos10+isin10]^9 = [cos90+isin90] = [0+i] = i = R.H.S$

مثال (واجب):-جد باستخدام ديموافر 8i-

الموضوع للفرع التطبيقي

الجذور التكعيبيه للواحد الصحيح

$z = \sqrt[3]{1}$ بتكعيب الطرفين $z^3 = 1 \to z^3 - 1 = 0 \to (z-1)(z^2+z+1) = 0$

$z = 1 \; or \quad z^2 + z + 1 = 0 \qquad a = 1 \quad b = 1 \quad c = 1$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \to z = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \to z = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

.: الجذور التكعيبيه للواحد هي $(1 , -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i)$

راح نرمز للجذر الاول هو ω وراح نرمز للجذر الثاني هو ω^2

هسه عدنه شغلتين مهمه الي همه

$\omega + \omega^2 + 1 = 0$ 1)مجموع الجذور الثلاثه =0

2) $\omega^3 = 1$

حاصل ضرب الجذور الثلاثة يساوي واحد

3) $1.\omega.\omega^2 = 1 \implies \omega^3 = 1 \implies (\omega^3)^n = 1$

4)ω هو ω^2 ومرافق ω^2 مرافق ω هو

حاصل طرح الجذرين التخيلين يساوي $\pm\sqrt{3}i$

5) $\omega^2 - \omega = \omega - \omega^2 = \pm\sqrt{3}i$

هسه من المعادله الاولى نشتق 6 علاقات شلون شوف نبقي حد وننقل حدين هاي منها 3 علاقات ونبقي حدين وننقل حد هاي منها 3 علاقات شوفهم

$$1)1+\omega=-\omega^2 \quad 2)1+\omega^2=-\omega \quad 3)\omega+\omega^2=-1$$
$$4)\omega=-1-\omega^2 \quad 5)\omega^2=-1-\omega \quad 6)1=-\omega-\omega^2$$

زين استاذ شنو نستفاد منهم شوف نستفاد بالحل تعتبر خاصيه يعني اذا تلكي وحده منهم راح انعوض بما يساويها وهكذا ..

هنا هم عدنه مثل i اذا جان اس ω اكبر من 3 شنو نسوي شوف القاعده

الاس اكبر من 3 $\rightarrow \omega^n$

1-اذا جان الاس يقبل القسمه على 3 بدون باقي الناتج مالته 1

2-اذا جان الاس يقبل القسمه على 3 وباقي 1 الناتج مالتنه ω

3-اذا جان الاس يقبل القسمه على 3 وباقي 2 الناتج مالتنه ω^2

امثله :-

$$1)\omega^6=1 \qquad 2)\omega^{19}=\omega \quad 3)\omega^{26}=\omega^2$$

ملاحظه :-اذا جان اس ال ω سالب الحل (انزله للمقام ونخلي بالبسط اوميكا اسها اعله من اس المقام يقبل القسمه على 3 بدون باقي ونختصر بينهم باستعمال الخاصيه عند القسمه تطرح الاسس)

مثال :-

$$1)\omega^{-2}\rightarrow\frac{1}{\omega^2}\rightarrow\frac{\omega^3}{\omega^2}=\omega^{3-2}=\omega$$

ملاحظه مهمه :- اذا جان عدنه اس ω (حدين حد الاول رقم وحرف والحد الثاني بس رقم الحل مباشر ناخذا ω اس الرقم ونطلع نتيجه

$$\omega^{9n+3}=\omega^3=1$$

امثله متنوعه حول الموضوع :- جد ناتج كل ممايأتي

1) $(2+5\omega+5\omega^2)^3$ نستخرج عامل مشترك

$=[2+5(\omega+\omega^2)]^3=[2+5(-1)]^3$

$(-3)^3=-27$

2) $-4(2+\omega+2\omega^2)^9$ نستخرج عامل مشترك

$=-4[\omega+2(1+\omega^2)]^9=-4[\omega-2\omega]^9$

$=-4(-\omega)^9=-4(-\omega)^9=4$

مثال :- وزاري 2000د1/اثبت ان $\left(\frac{1}{1+\omega}-\frac{1}{1+\omega^2}\right)^2=-3$

$\left(\frac{1}{-\omega^2}-\frac{1}{-\omega}\right)^2=(-\omega+\omega^2)^2$

$=(-\omega)^2+2(-\omega)(\omega^2)+\omega^4=\omega^2-2\omega^3+\omega$

$=\omega^2+\omega-2=-1-2=-3$

مثال / أثبت أن $\left(\frac{5\omega+3}{3\omega^2+5}\right)^3=1$

$\left(\frac{5\omega+3}{3\omega^2+5}\right)^3$ نضرب احد الثوابت بـ ω^3

$=\left(\frac{5\omega+3\omega^3}{3\omega^2+5}\right)^3$ نستخرج عامل مشترك من البسط

$=\left(\frac{\omega(5+3\omega^2)}{3\omega^2+5}\right)^3$ نختصر المتشابه البسط و المقام

$=(\omega)^3=1 \quad R.H.S$

مثال :- اثبت ان $\left(\frac{5\omega^2 i-1}{5+i\omega}\right)^6 = -1$

$$L.H.S = \left(\frac{5\omega^2 i + i^2\omega^3}{5 + i\omega}\right)^6$$ باضافة للبسط $i^2\omega^3$ – للحد الخالي

$$= \left(\frac{\omega^2 i(5 + \omega i)}{5 + \omega i}\right)^6$$ اخراج عامل مشترك

$$= (\omega^2 i)^6 = \omega^{12} i^6 = -1 = R.H.S$$

ملاحظه :- احنه دائما نستخدم خوص الاوميكا نعوض بمايساويها ونحل زين اذا لكيناها ومكدرنه نطبق خواص الاوميكا (هنا ع الاغلب نستعمل توحيد المقامات)

مثال :- جد المعادله التربيعيه التي جذراها lm حيث $l\ m \in c$ مترافقان حيث

$$L = \frac{w}{1 + 3w} \quad , M = \frac{w^2}{1 + 3w^2}$$

sol

$$L + M = \frac{w}{1 + 3w} + \frac{w^2}{1 + 3w^2}$$ مجموع الجذرين

$$= \frac{w(1 + 3w^2) + w^2(1 + 3w)}{(1 + 3w)(1 + 3w^2)}$$

$$= \frac{w + 3w^3 + w^2 + 3w^3}{1 + 3w^2 + 3w + 9w^3} = \frac{w + w^2 + 6w^3}{3w^2 + 3w + 1 + 9}$$

$$= \frac{-1 + 6}{3(w^2 + w) + 10} = \frac{5}{-3 + 10} = \frac{5}{7} \in R$$

$$L.M = \frac{w}{1 + 3w} \cdot \frac{w^2}{1 + 3w^2} = \frac{w^3}{7} = \frac{1}{7} \in R$$

$$x^2 - \frac{5}{7}x + \frac{1}{7} = 0$$ المعادله التربيعيه

2) $\frac{w}{2-w^2}$,$\frac{w^2}{2-w}$

$$\frac{w}{2-w^2}+\frac{w^2}{2-w}=\frac{w(2-w)+w^2(2-w^2)}{(2-w^2)(2-w)}$$
$$=\frac{2w-w^2+2w-w^4}{4-2w-2w^2+w^3}=\frac{2w+w^2-w}{4-2w-2w^2+1}$$
$$=\frac{w+w^2}{5-2(w+w^2)}=\frac{w-w-1}{5-2(-1)}=\frac{-1}{7}$$
$$\frac{w}{2-w^2}\mathrm{X}\frac{w^2}{2-w}=\frac{w^3}{4-2w-2w^2+w^3}=\frac{1}{7}$$
$$x^2+\frac{1}{7}x+\frac{1}{7}=0$$

بعض الاسئلة الوزارية

س1:- ضع (3+2i)(-2+i) بالصوره العاديه ثم جد نظيره الضربي بالصوره العاديه ج\ $\frac{8}{65}+\frac{1}{65}i$

س2:- جد الصيغه الجبريه للعدد المركب $\left(\frac{3-i}{1+i}\right)^2$

س3:-جد الصيغه الجبريه للعدد المركب $\frac{(1-i)^{15}}{(1+i)^{14}}$

س4:- جد قيمه x,y الحقيقيتين اذا علمت ان $\frac{3+i}{2-i},\frac{6}{x+yi}$ مترافقان

س5:- اذا كان x=2i-1 جد قيمه x^2+2x+6

س6:- جد ناتج بالصيغه الديكارتيه $(3+4i)^2+(5-3i)(1+i)$

س7:- اذا كانت $x=2+3i,y=3-i$ جد قيمه x^2+2y^2

س8/ اذا كان $a+bi=\frac{2+i}{1-i}$ اثبت ان $2(a^3+b^3)=7$

س9/ ضع المقدار $\frac{(1-i)^{13}}{64}$ بالصيغه العاديه للعدد المركب

س10/ $\left(\frac{2-i}{1+i}\right)x+(1-i)^3y=\overline{(1+\imath)(2-3\imath)}$

س11/ برهن صحه مياتي $(1+i)^5+(1-i)^7=4+4i$

س12:- اذا كان $c,d\in R$ كان $c+di=\frac{7-4i}{2+i}$ جد $\sqrt{2c-di}$

س13 /أذا كان $x=2+\sqrt{3}i\ ,y\ 2-\sqrt{3}i$ أوجد $\omega^2x^2+\omega y^2$

س13/ جد الصيغة العادية للعدد المركب $\left(\frac{3-i}{1+i}\right)^2$

س14/ جد الصيغة العادية للعدد المركب $\left(1-\sqrt{3}i\right)^2-\left(2-\sqrt{3}i\right)^2$

س15 / ضع المقدار $\frac{(1-i)^{13}}{64}$ بالصيغة العادية ؟

القسم الثاني الامتحان الشامل

Q1\جد قيمة x,y الحقيقية اذا علمت ان $(x+yi)^5+(y-xi)^5=-8$

Q2\جد باستخدام ديموافر الجذور التكعيبيه للعدد (-27i)

Q3\اثبت ان $\frac{[cos30+isin30]^5[cos40+isin40]^6}{[cos300+isin300]}=i$

Q4\جد المقياس والسعة الأساسية للعدد المركب $\left(\frac{2i}{1+i}\right)$ ثم جد صيغة القطبية

Q5\حل المعادلة التربيعية الاتية $z^2-3z+3+i=0$

Q6\اذا كان 3+2i احد جذري المعادلة $x^2-(4-2i)x+a=0$ فما قيمة a

Q7\جد قيمة x,y الحقيقين اذا علمت ان $\frac{6}{x+yi}\ ,\frac{3+i}{2-i}$ مترافقان

Q8\عدد مركب مقياسه 5 وجزءه التخيلي يزيد عن جزءه الحقيقي بمقدار واحد جد العدد المركب

حلول هذه الاسئلة متوفره عبر القناة @asin180

القسم الاول | الفصل الثاني (القطوع المخروطيه)

الفصل الثاني. شنو الفصل الثاني شبي من مواضيع. جكد درجته وزاري

الفصل الثاني هو فصل عبارة عن ثلاث مواضيع (قطع مكافئ – قطع ناقص-قطع زائد)

درجتة بالوزاري (20 درجة)

هذني القطوع مره تلكيهم كل واحد وحده (يعني وحدة بالسؤال) ومره تلكيهم مجتمعين (يعني ربط بين قطعين) فاحنه مانطول اكثر ندخل في الموضوع الاول

مفاهيم القطع المخروطي

1)نقطه ثابتة تسمى البوره 2)مستقيم معلوم يسمى الدليل 3) الاختلاف المركزي (e)

اذا ذكر بالسوال قطع مخروطي معناه

قطع مكافئ	قطع ناقص	قطع زائد
e=1	e<1	e>1

القطـــــــع المكافـــــــئ :- ((شبيه؟؟))

هو مجموعه من النقاط M(x,y) في المستوي التي يكون بعد كل منها عن نقطه ثابته F(p,0) تسمئ البؤره **وهاي البؤره تكون مساويه للبعد عن مستقيم معلوم الي هوه رمزه D نصيحله** دليل

هسه اخذنه تعريف عنه هسه راح انطيك القطع المكافئ مكوناته شنو وشنو اقسامه

- مكونات القطع المكافئ

-معادله 2-بؤره 3-معادله الدليل 4-رسم القطع

اقسام القطع المكافئ

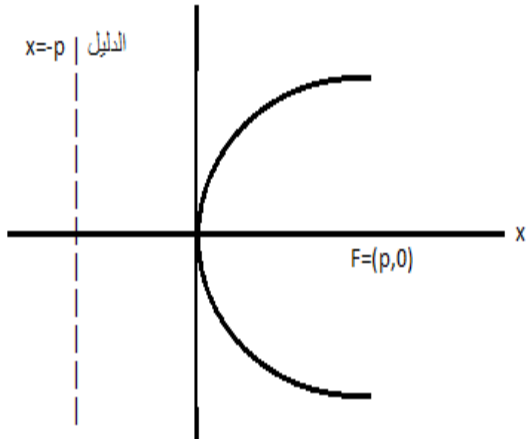
1-القطع المكافئ سيني موجب　　2-قطع مكافئ سيني سالب

3-قطع مكافئ صادي موجب　　4-قطع مكافئ صادي سالب

كل قسم بيه المكونات الفوك من ينطي سوال نشوفه ياقسم (علمود نستخدم مكونات القسم الخاص بيه)

مكونـــــــات اقسام القطع المكافئ

1-القطع المكافئ السيني الموجب



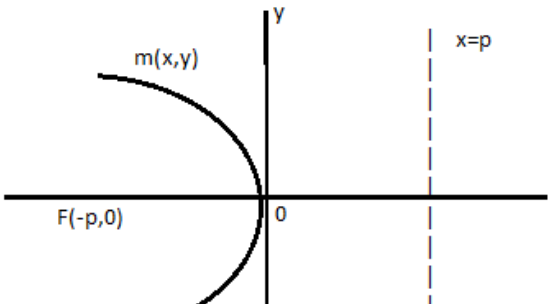
1-المعادله هي $y^2 = 4px$

2-البوره هي F(p,0)

3- معادله الدليل x=-p

4-الرسم بهل الشكل

2-القطع المكافئ السيني السالب



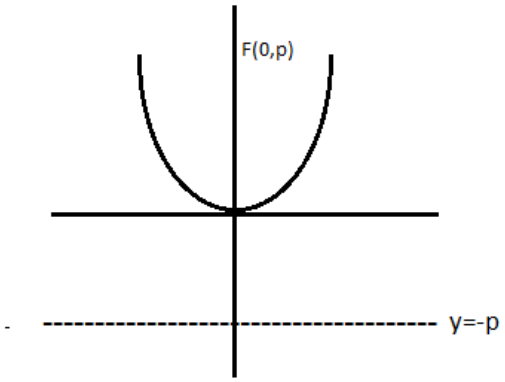
-المعادله هي $y^2 = -4px$

2-البوره هي(F(-p,0

3- معادله الدليل x=p

4-الرسم بهل شكل

3-القطع المكافئ الصادي الموجب



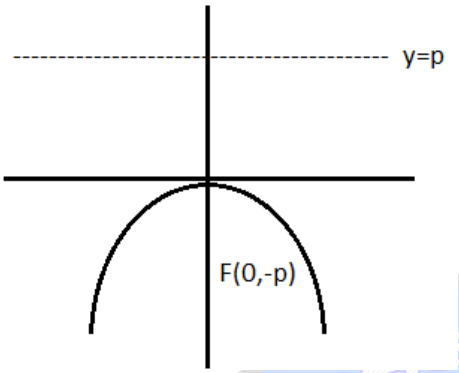
1-المعادله هي $x^2 = 4py$

2-البوره هي F(0,p)

3- معادله الدليل y=-p

4-الرسم بهل شكل

4-القطع المكافئ الصادي السالب



1-المعادله هي $x^2 = -4py$

2-البوره هي F(0,-p)

3- معادله الدليل y=p

4-الرسم بهل شكل

ملاحظه مهمه جدا :- الp دائما موجبه دائما واذا طلعت عندك سالبه يعني خطا بالحل

ملاحظه:- البوره دائما تكون عكس اشاره الدليل

2- اذا نريد نطلع معادله قطع مكافئ لازم نطلع 1- مكان (موقع) البؤره 2- قيمه p

مثال :- جد البؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافئ $y^2 = -8x$

$y^2 = -8\ x$

$y^2 = -4p\ x$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$4p = 8 \rightarrow p = 2$

$\therefore F(-p,0)$ البؤرة $\rightarrow\ F(-2,0)$] البؤرة

$\therefore x = p$ معادلة الدليل $\rightarrow \therefore x = 2$

تقريباً أغلب الأسئلة الي بهل صيغة تحل على هذا النمط

ملاحظـــــــات هامـــــــه لحـــل الاسئـــــله

1-من ينطي البؤره مباشره استخرج قيمة p من عدها وكتب المعادله الخاصه بالسوال (من خلال البؤره عرفت نوع القطع)

مثال :-جد معادله القطع المكافئ الذي راسه نقطه الاصل وبؤرته (3,0)

$\boldsymbol{F(3,0)}$

$\boldsymbol{sol: .F(3,0) \rightarrow \therefore p = 3}$

$\boldsymbol{y^2 = 4px}$ المعادله القياسيه

$\boldsymbol{\therefore y^2 = 4(3)x \rightarrow y^2 = 12x}$

2-اذا انطاني معادله دليل فالبؤره مالتي هو نفسه معادله الدليل بعكس الاشاره (مهم)

(المسافه بين بؤره القطع المكافئ ودليله =2p)مهمه جدا (نشوف المثال)

مثال:- جد معادله القطع المكافئ الذي راسه نقطه الاصل ومعادله الدليل 2x-6=0

$2x - 6 = 0 \rightarrow 2x = 6 \rightarrow x = 3$

$p = 3$

$y^2 = -4px$ المعادله القياسيه

$y^2 = -4(3)x$ المعادله هي

$y^2 = -12x$

3-كل مايذكرلك كلمه (يمر ينتمي) ويذكر وياها نقطه هاي النقطه تحقق معادله ولازم يذكرلك المحور يحدد اذا ماحدد تاخذ احتمالين

مثال \\ جد معادلة القطع المكافئ في الحالات التالية

1) يمر بالنقطة (4 ، 2) وبؤرته تقع على محور السينات x axis ورأسه نقطة الاصل ؟

معادلة القطع المكافئ $y^2 = 4px \Rightarrow (4)^2 = 4p(2) \Rightarrow 16=8p \Rightarrow p = 2 \therefore y^2 = 8x$

2) يمر بالنقطة (-4 ، -1) وبؤرته تقع على محور الصادات y axis ورأسه نقطة الاصل ؟

المعادلة $x^2 = -4py \Rightarrow (-1)^2 = -4p(-4) \Rightarrow 1 = 16p \Rightarrow p = \frac{1}{16} \therefore x^2 = -\frac{1}{4}y$

3) يمر بالنقطة (6 ، -2) ورأسه نقطة الاصل ؟

الاحتمال الاول *** البؤرة تقع على المحور السيني السالب

معادلة القطع $y^2 = -4px \Rightarrow (6)^2 = -4p(-2) \Rightarrow 36= 8p \Rightarrow p = \frac{9}{2} \therefore y^2 = -18x$

الاحتمال الثاني *** البؤرة تقع على المحور الصادي الموجب

المعادلة $x^2 = 4py \Rightarrow (-2)^2 = 4p(6) \Rightarrow 4 = 24p \Rightarrow p = \frac{1}{6} \therefore x^2 = \frac{2}{3}y$

4-اذا مر القطع المكافئ بنقطتين راح ناخذ وحده منهم ونطبق نفس الخطوات الفوك بس شلون نعرف نوع المعادله سيني لو صادي شوف (بالنقطتين لازم اكو رقم متشابه بالاشاره والرقم المعادله تقع ع نفس المحور الي عليه الرقم شوف المثال)

مثال :-جد معادله القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين (2,4),(2,-4) وراسه نقطه الاصل

[التشابه بالمحور السينات متساوي بالنقطتين]

∴ القطع المكافئ يقع علئ محور السينات الموجب

∴ المعادله هي $y^2 = 4px$

هسه نعوض نقطه وحده بـــــس تحقق معادلة

$(4)^2 = 4p(2) \rightarrow 16 = 8p$ ← تحقق معادلته

$p = 2$

$y^2 = 4(2)x \rightarrow y^2 = 8x$ المعادله هي

5-اذا مر دليل القطع المكافئ بنقطه اذا كلك يقع على محور السينات راح نكول

(المسقط الاول او الرقم الاول من النقطه=x) اذا كلك يقع على محور الصادات راح نكول (المسقط الثاني او الرقم الثاني من النقطه=y) من نستخرج الدليل معناه استخرجت البؤره لان هي عكس اشاره الدليل

مثال :- جد معادله القطع المكافئ الذي دليله يمر بالنقطه (-2,-3) ويقع على محور الصادات

/Sol

ذاكر محور الصادات فراح نكتب معادله الصادات خوش

∴ معادله الدليل هي $y = -3 \leftarrow p = 3$

المعادله هي $x^2 = 4py \leftarrow x^2 = 4(3)y$

$x^2 = 12y$

6-اذا مر الدليل بنقطتين شنو نسوي شوف لو نكول

الرقم المتساوي من النقطتين =x لو نكول الرقم المتساوي من النقطتين =y

مثال \\ جد معادلة القطع المكافئ في الحالات التالية

1) دليله يمر بالنقطتين (1 ، -3) ، (9 ، -3) ورأسه نقطة الاصل ؟

الحل:- معادلة الدليل هي x = -3 أي ان p = 3

∴ F(3,0) ⇒ $y^2 = 4px$ ⇒ $y^2 = 12x$ (معادلة القطع المكافئ)

7-من ينطي معادله مستقيم نستخرج منه الدليل لو x لو y بس شلون شوف اذا ذكر يتقاطع مع الصادات معنا x=0 واذا ذكر السينات معنا y=0 شوف المثال

جد معادله القطع المكافئ
دليله يمر بنقطة تقاطع المستقيم $2x + 3y = 12$ مع محور الصادات y axis ورأسه نقطة الاصل؟

$x = 0$ عندما $\Rightarrow 3y = 12 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow (0,4) \in$ الدليل

$F(0, -4) \Rightarrow p = 4 \Rightarrow x^2 = -4py \Rightarrow x^2 = -16y$ (معادلة القطع المكافئ)

مثال:-اذا كانت $y^2 = (4h - 5)x$ معادله قطع مكافئ دليله يمر بالنقطه (-2,3) فجد قيمة h

.: معادله القطع المكافئ هي

$$y^2 = (4h - 5)x$$

.: القطع المكافئ يمر بالنقطه (-2,3)

$$x = -2 \rightarrow p = 2$$

.: المعادله القياسيه هي $y^2 = 4px$

$$\therefore y^2 = 4(2)x \rightarrow y^2 = 8x$$

$$4h - 5 = 8 \rightarrow 4h = 8 + 5 \rightarrow 4h = 13 \rightarrow h = \frac{13}{4}$$

ملاحظه:- اذا كلك الدليل يوازي احد المحاور مثلا يوازي محور السينات فراح يكون عند (البؤره والدليل يقعان على محور الصادت) والبعكس

والدليل يقعان على محور الصادت)

مثال:- جد معادلة القطع المكافئ الذي دليله يمر بالنقطة (2,-1) ودليله يوازي محور الصادات

:-الدليل يوازي محور الصادات

.: البؤرة والدليل يقعان على محور السينات

$$x = 2 \rightarrow p = 2$$

المعادلة القياسية هي $y^2 = -4px$

$$y^2 = -4\ (2)x \rightarrow y^2 = -8x$$

ايجـــــاد معادلـــــه القطـــــع المكـــــافئ بالتعريـــــف

1-هاي العلاقه الي نشتغل عليها MF=MQ ال M هي نقطه϶ للقطع F M(x,y) هي البؤره Q نقطه϶ للدليل

2-نربع الطرفين 3-نفتح الاقواس 4-نختصر

م/ القانون الرئيسي للحل هو قانون المسافه بين نقطتين

م/Q هي نفسها البؤره بمجرد الحد الثاني تقلبه متغير والحد الاول تغير اشارته

F(0,3) Q(x,-3)

مثال :-باستخدام التعريف جد معادله القطع المكافئ في الحالات التاليه

1-بؤرته $(\sqrt{3},0)$ والراس نقطه الاصل .

$$Sol:\rightarrow\ F(\sqrt{3},0)\rightarrow Q(-\sqrt{3},y)$$
$$\therefore MF=MQ$$
$$\sqrt{(x2-x1)^2+(y2-y1)^2}=\sqrt{(x^2-x1)^2+(y2-y1)^2}$$
$$\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+\sqrt{3})^2+(y-y)^2}$$
$$\sqrt{x^2-2\sqrt{3}x+3+y^2}=\sqrt{x^2+2\sqrt{3}x+3}$$ تربيع الطرفين
$$x^2-2\sqrt{3}x+3+y^2=x^2+2\sqrt{3}x+3$$
$$\therefore y^2-2\sqrt{3}x=2\sqrt{3}x\rightarrow y^2=2\sqrt{3}x+2\sqrt{3}x$$
$y^2=4\sqrt{3}x$ معادله القطع المكافئ

عزيزي الطالب ان تمارين القطع المكافئ هي مشابه للامثله اعلاه

رســـــم القطـــع المكافئ

بصورة مبسطه بدون خطوات أنت تعرف رسم كل قسم من اقسام القطع الاربعة مجرد تجيب الرسم وتأشر البؤرة والدليل واذا تطلع نقطة هم تأشرها وتكدر علمود يطلع الرسم ادق ناخذ من عندك قيم للx تعوضها بالمعادلة تطلع y شوف المثال

مثال :- جد بؤرة ومعادلة دليل القطع المكافئ $y^2 = 4x$ ثم أرسمه

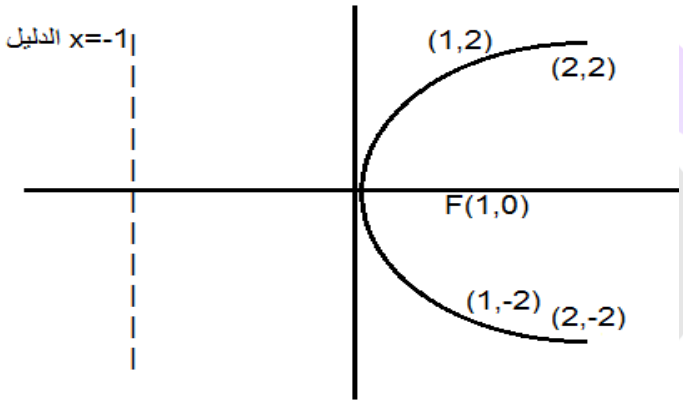
Sol\ المعادلة القياسية $y^2 = 4px$

$4p = 4 \rightarrow p = 1$

x	0	1	2
y	0	-+2	$\mp 2\sqrt{2}$

البؤرة هي F(1,0)

معادله الدليل X=-1:.



القطع الناقص

a-اذا جان القطع سيني

$1-$ المعادله هي $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$2-$ البؤرتان هما $F1(c,0) F2(-c,0)$

$3-$ الراسان هما $V1(a,0), V2(-a,0)$

4- القطبان M1(0,b),M2(0,-b)

b-اذا جان القطع صادي

$1-$ المعادله هي $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

$2-$ البؤرتان هما $F1(0,-c) F2(0,-c)$

$3-$ الراسان هما $V1(0,a), V2(0,-a)$

4- القطبان M1(b,0),M2(-b,0)

مشترك

A-طول المحور الكبير (نصيحله العدد الثابت) =2a

b-طول الحور الصغير =2b

c-البعد او المسافه بين البؤرتين = 2c

d-العلاقه بين a,b,c علاقه حلال المشاكل اغلب المثله تحتاجها (بكل عزء لطامه)

$a^2 = b^2 + c^2 \quad a > b \quad a > c$

F-الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a}$

والاختلاف المركزي دائما اصغر من الواحد الصحيح يعني ((من يذكر سوال جد معادله القطع المخروطي الذي ختلافه المركزي ..... ومنطيه اقل من الواحد تجي قبل للقطع الناقص)

g-مساحه القطع الناقص= $A = ab\pi$

h-محيط القطع الناقص

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

مثال :-في كل مما ياتي جد طول كل من المحورين والراسين والبؤرتين والاختلاف المركزي

$1) \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

sol/بالمقارنه مع بالمعادله القياسيه

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ملاحظه :-مهمه جدا شلون عرف هاي المعادله ع السينات شوف الرقم الاكبر دائما يمثل a^2 واذا جان جوه x معناه المعادله سينات ونطبق واذا جان جوه y معناه صادات وطبق

$a^2 = 25 \rightarrow a = 5$ اخذنا من المعادله

$b^2 = 16 \rightarrow b = 4$ اخذنا من المعادله

نطبق علاقه حلال المشاكل علمود نطلع قيه c الي هي البؤره

$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 25 - 16 \rightarrow c^2 = 9 \rightarrow c = 3$

$V1(a,0), V2(-a,0)$ الراسان هما

$V1(5,0), V2(-5,0)$

$M1(0,b), M2(0,-b)$ القطبان

$M1(0,4), M2(0,-4)$

$F1(c,0), F2(-c,0)$ البؤرتين

$F1(3,0), F2(-3,0)$

وحده طول $2a = 2(5) = 10$ طول المحورالكبير

وحده طول $2b = 2(4) = 8$ محور الصغير

$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} < 1$ اختلاف المركزي

$2) 4x^2 + 3y^2 = \frac{4}{3}$

Sol/نضرب طرفي المعادله في $\frac{3}{4}$ علمود الطرف الايمن يساوي 1 لازم بكل معادله

$$\left(\frac{3}{4}\right) 4x^2 + \frac{3}{4}\, 3y^2 = \frac{3}{4} * \frac{4}{3}$$

$$3x^2 + \frac{9y^2}{4} = 1$$

شلون نزلت 9 جوه 4 وشلون نزلت 3 احنه نعرف شغله المقام المقام في البسط رجعنا لحالته

$$\frac{x^2}{\frac{1}{3}} + \frac{y^2}{\frac{4}{9}} = 1$$

$\frac{4}{9} > \frac{1}{3}$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ نقارن المعادله القياسيه :

$a^2 = \frac{4}{9} \rightarrow a = \frac{2}{3} \quad b^2 = \frac{1}{3} \rightarrow \mathrm{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$V1\left(0,\frac{2}{3}\right), V2\left(0,-\frac{2}{3}\right)$ الراسان هما

$2a = 2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$ طول المحور الكبير

$2\mathrm{b} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ طول المحور الصغير

$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{4}{9} - \frac{1}{3} = \frac{4-3}{9} \rightarrow c^2 = \frac{1}{9}$

$\therefore c = \frac{1}{3}$

البؤرتان هما $F1\left(0,\frac{1}{3}\right), F2\left(0,\frac{-1}{3}\right)$

ملاحظه:-من يكلك طولا محوريه ويذكر رقمين الك (الرقم الجبير 2a) (الرقم الصغير 2b) ومنهم نطلع a,b والـ c من علاقه حلال المشاكل

مثال :- جد معادله القطع الناقص الذي مركزه نقطه الاصل و طولا محوريه 8,10 وحده طول وبؤرتاه على محور السينات

$sol\backslash 2a = 10 \rightarrow a = 5 \quad 2b = 8 \rightarrow b = 4$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ معادله القطع الناقص

مثال:-لتكن $kx^2 + 4y^2 = 36$ معادله قطع ناقص مركزه نقطه الاصل واحدئ بؤرتيه $(0,\sqrt{3})$ فجد قيمة k

$(\sqrt{3},0)$البؤره $= (c,0) \rightarrow c = \sqrt{3}$

$[kx^2 + 4y^2 = 36] \div 36 \rightarrow \frac{kx^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = 1$

$\frac{x^2}{\frac{36}{k}} + \frac{y^2}{9} = 1 \rightarrow b^2 = \frac{36}{k}, \quad a^2 = 9 \quad , c = \sqrt{3}$

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 9 = \frac{36}{k} + 3$

$\frac{36}{k} = 6 \rightarrow 6k = 36 \rightarrow k = 6$

ملاحظه مهمه :- من يذكر (فرق بين طوليه محوريه) العلاقه تكون

(الرقم المعطى =2a-2b) هاي اذا جان الرقم الي نطاه الي موجب اذ الرقم سالب راح يكون (الرقم المعطى -2b=) من يذكر عباره (مجموع طوليه محوريه (الرقم المعطئ =2a+2b)

مثال :-جد معادله القطع الناقص الذي مركزه نقطه الاصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافه بين البؤرتين 6 وحدات والفرق بين طولي محوري يساوي 2 وحده

/Sol

$2c = 6 \rightarrow c = 3 \rightarrow c^2 = 9$

$[2a - 2b = 2] \div 2 \rightarrow a - b = 1 \rightarrow a = b + 1$

$a^2 = b^2 + c^2$ حلال المشاكل

$(b+1)^2 = b^2 + 9$

$b^2 + 2b + 1 = b^2 + 9 \rightarrow 2b = 9 - 1 \rightarrow 2b = 8$

$b = 4 \rightarrow b^2 = 16$

$a = b + 1 \rightarrow a = 4 + 1 \rightarrow a = 5 \rightarrow a^2 = 25$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ المعادله القطع الناقص .:

معادله القطع الناقص بالتعريف

1-علاقتنه QF1+QF2=2a

Q نقطه احنا نفرضها تنتمي للقطع (X,Y)

F1,F2 البؤرتين الي بالسوال

2a العدد الثابت او المحور الكبير

QF1 النقطه والبؤره الاولى نطبق بينهم قانون المسافه + QF2 النقطه والبؤره الثانيه نطبق بينهم قانون المسافه =2a هو العدد الثابت

خطـــــــــوات مبسطه

1- انزل قانون المسافه مع تعويض

2-ننقل الحد الثاني يم العدد الثابت

3-نربع الطرفين الطرف الي باليسره بس يروح الجذر اما الطرف الايمن يصير مربع حدانيه

4-راح يصير عندك اختصار تختصر

5-اذا جان اكو رقم تقلل بيه قيم المعادله قسم واذا ماكوا فتهمل هل نقطه

6-نرجع نربع الطرفين لان راح يبقه عندك جذر

7-ترتب المعادله تجمع اوتطرح او اختصار

مثال كتاب :-باستخدام التعريف جد معادله القطع الناقص الذي بؤرتاه F2(-2,0)F1(2,0)

والعدد الثابت =6

2a=6 F2(-2,0) F1(2,0) /Sol

نفرض Q(x,y)

$QF1 + QF2 = 2a$

$\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y-0)^2}=6$

$\sqrt{x^2-4x+4+y^2}+\sqrt{x^2+4x+4+y^2}=6$

$\sqrt{(x^2-4x+4+y^2)}=6-\sqrt{x^2+4x+4+y^2}$ تربيع الطرفين

$x^2-4x+4+y^2=36-12\sqrt{x^2+4x+4+y^2}+x^2+4x+4+y^2$

$12\sqrt{x^2+4x+4+y^2}=36+8x]\div 4$

$3\sqrt{x^2+4x+4+y^2}=9+2x$ تربع

$9(x^2+4x+4+y^2)=81+36x+4x^2$

$9x^2+36x+36+9y^2=81+36x+4x^2$

$9x^2-4x^2+9y^2=81-36$

$5x^2+9y^2=45\ [\div 45]$

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ معادله القطع الناقص

ملاحظه مهمه جد :-اذا مر القطع الناقص بنقطه تقع علئ احد المحورين واحد احداثيها صفر فهاي النقطه لو تمثل الراس لو القطب شلون نعرف نطلع البؤره اذا نفس المحور هيه والبؤره معناها الراس واذا تختلف معناها القطب

مثال \\ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2+8x=0$ ويمر بالنقطة (0 ، 3) .

الحل :- في القطع المكافئ $y^2+8x=0\Rightarrow y^2=-8x\ ,\ y^2=-4Px\ \Rightarrow 4P=8\ \Rightarrow P=2$

بؤرة القطع المكافئ هي (0 ، -2) أي ان بؤرتي القطع الناقص هي (0 ، 2) ، (0 ، -2) أي ان $c=2$

$a^2=b^2+c^2\Rightarrow 9=b^2+4\ \Rightarrow b^2=5$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ معادلة القطع الناقص

ملاحظه مهمه جد :-كل كلمه (يمر –ينتمي –يقطع) ويذكر نقطه معناه تحقق معادله

س/جد معادله القطع الناقص الذي مركزه نقطه الاصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادله $y^2+8x=0$ علما ان القطع يمر بالنقطه $(2\sqrt{3},\sqrt{3})$

Sol/

$\therefore$ معادله القطع المكافئ هي $y^2+8x=0$

$\therefore y^2+8x=0\rightarrow y^2=-8x$

$y^2=-4px$ بالمقارنه مع المعادله القياسيه

$-4p = 8 \rightarrow p = 2 \rightarrow F(-2,0)$ بؤره قطع مكافئ

$F(-2,0) \rightarrow C = -2 \rightarrow C^2 = 4$ نفسها بؤره القطع الناقص

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ معادله للقطع الناقص

$a^2 = b^2 + 4$

النقطه $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ تحقق معادله :.

$$\frac{(2\sqrt{2})^2}{b^2+4} + \frac{(\sqrt{3})^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{12}{b^2+4} + \frac{3}{b^2} = 1$$

$$\frac{12b^2 + 3b^2 + 12}{b^2(b^2+4)} = 1 \rightarrow \frac{15b^2+12}{b^4+4b^2} = 1$$

$$b^4 + 4b^2 = 15b^2 + 12 \rightarrow b^4 + 4b^2 - 15b^2 - 12 = 0$$

$$b^4 - 11b^2 - 12 = 0 \rightarrow (b^2 - 12)(b^2 + 1) = 0$$

$$b^2 - 12 = 0 \rightarrow b^2 = 12$$

$$a^2 = 16$$

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ المعادله هي

ملاحظه:- اذا كانت بؤره الناقص تبعد عن الراسان بعددين بينهما فارزه فان .

1-مجموع العددين =2a

2-الفرق بين العددين =2c

3-غير منهجيه للتاكد من الحل (حاصل ضرب الرقمين يمثل b^2)

مثال جد معادله القطع الناقص الذي احدئ بؤرتيه تبعد عن نهايتي محوره الكبير بالعددين 1 ,5 وحده على الترتيب

Sol/احدى البؤرتين تبعد عن الراسين بالعددين 1 ,5

مجموع العددين =2a

$2a = 5 + 1 \rightarrow 2a = 6 \rightarrow a = 3 \rightarrow a^2 = 9$

$2c =$ فرق العددين

$2c = 5 - 1 \rightarrow 2c = 4 \rightarrow c = 2 \rightarrow c^2 = 4$

$b^2 = a^2 - c^2 \rightarrow b^2 = 9 - 4 \rightarrow b^2 = 5$

مادام بالسوال مامحدد الموقع مال المعادله او دليل يدلني عل المعادله فراح يكون عدنه احتمالين

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$$
$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \rightarrow \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$$

مثال :-جد معادله القطع الناقص الذي مركزه نقطه الاصل وبؤرتاه نقطتا المنحني $x^2+y^2-3x=16$ مع محور الصادات ويمس دليل القطع المكافئ

$$y^2=12x$$

Sol/ مادام كله نقطه تقاطع المنحني مع الصادات ومنطيك المعادله معناه تعوض x=0 بمعادله المنحني

$$x^2+y^2-3x=16 \rightarrow (0)^2+y^2-3(0)=16$$
$$y^2=16 \rightarrow y=\mp 4$$

نقطتا التقاطع هما$(0,4),(0,-4)$ وهما بؤرتاه الناقص.:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$ المعادله القياسيه هي

معادله القطع المكافئ .: $y^2=12x$

$y^2=4px$ بالمقترنه

$4p=12 \rightarrow p=3 \rightarrow$: . $x=-3$ معادله الدليل

نقطه التماس$(-3,0)$.:

$(-3,0)$ هي قطب الناقص لان تختلف عن البؤره

$$b=3 \rightarrow b^2=9$$
$$a^2=b^2+c^2 \rightarrow a^2=9+16 \rightarrow a^2=25$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$$ معادله القطع الناقص هي .:

مثال :-جد معادله القطع الناقص الذي بؤرته F1(4,0) F2(-4,0) والنقطه Q تنتمي للقطع الناقص بحيثان محيط المثلث QF1F2 يساوي 24 وحده .

$$c=4 \rightarrow c^2=16 \rightarrow 2c=8$$

محيط المثالث مجموع اطوال اضلاعه الاثلاثه .:

$$QF1+QF2+F1F2=24$$
$$2a+2c=24] \div 2 \rightarrow a+c=12$$
$$a+4=12 \rightarrow a=8 \rightarrow a^2=64$$
$$a^2=b^2+c^2 \rightarrow b^2=a^2-c^2 \rightarrow b^2=64-16$$
$$b^2=48$$

$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$ معادله القطع الناقص هي :.

مثال:-جد معادله القطع الناقص الذي مركزه نقطه الاصل والمسافه بين بؤرتيه تساوي (8) وحده طول ونصف طول محوره الصغير يساوي (3 وحده طول)

$sol:-\quad 2c=8\rightarrow c=4\rightarrow c^2=16$

$b=3$ نصف طول محوره الصغير

$b^2=9$

$c^2=a^2-b^2\rightarrow 16=a^2-9\rightarrow a^2=25$

لم يحدد موقع البوره لذالك ناخذ احتمالان

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \quad or \quad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$$

مثال:- جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان لمحور السينات ومركزه نقطة الاصل ومساحة منطقته 7π وحدة مربعة ومحيطه يساوي 10πوحدة.

Sol

$$A=ab\pi \rightarrow 7\pi=ab\pi \rightarrow a=\frac{7}{b}\ldots\ldots(1)$$

$$p=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \rightarrow 10\pi=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

$5=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ بتربيع الطرفين

$$25=\frac{a^2+b^2}{2} \rightarrow 50=a^2+b^2\ldots\ldots(2)$$

(2)في (1)عوض $\rightarrow 50=\frac{49}{b^2}+b^2]*b^2 \rightarrow 50b^2=49+b^4$

$(b^2-49)(b^2-1)=0 \rightarrow either\ b^2-49=0 \rightarrow b^2=49$

$b=7 \rightarrow$ عوض في$(1) \rightarrow a=\frac{7}{7}=1$ $a>b$ يهمل لأن

$or\ b^2-1=0 \rightarrow b^2=1 \rightarrow b=1 \rightarrow$ عوض في$(1) \rightarrow a=\frac{7}{1}=7$

$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{1}=1$ ∴ معادلة القطع الناقص

مثال:- اذا كانت $(e+id=\frac{4+2i}{1-i})$ جد معادلة القطع الناقص لذي احدى بؤرتيه (0,d) وطول محوره الكبير يساوي $\| e+id \| 2$.

Sol:

$e+id=\frac{4+2i}{1-i}*\frac{1+i}{1+i} \rightarrow e+id=\frac{4+4i+2i-2}{2}$

$e+id=\frac{2+6i}{2} \rightarrow e+id=1+3i \rightarrow e=1\ ,\quad d=3$

(0,3) بؤرة الناقص ∴ $\rightarrow c=3 \rightarrow c^2=9$

$\| e+id \|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

طول المحور الكبير $=2a=2 \| e+id \|=2\sqrt{10} \rightarrow a=\sqrt{10}$

$a^2=10$

$c^2=a^2-b^2 \rightarrow 9=10-b^2 \rightarrow b^2=1$

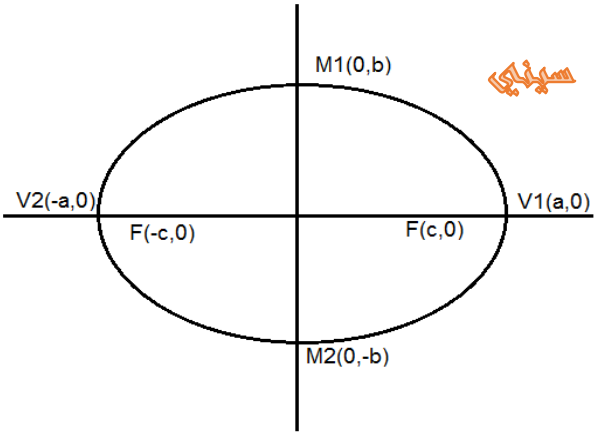
$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \rightarrow \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{10}=1$ ∴ معادلة الناقص هي

رســــــــم القطع الناقـــــــص

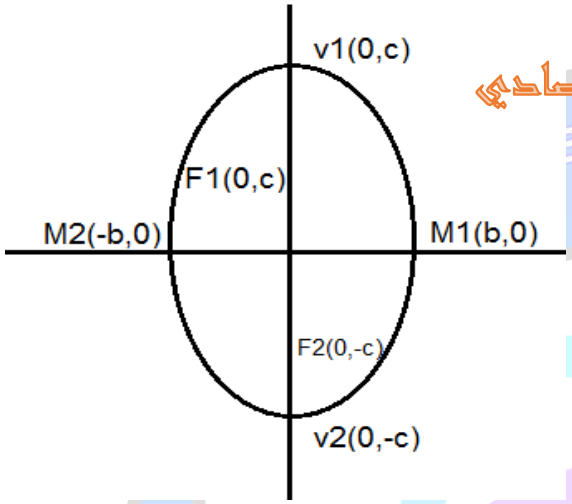
1-نطلع البؤرتين والرأسين والقطبين

2-نثبتهم على الرسم ادناه

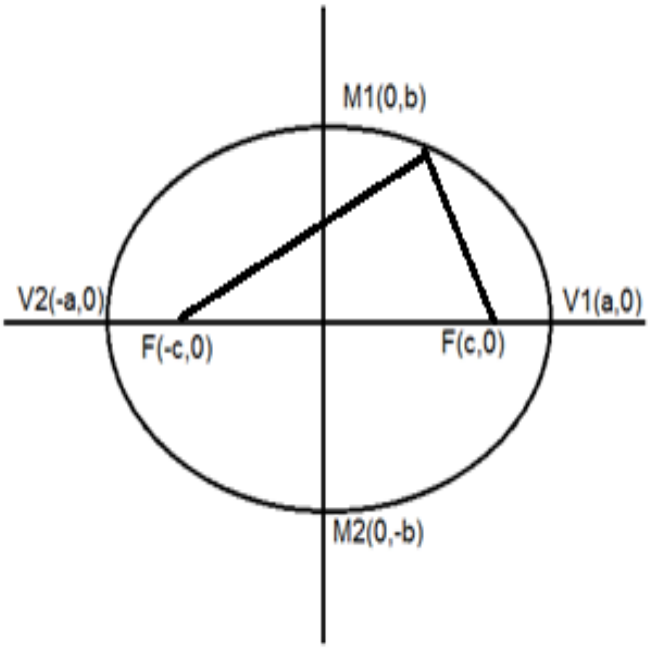
سيني

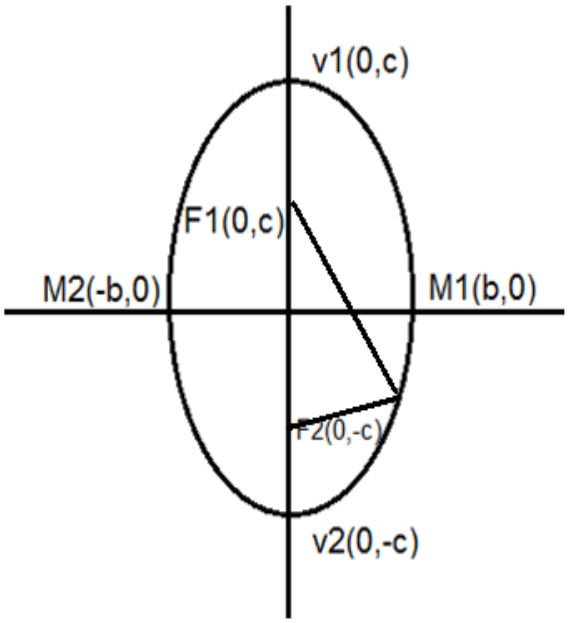


صادي



3- نصل بين الرأسين والقطبين بمنحني متصل ليصبح الرسم





القطع الزائد

1-معادله القطع علئ محور السينات

$1-$ المعادله $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$2-$ البؤرتان $F1(c,0)F2(-c,0)$

$3-$ الراسان $V1(a,0),V2(-a,0)$

4-القطبان M1(0,b),M2(0,-b)

2-معادله القطع علئ محور الصادات

1-المعادله $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

2-البؤرتان F1(0,C) F2(0,-C)

3-الراسان V1(0,a) V2(0,-a)

4-القطبان M1(b,0) ,M2(-b,0)

***طول المحور المرافق التخيلي 2b

*** البعد او المسافه بين البؤرتين 2c

علاقه حلال المشاكل هنا $c>a \quad c>b \quad c^2=a^2+b^2$

**الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}$

والاختلاف المركزي هنا اكبر من الوحد دائما

مثال :-عين البؤرتان والراسان والقطبان وطول كل من المحورين الحقيقي والمرافق والاختلاف المركزي للقطع الزائد $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$

بالمقارنه بالمعادله القياسيه $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

طول المحور الحقيقي وحده $2a=16 \rightarrow a=8 \rightarrow a^2=64$:.

طول المحور المرافق وحد $2b=12 \rightarrow b=6 \rightarrow b^2=36$,

الراسان $(8,0),(-8,0)$

القطبان $(0,6),(0,-6)$

$c^2=a^2+b^2 \rightarrow c^2=64+36 \rightarrow c^2=100 \rightarrow c=10$

البؤرتان $(10,0),(-10,0)$.:

الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$

مثال :-جد معادله القطع الزائد الذي مركزه نقطه الاصل وطول محوره الحقيقي =6 وحدات والاختلاف المركزي يساوي 2 البؤرتان على محور السينات

$$2a = 6 \rightarrow a = 3 \rightarrow a^2 = 9$$
$$e = \frac{c}{a} \rightarrow 2 = \frac{c}{3} \rightarrow c = 6$$
$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 36 = 9 + b^2 \rightarrow b^2 = 27$$

المعادله القياسيه هي $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$

مثال :-جد معادله القطع الزائد الذي مركزه نقطه الاصل وطول محوره المرافق 4 وحدات وبؤرتاه هما النقطتان $F1(0, \sqrt{8}), F2(0, -\sqrt{8})$

$$2b = 4 \rightarrow b = 2 \rightarrow b^2 = 4$$
$$c = \sqrt{8} \rightarrow c^2 = 8$$
$$a^2 = c^2 - b^2 \rightarrow a^2 = 8 - 4 \rightarrow a^2 = 4$$

المعادله هي $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$

ملاحظات هامه نستنتجها من السوال اعلاه

عندما a=b

1-يسمى القطع الزائد بالقائم

2-اختلافه المركزي $e = \sqrt{2}$

مثال :- اثبت ان الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي محوراه متساويان يساوي $\sqrt{2}$

$$a = b \rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = a^2 + a^2 \rightarrow c^2 = 2a^2$$
$$\frac{c^2}{a^2} = 2 \rightarrow \frac{c}{a} = \sqrt{2}$$

ايجـــــاد معادله القطـــــــع الزائـــــــد باستـــــخدام التعريف

العلاقه مالتنه |PF1-PF2|=2a و P هي نقطه (x,y) نفرضها تنتمي للقطع الزائد

F1=البؤره الاولى F2 =البؤره الثانيه

2a=طول المحور الحقيقي

راجع خطوات ايجاد معادله القطع الناقص ستجدها متشابه (تغير العلاقه فقط)

مثال \\ جد باستخدام التعريف معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه(0 ، 5) ، (0 ، -5) ورأساه (0 ، 3)،(0 ، -3)

sol : let $P(x,y) \in HyPerbola$; $||PF_1 - PF_2|| = 2a$

$$\| \sqrt{(x-5)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x+5)^2 + (y-0)^2} \| = 6$$

$$\sqrt{(x-5)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x+5)^2 + (y-0)^2} = \pm 6$$

$$\sqrt{x^2 - 10x + 25 + y^2} = \pm 6 + \sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2}$$ بتربيع الطرفين

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 = 36 \pm 12\sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2} + x^2 + 10x + 25 + y^2$$

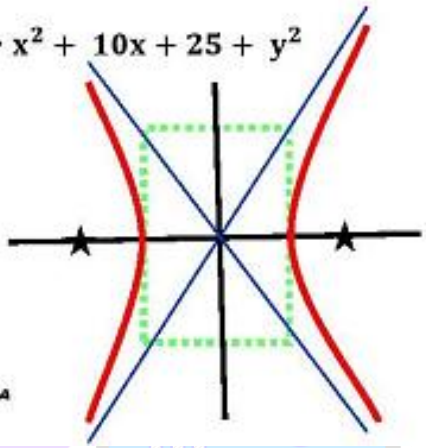
$$[\ \mp 12\sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2} = 36 + 20x\ ]$$ بالقسمة على 4

$$\mp 3\sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2} = 9 + 5x$$ بتربيع الطرفين

$$9(x^2 + 10x + 25 + y^2) = 81 + 90x + 25x^2$$

$$9x^2 + 90x + 225 + 9y^2 = 81 + 90x + 25x^2$$

$$[\ -16x^2 + 9y^2 = -144\ ] \div -144 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$ معادلة القطع الزائد



ملاحظات هامه

1- كل كلمه (يمر – ينتمي يقطع) ويذكر نقطه راح تكون النقطه تحقق معادله

مثال \\ جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل و بؤرتاه تنتميان الى محور السينات

ويمر بالنقطتين $(\frac{9}{4}, -5)$, $(4\sqrt{2}, 3)$.

الحل:- المعادلة القياسية للقطع الزائد هي $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$[\ \frac{32}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1\ ] \cdot a^2 b^2 \Rightarrow 32b^2 - 9a^2 = a^2 b^2 \quad \ldots\ldots\ldots (1$$

$$[\ \frac{25}{a^2} - \frac{\frac{81}{16}}{b^2} = 1\ ] \cdot a^2 b^2 \Rightarrow \mp 25b^2 \pm \frac{81}{16}a^2 = \mp a^2 b^2 \quad \ldots\ldots\ldots (2$$ بالطرح

$$[\ 7b^2 - \frac{63}{16}a^2 = 0\ ] \cdot 16 \Rightarrow 112b^2 - 63a^2 = 0$$

$\Rightarrow 63a^2 = 112b^2 \Rightarrow a^2 = \frac{16}{9}b^2$ .....(3

$32b^2 - 9.\frac{16}{9}b^2 = (\frac{16}{9}b^2)\,b^2$ وذلك من تعويض المعادلة (3) في المعادلة (1)

$16b^2 = \frac{16}{9}b^4 \Rightarrow b^2 = 9 \quad \Rightarrow a^2 = \frac{16}{9}(9) \Rightarrow a^2 = 16$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة القطع الزائد

2-اذا ذكر جمله (النسبه بين البعد بين بؤرتيه وطول محوره الحقيقي =رقم)معناه

$\frac{2c}{2a}$

اما اذاذكر النسبه بين البعد بين بؤرتيه وطول محوره المرافق =رقم فمعناه $\frac{2c}{2b}$

مثال جد معادله القطع الزائد الذي مركزه نقطه الاصل والبعد بين بؤرتيه الواقعتين على محور الصادات يساوي 6 وحدات و النسبه بين البعد بين بؤرتيه وطول محوره الحقيقي كنسبه $\frac{3}{2}$

الحل :-

$2c = 6 \rightarrow c = 3 \rightarrow (0, \mp 3)$ البؤرتين

$\frac{2c}{2a} = \frac{3}{2} \rightarrow 3a = 2c \rightarrow 3a = 6 \rightarrow a = 2$

$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 9 = 4 + b^2 \rightarrow b^2 = 5$

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$

3-اذا مر القطع الزائد بنقطه احد احداثيها صفر بشرط مركزه القطع الزائد نقطه الاصل فهاي النقطه الي منطيها هي الراس (مهمه جدا)

مثال :-جد معادله القطع الزائد الذي مركزه نقطه الاصل ويمر بالنقطه **(3,0)** والبعد بين بؤرتيه **10** وحدات

$\boldsymbol{2c = 10 \rightarrow c = 5}$

$\boldsymbol{(3,0) = (a,0) \rightarrow a = 3}$

$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 25 = 9 + b^2 \rightarrow b^2 = 16}$

$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1}$

4-اذا مس القطع الزائد الي مركزه نقطه الاصل دليل قطع مكافئ فان نقطه التماس تقع على احد المحورين (معادله الدليل x=n) فان نقطه التماس (n,0)

(معادله الدليل y=m) نقطه التماس (0,m)

مثال\\جد معادله القطع الزائد الذي مركزه نقطه الاصل واحدى بؤرتيه بؤره القطع المكافئ $y^2 = -40x$ والذي يمس دليل القطع المكافئ $y^2 + 16x = 0$

الحل :-

$y^2 = -40x$ بالمقارنه $\rightarrow y^2 = -4px \rightarrow 4p = 40 \rightarrow p = 10$

بؤره المكافئ $(-10,0)$ بؤرتي القطع الزائد هي $(-10,0)(10,0)$

$y^2 + 16x = 0 \rightarrow y^2 = -16x \ , y^2 = -4px$

$4p = 16 \rightarrow p = 4 \ , \ x = p \rightarrow x = 4$

(معادله الدليل x= 4) فان نقطه التماس (4,0)(راجع ملاحظه 3)

للقطع الزائد a =4 c=10

$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 100 = 16 + b^2 \rightarrow b^2 = 84$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{84} = 1$$

ملاحظه:- اذا جان احد الراسين بالقطع الزائد يبعد عن البؤرتين بعددين بينهفارزه راح يكون(الفرق بينهم = 2a)(مجموعهم =2c)

س/اكتب معادله القطع الزائد الذي مركزه نقطه الاصل اذا علمت ان احد راسيه يبعد عن البؤرتين بالعددين 9 , 1 وحدات علئ الترتيب وينطبق محوره علئ المحورين الاحداثين :-

$2c = 9 + 1 \rightarrow 2c = 10 \rightarrow c = 5 \rightarrow c^2 = 25$

$2a = 9 - 1 \rightarrow 2a = 8 \rightarrow a = 4 \rightarrow a^2 = 16$

$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 52 = 16 + b^2$

$b^2 = 9$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

س/النقطه $P(6,L)$ تنتمي الى القطع الزائد الذي مركزه نقطه الاصل ومعادلته $x^2-3y^2=12$ جد كلا من

أ-قيمه L

ب- طول النصف القطري البؤري للقطع المرسوم في جهه من النقطه P

الحل :-النقطه $P(6,L)$ تحقق معادلته

$$(6)^2-3L^2=12$$

$$36-3L^2=12\rightarrow 36-12=3L^2\rightarrow 3L^2=24$$
$$L^2=8\rightarrow L=\mp 2\sqrt{2}$$

$$[x^2-3y^2=12]\div 12\rightarrow \frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$$
$$a^2=12\,,b^2=4\rightarrow c^2=a^2+b^2$$
$$c^2=12+4\rightarrow c^2=16\rightarrow c=4$$

$F1(4,0),F2(-4,0)$ بؤرتاه القطع الزائد

$P1\left(6,2\sqrt{2}\right),P2\left(6,-2\sqrt{2}\right)$ النقطتان هما

$$PF1=\sqrt{(6-4)^2+\left(2\sqrt{2}-0\right)^2}=\sqrt{(2)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}$$
$$=\sqrt{4+8}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$ وحده طول

$$P2F1=\sqrt{(6-4)^2+\left(-2\sqrt{2}-0\right)^2}=\sqrt{4+8}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

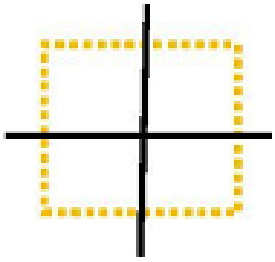
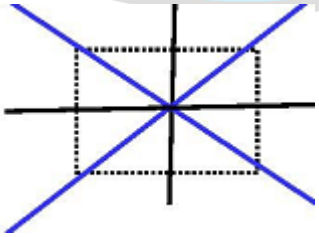
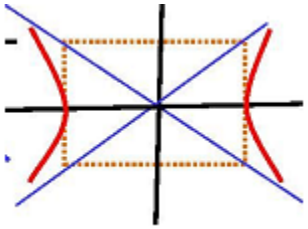
طريقـه رسم القطع الزائـد

1- نعين الراسين والقطبين ثم نوصل بين الرؤوس بقطعه مستقيمه بحيث يصير الشكل مستطيل

2- نكون مستطيل من النقاط اضلاعه توازي المحورين

3- نرسم قطري المستطيل راح يكونن محاذين القطع الزائد

4- نعين البؤرتين بعدها نرسم ذراعي القطع

الانسحاب للقطوع المخروطيه ((للفرع التطبيقي))

ملاحظه مهمه:-نميز اسئله الانسحاب عن باقي الاسئله مابيها عباره (مركزه نقطه الاصل او عباره (0,0) c))

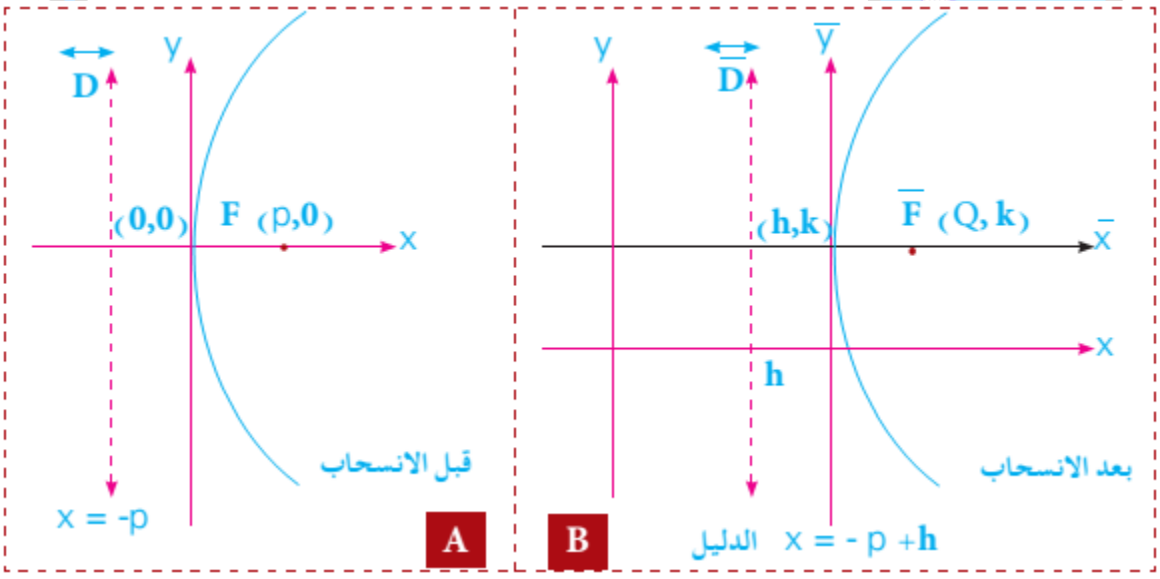
انسحاب المحاور للقطع المكافـــــئ

1-انسحاب القطع المكافئ السيني الموجب

بعد الانسحاب	قبل الانسحاب
المعادلة القياسية $(y-k)^2=4p(x-h)$	المعادلة القياسية $y^2=4xp$
رأسه (h,k)	رأسه نقطة الاصل $(0,0)$
البؤرة $\bar{F}(p+h,k)$=	البؤرة $F(p,0)$
معادلة الدليل x= - p+h	معادلة الدليل $x=-p$
معادلة المحور y = k	معادلة المحور $y=0$

2-انسحاب القطع المكافئ السيني السالب

بعد الانسحاب	قبل الانسحاب
المعادلة القياسية $(y-k)^2=-4p(x-h)$	المعادلة القياسية $y^2=-4xp$
رأسه (h,k)	رأسه نقطة الاصل $(0,0)$
البؤرة $\bar{F}(-p+h,k)$=	البؤرة $F(-p,0)$
معادلة الدليل x= p+h	معادلة الدليل $x=p$
معادلة المحور y = k	معادلة المحور $y=0$



3-انسحاب القطع المكافئ الصادي الموجب

بعد الانسحاب	قبل الانسحاب
المعادلة القياسية $(x-h)^2=4p(y-k)$	المعادلة القياسية $x^2=4yp$
رأسه (h,k)	رأسه نقطة الاصل $(0,0)$
البؤرة $\bar{F}(h,p+k)$=	البؤرة $F(0,p)$
معادلة الدليل $y=-p+h$	معادلة الدليل $y=-p$
معادلة المحور $x=h$	معادلة المحور $x=0$

4-انسحاب القطع المكافئ الصادي السالب

بعد الانسحاب	قبل الانسحاب
المعادلة القياسية $(x-h)^2=-4p(x-h)$	المعادلة القياسية $x^2=-4yp$
رأسه (h,k)	رأسه نقطة الاصل $(0,0)$
البؤرة $\bar{F}(h,-p+k)$=	البؤرة $F(0,-p)$
معادلة الدليل $y=p+k$	معادلة الدليل $y=p$
معادلة المحور $x=h$	معادلة المحور $x=0$

ملاحظه:-كل احداثي سيني نضيف له h وكل احداثي صادي نضيف له k بس معادلة القطع المكافئ نطرح h,k

مثال:-من معادله القطع المكافئ

$$(y+1)^2=4(x-2)$$

Sol:

$(y-k)^2=4p(x-h)$ نقارن بالمعادله القياسيه

$h=2\ ,\quad k=-1 \rightarrow$ الرأس $(h,k)=(2,-1)$

$4p=4 \rightarrow p=1 \rightarrow$ البؤرة $\bar{F}(p+h,k)=\bar{F}(1+2,-1)=(3,-1)$

معادلة الدليل $x=-p+h \rightarrow x=-1+2 \rightarrow x=1$

معادلة المحور $y=k \rightarrow y=-1$

معادله الدليل $x=-p+h \rightarrow x=-1+2=1$

ملاحظه مهمه

اذا جان معادله القطع لاتشبه الصوره القياسيه لازم نحولها الى الصوره القياسيه بطريقة اكمال المربع

طريقه الحل

1-نخلي المتغير التربيعي (الي فوكاه تربيع)مع قرينه (الي بدون تربيع)بطرف وباقي الحدود بالطرف الاخر

2-لازم معامل المتغير التربيعي =1

3-نضيف للطرفين مربع نصف معامل القرين علمود يصبح الطرف الذي يحتوي على المتغير التربيعي مكون من ثلاث حدود

4-نطبق قانون مربع الكامل ثم نقارن بالمعادله القياسيه

مثال:- ناقش القطع المكافئ: $y = x^2 + 4x$

نضيف 4 الى طرفي المعادلة حتى نضع حدود x في شكل مربع كامل

$$y + 4 = x^2 + 4x + 4$$

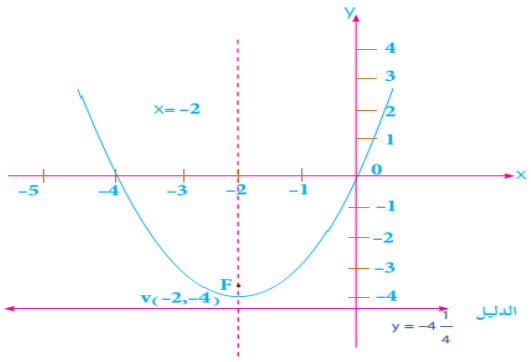
$$y + 4 = (x+2)^2$$

بالمقارنه $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

$h=-2\ ,\ k=-4 \implies$ الرأس $(-2,-4)$

$$4p=1\ ,\ p=\frac{1}{4}$$

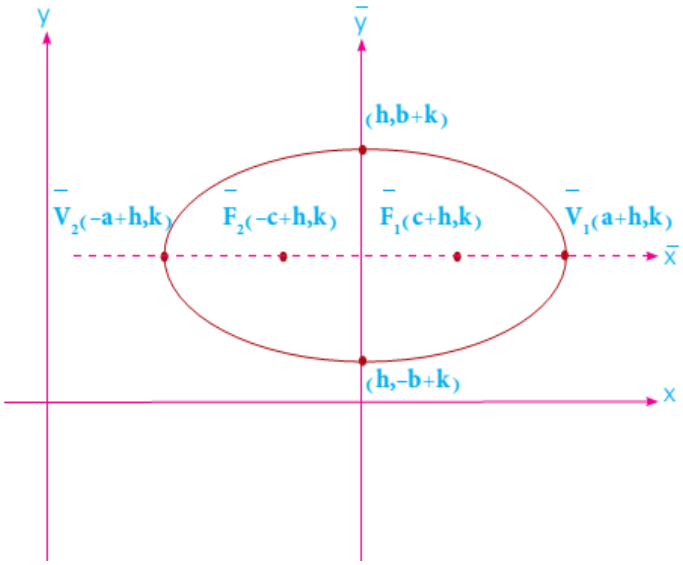
ملاحظه:-من يكلك ناقش القطع المخروطي معناه لازم ترسم



انسحاب المحاور للقطع الناقص

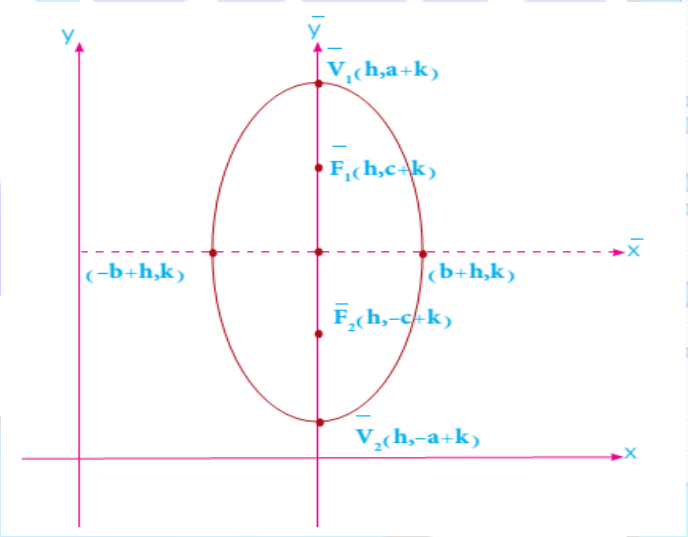
اولا: االقطع الناقص السيني

بعد الانسحاب	قبل الانسحاب
المعادلة القياسية $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	المعادلة القياسية $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
مركزه النقطة $\bar{C}(h,k)$	مركزه نقطة الاصل C(0,0)
الرأسان $\overline{V1}(a+h,k),\overline{V2}(-a+h,k)$	الرأسان $V1(a,0),v2(-a,0)$
القطبان $\overline{M1}(h,b+k),\overline{M2}(h,-b+k)$	القطبان M1(0,b),M2(0,-b)
البؤرتان $\overline{F1}(c+h,k),\overline{F2}(-c+h,k)$	البؤرتان $F1(c,0),F2(-c,0)$
طول المحور الكبير =2a **يوازي محور السينات** **معادلة محوره الكبير y = k**	طول محوره الكبير =2a منطبق على محور السينات معادلة محوره الكبير y = 0
طول محوره الصغير =2b **يوازي محور الصادات** **معادلة محوره الصغير x = h**	طول محوره الصغير =2b منطبق على محور الصادات معادلة محوره الصغير x = 0



ثانيا: القطع الناقص الصادي

بعد الانسحاب	قبل الانسحاب
المعادلة القياسية $\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$	المعادلة القياسية $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$
مركزه النقطة $\overline{C}(h,k)$	مركزه نقطة الاصل C(0,0)
الرأسان $\overline{V1}(h,a+k),\overline{V2}(h,-a+k)$	الرأسان $V1(0,a),v2(0,-a)$
القطبان $\overline{M1}(b+h,k),\overline{M2}(-b+h,k)$	القطبان M1(b,0),M2(-b,0)
البؤرتان $\overline{F1}(h,c+k),\overline{F2}(h,-c+k)$	البؤرتان $F1(0,c),F2(0,-c)$
طول المحور الكبير 2a= **معادلة محوره الكبير x = h**	طول محوره الكبير 2a= معادلة محوره الكبير x = 0
طول محوره الصغير 2b= **يوازي محور السينات** **معادلة محوره الصغير y = k**	طول محوره الصغير 2b= منطبق على محور السينات معادلة محوره الصغير y = 0



مثال:-جد البورتين والرائسين والقطبين وطول كل من المحورين والاختلاف المركزي

$$\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$$

$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ بالمقارنة مع

المركز $h=-3\,,k=-2\ \rightarrow \bar{C}(h,k)=\bar{C}(-3,-2)$

الرأسين

$a^2=25\ \rightarrow a=5$

$\overline{V1}(h,a+k)=\overline{V1}(-3{,}5-2)=\overline{V1}(-3{,}3)$

$\overline{V2}(h,-a+k)=\overline{V2}(-3,-5-2)=\overline{V2}(-3,-7)$

القطبين

$b^2=9\ \rightarrow b=3$

$\overline{M1}(-b+h,k)=\overline{M1}(-3-3,-2)=\overline{M1}(0,-2)$

$\overline{M2}(-b+h,k)=\overline{M2}(-3-3,-2)=\overline{M2}(-6,-2)$

البؤرتين

$c^2=a^2-b^2\ \rightarrow c^2=25-9\ \rightarrow c^2=16\ \rightarrow c=4$

$\overline{F1}(h,c+k)=\overline{F1}(-3{,}4-2)=\overline{F1}(-3{,}2)$

$\overline{F2}(h,-c+k)=\overline{F2}(-3,-4-2)=\overline{F2}(-3,-6)$

طول المحور الكبير $=2a=2(5)=10\ unit$

معادلة المحور الكبير $x=h\ \rightarrow x=-3$

طول المحور الصغير $=2b=2(3)=6\ unit$

معادلة المحور الصغير $y=k\ \rightarrow y=-2$

الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}<1$

ملاحظه مهمه:-اذا اجتي المعادله ماتشبه الصوره القياسيه بالقطع الزائد او الناقص فلازم نحولها الى قياسيه باتباع الخطوات

1-نخلي كل متغير تربيعي وقرينه بالطرف الايسر وباقي الحدود بالطرف الايمن

2-نستخرج عامل مشترك من كل متغير تربيعي اذا جان معامله مو 1

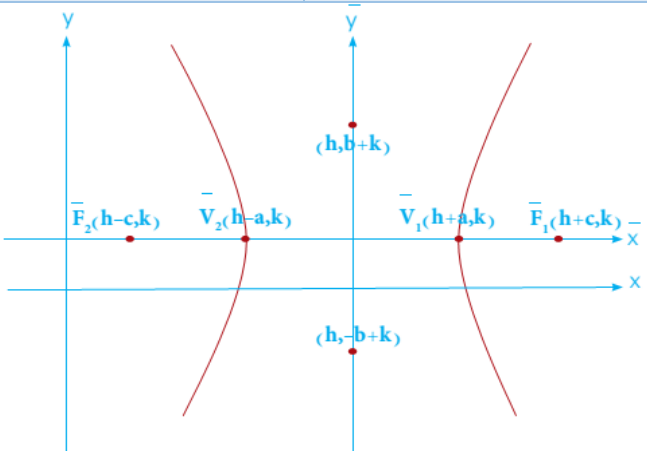
3-نضيف مربع نصف معامل القرين للطرف الايسر وكل عدد تضيفه تضربه بالعامل المشترك وتضيفه للطرف الايمن

4-الان نستخدم طريقه (المربع الكامل) ونكمل الحل

انسحاب المحاور في القطع الزائد

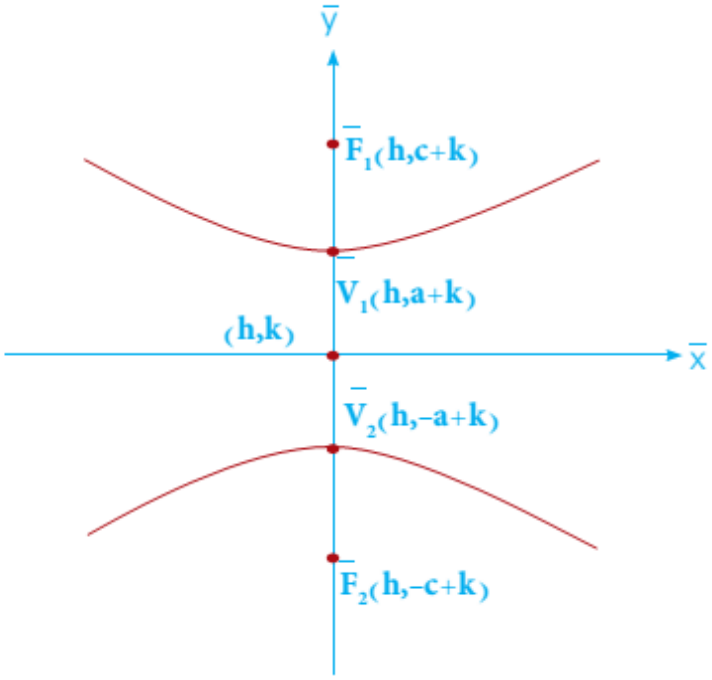
اولا:القطع الزائد السيني

بعد الانسحاب	قبل الانسحاب
المعادلة القياسية $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	المعادلة القياسية $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
مركزه النقطة $\overline{C}(h,k)$	مركزه نقطة الاصل C(0,0)
الرأسان $\overline{V1}(a+h,k),\overline{V2}(-a+h,k)$	الرأسان $V1(a,0),v2(-a,0)$
القطبان $\overline{M1}(h,b+k),\overline{M2}(h,-b+k)$	القطبان M1(0,b),M2(0,-b)
البؤرتان $\overline{F1}(c+h,k),\overline{F2}(-c+h,k)$	البؤرتان $F1(c,0),F2(-c,0)$
طول المحور الحقيقي =2a **معادلة محوره الحقيقي y = k**	طول محوره الحقيقي =2a معادلة محوره الحقيقي y = 0
طول محوره المرافق(التخيلي) =2b **معادلة محوره المرافق x = h**	طول محوره المرافق (التخيلي) =2b معادلة محوره المرافق x = 0



ثانيا:- القطع الزائد الصادي

بعد الانسحاب	قبل الانسحاب
المعادلة القياسية $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$	المعادلة القياسية $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
مركزه النقطة $\overline{C}(h,k)$	مركزه نقطة الاصل C(0,0)
الرأسان $\overline{V1}(h,a+k),\overline{V2}(h,-a+k)$	الرأسان $V1(0,a),v2(0,-a)$
القطبان $\overline{M1}(b+h,k),\overline{M2}(-b+h,k)$	القطبان M1(b,0),M2(-b,0)
البؤرتان $\overline{F1}(h,c+k),\overline{F2}(h,-c+k)$	البؤرتان $F1(0,c),F2(0,-c)$
طول المحور الحقيقي =2a **معادلة محوره الحقيقي x=h**	طول محوره الحقيقي =2a معادلة محوره الحقيقي x = 0
طول محوره المرافق(التخيلي) =2b **معادلة محوره المرافق y=k**	طول محوره المرافق (التخيلي) =2b معادلة محوره المرافق y = 0



مثال:- جد احداثيا المركز والبؤرتين والرأسين وطول المحورين والاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته :

$$\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

$$\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1}$$ بمقارنة بالمعادلة القياسية

$\Rightarrow a^2=9 \Rightarrow a=3 \Rightarrow 2a=6$ وحدة طول المحور الحقيقي

$\Rightarrow b^2=4 \Rightarrow b=2 \Rightarrow 2b=4$ وحدة طول المحور المرافق

$\Rightarrow h=-2\ ,\ k=1$

$\therefore (h,k)=(-2,1)$ المركز

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=9+4=13 \Rightarrow c=\sqrt{13}$

$\therefore \overline{F}_1(c+h,k)\ ,\ \overline{F}_2(-c+h,k)$ لان المحور الحقيقي يوازي محور السينات

$\Rightarrow \overline{F}_1(\sqrt{13}-2,1)\ ,\ \overline{F}_2(-\sqrt{13}-2,1)$ البؤرتان

$\overline{V}_1(a+h,k)\ ,\ \overline{V}_2(-a+h,k)$

$\overline{V}_1(1,1)\ ,\ \overline{V}_2(-5,1)$ الرأسان

$\therefore e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{3}>1$ (الاختلاف المركزي)

ملاحظه مهمه:-اذا اجتي المعادله ماتشبه الصوره القياسيه بالقطع الزائد او الناقص فلازم نحولها الى قياسيه باتباع الخطوات

1-نخلي كل متغير تربيعي وقرينه بالطرف الايسر وباقي الحدود بالطرف الايمن

2-نستخرج عامل مشترك من كل متغير تربيعي اذا جان معامله مو 1

3-نضيف مربع نصف معامل القرين للطرف الايسر وكل عدد تضيفه تضربه بالعامل المشترك وتضيفه للطرف الايمن

4-الان نستخدم طريقه (المربع الكامل) ونكمل الحل

الان للفائده نطرح لكم وجه التشابه والاختلاف للقطع الناقص والزائد

2a-1 معناها طول المحور الكبير او العدد الثابت ..... بالقطع الناقص

2a معناها طول المحور الحقيقي العدد الثابت .....القطع الزائد

2b-2 طول المحور الصغير .....في القطع الناقص

2b طول المحور المرافق .....في القطع الزائد

2c-3 المسافه او البعد بين البؤرتين بالقطعين الزائد والناقص

** الطرف الايمن للقطعين لازم 1 واذا مو واحد نقسم ع العدد الموجود بالطرف الايمن علمود يصير 1 كذالك لازم معامل أكس تربيع وال واي تربيع 1

**بالقطع الناقص الجبير هوه a (ومعادله حلال المشاكل هي $(a^2 = b^2 + c^2$

**بالقطع الزائد الجبير هو c (ومعادله حلال المشاكل هي $(c^2 = a^2 + b^2$

** اذا طلب ايجاد ثوابت بالقطوع لازم ينطينه فد معلومه نطلع منها a,b,c علمود تساعدنا بايجاد القيم المجهوله

**النسبه بين طولي محوري القطع الزائد $\frac{2a}{2b}$

** النسبه بين طولي محوري القطع الناقص بيها احتمالين

1- $\frac{2a}{2b}$ اذا جان الرقم المنطيه أكبر من واحد

2- $\frac{2b}{2a}$ اذا جان الرقم المنطيه اصغر من واحد

**مجموع طولي محوريه معنا =2a+2b والفرق بين طولي محوري 2a-2b

**مجموع مربعي طولي محوريه $(2a)^2 + (2b)^2$ والفرق فقط ناقص بينهم

** مربع مجموع طولي محوريه $(2a + 2b)^2$

القسم الثاني الامتحان الشامل

س**1** \بأستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ اذا علمت ان معادلة دليله $y = 2$

.....

س2\ جد معادلة القطع الناقص النسبة بين طولي محوريه $= \frac{2}{3}$ والفرق بينهما =4 وحدات وبؤرتيه على الصادات.

.....

س3\ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان لمحور السينات ومركزه نقطة الاصل ومساحة منطقته 7π وحدة مربعة ومحيطه يساوي 10πوحدة.

.....

س4\ قطع زائد مركزه نقطه الاصل ومعادلته $hx^2 - ky^2 = 90$ وطول محوره الحقيقي $(6\sqrt{2})$ وحده وبؤرتاه تنطبقان علئ بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $9x^2 + 16y^2 = 576$ جد قيمة كل من k,h التي تنتمي الة مجموعه الاعداد الحقيقيه .

.....

س5\ جد باستخدام التعريف معادله القطع الزائد الذي مركزه نقطه الاصل وبؤرتيه $(2\sqrt{2}, 0), (-2\sqrt{2}, 0)$ وينطبق محوره علئ المحورين الاحداثين والقيمه المطلقه للفرق بين بعدي اي نقطه عن بؤرته يساوي 4 وحدات .

الفصل الثالث

➢ مراجعه المشتقات

- اشتقاق عالادي يعني داله عاديه B-اشتقاق الداله الضمنيه

➢ قواعد الاشتقاق للقسمين

1-مشتقه الداله الثابته تساوي صفر (شنو داله ثابته يعني داله بس رقم مو متغير المتغير حرف مثل X;Y;Z هذني متغيرات)

$if\ y = a \rightarrow \frac{dy}{dx}=0$ رقم ثابتa

2-مشتقه داله المتغير يعني الي بيها متغير واحد(يعني متغير مرفوع لاس شنسوي _الاس ينزل في الداله نفسه تنقص من الاس 1)

$if\ y = x^n \rightarrow nx^{n-1}$ ➢

3-المشتقه تتوزع عله عمليه الجمع والطرح (عندك متغيرات توزع عليهم االشتقاق يعني تشتق كل واحد وحده)

4-مشتقه حاصل ضرب دالتين (الاولى * مشتقه الثانيه+ الثانيه *مشتقه الاولى)

5-مشتقه قسمه دالتين

$$f'(x) = \frac{(\text{مشتقه المقام})(\text{البسط}) - (\text{مشتقه البسط})(\text{المقام})}{\text{المقام}^2}$$

6-مشتقه الثابت في الداله (ينزل الثابت نفسه في مشتقه الداله)

7-مشتقه الداله الاسيه(الي تتكون من حدين او اكثر) الاس مالتهم لايساوي1 (الاس ينزل في القوس نفسه ناقص الاس1 في مشتقه داخل القوس) كما في مثال g

ملاحظه:-رموز المشتقه

- ✓ يرمز للمشتقه الاولى بالرموز $y'\ or \frac{dy}{dx}\ or f'$
- ✓ يرمز للمشتقه الثانيه بالرموز $y''or\frac{d^2y}{dx^2} or f''$
- ✓ يرمز للمشتقه الثالثه بالرموز $y''or\frac{d^3y}{dx^3}\ or\ f'''$

ملاحظه مهمه:-منكدر نشتق الداله الجذريه اله نحولها الى داله اسيه علمود نكدر نطبق قاعده مشتقه الداله الاسيه شلون نحول الداله الجذريه الى اسيه ↓↓↓↓↓

$$\sqrt[\text{دليل}]{(\text{داله})^{\text{اس}}} \rightarrow (\text{الداله})^{\frac{\text{اس}}{\text{دليل}}}$$

مثال :-جد مشتقه كل من الدوال الاتيه

$$a)\ f(x)=10 \rightarrow f'(x)=0$$
$$b)f(x)=2x^5 \rightarrow f'(x)=10x^4$$
$$c)f(x)=\sqrt[3]{x}\ f(x)=x^{\frac{1}{3}} \rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$
$$d)f(x)=3x^2+6x \rightarrow f'(x)=6x+6$$
$$e)f(x)=y^2x^2 \rightarrow f'(x)=y^2 2x+x^2 2y$$
$$f)f(x)=\frac{x+1}{x-1} \rightarrow f'(x)=\frac{(x-1)(1)-(x+1)(1)}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}=-\frac{2}{(x-1)^2}$$
$$g)f(x)=(x^3+5x)^2 \rightarrow f'(x)=2(x^3+5x)(3x^2+5)$$

الاشتقاق الضمني:- شوكت نشتق الداله اشتقاق ضمني ؟؟؟؟؟

ج/اذا جانت الداله موصريحه يعني داله مو y او f(x)تساوي الداله او تلكي الx والy بطرف واحد

طريقه الاشتقاق نفس قواعد الاشتقاق العاديه تتطبق هنا بس هنا كلما تشتق y تحط يمها y’ شوف المثال

مثال/جد $\frac{dy}{dx}$ للداله $x^2y^2-2y=5x+3$

هنا راح نشتق ضمني ليش لان داله مو y= ولا f(x)= وال y ويه x بجهه وحده

الحل /

$$x^2 2y\frac{dy}{dx}+y^2 2x-2\frac{dy}{dx}=5$$
$$2x^2y\frac{dy}{dx}-2\frac{dy}{dx}=5-2xy^2$$
$$2x^2y-2\frac{dy}{dx}=5-2xy^2$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{5-2xy^2}{2x^2y-2}$$

ملاحظه مهمه :- اذا انطاني نقطه كلي جد الاشتقاق عند النقطه (x,y) من نشتق ونكمل نعوض النقطه ونطلع الناتج

مشتقه الدوال الدائريه

sin(زاويه)	مشتقه الزاويه * cos(زاويه)
cos(زاويه)	مشتقه الزاويه * −sin(زاويه)
tan(زاويه)	مشتقه الزاويه * $\sec^2$(زاويه)
cot(زاويه)	مشتقه الزاويه * $-csc^2$(زاويه)
sec(زاويه)	مشتقه الزاويه * sec(زاويه) tan(زاويه)
csc(زاويه)	مشتقه الزاويه * $-csc$(زاويه) cot(زاويه)

ملاحظه :-اذا جان اس الداله اكبر من 1 طريقه الاشتقاق

$f'(x) =$ الاس $*$ الداله ناقص الاس واحد $*$ مشتقه الداله $*$ مشتقه الزاويه

$f(x) = \sin^3(2x) \rightarrow f'(x) = 3 * \sin^2(2x) * \cos(2x) * 2$

مثال:- اذا كانت $y = \cos 2x$ فجد $\frac{d^4y}{dx^4}$

معنا يريد منك تشتق اربع مرات

$$\frac{dy}{dx} = -\sin(2x)\,2 = -2sin2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2(cos2x)(2) = -4cos2x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -4(-sin2x)(2) = 8sin2x$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 8(cos2x)(2) = 16cos2x$$

مثال اذا كانت $y = x\sin x$ فبرهن ان $y^{(4)} - y + 4\cos x = 0$

$y = xsinx$

$y' = x(cosx).1 + sinx.1 \rightarrow = xcosx + sinx$

$y'' = x(-sinx)(1) + cosx(1) + cosx = -xsinx + 2cosx$

$y''' - x(cosx) + \sin x(-1) + 2(-\sin x) = -xcosx - sinx - 2sinx$

$= -xcosx - 3sinx$

$y'''' = -x(-sinx) + \cos x(-1) - 3cosx$

$y'''' = xsinx - cosx - 3cosx$

$y'''' = xsinx - 4cosx$

$y'''' = -xsinx + 4cosx = 0 \rightarrow y^4 = -y + 4cosx = 0$

امثله واجب

جد $y' or\ f'(x) or \frac{dy}{dx}$ للدوال الاتيه

1) $f(x) = \frac{3}{x}$ 2) $f(x) = x^3 + 4$ 3) $y = 2x + 5$

4) $y = (2x^2 + 3x)^2$ 5) $f(x) = \sin(3x - x^2)$ 6) $f(x) = \cos\left(\frac{2}{x}\right)$

7) $f(x) = \sec(2x - \pi)$ 8) $f(x) = \frac{3x + 1}{2x - 6}$ 9) $f(x) = (x - 2)(x + 1)^2$

المعدلات الزمنيه

1- اول شغله هاي المعادلات تشتق بنسبه للزمن **t** يعني من اشتقاق **x** هو $\frac{dx}{dt}$ واشتقاق **y** هو $\frac{dy}{dt}$

تعميم نقطه **1** اشتقاق اي متغير هو $\frac{d(\text{اسم المتغير})}{dt}$ واشتقاق الثابت هو **0**

2-نرسم مخطط توضيحي اذا ج ان السوال يطلب ونرمز للمجهول والمعلوم ونعينهم على الرسم

4-تكتب العلاقه الي راح تشتغل عليها الي هي تربط بين متغيرات السوال وتشتقها وهسه نوضح شلون نطلع العلاقه

5-نشتق العلاقه الي طلعتها اني بالنسبه للزمن يكون الاشتقاق حسب **1**

6-نعوض معطيات السوال علمود نستخرج المجهول

7-لاتعوض المعلومات الابعد الاشتقاق

ملاحظات مهمه جدا :-

1- اكو عدنه علاقه اساسيه وعلاقه ثانويه

نجي للسوال نحط العلاقه الرئيسيه نشتقها بالنسبه للزمن نشوف كم متغير بيها اذا بيها متغير واحد مباشر نحل اما اذا بيها متغيرين بالسوال هنا لازم اكو علاقه ثانويه نقلل بيها عدد المجاهيل او نطلع قيمه احد المجاهيل ونعوضها بالعلاقه الرئيسيه

2-اكو ثابت ينطيه بالسوال هذا تعوضه قبل لاتشتق زين شلون نعرفه نعرفه من السوال مايذكر بيه تغير ابدا

3-من راح يطلب منك معدل لو سرعه لو حركه نحط موجب اذ جان تزايد او بتعاد ونحط سالب اذ جان تناقص اوقتراب

قبل البدء بالحل راجع مجموعة القوانين بالملزمه او بالاساسيات

اخذنا قوانين واخذنا ملاحظات وشلون نحل بقه عدنه راح نجزء المعادلات الزمنيه الى اربع ملاحظات (من يجي سوال نشوفه لي جزء ونحل حسب الملاحظه التابعه اله)

ملاحظات المعدلات الزمنيه

ملاحظه 1

اذا انطه معدل تغير لي شكل هندسي (مكعب مستطيل الخ..) او طلب معدل تغير هنا الي طلبه هوه راح يكون علاقه اساسيه الي اشتقها ونعوض بيها

مثلا:- طلب منك جد معدل تغير حجم المكعب معنا تكتب قانون الحجم وتشتغل عليه

مثلا:-انطاك معدل تغير المساحه السطحيه معنا تكتب قانون المساحه وتشتغل عليه

مثال :-مكعب من الثلج يذوب بالحراره بحيث يحافظ على شكله مكعبا فاذا كان معدل تغير حجمه يساوي $3m^3\backslash s$ جد معدل تغير المساحه السطحيه في اللحظه التي يكون طول حرفه 8m

الحل:-

اول شي من كلي معدل تغير حجم يعني نكتب قانون الحجم

حجم المكعب= $(\text{طول الضلع})^3$

$v = r^3$ نشتق العلاقه

$$\frac{dv}{dt} = 3r^2\frac{dr}{dt} \rightarrow -3 = 3(8)^2\frac{dr}{dt} \rightarrow \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{64}$$

$A = 6r^2$ نشتق العلاقه

$$\frac{dA}{dt} = 12r\frac{dr}{dt} \rightarrow \frac{dA}{dt} = 12 * 8 * -\frac{1}{64}$$

$\frac{dA}{dt} = -\frac{3}{2}\ m^2\backslash s$ معدل تغير المساحه السطحيه

نحذف السالب ونكتب العباره (معدل نقصان المساحه السطحيه $\frac{3}{2}\ m^2\backslash s$)

مثال :-صفيحه مستطيله من المعدن مساحتها تساوي $96cm^2$ يتمدد طولها بمعدل 2cm/s بحيث تبقى مساحتها ثابته جد معدل النقصان في عرضها وذالك عندما يكون عرضها 8cm

نفرض الطول =X فرض العرض= Y مساحه المستطيل =A

ملاحظه مهمه جدا:-الثابت الدائم (الي ميذكر بيه اي تغير)يعوض قبل الاشتقاق والمتغير الدائم (الي يذكر بيه تغير مثل –اللحظه التي يكون –عندما يكون- في لحظه ما -عندما يصبح)يعوض بعد الاشتقاق وحياناااا يعوض قبل الاشتقاق علمود نطلع قيمه متغير دائم اخر

$$X=?\quad y=8\quad \frac{dx}{dt}=2,\frac{dy}{dt}=?$$

$$96=x.y$$

$$96=x8\rightarrow x=\frac{96}{8}=12$$ حسب الملاحظه

$96=x.y$ ... ... ***نشتق العلاقه***

$$0=x\frac{dy}{dt}+y.\frac{dx}{dt}$$

$$0=12\frac{dy}{dt}+(8).(2)$$

$$0=12\frac{dy}{dt}+16\rightarrow -12\frac{dy}{dt}=16\rightarrow \frac{dy}{dt}=-\frac{16}{12}=-\frac{4}{3}$$

معدل تغير النقصان $\frac{4}{3}$

مثال :-مكعب صلد طول حرفه 8cm مغطى بطبقه من الجليد بحيث يحافظ على شكله مكعبا فاذا بدا الجليد بالذوبان بمعدل $6cm^3\backslash s$ فجد معدل النقصان يسمك الجليد في اللحظه التي يكون فيها سمك الجليد 1m

الحل :-نفرض سمك الجليد =x

هنا صار عندي مكعبين مكعب الاساس بدون الجليد نسميه الصغير

ومكعب الي هو الصغير وشوي فوكاه جليد صار مكعب كبير

هسه طول ضلع مكعب الصغير $v1=(8)^3$

طول ضلع المكعب الكبير $v2=(8+2x)^3$ ليش صارويا 2x لان ضفنه الجليد من جهتين جهه x والثانيه x صار2x نضيفه للصغير الناتج منهم مكعب كبير

هسه الحجم الكلي = حجم المكعب الكبير- حجم مكعب الصغير

الشرح اعلاه ليس من ضمن الحل فقط الفرضيات مطلوبه

نشتق العلاقه $V = V2 - V1 \rightarrow = (8+2X)^3 - (8)^3$

$$\frac{dv}{dt} = 3(8+2x)^2.2\frac{dx}{dt} + 0 \rightarrow -6 = 3\big(8+2(1)\big)^2.2\frac{dx}{dt}$$

معدل تغير سمك الجليد $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{100} m\backslash s \rightarrow \frac{dx}{dt} = -0.01 m\backslash s$

معدل نقصان سمك الجليد 0.01m/s

ملاحظه :- اذا جان عدنه سوال مو مكعب مثلا كره حديديه او اي كره هنا الجليد يكون من جهه وحده يعني نفرضه x مو 2x

ملاحظه 2

اذا اجه سوال وطلعلي بالرسم مثلثات متشابه اومثلثات مداخله (راح نطبق هنا علاقه تشابه مثلثين) ونكدر نعوض عن علاقه التشابه بالدوال المثلثيه sin ,cos,tan

مثال// مرشح مخروطي قاعدته افقيه وراسه الى الاسفل ارتفاعه يساوي 24cm وطول قطر قاعدته 16cm يصب فيه الماء بمعدل $5cm^3\backslash s$ بينما يتسرب منه السائل بمعدل $1cm^3\backslash s$ جد معدل تغير عمق السائل في اللحظه التي يكون فيها عمق السائل 12cm

الحل:-

نفرض حجم السائل عند اي لحظه=v نفرض الارتفاع =h نصف القطر =r

معدل حجم الماء5 راح(يتسرب منه 1) يعني يصير 4

$$\frac{dv}{dt} = 5 - 1 = 4cm^3\backslash s\,, \frac{dh}{dt} = ?\,, r = ?\,, \frac{dr}{dt} = ?\ \ , h = 12$$

نكتب قانون الحجم $v = \frac{1}{3}\pi\, r^2 h$

لو نشتق هنا العلاقه راح يطلع عدنه مجهولين بيها فلازم مني ادور على علاقه ثانويه الي هي تشابه المثلثين او اي داله ضمن الملاحظه الي فوك (راح نستخدم tan)

$tan\emptyset = \frac{r}{h} = \frac{8}{24} \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{r}{h} \rightarrow 3r = h \rightarrow r = \frac{h}{3}$ طبقت العلاقه قللت عدد المتغيرات

$v = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h}{3}\right)^2 . h$ نعوض ثم نشتق

$= \frac{\pi}{3} . \frac{h^2}{9} . h$

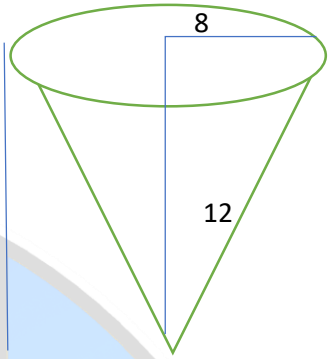
$v = \frac{\pi}{27} . h^3$

$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{27} . 3h^2 \frac{dh}{dt}$

$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{9} h^2 \frac{dh}{dt}$

$4 = \frac{\pi}{9}(12)^{12} \frac{dh}{dt} \rightarrow 4 = 16\pi \frac{dh}{dt}$

$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{16\pi} = \frac{1}{4\pi}\ cm/s$



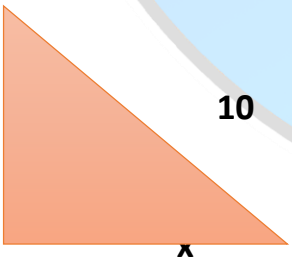
ملاحظه 3

اذا لكينه مثلث قائم الزاويه بالسوال فالعلاقه راح تكون مثلث فيثاغورس (اذا علم بيها ضلعين والضلع الثالث مجهول فراح تكون فيثاغورس علاقه اساسيه وثانويه)

مثال \\ سلم طوله 10m يستند بطرفه العلوي على حائط رأسي وبطرفه السفلي على ارض افقية فاذا انزلق الطرف السفلي مبتعدا عن الحائط بمعدل 2 m/sec عندما يكون الطرف الاسفل على بعد 8m من الحائط جد :

1) معدل انزلاق طرفه العلوي .

2) سرعة تغير الزاوية بين السلم والارض .



الحل /

a-نفرض بعد قاعده السلم عن الحائط x

نفرض بعد راس السلم عن الارض y

$\mathbf{x^2 + y^2 = (10)^2}$

$\mathbf{(8)^2 + y^2 = 100}$

$y^2 = 100 - 64 \rightarrow y^2 = 36 \rightarrow y = 6$

نشتق علاقه فيثاغورس لان هي علاقه ثانويه وعلاقه اساسيه

$x^2 + y^2 = 10$

$(2)(8)(2) + (2)(6).\frac{dy}{dt} = 02x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \rightarrow$

$32 + 12\frac{dy}{dt} = 0 \rightarrow 12\frac{dy}{dt} = -32 \rightarrow \frac{dy}{dt} \rightarrow = -\frac{32}{12} = -\frac{8}{3} m/s$

$\sin \emptyset = \frac{y}{10}$ نشتقها

$\cos \emptyset \ \frac{d\emptyset}{dt} = \frac{1}{10}\frac{dy}{dx}$

$\frac{8}{10}\frac{d\emptyset}{dt} = \frac{1}{10}.\left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{d\emptyset}{dt} \rightarrow -\frac{1}{3}$

نكدر نطبق هنا tan or cos بدال الsin

ملاحظه:-الاغلب من امثله السلم او الطرق المتعامده تكون العلاقه مثلث فيثاغورس

ملاحظه4

اذا ذكر بالسوال معادله منحني وجان المطلوب اومعلوم نقطه تقع على نفس المنحني فراح يكون عدنه علاقه المنحني الي ذكرها هي علاقه اساسيه وهي الي نشتقها

-اما اذا ذكر معادله منحني وجان اكو (معدل ابتعاد او اقتراب نقطه تقع على المنحني) ونقطه ثانيه ثابته خارج المنحني فالعلاقه الي راح نطبقها هي قانون المسافه بين نقطتين هي اساسيه وهي الي اشتقها ومعادله المنحني علاقه ثانويه

شلون افرق هل معادله المنحني علاقه اساسيه لو ثانويه (من خلال النقطه الثابته) اذا لكيناها معنا علاقه ثانويه

مثال :-لتكن M نقطه متحركه على منحني القطع المكافئ $y^2 = 4x$ بحيث يكون معدل ابتعادها عن النقطه (7,0) 0.2unit/s جد المعدل الزمني لتغير الاحداثي السيني للنقطه m عندما يكون x=4

$D = \sqrt{(x-7)^2 + (y-0)^2} \rightarrow D = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + y^2} \rightarrow (1)$

$y^2 = 4x$ نعوضها ب 1

$D = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + 4x} \rightarrow D = \sqrt{x^2 - 10x + 49}$ هسه نشتق

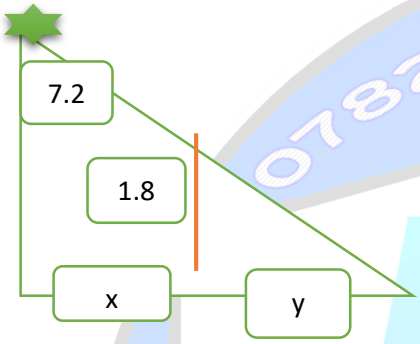
$\frac{dD}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt} - 10\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{x^2 - 10x + 49}} = \frac{2\frac{dx}{dt}(x-5)}{2\sqrt{x^2 - 10x + 49}} = 0.2 = \frac{\frac{dx}{dt}(4-5)}{\sqrt{4^2 - 10(4) + 49}}$

$$0.2 = -\frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{16-40-49}} \rightarrow 0.2 = -\frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{25}} \rightarrow -\frac{dx}{dt} = 0.2 * 5 \rightarrow \frac{dx}{dt} = -1$$

مثال:-عمود طوله 7.2m في نهايته مصباح يتحرك رجل طوله 1.8m مبتعدا عن العمود وبسرعه 30 m/min جد معدل طول ظل الرجل

1-نفرض البعد بين قدم الرجل وقاعده العمود=x نفرض طول ظل الرجل y

الحل/



لو نشوف الرسم عندي مثلثين متشابهات يعني علاقتنه تشابه مثلثين

$\frac{d\emptyset}{dt} = 30 , \frac{dy}{dt} = ?$

$\frac{1.8}{y} = \frac{7.2}{x+y} \rightarrow \frac{1}{4} = \frac{y}{x+y}$ طرفين في وسطين

$x + y = 4y \rightarrow x = 3y$ نشتقها

$$\frac{dx}{dt} = 3\frac{dy}{dt} \rightarrow 3\frac{dy}{dt} = 30 \rightarrow \frac{dy}{dt} = 10m/min$$

مثال:-لتكن m نقطه تتحرك على القطع المكافئ $y = x^2$ جد احداثي النقطه m عندما يكون المعدل الزمني لابتعادها عن النقطه (0, 3/2) يساوي ثلثي المعدل الزمني للتغير الاحداثي الصادي للنقطه m

$$s = \sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2}$$

$$s = \sqrt{x^2 + y^2 - 3y + \frac{9}{4}}$$

$y = x^2$ نعوضها

$s=\sqrt{y+y^2-3y+\frac{9}{4}} \rightarrow s=\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}$ نشتق هاي العلاقه

$$\frac{ds}{dt}=\frac{2y\frac{dy}{dx}-2\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}} \rightarrow \frac{ds}{dt}=\frac{\cancel{2}\frac{dy}{dt}(y-1)}{\cancel{2}\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{\frac{dy}{dt}(y-1)}{\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}} \rightarrow \frac{2}{3}\frac{\cancel{dy}}{\cancel{dt}}=\frac{\frac{\cancel{dy}}{\cancel{dt}}(y-1)}{\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}$$

$3y-3=2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}$ (بالتربيع) $\rightarrow 9y^2-18y+9=4\left(y^2-2y+\frac{9}{4}\right)$

$9y^2-18y+9=4y^2-8y+9 \rightarrow 9y^2-18y+9-4y^2+8y-9=0$

$(5y^2-10y=0)\div 5 \rightarrow y^2-2y=0 \rightarrow y(y-2)=0$

اما $y=0 \rightarrow x^2=0 \rightarrow x=0$ تهمل

او $y-2=0 \rightarrow y=2 \rightarrow x^2=2 \rightarrow x\mp\sqrt{2} \rightarrow (\mp\sqrt{2},2)$

4-جد مجموعه النقط التي تنتمي الى الدائره $x^2+y^2+4x-8y=108$ والتي يكون عندها المعدل الزمني لتغير x مساويا للمعدل الزمني لتغير y بالنسبه للزمن

$\boldsymbol{let\ m(x,y)} \quad ;\boldsymbol{\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}}$

$\boldsymbol{x^2+y^2+4x-8y=108}$ نشتقها

$$\boldsymbol{2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}+4\frac{dx}{dt}-8\frac{dy}{dt}=0}$$

$$\boldsymbol{2x\frac{dx}{dt}+4\frac{dx}{dt}=8\frac{dy}{dt}-2y\frac{dy}{dt}}$$

$$\boldsymbol{(2x+4)\frac{dx}{dt}=(8-2y)\frac{dy}{dt}}$$

$$\boldsymbol{\therefore \frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}[(2x+4)=(8-2y)]\div 2 \rightarrow x+2=4-y}$$

$\boldsymbol{y=2-x \ldots\ldots 1}$ نعوضها بمعادله الدائره

$\boldsymbol{x^2+(2-x)^2+4x-8(2-x)-108=0}$

$x^2+4-4x+x^2+4x-16+8x-108=0$

$2x^2+8x-120=0 \rightarrow x^2+4x-60=0 \rightarrow (x+10)(x-6)=0$

$x=-10 \rightarrow y=2+10=12$

$x=6 \rightarrow 2-6=-4$

$m=\{(-10,12),(6,-4)\}$

مبرهنة رول والقيمة المتوسطة

شوكت نكول الداله تحقق مبرهنه رول اذ تحقق ذني الشروط

1. اذ جانت الداله مستمره علئ الفتره الي منطيها بالسوال $[a.b]$
2. اذ جانت الداله قابله للاشتقاق علئ الفتره الي بالسوال $(a.b)$
3. نعوض قيمه الفتره ولازم يطبع عندك F(b)=F(a)

معنا مره نعوض قيمه الb بالمعادله الاصليه ومره نعوض قيمه a لازم الناتج مالتهم يكون متساوي اذا ممتساوي معنا لاتحقق مبرهنه رول

4. ومن تتحقق من الشروط راح تلكي قيمه وحده على الاقل نسميها c تنتمي للفتره (a.b)

شلون نطلع هل قيمه (نشتق المعادله ونعوض مكان كل x ب c ونساوي الداله بالصفر تطلع قيمه c)

ملاحظه / كل داله كثيره حدود يعني ماتلكي متغير بالمقام ولاتحت الجذر هاي داله مستمره وقابله للاشتقاق دائما لان مجالها $\mathbf{R}$ والداله الثابته الي بس رقم هم تعتبر كثيره حدود يعني هم مستمره وقابله للاشتقاق

مثال :- بين هل ان الداله تحقق مبرهنه رول ثم جد قيمه $\mathbf{C}$ الممكنه

$f(x)=(2-x)^2 \qquad x \in [0,4]$

الحل /

1- f مستمره على $[0,4]$ (لانها داله كثيره حدود)

2- f قابله للاشتقاق (0,4) (لانها داله كثيره حدود)

3-

$f(0)=(2-0)^2=(2)^2=4$ نعوض ال a

$f(4)=(2-4)^2=(-2)^2=4$ نعوض ال b

الداله تحقق شروط مبرهنه رول (تحقق عندي الشروط)

$f^-(x)=2(2-x)(-1)=-2(2-x)$ نشتق الداله

نبدل مكان كل x ب c واساويها بالصفر

$f^-(c) = -2(2-c) \rightarrow f^-(c) = 0$

$-2(2-c) = 0 \rightarrow 2-c = 0 \rightarrow c = 2 \in (0,4)$

2) $f(x) = 9x + 3x^2 - x^3 \qquad x \in [-1,1]$

الحل /

1- f مستمره على $[-1,1]$ (لانها داله كثيره حدود)

2- f قابله للاشتقاق $(-1,1)$ (لانها داله كثيره حدود)

3-

$f(-1) = 9(-1) + 3(-1)^2 - (-1)^3 = -9 + 3 + 1 = -5$

$f(1) = 9(1) + 3(1)^2 - (1)^3 = 9 + 3 - 1 = 11$

$;.f(a) \neq f(b)$

الداله لاتحقق شروط مبرهنه رول **(لان الشرط الثالث غير متحقق)**

ملاحظه / الدوال المثلثيه cosax' sinax دوال مستمره وقابله للاشتقاق دائما لان مجالها R

1) $f(x) = cos2x + 2cosx \qquad [0,2\pi]$

1- f مستمره على الفتره $[0,2\pi]$

2- f قابله للاشتقاق $(0,2\pi)$

$f(0) = cos2(0) + 2\cos(0) = 1 + 2(1) = 1 + 2 = 3$

$f(2\pi) = cos2(2\pi) + 2\cos(2\pi) \rightarrow = cos4\pi + 2cos2\pi$

$= cos0 + 2(1) \rightarrow = 1 + 2 = 3$

$f(0) = f(2\pi)$ الداله تحقق مبرهنه القيمه المتوسطه

$f^-(x) = -sin2x(2) + 2(-sinx) \rightarrow = -2sin2x - 2\sin x$

$f^-(c) = -2sin2c - 2\sin c \qquad , f^-(c) = 0$

$= -2sin2c - 2\sin c = 0$

$-2(2\sin c\cos c) - 2\sin c = 0$

$-4\sin c\cos c - 2\sin c = 0$

$-2\sin c(2\cos c + 1) = 0$

اما $-2\sin c = 0 \rightarrow \sin c = 0$

$; .c = 0 \notin (0, 2\Pi), c = \Pi \in (0, 2\pi)$, $c = 2\pi \notin (0, 2\pi)$

او$(2\cos c + 1) = 0$

$2\cos c = -1 \rightarrow \cos c = -\frac{1}{2}$

$c = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{(3\pi - \pi)}{3} = \frac{2\pi}{3} \in (0, 2\pi)$

$c = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi + \pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \in (0, 2\pi)$

ملاحظه/الدوال الشطريه المزدوجه لازم احنه نثبتها مستمره او قابله للاشتقاق

1-نستخرج الحد الفاصل الي هوه الرقم المكرر بالفترتين الي منطيهم ونعوضهم بالداله اليمين واليسار اذا طلعن مساويات نكول الداله مستمره واذا ممساويات الداله غير مستمره

2-نشتق الدالتين وهم انعوض الحد الفاصل اذا طلعن مساويات نكول قابله للاشتقاق واذا ممساويات غير قابله للاشتقاق

اذا تحقق الشرطين نكول عليها مستمره وقابله للاشتقاق

3- اذ جان الحد الفاصل لايقع داخل فتره السوال بحيث فتره السوال تقع في احد فرعي الداله فيتم التعامل مع هذا الفرع فقط

مثال:ابحث تحقق مبرهنه رول وان تحقق جد قيمة c

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \forall\ x \in [-1, 2] \\ -1 & \forall\ x \in [-4, -1) \end{cases} \quad x \in [-4, 2]$$

مجال الداله $[(-4, 0)]$

1-$F(1) = (-1)^2 + 1$

$= 1 + 1 = 2$

2-$\lim_{X \to (-1)} F(X)$

L1 $\lim_{X\to(-1)} = X^2 + 1 = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$

L2 $\lim_{X\to(-1)} . -1 = -1$

L1≠ L2 $\rightarrow \lim_{X\to(-1)} F(X)$ **(غير موجوده)**

الداله ليست مستمره على الفتره (-4,2)

الداله لاتحقق مبرهنه رول على الفتره المعطاه

ملاحظه/الداله المطلقه نحولها نسويها داله شطريه مره الداله سالبه ومره موجبه ونشتغل نفس الداله الشطريه

واجب:-ابحث تحقق مبرهنه رول على الداله $x \in [-3,3]$ **f(x)=|x|** وان تحققت جد قيمه **c** الممكنه

ملاحظه / الدوال النسبيه (الكسريه تتكون من بسط ومقام) تكون مجالها **R** بس تستثني الرقم الي يجعل المقام صفر واذ جانت مستمره تكون قابله للاشتقاق دائما

مثال ابحث تحقق شروط مبرهنه رول على الداله $f(x) = \frac{x^2-1}{x-2}$ وان تحققت جد قيمه **c** الممكنه

1-مجال الداله هو **R/(2)** الداله مستمره على الفتره **[-1,1]** لان الفتره تقع ضمن مجالها

2-الداله قابله للاشتقاق على الفتره **(-1,1)** لان الفتره تقع ضمن مجالها

3-نعوض قيمه ال **a** وقيمه ال **b**

$$f(1) = \frac{1-1}{1-2} = 0 \quad , f(-1) = \frac{1-1}{-1-2} = 0$$

$f(1) = f(-1)$ يعني $f(a) = f(b)$

$$f'(x) = \frac{(x-2)(2x) - (x^2-1)(1)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - x^2 + 1}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2}$$

$$f'(c) = \frac{c^2 - 4c + 1}{(c-2)^2} \rightarrow f'(c) = 0$$

$$c^2 - 4c + 1 = 0 \rightarrow c^2 - 4c + 4 = -1 + 4$$

$$(c-2)^2 = 3 \rightarrow c - 2 = \mp\sqrt{3}$$

$c = 2 + \sqrt{3} \notin (-1,1)$ يهمل $or\ c = 2 - \sqrt{3} \in (-1,1)$

مبرهنه القيمه المتوسطه

اذا تحقق الشروط ادناه نقول ان الداله تحقق شروط مبرهنه رول

1-اذا كانت الداله مستمره على الفتى المعطى **[a,b]**

2-اذا كانت الداله قابله للاشتقاق على الفتره المعطى **(a,b)**

3-يوجد على الاقل قيمه وحده نسميها نرمزلها **c** تنتمي للفتره المعطى

شلون نطلع قيمه **c**

a)نشتق الداله ونبدل مكان كل **x** ب **c** يعني تصير f'(c) (تمثل ميل المماس)

b)نساوي ميل المماس بميل الوتر (ميل الوتر هو $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$)

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ملاحظه:- مبرهنه رول تعتبر جزء او حاله خاصه من مبرهنه القيمه المتوسطه

مثال / هل الداله تحقق شروط مبرهنه القيمه المتوسطه $f(x)=x^2-6x+4 \quad x\in[-1,7]$

الحل /

1- الداله مستمره علئ الفتره [-1,7] لانها داله كثيره حدود

2-الداله قابله للاشتقاق على الفتره (-1,7) لانها داله كثيره حدود

$f^-(x)=2x-6 \rightarrow f^-(c)=2c-6$ **ميل المماس**

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(7)-f(-1)}{7-(-1)}$$

$$=\frac{[(7^2)-6.7+4]-[(-1)^2-6(-1)+4]}{7+1}$$

$$=\frac{(49-42+4)-(1+6+4)}{8}=\frac{11-11}{8}=\frac{0}{8}=0 \text{ (ميل الوتر)}$$

ميل المماس =ميل الوتر

$2c-6=0 \rightarrow 2c=6 \rightarrow c=3\in(-1,7)$

ملاحظه:- الداله الجذريه الي دليلها زوجي علمود نثبت استمراريتها

1-نطلع مجال الداله ؟ شلون نطلع المجال شوف ناخذ ماتحت الجذراكبر او يساوي صفر نطلع قيم x الي هي قيم المجال

a-2اذا جانت الفتره الي بالسوال تنتمي (يعني بداخلها) للمجال نكول الداله مستمره

bاذا جانت الفتره الي بالسوال ماتنتمي نكول الداله غير مستمره

a-3الاشتقاق اذا جانت الفتره الي بالسوال تنتمي للمجال نكول قابله للاشتقاق

b- الاشتقاق اذا جانت الفتره الي بالسوال ماتنتمي للمجال نكول غير قابله للاشتقاق

مثال /هل ان الداله تحقق مبرهنه القيمه المتوسطه

$f(x) = \sqrt{25 - x^2} \quad , \quad x \in [-4, 0]$

$25 - x^2 \geq 0 \rightarrow (5 - x)(5 + x) \geq 0 \rightarrow x \in [-5, 5]$ مجال الداله

.: الداله مستمره على الفتره (-4,0)

$$\lim_{x \to 4^+} \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - (-4)^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3 = (-4)$$

$$\lim_{x \to 0^-} \sqrt{25 - 0^2} = \sqrt{25 - 0} = \sqrt{25} = 5 = f(0)$$

.: fمستمره على الفتره (-4,0)

قابليه الاشتقاق

$$f^- = -\frac{2x}{2\sqrt{25 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}} =$$

مجال f^- =(-5,5)

;. f قابله للاشتقاق على (-4,0) لانها محتواه كليا في مجال المشتقه

ميل المماس $f^-(c) = -\frac{c}{\sqrt{25 - x^2}}$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(0) - f(-4)}{0 - (-4)} = \frac{5 - 3}{0 + 4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$ (ميل الوتر)

ميل الوتر =ميل المماس

$$-\frac{c}{\sqrt{25-c^2}}=\frac{1}{2}\rightarrow -2c=\sqrt{25-c^2}\rightarrow 4c^2=25-c^2\rightarrow 5c^2=25$$

$$c^2=5\rightarrow c=\mp\sqrt{25}\rightarrow c=-\sqrt{5}\in(-4,0)or\ c=\sqrt{5}\in(-4,0)$$

ثوابت مبرهنة رول

الثوابت مال مبرهنه رول تكون اما داخل الفتره اومن ضمن الداله زين شلون نحل

1-لازم يكلك بالسوال ان الداله تحقق مبرهنة رول

2-نبدي من ثالث نقطه من الشروط ليش (لان كلي تحقق الشروط)يعني نبدي بهل خطوه F(b)=F(a) وذكرنه سابقا شنو معناها f(b)=f(a)

3-من الممكن ان يطلب قيمه الثوابت وقيمه c فاذا طلب قيمه c نعوض الثوابت الي طلعناها ونرجع نفس الشروط مال المبرهنه (ركز☹)

4-اذا ذكر قيمه c معنا لازم نشتق الداله ونعوض مكان كل x بـc ونساويها بالصفر علمود نطلع قيمة احد الثوابت

مثال :-اذا كانت الداله $f(x)=8-wx+x^2$ تحقق مبرهنه رول على الفتره [h,4] فاذا كانت قيمه c=3 جد قيمه h,w

الحل :-

كلي تحقق الشروط معنا نبدي f(b)=f(a)

$$8-wh+h^2=8-4w+(4)^2$$
$$8-wh+h^2=8-4w+16$$
$$-wh+h^2=8-4w+16-8$$
$$-wh+h^2=-4w+16$$ نتوقف لان مجهولين

ذكر الي قيمه c
(راجع نقطه 4)

$$f'(x)=-w+2x\rightarrow f'(c)=-w+2c\rightarrow\ f'(c)=0$$
$$-w+2c=0 \qquad c \text{ نعوض قيمه} \rightarrow -w+2(3)=0\rightarrow -w=-6$$
$$w=6 \qquad h \text{ نعوضها وين توقفنه علمود نطلع قيمه}$$

$$-wh+h^2=-4w+16$$
$$-6h+h^2=-4(6)+16\rightarrow -6h+h^2=-24+16$$
$$-6h+h^2=-8\rightarrow h^2-6h+8=0\quad (h-4)(h-2)=0$$
$$\rightarrow h=2$$

التقريب

1-نفرض داله احنه على ان تكون مشابه لصيغه السوال

مثلا الداله الي يريد يقربها هي $f(x)=\sqrt{26}$ الداله الي نفرضها $f(x)=\sqrt{x}$

2-نستخرج قيمه (b) الي هيه نفس الرقم الي بالسوال

3-نستخرج قيميه (a) الي هيه اقرب رقم اله جذر سواء جان تربيعي او تكعيبي

4- نستخرج قيمه h حسب القانون h=b-a

5-نعوض قيمه a بالداله الاصليه

6-نشتق الداله ونرجع نعوض قيمه a بالمشتقه

7- نستخدم القانون

$$f(a+h)\simeq f(a)+h\,f'(a)$$

مثال // جد $\sqrt{26}$ بصوره تقريبيه .

$f(x)=\sqrt{x}$

$a=25\ ,\ b=26\ ,\ h=b-a=26-25=1$

$$f(25)=\sqrt{25}=5$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}=f'(25)=\frac{1}{2\sqrt{25}}=\frac{1}{(2)(5)}=\frac{1}{10}=0.1$$

$$f(26)\cong 5+(1)(0.1)\cong 5.1$$

مثال // جد بصوره تقريبيه $(1.04)^3+3(1.04)^4$

$$f(x)=x^3+3x^4$$

$$b=1.04\ \ ,a=1\ \ ,h=b-a=1.04-1=0.04$$

$$f(1)=(1)^3+3(1)^4=1+3=4$$

$$f'(x)=3x^2+12x^3\rightarrow f(1)=3(1)^2+12(1)^3=3+12=15$$

$$f(1.04)\cong 4+(0.04)(15)\cong 4.6$$

اذا جان عدنه سالب تحت جذر (دليه فردي مثلا 3-5-7-9) نطلع السالب خارج الجذر ونحل حل اعتيادي

مثال / جد بصوره تقريبيه $\sqrt[3]{-9}$

$$f(x) = -\sqrt[3]{x}$$

$$\sqrt[3]{-9} = -\sqrt[3]{9}$$

$$b = 9 \ , a = 8 \quad h = b - a = 9 - 8 = 1$$

$$f(8) = -\sqrt[3]{8} = -2$$

$$f(x) = -\sqrt[3]{x} = -x^{\frac{1}{2}} \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} = f'(8) = -\frac{1}{3}(8)^{\frac{-2}{3}}$$

$$= \frac{-1}{3(8)^{\frac{2}{3}}} = \frac{-1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{-1}{3(2)^2} = -\frac{1}{3.4} = -\frac{1}{12} = -0.08$$

$$f(-9) \cong -2 + (1)(-0.08) \cong= -2.08$$

ملاحظه/ منكدر نطلع قيمه للجذور العشريه المحصوره بين صفر وواحد الا اذ جان عدد المراتب الي وره الصفر باليمين متساويه ويه دليل الجذر واذ ممتساويه احط صفر علمود نساويها

مثال //جد تقريب للعدد $\sqrt[3]{0.12}$

$\sqrt[3]{0.12} = \sqrt[3]{0.120}$ حطينه صفر علمود نساوي دليل الجذر ويه عدد المراتب الي وره0

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

a = 0.125 , b = 0.120 , h = b - a = 0.120- 0.125= - 0.005

$$f(0.125) = \sqrt[3]{0.125} = 0.5$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$$

$$f'(0.125) = \frac{1}{3}(0.125)^{\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{3\sqrt[3]{0.125}} = \frac{1}{3(0.5)^2} = \frac{1}{3(0.25)}$$

$$\frac{1}{0.75} = 1.3$$

$$f(0.120) \cong 0.5 + (-0.005)(1.3) \cong 0.4935$$

مثال //اذكانت $f(x)=\sqrt[5]{31x+1}$ فجد بصوره تقريبيه F(1.001)

ملاحظه:-مثل هاي الاسئله هوه منطيني الداله فميحتاج نفرض داله زين والقيمه الي منطيها (هاي تمثل قيمه b) ركز

$$f(x)=\sqrt[5]{31x+1}$$

$$b=1.001 \quad a=1 \quad ,h=b-a=1.011-1=0.001$$

$$f(1)=\sqrt[5]{31(1)+1}=\sqrt[5]{32}=2$$

$$f(x)=(31x+1)^{\frac{1}{5}} \rightarrow f'(x)=\frac{1}{5}(31x+1)^{\frac{-4}{5}}(31)$$

$$f'(1)=\frac{1}{5}(31(1)+1)^{\frac{(-4)}{5}}(31)=\frac{31}{5(32)^{\frac{4}{5}}}=\frac{31}{5\sqrt[5]{32^4}}=\frac{31}{5(2)^4}$$

$$\frac{31}{5(16)}=\frac{31}{80}=0.3$$

$$f(1.001)\cong 2+(0.001)(0.3)\cong 2.0003$$

التقريب للاشكال الهندسيه

ملاحظه/اذ نريد انطلع القيمه التقريبيه للحجوم او المساحات للاشكال الهندسيه نقوم بكتابه القانون الي يخصها اذ انطه الطرف الايمن من القانون فهاي الخطوه الاولى اما اذ انطه الطرف الايسر من القانون فهنا لازم تبسط قبل لا تحل

((الاختلاف بين التقريب للداله العاديه والاشكال الهندسيه : هناك اما تفرض داله او ينطيها الك اما هنا لا الداله هي قانون الشكل الهندسي الي يطلبه مثلا طلب منك جد حجم بصوره تقريبيه معناه الداله الي تشتغلعليها قانون الحجم))ركز

مثال /مكعب طول حرفه 9.98 cm جد حجمه بصوره تقريبيه باستخدام مبرهنه القيمه المتوسطه

انطاني طول ضلعه(حرفه) معناه الطرف الايمن معناه نبدي بالحل بشكل مباشر

$$f(x)=x^3$$

$$b=9.98 \quad a=10 \quad h=b-a=9.98-10=-0.02$$

$$f(10)=10^3=1000$$

$$f'(x)=3x^2 \rightarrow f'(10)=3(10)^2=3(100)=300$$

$$f(9.98)\cong 1000+(-0.02)(300)\cong 994$$

مثال /متوازي سطوح مستطيه قاعده ملربعه وارتفاعه ثلاث امثال طول قاعده اوجد الحجم بصوره تقريبيه عندما يكون طول قاعدته 2.97 cm

هنا انطاني الطرف الايمن بس بيه متغيرين فلازم ينطي علاقه ثانيه علمود نقلل عدد المتغيرات

$v = x^2.y \dots\dots\dots 1$

$y = 3x \dots\dots\dots 2$

$v = x^2(3x) = 3x^3 \rightarrow f(x) = 3x^3$

$f(3) = 3(3)^3 = 3(27) = 81$

$f'(x) = 9x^2 \rightarrow f'(3) = 9(3)^2 = 9.9 = 81$

$f(2.97) \cong 81 + (-0.03)(81) \cong 78.57$

مثال /كره حجمها $84\pi cm^3$ جد نصف قطرها بصوره تقريبيه باستخدام القيمه المتوسطه

هنا انطاني الطرف الايسر فلازم نبسط ونطلع العلاقه الي يريد الها قيمه تقريبيه

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow \cancel{84\pi} = \frac{4}{\cancel{3}}\pi r^3 \rightarrow 21 = \frac{r^3}{3} \rightarrow r^3 = 63 \rightarrow r = \sqrt[3]{63}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \rightarrow \quad b = 63 \quad a = 64 \quad h = -1$$

$$f(64) = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} \rightarrow f'(64) = \frac{1}{3}(64)^{\frac{-2}{3}} = 0.02$$

$$f(63) \cong 4 + (-1)(0.02) \cong 3.98$$

مثال /$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ فاذا تغيرت x من 8 الى 8.06 فما مقدار التغير التقريبي للداله

مثل هاي الاسئله الرقم الصغير يمثل قيمه a والرقم الجبير يمثل قيمه b

ملاحظه:-كلمة مقدار التغير التقريبي معناه طبق $h.f'$ هذا فقط

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} \rightarrow x^{\frac{2}{3}} \rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \rightarrow f(8) = \frac{2}{3\sqrt[3]{8}}$$

$$= \frac{2}{2(3)} = \frac{1}{3} = 0.033$$

$$h.f'(8) = (0.06)(0.33) = 0.0198$$

a=8

b=8.06

h=0.06

ملاحظه /1- اسماء مقدار التغير التقريبي في الاسئله مثلا (حجم الطلاء بصوره تقريبيه)

(حجم الجليد او الشمع بصوره تقريبيه)(القيمه التقريبيه للحجم او المساحه)

النهايات (ايجاد مناطق التزايد والتناقص والنهايات العظمئ والصغرئ)

1-نشتق المشتقه الاولى ونساويه بالصفر نحل المعادله علمود نطلع قيمه **X**

2-نعوض قيمه **X** بالمعادله الاصليه علمود تطلع **Y** راح تصير عنندك نقطه **(X,Y)** حرجه

3-نحط خط الاعداد ونحط عليه بس قيم **X** (ناخذ قيم اكبر واصغر من**X** نعوضهم بالمشتقه)

4-اذ طلعت القيمه موجبه يعني سهم للاعلئ ومتزايده /اذ طلعت قيمه سالبه يعني سهم للاسفل ومتناقصه)

5-اذ نريد نعرف النقطه الحرجه نوعها اذ طلع عندك الرسم على شكل سبعه بالعربي فهاي صغرئ محليه واذ طلعت ثمانيه فهاي عظمئ محليه

6-الدوال النسبيه الي من نشتقها تبقه داله نسبيه بسطها ثابت فماراح نكدر نساويه بالصفر فلاتوجد نقاط حرجه من نرسم خط الاعداد نثبت عليه القيمه الي تخلي المقام صفر عله شكل فجوه

خطه العمل للحل لستخراج النقطه ومعرفه نوعها :-

نشتق ←(بعداها) نساوي المشتقه بالصفر ←(بعداها) نطلع قيمه x ←(بعداها) نطلع y ←(بعداها) نحط النقطه الاعداد

خطه العمل تعتبر خطوات حل لكل سوال

مثال :- جد مناطق التزايد والتناقص ونقاط النهايه العظمى والصغرى المحليه

1) نشتق الداله $f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$

نساوي المشتقه بالصفر $f'(x) = 9 + 6x - 3x^2$

نقسم المعادله على3 $[9 + 6x - 3x^2 = 0] \div -3$

نحلل بالتجربه $-3 - 2x + x^2 = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x - 3)(x + 1) = 0$

نعوضها الداله الاصليه اما $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$

$f(3) = 9(3) + 3(3)^2 - (3)^3 = 27 \rightarrow y = 27$

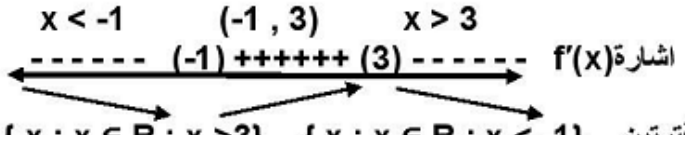
نقطه حرجه $(3, 27)$

نعوضها الداله الاصليه او $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

$f(-1) = 9(-1) + 3(-1) - (-1)^3 = -5 \rightarrow y = -5$

نقطه حرجه$(-1, -5)$

نحط قيم x فقط على خط الاعداد وناخذ قيم اكبر من x واصغر منه علمود نعرف عظمى لو صغرى



الداله اقل من السالب 1 متناقصه

الدالة متزايدة بالفترة { x : x ∈ R ; x ∈ (-1 , 3)}

نقطة نهاية صغرى محلية (-1,-5) , نقطة نهاية عظمى محلية (3,27)

ليش (-1,-5) عظمى محليه لان شكلها من رقم ثاني /

ليش (3,27) صغرى محليه لان شكل الرسم طلع رقم V

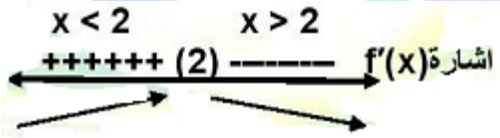
$f(x) = 1 - (x-2)^2$

$f^{-}(x) = 0 - 2(x-2)(1) \rightarrow = -2(x-2) \quad f^{-}(x) = 0$

$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

$f(x) = 1 - (2-2)^2 = 1$

نقطه حرجه:.(1,2)



مناطق التزايد هي : { x : x < 2 } و مناطق التناقص هي : { x : x > 2 }

نقطه نهايه عظمى محليه :.(2,1)

ايجاد نقطه الانقلاب مناطق التقعر والتحدب

خطوات الحل:-

1-نطلع المشتقه الثانيه

2-نساوي المشتقه الثانيه بالصفر

3-نطلع قيمه x من مساواة المشتقه بالصفر

4-نعوض قيمة x بالداله الاصليه علمود نطلع قيمه y (راح تكون عدنه نقطه او مجموعه نقاط (x,y) تمثل نقاط انقلاب

5-نرسم خط الاعداد ونحط عليه قيم x فقط (ناخذ قيم اكبر من قيمه x واقل منها علمود نطلع مناطق التقعر والتحدب)

اذا طلع الناتج موجب فتكون الداله مقعره

اذا طلع الناتج سالب فتكون الداله محدبه

ملاحظه :- مرات نشتق المشتقه الاولى ونشتق المشتقه الثانيه تطلع قيمه ثابته (رقم)

-اذا طلع الرقم موجب الداله مقعره وماكو نقاط انقلاب

-اذا طلع الرقم سالب الداله محدبه وماكو نقاط انقلاب

-اذا جانت الداله كسريه بسطها ثابت فماراح يكون عدنه نقطه انقلاب (نتوقف عن الحل ونرسم خط الاعداد ونحط عليه القيمه الي تخلي المقام صفر)

مثال:-جد نقاط الانقلاب ومناطق التقعر والتحدب ان وجدت

1) $f(x) = 4 - (x+2)^2$ نشتق

$f'(x) = -2(x+2)(1) = -2x - 4$ نشتقها مره ثانيه

$f''(x) = -2 < 0$

الداله محدبه في كل مجالها (لان طلع الناتج رقم سالب) :.لاتوجد نقاط انقلاب

2) $f(x) = x^2$ نشتق

$f'(x) = 2x$

$f''(x) = 2 > 0$

الداله مقعره في كل مجالها (لان طلع الناتج رقم موجب) :. لاتوجد نقاط انقلاب

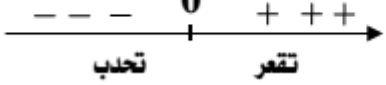
3) $f(x) = x^3$ نشتق

$f'(x) = 3x^2$

$f''(x) = 6x$ نساويها بالصفر $\rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0$ نعوضها بالداله الاصليه

$f(0) = (0)^3 = 0 \rightarrow (0,0)$

إشارة $f''(x)$



4) $2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ نشتق

$f^{-}(x) = 6x^2 - 6x - 12$

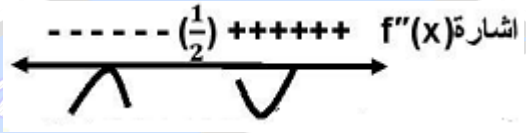
$f''(x) = 12x - 6$ نساويها بالصفر

$12x - 6 = 0 \div 2 \rightarrow 2x - 1 = 0 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$ نعوضها بالداله الاصليه

$$f(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12\left(\frac{1}{2}\right) + 1 \rightarrow \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - 5 = -\frac{2}{4} - 5 \rightarrow -\frac{1}{2} - 5$$

$$= \frac{-1-10}{2} = -\frac{11}{2}$$

نقطه انقلاب $(\frac{1}{2}, -\frac{11}{2})$



مناطق التقعر $\left\{x: x > \frac{1}{2}\right\}$ مناطق التحدب $\left\{x: x < \frac{1}{2}\right\}$

اختبار المشتقة الثانية للنهايات العظمى والصغرى

خطوات الحل :-

1-نشتق الداله f'(x)

2-نساوي المشتقه بالصفر نطلع قيم x

3-نشتق المشتقه الثانيه f''(x)

4-نعوض قيم x الي طلعت من خلال مساواة المشتقه الاولى بالصفر بالمشتقه الثانيه

#اذا طلع الناتج موجب (رقم موجب) فراح تكون قيمه x عظمى محليه

#اذا طلع الناتج سالب (رقم سالب) فراح تكون قيمه x صغرى محليه

الناتج صفر فالطريقه فاشله (فنستخدم اختبار خط الاعداد بدل ذالك)

مثال /باستخدام المشتقه الثانيه ان امكن جد النهايات المحليه للدوال الاتيه

1) $f(x) = 6x - 3x^2 - 1$ نشتق

$f'(x) = 6 - 6x$ نساوي بالصفر

$6 - 6x = 0 \rightarrow -6x = -6 \div 6 \rightarrow x = 1$ نعوضها بالمشتقه الثانيه

$f''(x) = -6 \rightarrow -6 < 0$

الداله تمتلك نقطه نهايه عظمئ محليه عند x=1:.

$2) f(x) = x - \frac{4}{x^2}\ x \neq 0$ نشتق

$$f'(x) = 1 - \frac{x^2(0) - 4(2x)}{x^4}$$

$$= 1 - \ -\frac{8x}{x^4} = 1 + \frac{8}{x^3} = 0 \to 1 = -\frac{8}{x^3} \to x^3 = -8 \to x = -2$$

مثال/لتكن $f(x) = x^2 - \frac{a}{x}\ x \neq 0$ برهن ان الداله f لاتمتلك نهايه عظمئ محليه

$$f'(x) = 2x - \frac{x.0 - a(1)}{x^2} = 2x - \frac{-a}{x^2} = 2x + \frac{a}{x}$$

$$f'(x) = 0 \to 2x + \frac{a}{x^2} = 0 \to 2x = \frac{-a}{x^2} \to 2x^3 = -a$$

$$x^3 = \frac{-a}{2} \to x = \sqrt[3]{-\frac{a}{2}} \dots\dots\dots (1)$$

$$f''(x) = 2 + \frac{x^2(0) - 4(2x)}{x^4} \to 2 + \frac{-2ax}{x^4}$$

$$f''(x) = 2 - \frac{2a}{x^3} \dots\dots\dots (2)$$

نعوض 1 في 2.....

$$f''(x) = 2 - \frac{2a}{\left(\sqrt[3]{\frac{-a}{2}}\right)^3} = 2 - \frac{\frac{2a}{-a}}{2} = 2 - \frac{2a}{1}.\frac{-2}{a}$$

$$= 2 - \frac{2}{1}\left(-\frac{2}{1}\right) \to 2 - 2(-2)$$

$$2 + 4 = 6 > 0$$

الداله تمتلك نهايه صغرئ ولاتمتلك نهايه عظمى:.

ايجاد الثوابت (مهم جدا)

راح ننطي ملاحظات عامه (مهمه جدا حول ايجاد الثوابت اضبطهم ياله تبدي تحل الامثله)

1-اي نقطه متكونه من (x,y) تحقق معادله معنها تعوض قيمه x مكان كل x بالداله وتساويها بقيمه y

2-كل نقطه حرجه باي سوال نستفاد منها نشتق المشتقه الاولى ونعوض بيها قيمه x ونساوي الداله بالصفر

3-كل نقطه انقلاب باي سوال نستفاد منها نشتق المشتقه الثانيه ونعوض بيها قيمه x ونساوي الداله بالصفر

4-نقطه التماس اذا انطاها نشتق المشتقه الاولى ونساويها بميل المماس

5-اذا انطاني نقطه حرجه احداثيها السيني بس (راح نشتق المشتقه الاولى ونعوض قيمه x ونساوي الداله بالصفر)

6-اذا انطاني نقطه انقلاب احداثيها السيني بس (راح نشتق المشتقه الثانيه ونعوض قيمه x ونساوي الداله بالصفر)

7-اذا انطاني معادله مستقيم راح نطلع منها ميل المماس وراها نشتق المشتقه الاولى ونساويها بميل المماس

9-اذا كال بالسوال ان الداله لها نهايه صغرى او عظمى عند (رقم) فهذا الرقم راح يمثل قيمه y

10-اذا جان ميل المماس يصنع زاويه ويهه الاتجاه الموجب لمحور السينات فراح يكون ميل المماس $=\tan\theta$

11-عدد المعادلات الي راح تكون عندي هي بعدد المجاهيل (يعني اذا مجهولين لازم اكون معادلتين)

مثال /اذ كانت (2,6) نقطه حرجه لمنحني الداله $f(x)=a-(x-b)^4$ فجد قيمه a,b وبين نوع النقطه الحرجه

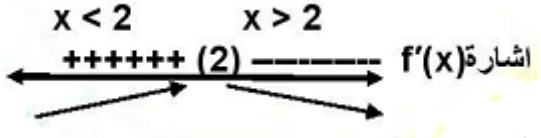
$$f(x)=a-(x-b)^4$$

$$f'(x)=-4(x-b)^3$$

$$f'(2)=-4(2-b)^3=0$$

$$\therefore 2-b=0\rightarrow b=2$$

$$a-(2-2)^4=6\rightarrow a=6$$



.: (2,6) نقطه نهايه عظمئ محليه

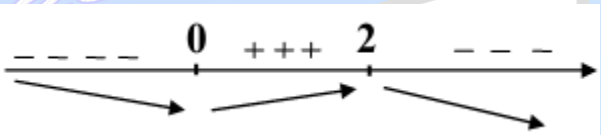
اذا كانت 6 تمثل نهاية صغرى محلية لمنحني الدالة $f(x) = 3x^2 - x^3 + c$ فجد قيمة c ثم جد معادلة المماس للمنحني عند نقطة انقلابه .

$y = 6$

$f'(x) = 6x - 3x^2 \quad , f'(x) = 0 \rightarrow 6x - 3x^2 = 0 \div 3 \rightarrow 2x - x^2 = 0$

$x(2 - x) = 0 \rightarrow if\ x = 0$

$2 - x = 0 \rightarrow or\ x = 2$



∴النقطه $(0,6)$ نقطه نهايه صغرئ محليه

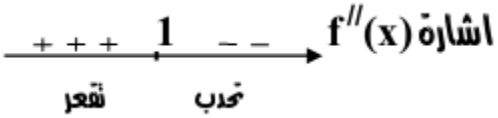
$3(0)^2 - (0)^3 + c = 6 \rightarrow c = 6$

$f(x) = 3x^2 - x^3 + 6$

$f''(x) = 6 - 6x \quad , f''(x) = 0$

$6-6x=0 \rightarrow 6 = 6x \rightarrow x = 1$

$y = 3(1)^2 - (1)^3 + 6 = 3 - 1 + 6 = 2 + 6 = 8$



$m = f'(1) = 6(1) - 3(1)^2 = 6 - 3 = 3$

$y - y1 = m(x - x1)$

$y - 8 = 3(x - 1)$

$y - 8 = 3x - 3 \rightarrow y - 8 - 3x - 3 = 0 \rightarrow y - 3x - 5 = 0$ ميل المماس

اذا كان المستقيم $3x - y = 7$ يمس المنحي $f(x) = ax^2 + bx + c$ عند النقطة (2 , -1) وكانت له نهاية صغرى محلية عند $x = \frac{1}{2}$ جد قيم $a , b , c \in R$.

الحل /

$f'(x) = 2ax + b$

$3 = \frac{-3}{-1} = \frac{-x\text{معامل}}{y\text{معامل}}$ = ميل المستقيم

$\therefore 2a(2) + b = 3 \rightarrow 4a + b = 3 \ldots\ldots\ldots (1)$

$a(2)^2 + b(2) + c = -1 \rightarrow 4a + 2b + c = -1 \ldots\ldots\ldots (2)$

$\therefore x = \frac{1}{2}$ نهايه صغرئ محليه للداله

$2a\left(\frac{1}{2}\right) + b = 0 \rightarrow a + b = 0 \ldots\ldots\ldots (3)$

نحل المعادلتين 1 و3 انيا $4a + b = 3$

$\mp a \mp b = 0$ بالطرح

$3a = 3 \rightarrow a = 1$

$1 + b = 0 \rightarrow b = -1$ **نعوض قيمه a في معادله 3**

$4(1) + 2(-1) + c = -1 \rightarrow 4 - 2 + c = 0$ **نعوض قيمتي a ,b في معادله 2**

$2 + c = -1 \rightarrow c = -1 - 2 \rightarrow c = -3$

مثال اذا كانت $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ وكانت f مقعرة لكل $x > 1$ ومحدبة لكل $x < 1$ وللدالة f نقطة نهاية عظمى محلية (-1 , 5) فجد قيم الثوابت $a , b , c \in R$.

x=1

$f''(1) = 0$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$f''(1) = 6a(1) + 2b = 0 \rightarrow 6a + 2b = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$

$\therefore f'(-1) = 0 \quad . f(-1) = 5$

$f'(-1) = 3a(-1)^2 + 2b(-1) + c(-1) = 0$

3a-2b+c=0 .....(2)

$f(-1) = a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) = 5$

-a+b-c=5.....(3)

نحل المعادلتين 2 و3 انيا

$3a - 2b + c = 0$

-a+b-c=5 بالطرح

2b-b=5

بحل المعادلتين 1 و4 انيا

$6a + 2b = 0 \div 2$

2b-b=5

3a+b=0

2a-b=5 بالجمع

5a=5 ->a=1

نعوض قيمه a في 1

$6(1) + 2b = 0 \rightarrow 6 + 2b = 0 \rightarrow 2b = -6 \rightarrow b = -3$

$3(1) - 2(-3) + c = 0 \rightarrow 3 + 6 + c = 0 \rightarrow 9 + c = 0 \rightarrow c = -9$

مثال:- اذا كانت $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ ، $g(x) = 1 - 12x$ وكان كل من f , g متماسان عند نقطة الانقلاب وكانت للدالة f نقطة انقلاب هي (1 ، -11) فجد قيم الثوابت a , b , c ∈ R .

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f'')x)6ax + 2b$

$:.6a(1) + 2b = 0 \rightarrow 6a + 2b = 0 \dots\dots(1)$

$g'(x) = -12$

$:.3a(1)^2 + 2b(1) + c = -12$

$3a + 2b + c = -12 \dots\dots\dots(2)$

$a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) = -11$

$a + b + c = -11$

بحل المعادلتين 2 و3 انيا

$3a + 2b + c = -12$

$\mp a \mp b \mp c = \pm 11$ بالطرح

بحل المعادلتين 1و4 انيا $2a + b = -1$

$6a + 2b = 0$

$\mp 2a \mp b = \pm 1$

a=1

نعوض قيمه a في معادله 1

$6(1) + 2b = 0 \rightarrow 6 + 2b = 0$

$2b = -6 \rightarrow b = -3$

$1 - 3 + c = -11 \rightarrow -2 + c = -11 \rightarrow c = -11 + 2 \rightarrow c = -9$

رسم الدوال

1- اوسع مجال للداله

شنو اوسع مجال شوف اذ جانت الداله كثيرة حدود يعني بيه حدود هواي يعني مو داله كسريه يكون اوسع مجال للداله هو R

اذ جانت الداله كسريه شنو اوسع مجال اله شوف اوسع مجال للداله هو

الرقم الي يجعل المقام صفر \R

2- المحاذيات

شوف شلون نطلع المحاذيات اذ جانت الداله كثيره حدود هاي مابيه محاذيات

اذ جانت الداله كسريه اكو محاذيات شلون طلعهم

المحاذي العمودي هو الرقم الي خله المقام يساوي صفر

المحاذي الافقي هذا حسب نوع الداله شلون يعني اذ جانت الداله نسبيه اي ان كسريه بسطها ومقامها متغيرات شلون نطلع المحاذي

حسب هذا القانون

$y = \frac{\text{معامل اعلى اس في البسط}}{\text{معامل اعلى اس في المقام}}$ ←

زين اذجانت كسريه وبسطها ثابت هاي مباشرا المحاذي الافقي صفر

3-نقاط التقاطع

مره تفرض xصفر ونطلع قيمه y
مره فرض yصفر ونطلع قيمه x

4-التناظر

1-اذا جان f(x)= f(-x) فان الداله متناظره حول محور الصادات

2-اذا جان f(x)=-f(-x) فان الداله متناظره حول نقطه الاصل

ملاحظه:-للفائده:- اذ جانت اسس الداله زوجيه تكون الداله متناظره حول الصادات

واذ جانت فرديه تكول حول نقطه الاصل

واذاجانت فرديه وزوجيه ماكو تناظر

5- النهايات العظمئ والصغرئ المحليه 6-نقاط الانقلاب اذ وجدت
(راجع شرحهم بالملزمه)

مثال :- باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدوال الاتيه

1) $f(x) = x^5$

1-اوسع مجاله للداله R (لان داله كثيره حدود)

2- لاتوجد محاذيات

3- التناظر

أ- مع محور الصادات

$\mathbf{F(-X) = F(X)}$

$F(-X) = (-X)^5 = -X^5 \neq F(X)$ لايوجد تناظر

$f(-x) = -f(x) \rightarrow -f(x) = -(x)^5 = -x^5 = f(-x)$ يوجد تناظر

4-نقاط التقاطع

Ifx=0

$y = (0)^5 \rightarrow (0,0)$ نقطه التقاطع

If y=0

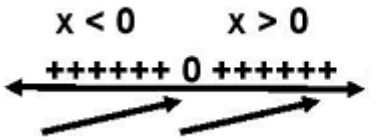
$x^5 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0,0)$

5-النهايات

$f'(x) = 5x^4 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow 5x^4 = 0 \rightarrow x = 0$

$f(x) = (0)^5 = 0 \rightarrow (0,0)$ نقطه حرجه

اشارة $f'(x)$



مناطق التزايد $\{x : x \in R ; x > 0\}$

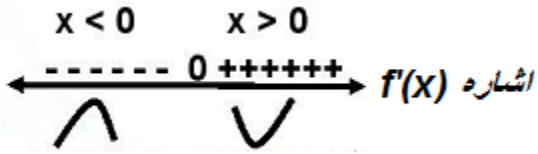
$\{x : x \in R ; x < 0\}$

الداله لاتمتلك نهايات عظمى واخرى لانها متزايده

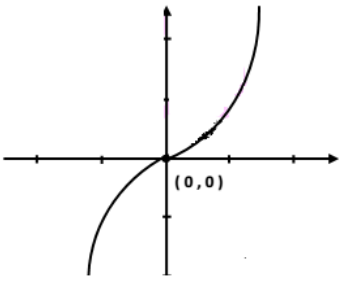
6-نقاط الانقلاب

$f''(x) = 20x^3 \ , f''(x) = 0 \rightarrow 20x^3 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0(0,0)$

اشاره $f'(x)$



نقطه انقلاب $(0,0)$ منطقه التحدب $x: x < 0$ منطقه التقعر $x: x > 0$



2) $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+1}$

$x + 1 = 0 \rightarrow \quad x = -1$-1

اوسع مجال للداله R/-1

2- المحاذيات العمودي :محاذي X=-1 المحاذي الافقي y=3

3- التناظر

f(-x)=f(x)

$f(-x) = \dfrac{3(-x)-1}{-x-1} = \dfrac{-3x-1}{-x-1} \neq f(x)$ لاتناظر

$f(-x) = -f(x) \rightarrow -f(x) = \dfrac{-3x+1}{x+1} \neq f(-x)$ لاتناظر

4-نقاط التقاطع

If x=0

$$y=\frac{3(0)-1}{0+1}=-\frac{1}{1}=-1(0,1)$$ نقطه تقاطع

Or y=0

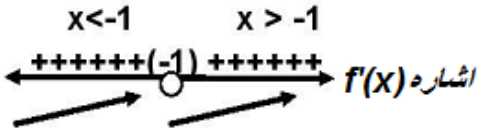
$$0=\frac{3x-1}{x+1}\rightarrow 3x-1=0\rightarrow 3x=1\rightarrow x=\frac{1}{3}\rightarrow\left(\frac{1}{3},0\right)$$ نقطه تقاطع

5- النهايات

$$f'(x)=\frac{(x+1).3-(3x-1).1}{(x+1)^2}=\frac{3x+3-3x+1}{(x+1)^2}=\frac{4}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=0\rightarrow\frac{4}{(x+1)^2}=0\rightarrow 4\neq 0$$

.: لاتوجد نقاط حرجه او نهايات عظمى او صغرى



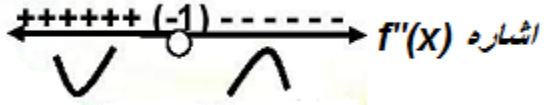
مناطق التزايد هي$(x: x<-1)(x: x>-1)$

6-نقاط الانقلاب

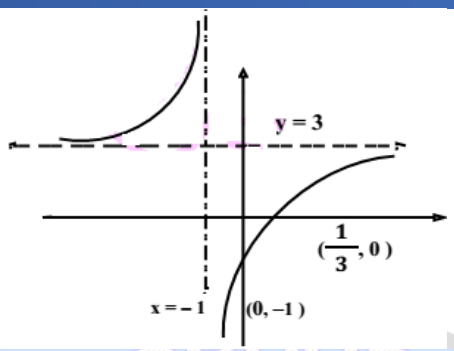
$$f''(x)=\frac{(x+1)^2.(0)-4.2(x+1).1}{(x+1)^4}=-\frac{8}{(x+1)^4}=\frac{-8}{(x+1)^3}$$

$$f''(x)=0\rightarrow-\frac{8}{(x+1)^3}=0\rightarrow -8\neq 0$$

لاتوجد نقاط انقلاب



مناطق التقعر هي$(x;x>-1)$ مناطق التحدب هي$(x;x<-1)$



التطبيقات

1-نفرض المتغيرات برموز او اسماء معينه

2-نطلع علاقه تربط بين المتغيرات ونستفاد من اي عدد موجود بالسوال

3-نكتب القاعده الداله الي دائما تجي ويه كلمه (اكبر مايمكن واصغر مايمكن)

4-نخلي العلاقه بداله متغير واحد يعني النقطه الثانيه والثالثه ندمجهم

5-نشتق العلاقه الناتجه ونساويها بالصفر ونحل المعادله

6-نعوض عن المعلوم الي طلعناه لايجاد المجهول الاخر

7-نخلي القيمه الناتجه على خط الاعداد علمود نتاكد من انو هيه اكبر مايمكن او اصغر مايمكن

تكوين العلاقه حسب القاعده ادناه

زياده معناها (-)

(االعدد بعد كلمه زياده)-(العدد قبل كلمه زياده)= العلاقه

مثال / ماالعدد الذي زيادته على مربعه اكبر مايمكن

نفرض العدد x

مربعه $=x^2$

$f(x) = x - x^2$ نشتقها $\rightarrow f'(x) = 1 - 2x$ نساويها بالصفر $f'(x) = 0$

$1 - 2x = 0 \rightarrow 1 = 2x \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

مثال جد عددين موجبين مجموعهما 75 وحاصل ضرب احدهما في مربع الآخر أكبر مايمكن .

نفرض العدد الاول =x

نفرض العدد الثاني = y

$m = x.y^2 \dots\dots\dots (1)$

$x + y = 75 \rightarrow x = 75 - y \dots\dots\dots (2)$

نعوض علاقه 2 في علاقه 1

$m = (75 - y).y^2 \rightarrow m = 75y^2 - y^3$

$m' = 150y - 3y^2 \qquad , m' = 0$

$150y - 3y^2 = 0 \div 3 \rightarrow 50y - y^2 = 0 \rightarrow y(50 - y) = 0$

اما $y = 0$(تهمل)

العدد الثاني $50 - y = 0 \rightarrow 50 = y \rightarrow y = 50$ او

العدد الاول $\therefore x = 75 - 50 \rightarrow x = 25$

مثال \\ صنع صندوق مفتوح من قطعة نحاس مربعة الشكل طول ضلعها 12cm وذلك بقص اربعة مربعات متساوية الابعاد من اركانها الاربعة ثم ثنيت الاجزاء البارزة منها ، ماهو الحجم الاعظم لهذه العلبة .

الحل /

نفرض طول ضلع المربع المقطوع =x

طول ضلع القاعده =12-2x

ارتفاع الصندوق =x

حجم متوازي السطوح =مساحه القاعده * الارتفاع

$v = (12 - 2x)(12 - 2x).x$

$v = (12 - 2x)^2.x$

$v = (144x - 48x + 4x^2).x$

$v = 144x - 48x^2 + 4x^3$

$v' = 144 - 96x + 12x^2 \qquad v' = 0$

$(144 - 96x + 12x^2 = 0) \div 2 \rightarrow 12 - 8x + x^2 = 0$

$x^2 - 8x + 12 = 0 \rightarrow (x - 6)(x - 2) = 0$

اما $x - 6 = 0 \rightarrow x = 6$(يهمل)

او $x-2=0 \rightarrow x=2$

$\therefore v=(12-2.2)^2.2=(12-4)^2.2=8^2.2=64(2)=128cm^2$

ملاحظه /اي بعد مقسوم من المنتصف (طول او عرض او ارتفاع او....) نفرضه 2x وليس x

مثال/ جد بعدي اكبر مستطيل يوضع داخل المنطقة المحددة بالدالة $f(x)=12-x^2$ ومحور السينات بحيث ان رأسان من رؤوسه تقع على المنحني والرأسان الآخران يقعان على محور السينات ، ثم جد محيطه .

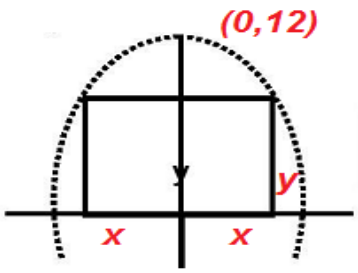
الحل /

نجد نقاط تقاطع الداله مع المحورين

$x=0 \rightarrow y=12-(0)^2=12 \rightarrow (0,12)$

$y=0 \rightarrow 12-x^2=0 \rightarrow x^2=12 \rightarrow x=\mp\sqrt{12}$

$=\mp 2\sqrt{3} \rightarrow (\mp 2\sqrt{3},0)$



نفرض احد البعدين 2x والاخر y

$A=2x.y \ldots\ldots 1$

$y=12,x^2 \ldots\ldots 2$

$A=2X(12-X^2)=24x-2x^3$ (تعويض 2 في 1)

$A'=24-6x^2$

$A'=0 \rightarrow (24-6x^2=0) \div 6 \rightarrow 4-x^2=0 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x=\mp 2$

$2x=2(2)=4$ (احد البعدين)

$\therefore y=12-(2)^2=12-4=8$

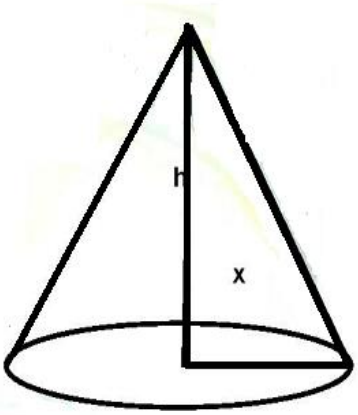
$=\sqrt{128-64}=\sqrt{64}=8 \rightarrow A=8.8=64$

ملاحظه /1- عند دوران مثلث قائم الزاويه حول احد اضلاعه القائمين فان الشكل المتكون (مخروط)يكون نصف قطر قاعدته وارتفاعه هما ضلعي المثلث القائمين

2-عند دوران (مستطيل او مربع) حول احد اضلاعه فان الشكل المتكون هو اسطوانه

3- عباره اكبر او صغر (مخروط , اسطوانه , كره ,متوازي السطوح المستطيله, مكعب)المقصود بها حجم

مثال/جد اكبر حجم لمخروط دائري قائم ناتج من دوران مثلث قائم الزاويه طول وتره $6\sqrt{3}$ دوره كامله حول احد ضلعيه القائمين



الحل /

نفرض نصف قطر قاعده المخروط =r

نفرض ارتفاع المخروط =h

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h \dots\dots\dots 1$$

بتطبيق فيثاغورس

$$r^2 + h^2 = (6\sqrt{3})$$

$$r^2 + h^2 = 108 \rightarrow r^2 = 108 - h^2 \dots\dots\dots 2$$

نعوض معادله 2 في 1

$$v = \frac{1}{3}\pi(108 - h^2).h = \frac{1}{3}\pi(108h - h^3)$$

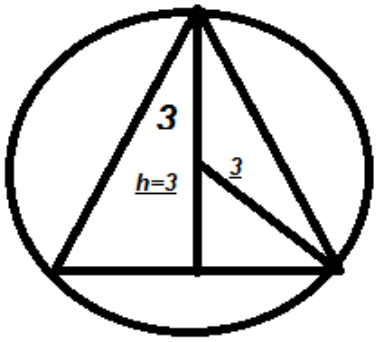
$$v' = \frac{1}{3}\pi(108 - 3h^2) \quad , v' = 0$$

$$\frac{1}{3}\pi(108 - 3h^2) = 0 \rightarrow (108 - 3h^2) = 0 \div 3$$

$$36 - h^2 = 0 \rightarrow h^2 = 36 \rightarrow h = 6$$

$$r^2 = 108 - 36 = 72 \quad \rightarrow \therefore v = \frac{1}{3}\pi(72)\cancel{(6)} = 144\pi cm^2$$

مثال/ جد حجم مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل كره نصف قطرها 3cm



نفرض نصف القطر =r

نفرض الارتفاع =h

$$v=\frac{1}{3}\pi r^2 \dots\dots\dots 1$$

بتطبيق فيثاغورس

$$r^2+(h-3)^2=9$$

$$r^2+h^2-6h+\cancel{9}=\cancel{9}$$

$$r^2=6h-h^2 \dots\dots\dots (2)1$$ نعوض 2 في

$$v=\frac{1}{3}\pi(6h-h^2)h \rightarrow v=\frac{1}{3}\pi(6h^2-h^3)$$

$$v'=\frac{1}{3}(12h-3h^2)\ ,\qquad v'=0$$

$$\frac{1}{3}\pi(12h-3h^2)=0 \rightarrow \big((12h-3h^2)=0\big)\div 3$$

$$4h-h^2=0 \rightarrow h(4-h)=0 \rightarrow h=0$$ يهمل

$$4-h=0 \rightarrow h=4$$ الارتفاع او

نعوض في 2

$$r^2=6(4)-(4)^2 \rightarrow r^2=24-16=8$$

$$r=\sqrt{8}=\sqrt{4.2}=2\sqrt{2}$$

$$;.v=\frac{1}{3}\pi(8)(4)=\frac{32\pi}{3}cm^3$$

ملاحظه /عند وضع مستطيل داخل مثلث ليس متساوي الساقين وليس قائم الزاويه فان التشابه يكون بين مثلثين (الاصلي والصغير) الذي يشبه بالشكل

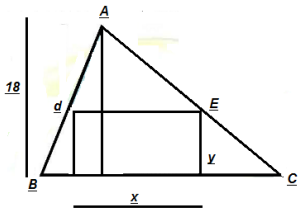
مثال \\ جد بعدي اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل مثلث طول قاعدته 24cm وارتفاعه 18cm بحيث ان رأسين متجاورين من رؤوسه تقعان على القاعدة والرأسين الباقيين تقعان على ساقيه .

الحل :- نفرض طول = x ، نفرض عرض = y

$A = x, y \dots\dots\dots 1$

من تشابه المثلثين ADC, ABC

$\frac{24}{X} = \frac{18}{18-y} \rightarrow 18x = 432 - 24y \rightarrow x = \frac{432-24y}{18} \dots\dots\dots 2$ نعوض 2 في 1



$A = \left(\frac{432 - 24Y}{18}\right).Y = \left(\frac{432y - 24y^2}{18}\right)$

$A' = \frac{432 - 48y}{18}$, $A' = 0$

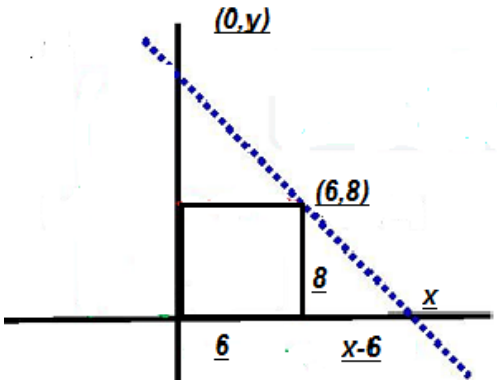
$\frac{432-48y}{18} = 0 \rightarrow 432 - 48y = 0 \rightarrow 432 = 48y \rightarrow y = \frac{432}{48} = 9$ نعوض في 2

$x = \frac{432 - 24(9)}{18} = \frac{432 - 216}{18} = \frac{216}{18} = 12$

ملاحظه /في المسائل التي فيها اشكال هندسيه مرسومه داخل مثلث او مخروط تكون العلاقه الثانويه من تشابه المثلثين

مثال /جد معادله المستقيم الذي يمر من النقطه (6,8) والذي يصنع مع المحورين في الربع الاول اصغر مثلث

الحل /



نفرض قطه تقاطع المستقيم مع محور السينات = (x,0)

نفرض نقطه تقاطع المستقيم مع محور الصادات =(0,Y)

$A = \frac{1}{2}xy \dots\dots\dots 1$

من تشابه المثلثين

$\frac{x-6}{x} = \frac{8}{y} \rightarrow y(x-6) = 8x \rightarrow y = \frac{8x}{x-6} \dots\dots\dots 2$

نعوض 2 في 1

$$A = \frac{1}{2} x \frac{8x}{x-6} = \frac{4X^2}{X-6}$$

$$A' = \frac{(x-6).8x - 4x^2(1)}{(x-6)^2} = \frac{8x^2 - 48x - 4x^2}{(x-6)^2} = \frac{4x^2 - 48x}{(x-6)^2}, A' = 0$$

$$\frac{4x^2 - 48x}{(x-6)^2} =\rightarrow 4x^2 - 48x = 0 \div 4 \rightarrow x^2 - 12x = 0$$

$\rightarrow x - 12 = 0x = 12 \rightarrow (12,0)$ نقطه التقاطع مع السينات

نعوض قيمه x في معادله 2

$$y = \frac{8x}{x-6} = \frac{8(12)}{12-6} = \frac{8.12}{6} = 16 \rightarrow (0,16)$$

معادله المستقيم المار بالنقطتين p(12,0) p(6,8)

$$\frac{y-y1}{x-x2} = \frac{y2-y1}{x2-x1} \rightarrow \frac{y-8}{x-6} = \frac{0-8}{12-6} = \frac{y-8}{x-6} = -\frac{8}{6}$$

$$6y - 48 = -8x + 48 \rightarrow 6y - 48 + 8x - 48 = 0$$

$(8x + 6y - 96 = 0) \div 2 \rightarrow 4x + 3y - 48 = 0$ ميل المستقيم

مجموعه من الاسئلة المهمه

س1:-2007د1\صندوق على شكل متوازي سطوح مستطيله قاعدته مربعه فاذا كان ارتفاعه يساوي ضعف طول قاعدته فاوجد معدل التغير في مساحته الكليه اذا كان طول ضلعه 8cm والتغير في طول ضلعه ½ cm/s ج\80

س2:-2017د2\متوازي مستطيلات قاعدته مربعه الشكل يزداد طول ضلعها بمعدل (0.4cm/s) بحيث يبقى الحجم ثابت دائما (640) فاوجد معدل التغير في الارتفاع في اللحظه التي يكون فيها الارتفاع 10cm

س3:-تتحرك نقطه على منحني قطع مكافئ $y = x^2$ جد احداثي هذه النقطه في اللحظه التي يتساوى فيها المعدلان الزمنيان لتغير كل من الاحداثي x,y ؟

س4:-مرشح مخروطي قاعدته افقيه وراسيه للاسفل ارتفاعه 24cm وطول قطر قاعدته 16cm يصب فيه سائل بمعدل $5cm^3/s$ بينما يتسرب منه السائل $1cm^3/s$ جد معدل تغير نصف قطر السائل في اللحظه التي يكون فيها نصف القطر 4cm

س5:-بالون كروي يزداد حجمه بمعدل 0.4 cm^3/s بحيث يبقى شكل كره جد معدل ازدياد مساحته السطحيه عندما يكون قطره 10cm

س6:-وزاري:-جد باستخدام نتيجه مبرهنه القيمه المتوسطه $(15.6)^{-\frac{1}{4}}$

س7:-جهاز كهربائي على شكل مكعب طول ضلعه (29m) مغلق بصندوق خشب سمكه (0.6cm) جد بصوره تقريبيه حجم الخشب باستخدام نتيجه مبرهنه القيمه المتوسطه

س8:-مربع مساحته 48 جد طول ضلعه بصوره تقريبيه ؟

س9:-اذا كان $f(x) = \sqrt[3]{3x+5}$ جد بصوره تقريبيه قيمة f(1.001)

س10:-اذا كان $f(x) = \sqrt{x^3+1}$ تغيرت x من 2 الى 2.015 احسب مقدار التغير للداله f

س5:-وزاري :- اذا كانت $f(x) = ax^3 + bx^2$ جد قيمتي a,b اذا علمت ان للمنحني نقطه انقلاب (1,2)؟

س11:- لتكن $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ فجد قيمه a,b اذ علمت ان للداله نهايه صغرى عند x=3 ونهايه عظمى عند x=1

س12:- اذا كانت الداله $f(x) = ax^3 + bx^2 + 15x$ نقطه نهايه عظمى محليه $(1,8)$ جد قيمه a,b

س13:-لتكن $f(x)=x^2+a$ $g(x)=x+b$ وكان للداله (fog) نهايه صغرئ عند النقطه $(4,9)$ فجد قيمه a,b

س14:-وزاري:-جد نقطه تنتمي للقطع الزائد $y^2-x^2=5$ بحيث تكون اقرب مايمكن للنقطه $(4,0)$ ؟

س15:-وزاري:-لتكن $y^2=8x$ جد نقطه تنتمي للمنحني وتكون اقرب مايمكن للنقطه $(6,0)$

س16:-وزاري:-خزان من الحديد ذو غطاء كامل على شكل متوازي السطوح المستطيله قاعدته مربعه وحجمه 216 جد ابعاده لتكون مساحه الصفائح المستخدمه في صنعه اقل مايمكن ؟

س17:- وزاري:- جد بعدي علبه على شكل اسطوانه دائريه قائمه مسدوده من نهايتها مساحتها السطحيه $24\pi cm^2$ عندما يكون حجمها اكبر مايمكن ؟

س18:-وزاري:-جد ابعاد مستطيل محيطه 100cm ومساحته اكبر مايمكن ؟

القسم الثاني الاختبار الشامل

س1/ عمود طوله 7.2m في نهايته مصباح يتحرك رجل طوله 1.8 مبتعدا وبسرعه 30m/min جد معدل تغير طول ظل الرجل

س2/ متوازي سطوح مستطيله قاعدته مربعه وارتفاعه ثلاث امثال طول قاعدته جد الحجم التقريبي له عندما يكون طول قاعدته 2.97cm

س3/اذا كانت (2,6) نقطه حرجه لمنحني الداله $f(x)=a-(x-b)^4$ جد $a,b\in R$ وبين نوع النقطه الحرجه

س4/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم

$$f(x)=x^7$$

س5/صنع صندوق مفتوح من قطعه من النحاس مربعه الشكل طول ضلعها $12cm$ وذالك بقص اربعه مربعات من اركانها الاربعه ثم ثني الاجزاء البارزه منها ماهو الحجم الاعظم للعلبه

القسم الاول الفصل الرابع (التكامل)

المجاميع العليا والسفلى(للتطبيقي)

السوال شلون يجي بالامتحان (جد المجموع الاسفل والمجموع الاعلى)(اوجد $L(\sigma,f)$ تعني الاسفل و $U(\sigma,f)$ تعني الاعلى)

طريقه الحل حسب الجدول

الفترات	h	m	m	himi	hiMi

لفترات:هاي شلون طلعها وشكم فتره (حسب السوال مرات يكلي ثلاث فترات جزئيه يعني نجزاء 3فترات او ينطي σ وبالامثله تعرفها شنو

h:من هذا القانون انطلعه $\frac{b-a}{n}$

m:احنه راح نعوض قيم الفترات بالداله اصغر قيمه تطلع هي هاي

M: احنه راح نعوض قيم الفترات بالداله اكبر قيمه تطلع هي هاي

himi:حاصل ضرب hفي mالرقم الاصغر

hiMi:حاصل ضرب hفي Mالرقم الاكبر

مثال\ لتكن $f:[1,4]\to R \quad ,f(x)=5+2x$

جد المجموع الاسفل$L(\sigma,f)$ والمجموع الاعلى $U(\sigma,f)$ بثلاث تجزءات منتظمة

بكل سوال نطلع hمنين يطلع من الفتره الي منطيها من هاي ونطبق عليها القانون $[1,4]$

$$\frac{b-a}{n}$$

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{4-1}{3}=1$$

$$\sigma=(1,2,3,4)$$

الفترات $[1,2],[2,3],[3,4]$

هو كالي 3 فترات جزئيه

هسه خطوه مهمه هيه مشتقه الداله بكل سوال علمود نطلع نقطه حرجه ونشوف النقطه الحرجه لي فتره تنتمي يصير عليها شغل الي هو تتعوض الفتره والرقم الي يطلع من المشتقه نعوضهم بالداله وناخذ بس الرقم الاصغر والرقم الاكبر والباقي يهمل(تطبق بس ع الفتره الي طلع الرقم ينتمي الها)

$$\acute{f}(x) = 2 \neq 0$$

الدالة متزايدة

تهمل لان ماكدر اساويها بالصفر
داله ثابته
يعني بدو قيود تكمل حل

الفترات	h	mi	Mi	himi	hiMi
[1,2]	1	mi=f(1)=5+2(1)=7	M=f(2)=5+2(2)=9	7	**9**
[2,3]	1	m=f(2)=5+2(2)=9	M2=f(3)=5+2(3)=11	9	**11**
[3,4]	1	M3=f(3)=5+2(3)=11	M3=f(4)=5+2(4)=13	11	**13**
				L(σ, f) = = ∑hm) L=13	**U(σ, f) = = ∑hM) U=33**

مجموع الارقام في هذا العمود يمثل المجموع الاسفل

مجموع الارقام في هذا العمود يمثل المجموع الاعلئ

مثال/ جد حاصل الجمع الاعلى وحاصل الجمع الادنى للدالة $f(x) = 9 - x^2$ على الفترة $[-2,3]$ للتجزئة $\sigma = (-2,-1,2,3)$

$$\sigma = (-2,-1,2,3)$$

الفترات $[-2,-1],[-1,2],[2,3]$

$$\acute{f}(x) = -2x = 0 \quad \therefore x = 0 \in [-1,2]$$

$$f(-1) = 9 - (-1)^2 = 8$$

$$f(0) = 9 - 0 = 9 = M$$

$$f(2) = 9 - (2)^2 = 5 = m$$

القيمه طلعت تنتمي للفتره (-1, 2)لذالك يعوض الرقم والفتره وناخذ اكبر رقم واصغر رقم والي يبقه يروح هنا -1 راح تمام

الفترات	h	M	M	himi	hiMi
$[-2,-1]$	1	5	8	8	**8**
$[-1,2]$	3	5	9	15	**27**
$[2,3]$	1	0	5	0	**5**
				$L = 20\sum hm$=	$\cup = 40\sum \boldsymbol{hM}$=

$$L(\sigma,f) = 20$$

$$\cup(\sigma,f) = 40$$

$$f\text{القيمة التقريبية للدالة} = \frac{L+\cup}{2} = \frac{20+40}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

تعريف التكامل

اذا كانت $f:[a,b] \to R$ دالة مستمرة على [a,b] فانه يوجد عدد وحيد K بحيث لاي تجزئة σ للفترة [a,b] فانه:-

$$L(\sigma,f) \le k \le \cup(\sigma,f)$$

ونسمي العدد Kالتكامل المحدد للدالة f ونرمز له $\int_a^b f$ وتقرا تكامل الدالة f من a الى b وان a,b حدي التكامل.

ملاحظات

1- أذا كانت fدالة مستمرة على [a,b] فأن :-

$$L(\sigma,f) \le \int_a^b f \le U(\sigma,f)$$

$$\frac{L(\sigma,f)+U(\sigma,f)}{2} = \int_a^b f$$ و القيمة التقريبية للتكامل

2-أذا كانت $f(x) \ge 0 \quad \forall x \in [a,b]$

فأن $\int_a^b f$ يعطي مساحة المنطقة تحت المنحني f وهو عدد غير سالب

3- أذا كانت $f(x) \le 0 \ , \forall x \in [a,b]$

فأن $\int_a^b f \le 0$

4- يمكن كتابة التكامل بالشكل المحدد بالشكل $\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx$

حيث dx تشير الى أن حدى التكامل a,b هما قيمتان للمتغير x

مثال-:لتكن $f:[1,3]\to R$ حيث $f(x)=x^2$ اوجد قيمة تقريبية للتكامل اذا جزئت الفترة [1,3]الى تجزئتين . اي جد $\int_1^3 f$

الحل:-

f دالة مستمرة على $[1,3]$

$\sigma=(1,2,3)$

الفترات $[1,2]\ ,[2,3]$

$\acute{f}(x)=2x=0 \quad \therefore \quad x=0$ حرجة $\notin [1,3]$

الفترات	h	Mi	Mi	himi	hiMi
[1,2]	1	1	4	1	**4**
[2,3]	1	1	4	4	**9**
				$L=$ $=5\sum hm$	∪= **$=13\sum hM$**

$$\therefore \quad L(\sigma,f)=5$$

$$\cup\,(\sigma,f)=13$$

$$\int_1^3 f=\int_1^3 f(x)dx=\frac{L(\sigma,f)+\cup\,(\sigma,f)}{2}=\frac{5+13}{2}=9$$

مثال:- لتكن $f(x)=3x-x$, $f:[1,4]\to R$ اوجد قيمة التكامل $\int_1^4 f(x)dx$ باستخدام التجزئة $\sigma=(1,2,3,4)$.ثم تحققه هندسيا بحساب المنطقة تحت منحني f .

الحل:-

الفترات $[1,2]\ ,[2,3]\ ,[3,4]$ التجزئة $\sigma=(1,2,3,4)$

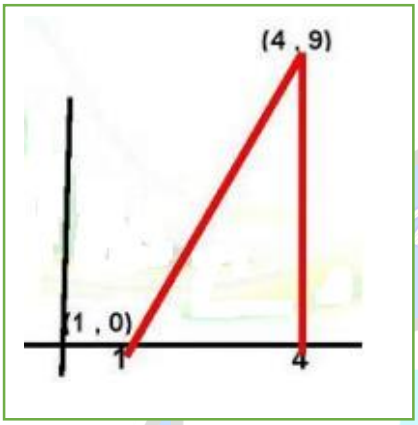
الدالة متزايدة $\acute{f}(x)=3\neq 0$

الفترات	h	mi	Mi	himi	hiMi
[1,2]	*1*	*0*	*3*	*0*	***3***
[2,3]	*1*	*3*	*6*	*3*	***6***
[3,4]	*1*	*6*	*9*	*6*	***9***
				$L=$ $=9\sum himi$	∪= ***$=18\sum hiMi$***

$L(\sigma,f)=9 \qquad \cup(\sigma,f)=18$

$\int_1^4 f=\frac{(L+\cup)}{2}=\frac{9+18}{2}=\frac{27}{2} \qquad unit^2$

التحقق هندسيا



$A=\frac{1}{2}(\text{القاعدة})(\text{الارتفاع})$

$=\frac{1}{2}(4-1)(9)$

$A=\frac{27}{2} \qquad unit^2$

النظرية الاساسية للتكامل – النظرية المقابلة

هنا بالسوال يكلك اثبت ان الداله مقابله الحال اكو دالتين داله جبيره وداله صغيره

1-تكامل الداله الصغيره لازم من تكامل ينطي نفس الداله الجبيره

2-نشتق الداله الجبيره لازم من تشتق ينطي نفس الداله الصغيره

اذا تحقق النقطتين معناه الداله هي داله مقابله

داله صغيره	⟵
داله جبيره	⟵

مثال/ ليكن $f:[1,2]\to R \ , \ f(x)=2x$

و $F:[1,2]\to R \ , \ F(x)=x^2$

اثبت ان F دالة مقابلة لـ f

f دالة مستمرة على $[1,2]$

F دالة مستمرة على $[1,2]$

$\acute{F}(x)=2x=f(x)$

$\therefore F$ دالة مقابلة لـ f

مثال / اذا كانت f دالة مستمرة على $[1,5]$ بحيث ان $F(x)=3x^2$ دالة مقابلة للدالة f فجد $\int_1^5 f$

من يذكر بالسوال هي داله مقابله الحل هو اعوض الحد الاعلى –تعويض الحد الادنى ونطلع الناتج

الحل:-

∵ F دالة مقابلة ⌊ f فان

$$\int_1^5 f = F(5) - F(1)$$

$$= 3(5)^2 - 3(1)^2 = 75 - 3 = 72$$

مثال / أذا كانت f دالة مستمرة في $[0,\frac{\pi}{2}]$ وأن الدالة المقابلة للدالة f هي

$F(x) = sin\ , F\left[x0,\frac{\pi}{2}\right] \to R$ فأوجد $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f$

الحل/ ∵ F دالة مقابلة للدالة f

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = Sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - Sin0 = 1 - 0 = 1$$

مثال / أثبت فيما أذا كانت $F(x) = x^2 + 2$, $F: [1,3] \to R$ هي دالة مقابلة للدالة

$f(x) = 3x^2$

الحل /∵F دالة مستمرة على [1,3]

وf دالة مستمرة على [1,3]

$$F(x) = 3x^2 = f(\acute{x}) \qquad \forall x \in [1,3]$$

فأن F دالة مقابلة للدالة f

التكامل الغير محدد

ملاحظه1:-من انكامل اي داله تكامل غير محدد نضع +c (ثابت التكامل)

1-القاعده الاولئ :-تكامل داله مرفوعه الى قوه اسيه يعني فوكاها اس اكبر من الواحد شرط شلون انكامل (انضيف للاس واحد ونقسم على الاس الجديد)

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

1. $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + c$
2. $\int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c$

ملاحظه/تكامل داله جذريه ماكو نهائيا منا لنهايه الفصل لذالك اي داله جذريه نحولها الى صوره اسيه (اس الداله على دليل الجذر) ونحل حسب القاعده الاولى

امثله :-

1. $\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$
2. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x} + c$

ملاحظه /تكامل داله كسريه (نسبيه) ماكو نهائيا لنهايه الفصل لذالك اي داله كسريه نحلها (نرف المقام للبسط ونغير اشاره الاس)

1. $\int \frac{10}{x^5}dx = \int 10x^{-5}dx = \left(\frac{10x^{-4}}{-4}\right) + c = \frac{-5}{2x^4} + c$
2. $\int \frac{3}{\sqrt{x}}dx = \int 3\,x^{-\frac{1}{2}}dx = 3\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + x = 6\sqrt{x} + C$

2- القاعده الثانيه /تكامل الثابت بس ضيف اله متغير حسب الداله اذا داله dx نضيف يم الثابت x اذا الداله dy نضيف يم الثابت y

امثله :-

$\int K\,dx = Kx + c$ هو اي ثابت k

1. $\int 10dx = 10x + c$
2. $\int \sqrt{7}dx = \sqrt{7}x + c$

ملاحظه /اي ثابت يم التكامل نكدر نطلعه خارج التكامل

3-القاعده الثالثه:-التكامل يتوزع على عمليه الجمع والطرح يعني اذا عدنه داله كثيره حدود مجرد اوزع التكامل واكامل كل حد حسب قاعدته بس ميتوزع على الضرب والقسمه

ملاحظه/اذ جان اكو قوس مرفوع الى قوه 2 فنربع القوس قبل التكامل

ملاحظه /اذجان اكو قوسين بدون اس اضرب القوسين وبسطهم بعدها اكامل

ملاحظه/ وين متشوف تحليل تحلل(مهمه)

1. $\int (x^2 + 3x - 1)dx = \int x^2dx + \int 3xdx - \int dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x + c$

2. $\int (x-1)(x^2+1)dx = \int (x^3 + x - x^2 - 1)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - x + c$

3. $\int \frac{x^2-1}{x-1}dx = \int \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}dx = \int (x+1)dx = \frac{x^2}{2} + x + c$

4. $\int \frac{x^2-5x+6}{x-2}dx = \int \frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{x-2}}dx = \int (x-3)dx = \frac{x^2}{2} - 3x + c$

4-القاعده الرابعه :-من تلكي (مشتقه داخل القوس)^N(القوس) الاس الي فوك القوس اكبر من 2

1-تهمل المشتقه

2-انضيف للاس 1 ونقسم على الاس الجديد

3-اذ المشتقه تحتاج توفرها (نوفرها نضربها بالمقدار 1 ويعبر عنه باشكال هواي مثلا 2/2 او 6/6)

امثله :-

1 $\int (1+3x^2)^5 x dx$

مشتقه الداخل 6 موجوده فلازم نوفرها فنضرب في 6/6

$$= \frac{1}{6}\int (1+3x^2)^5 * 6x dx = \frac{1}{6}.\frac{(1+3x^2)^5}{6} + c = \frac{1}{36}(1+3x^2)^6 + c$$

2 $\int \frac{(\sqrt[3]{x^2}+2)^3}{\sqrt[3]{x}} dx \int \left(x^{\frac{2}{3}}+2\right)^3 . x^{-\frac{1}{3}} dx$

$$= \frac{3}{2}\int \left(x^{\frac{2}{3}}+2\right)^3 . \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{6}\left(x^{\frac{2}{3}}+2\right)^4 + c$$

3 $\int (3x^2+8x+5)^6 (3x+4) dx$

مشتقة داخل القوس

$= 6x + 8$

$2(3x+4)$

$$= \frac{1}{2}\int (3x^2+8x+5)^6 . 2(3x+4) dx$$

$$= \frac{1}{2} * \frac{(3x^2+8x+5)^7}{7} + c = \frac{(3x^2+8x+5)^7}{14} + c$$

ملاحظه مهمه:- اذا جان عدنه داله متكونه من ثلاث حدود ومشتقه الداخل مموجوده طريقه الحل

$(\text{جذر الثالث} \mp \text{جذر الاول})^2$

4 $\int \sqrt{x^2-6x+9}\, dx = \int \sqrt{(x-3)^2}\, dx = \int (x-3) dx = \frac{x^2}{2} - 3x + c$

تكامل الدوال المثلثيه

1) $\int \sin ax\,dx = \frac{-1}{a}\cos ax + c$

2) $\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + c$

3) $\int \sec^2 ax\,dx = \frac{1}{a}\tan ax + c$

4) $\int \csc^2 ax\,dx = \frac{-1}{a}\cot ax + c$

5) $\int \sec ax \tan ax\,dx = \frac{1}{a}\sec ax + c$

6) $\int \csc ax \cot ax\,dx = \frac{-1}{a}\csc ax + c$

قوانين مهمه جدا

ملاحظه1/قبل لانكامل الداله لازم نوفر مشتقه الزاويه او مرات تكون موجوده واذ جان اكو نقص نكمل نقصها

2-من اكامل الداله تهمل مشتقه الزاويه والزاويه الاصليه تبقى نفسها

1) $\int sin3xdx = \frac{1}{3}\int sin3x.3dx = -\frac{1}{3}cos3x + c$

2) $\int \frac{sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int sinx^{\frac{1}{2}}.x^{-\frac{1}{2}}dx = 2\int sinx^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = -2cos\sqrt{x} + c$

3) $\frac{\int cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int \cos x^{\frac{1}{3}}.x^{-\frac{2}{3}}dx = 3\int cosx^{\frac{1}{3}}.x^{-\frac{2}{3}}dx = 3sin\sqrt{x} + c$

3-اذا جانت داله cos,sin بالشكل $\sin^2 ax$ أو $\cos^2 ax$ من انكامل نعوض القانون ونكامل الدالة

$$1 - \sin^2 ax = \frac{1}{2}(1 - cos2ax)$$

$$2 - \cos^2 ax = \frac{1}{2}(1 + cos2ax)$$

$$1 - \int \sin^2 2xdx = \int \frac{1}{2}(1 - cos4x)dx = \frac{1}{1}\int 1dx - \frac{1}{2}\int cos4xdx$$

$$= \frac{1}{2}\int 1dx - \frac{1}{2}.\frac{1}{4}\int cos4x.4dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}sin4x + c$$

$$2-\int \cos^2 5xdx=\int \frac{1}{2}(1+cos10x)dx=\frac{1}{2}\int 1dx+\frac{1}{2}\int cos10xdx$$

4-أذا جانت sin مضروبة بدالة cos وبالشكل cosax sinax وجان واحد مرفوع الى أس والثاني ممرفوع معناه الي ممرفوع الى اس يمثل مشتقة الدالة المرفوعة

$$1-\int \sin^3 2x\ cos2xdx=\int (sin2x)^3 cos2xdx$$

مشتقة داخل القوس

2cos2x

$$=\frac{1}{2}\int (sin2x)^3.2cos2xdx=\frac{1}{8}\sin^4 2x+c$$

$$2-\int sin5x\,.\cos^4 5xdx=\int (cos5x)^5.sin5xdx$$

مشتقة داخل القوس

-5sin5x

$$=\frac{1}{5}\int (cos5x)^5*-5sin5xdx=-\frac{1}{30}\cos^6 5x+c$$

تذكر

$$sin2x=2sinxcosx$$

$$sin2ax=2sinax.cosax$$

معناها نوحد الزوايا قبل التكامل

$$1-\int 2sin2x\ cosxdx=2\int sinx\ cosxdx=2*-1\int (cosx)^2*-sinxdx$$

مشتقة داخل القوس -sinx

$$=-2.\frac{(cosx)^3}{3}+c=-\frac{2}{3}\cos^3 x+c$$

$$cos2x=2\cos^2 x-1$$

$$os2ax=2\cos^2 ax-1$$

تذكر

$$1-\int cos6xsin3xdx=\int (2\cos^2 3x-1)(sin3x)dx$$

$$=2\int (cos3x)^2\ sin3xdx-\int sin3xdx$$

$$= 2 * -\frac{1}{3}\int (cos3x)^2 * -3sin3xdx - \frac{1}{3}\int sin3x.3dx$$

$$= -\frac{2}{3}.\frac{(cos3x)^3}{3} + \frac{1}{3}cos3x + c = -\frac{2}{9}\cos^3 3x + \frac{1}{3}cos3x + c$$

$$2 - \int cos10x\ sin5x = \int (2\cos^2 5x - 1)sin5xdx$$

$$= 2\int (cos5x)^2 sin5xdx - \int sin5xdx$$

$$= 2 * -\frac{1}{5}\int (cos5x)^2 * -5sin5xdx - \frac{1}{5}\int sin5x.5dx$$

$$= -\frac{2}{5}.\frac{(cosx)^3}{3} + \frac{1}{5}cos5x + c = -\frac{2}{15}\cos^3 5x + \frac{1}{5}cos5x + c$$

5-أذا جانت الدالة $\sin^n x$ أو $\cos^n x$ و(n عدد فردي)نجزء الدالة ونطبق القوانين :-

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$
$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$1 - \int \sin^3 2xdx = \int \sin^2 2x.sin2xdx = \int (1 - \cos^2 2x).sin2xdx$$

$$= \int sin2xdx - \int (cos2x)^2.sin2xdx$$

$$= \frac{1}{2}\int sin2x.2dx - \frac{-1}{2}\int (cos2x)^2.-2sin2xdx = -\frac{1}{2}cos2x + \frac{1}{2}.\frac{(cos2x)^3}{3}$$

$$= -\frac{1}{2}cos2x + \frac{1}{6}\cos^3 2x + c$$

$$2 - \int \cos^3 3xdx = \int \cos^2 3x.cos3xdx = \int (1 - \sin^2 3x)cos3xdx$$

$$= \int cos3xdx - \int (sin3x)^2.cos3xdx$$

$$= \frac{1}{3}\int cos3x.3dx - \frac{1}{3}\int (sin3x)^2.3cos3xdx$$

6-أذا جانت دالة sin أو cos مرفوعة الى (أس زوجي)نستخدم قانون النصف بعد مانجزءالاسس :-

$$\sin^2 ax = \frac{1}{2}(1 - cos2ax)$$

$$\cos^2 ax = \frac{1}{2}(1 + cos2ax)$$

$$1 - \int \sin^4 2x dx = \int (\sin^2 2x)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2}(1 - cos4x)\right)^2 dx$$

$$]= \int \frac{1}{4}(1 - 2cos4x + \cos^2 4x)dx = \frac{1}{4}[\int 1 - 2\int cos4xdx + \int \cos^2 4x\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int 1dx - \frac{1}{4}.2\int \cos 4xdx + \int cos\, 4xdx + \frac{1}{4}.\frac{1}{2}\int (1 + cos8x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int 1dx - \frac{1}{2}\int cos4xdx + \frac{1}{8}\int 1dx + \frac{1}{8}\int cos8xdx$$

$$= \frac{1}{4}\int 1dx - \frac{1}{2}.\frac{1}{4}\int cos4x.4dx + \frac{1}{8}\int 1dx + \frac{1}{8}.\frac{1}{8}\int cos8x.8dx$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}sin4x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{64}sin8x + c$$

$$2 - \int \cos^4 xdx = \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2}(1 + cos2x)\right)^2$$

$$= \int \frac{1}{4}(1 + 2cos2x + \cos^2 2x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int 1dx + 2 * \frac{1}{4}\int cos2xdx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1 + cos4x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int 1dx + \frac{1}{2} * \frac{1}{2}\int cos2x.2dx + \frac{1}{8}\int 1dx + \frac{1}{8}.\frac{1}{4}\int cos4x.4dx$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}sin2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}sin4x + c$$

تذكر

$$sin2x = 2sinxcosx$$

$$\frac{1}{2}sin2x = sinxcosx$$

$$1-\int \sin^2 2x cos^2 2x dx = \int (sin2xcos2x)^2\, dx = \int \left(\frac{1}{2}sin4x\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin^2 4x dx = \frac{1}{4}.\frac{1}{2}\int (1-cos8x)dx = \frac{1}{8}\int 1dx - \frac{1}{8}\int cos8x dx$$

$$= \frac{1}{8}\int 1dx - \frac{1}{8}.\frac{1}{8}\int cos8x.8dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{64}sin8x + c$$

تذكر

$$1\text{-}\int \sec^2 x\, dx = tanx + c \qquad 2-\int \csc^2 x dx = -cotx + c$$

$$3\text{-}\int secx\, tanx\, dx = secx + c \qquad 4-\int cscx\, cotx\, dx = -cscx + c$$

$$1-\int \sec^2 3x dx = \frac{1}{3}\int \sec^2 3x\, dx = \frac{1}{3}tan3x + c$$

$$2-\int \sqrt{2}\csc^2 2x dx =$$

$$\sqrt{2}.\frac{1}{2}\int \csc^2 2x.2dx = -\frac{\sqrt{2}}{2}cot2x + c$$

$$3-\int \frac{\sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \sec^2 x^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 2tan\sqrt{x} + c$$

$$4\text{-}\int \frac{\csc\sqrt{x}cot\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \csc x^{\frac{1}{2}}\cot x^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = -2\,csc\sqrt{x} + c$$

$$5\text{-}\int \frac{sec\sqrt[3]{5x}tan\sqrt[3]{5x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int sec\sqrt[3]{5}\, x^{\frac{1}{3}}\, tan\sqrt[3]{5}x^{\frac{1}{3}}.x^{-\frac{2}{3}}dx$$

ملاحظه/من يكون عندي $\tan^2 at$ او $cot^2 at$ نطبق القوانين

$$\tan^2 ax = \sec^2 ax - 1$$

$$\cot^2 ax = \csc^2 ax - 1$$

$$1\text{-}\int \tan^2 2x\, dx = \int (\sec^2 2x - 1)dx = \frac{1}{2}\int \sec^2 2x\, .2\, dx - \int 1dx$$

$$= \frac{1}{2}\tan 2x - x + c$$

$$2\text{-}\int \cot^2 5x\, dx = \int (\csc^2 5x - 1)dx = \frac{1}{5}\int \csc^2 5x.5\, dx - \int 1dx$$

$$= -\frac{1}{5}\, cot5x - x + c$$

$$3\text{—}3\tan^2 \sqrt{x}\sqrt{x}dx = \int -3x^{-\frac{1}{2}}(\sec^2 x^{\frac{1}{2}} - 1)dx$$

$$= -3.2\int \sec^2 x^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx + 3\int x^{-\frac{1}{2}}dx = -6tan\sqrt{x} + 3\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= -6tan\sqrt{x} + 6\sqrt{x} + c$$

ملاحظه/ اذجانت اللوال بهذا الشكل نطبق القاعده

$$\sec^2 ax \tan^n ax \quad \text{او} \quad \csc^2 ax \cot^n ax$$

القاعده

$$\int (\tan x)^n . sec^2\ x\, dx = \frac{(\tan x)^{n+1}}{n+1} + c$$

او $$\int (\cot x)^n . \sec^2 x\, dx = \frac{-(\cot x)^{n+1}}{n+1} + c$$

$$1 - \int \tan^3 2x \sec^2 2x\, dx = \frac{1}{2}\int (\tan 2x)^3 . 2\sec^2 2x\, dx = \frac{1}{2}.\frac{\tan^4 2x}{4} + c$$

$$2\text{-}\int 3\cot 3x \csc^2 3x\, dx = 3.-\frac{1}{2}\int (cot3x)^1.-3\csc^2 3x\, dx = -\frac{\cot^2 3x}{2} + c$$

$$EX\backslash \int \frac{(3-\sqrt{5x})^7}{\sqrt{7x}}dx = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \left(3 - \sqrt{5}x^{\frac{1}{2}}\right)^7 x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}}.-\frac{2}{\sqrt{5}}\int \left(3 - \sqrt{5}x^{\frac{1}{2}}\right)^2 .-\frac{\sqrt{5}}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{35}} \cdot \frac{\left(3-\sqrt{5}x^{\frac{1}{2}}\right)^{8}}{8} + c = -\frac{1}{4\sqrt{35}}\left(3-\sqrt{5x}\right)^{8} + c$$

$$EX\setminus \int \frac{cos\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}dx = -2\int cos(1-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot -\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx = -2sin\sqrt{1-x} + c$$

$$EX\setminus \int \frac{\sqrt{x-\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x^3}}dx = \int \sqrt{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} . x^{-\frac{3}{4}}dx = \int (\sqrt{x}-1)^{\frac{1}{2}} . (x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} . x^{-\frac{3}{4}}dx$$

$$= 2\int \left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)^{\frac{1}{2}} . \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = 2 . \frac{(\sqrt{x}-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{4}{3}(\sqrt{x}-1)^{\frac{3}{2}} + c$$

التكامل المحدد

طلابي اذ ضبطت تكامل غير محدد يعني انته ضبطت المحدد شلون شوف هذا التكامل نفس القواعد والقوانين اطبقها اهنا زين شنو الاختلاف الاختلاف هنا اكو تعويض حد اعلى وحد ادنى الي همه نعوضهم بعد التكامل

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$1\text{-}\int_1^2 5x^2dx = [\frac{5x^3}{3}]_1^2 = \frac{5}{3}(2^3-1^3) = \frac{5}{3}(8-1) = \frac{35}{3}$$

$$2\text{-}\int_{-1}^3 (x^2-2x+1)dx = [\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + x]_{-1}^3 = \left[\frac{279}{3} - 9 + 3\right] - [-\frac{1}{3} - 1 - 1]$$

$$= 3 - \left(-\frac{1}{3} - \frac{2}{1}\right) = 3 - \frac{-1-6}{3} = 3 + \frac{7}{3} = \frac{9+7}{3} = \frac{16}{3}$$

تذكر مهم

$$\int_a^b (f1 \pm f2) = \int_a^b f1 \pm \int_a^b f2$$

مثال /اذا كانت $\int_1^3 f2 = 17$, $\int_1^3 f1 = 15$ فاوجد كلا من :-

1- $\int_1^3 (f1 + f2) = \int_1^3 f1 + \int_1^2 f2 = 15 + 17 = 32$

2- $\int_1^3 (f1 - f2) = \int_1^3 f1 - \int_1^3 f2 = 15 - 17 = -2$

مثال / اذا كانت $\int_2^5 f = 8$ فاوجد $\int_2^5 5f$ ؟

$$\int_2^5 5f = 5\int_2^5 f = 5 * 8 = 40$$

مثال/اذا كانت $f(x) = 3x^2 + 2x$ فاوجد $\int_1^2 f(x)dx$

$$\int_1^2 (3x^2 + 2x)dx = [\frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}]_1^2 = (2^3 + 2^2) - (1^3 + 1^2) = (8+4) - (2) = 12 - 2 = 10$$

مثال/اذا كانت $\int_3^7 f = 8$, $\int_1^3 f = 5$ فاوجد $\int_1^7 f$؟

$$\int_1^7 f = \int_1^3 f + \int_1^7 f = 5 + 8 = 13$$

تم الحل بالاعتماد على الخاصيه $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

مثال /لتكن $f(x) = |x|$ اوجد $\int_{-3}^4 f(x)dx$؟

الحل/

f مستمرة على [-3,4] :

$$f(x) = |x| = [\begin{matrix} x & if\ x \geq 0 \\ -x & if\ x < 0 \end{matrix} \quad \because 0 \in [-3,4]$$

$$\therefore \int_{-3}^4 |x|dx = \int_{-3}^0 -x\,dx + \int_0^4 x dx = -\frac{x^2}{2}]_{-3}^0 + \frac{x^2}{2}]_0^4$$

$$= \left(0 - \left(-\frac{9}{2}\right)\right)^{-3} + \left(\frac{16}{2} - 0\right) = \frac{9}{2} + \frac{16}{2} = \frac{25}{2}$$

تذكر

$1-\int_a^a f=0$ $\qquad$ $2-\int_a^b f=-\int_b^a f$

$1-\int_2^2 xdx=\frac{x^2}{2}]_2^2=\frac{4}{2}-\frac{4}{2}=0$

$2-\int_3^2 3x^2dx=-\int_2^3 3x^2dx=-\frac{3x^3}{3}]_2^3=-(27-8)=-19$

$=[-\frac{1}{x}+x^2+x]_1^2 ex\backslash \int_1^2(x^{-2}+2x+1)dx=[\frac{x^{-1}}{-1}+\frac{2x^2}{2}+x]_1^2$

$=\left[-\frac{1}{2}+4+2\right]-[-x+1+1]=-\frac{1}{2}+6-1=-\frac{1}{2}+5=\frac{-1+5}{2}=\frac{9}{2}$

$=\left[\frac{3^5}{5}+2(3)^2\right]-\left[\frac{1^5}{5}+2(1)^2\right] ex\backslash \int_1^3(x^4+4x)dx=\left[\frac{x^5}{5}+\frac{4x^2}{x}\right]_1^3$

$=\left(\frac{243}{5}+18\right)-\left(\frac{1}{5}+2\right)=\frac{243+40}{5}-\frac{1+10}{5}=\frac{333-11}{5}$

$ex\backslash \int_0^2 |x-1|dx$

$|x-1|=\begin{bmatrix} x-1 & \forall x-1\geq 0 & \therefore \forall x\geq 1 \\ -x+1 & \forall x-1<0 & \therefore \forall x<1 \end{bmatrix}$

$\because \quad 1\in[0,2]$

$\therefore \int_0^2 |x-1|dx=\int_0^1(-x+1)dx+\int_1^2(x-1)dx=[-\frac{x^2}{2}+x]_0^1+[\frac{x^2}{2}-x]_1^2$

$=\left(-\frac{1}{2}+1\right)-0+\left(\frac{4}{2}-2\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)=-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}+1=-1+1+1=1$

$=(0+sin0)-(\frac{\frac{\pi^2}{2}}{2}+\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)) ex\backslash \int_{-\frac{\pi}{2}}^0(x+\cos x)dx=\frac{x^2}{2}+\sin x]_{\frac{-\pi}{2}}^0$

$=-\left(\frac{\pi^2}{8}-sin\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi^2}{8}+1$

$$ex\setminus \int_3^2 \frac{x^3-1}{x-1}dx = -\int_2^3 \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}dx = -[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x]_2^3$$

$$= \left[\left(\frac{27}{3}+\frac{9}{2}+3\right)-\left(\frac{8}{3}+\frac{4}{2}+2\right)\right] = -\left[\left(\frac{9}{2}+12\right)-\left(\frac{8}{3}+4\right)\right]$$

$$= -\left[\frac{9+24}{2}-\frac{8+12}{3}\right] = -\left(\frac{33}{2}-\frac{20}{3}\right) = -\frac{99-40}{6} = -\frac{59}{6}$$

اللوغاتيم الطبيعي

نرمز اله بالرمز ln

اللوغارتم الطبيعي بيه مشتقه وبيه تكامل (هسه ناخذ المشتقه) حسب هاي القاعده

معناها واحد على الداله *مشتقه الداله

$$y = \ln x \rightarrow \acute{y} = \frac{1}{x}$$

$$1) y = \ln(8x) \rightarrow \acute{y} = \frac{1}{8x}.8 = \frac{1}{x}$$

$$2) y = \ln\sqrt{x} \rightarrow \acute{y} = \frac{1}{\sqrt{x}}.\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x}$$

$$3) y = ln\sqrt[3]{x^2} = lnx^{\frac{2}{3}} \rightarrow \acute{y} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}}$$

خواص اللوغارتيم العشري

$$1 - lnxy = lnx + lny \qquad 2 - \ln\frac{x}{y} = lnx - lny$$

$$3 - lnx^n = n\,lnx \qquad 4 - ln1 = 0$$

تكامل اللوغارتيم العشري

$$\int \frac{1}{x}dx = ln|x| + c$$

معنا اذا لكينه مشتقه المقام بالبسط مباشر تكاملها بالln

امثلة / جد تكاملات الدوال الاتية :-

$$1\int \frac{1}{x+1}dx = ln|x+1| + c$$

$$2)\int \frac{x^2}{x^3+6}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3+6}dx = \frac{1}{3}\, ln|x^3+6| + c$$

$$3)\int \frac{sinx}{1+cosx}dx = -\int -\frac{sinx}{1+cosx}dx = -ln|1+cosx| + c$$

$$4)\int \sec^2\frac{3x}{2+tan3x}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3sec^2 3x}{2+tan3x}dx = \frac{1}{3}ln|2+tan3x| + c$$

$$5)\int secx\,dx = \int secx.\frac{secx+tanx}{secx+tanx}dx = \int \frac{\sec^2 x + secx\,tanx}{tanx+secx}dx$$

$$= ln|tanx+secx| + c$$

$$6)\int cscx\,dx = \int cscx.\frac{cscx+cotx}{cscx+cotx}dx = -\int \frac{-(\csc^2 x + cscx\,cotx}{cotx+cscx}dx$$

$$= ln|cotx+cscx| + c$$

الدالة الاسية e^x

مشتقة الدالة الاسية:-

$$y = e^x \rightarrow \acute{y} = e^x.(\text{مشتقة الاس})$$

امثلة/ جد مشتقة الدوال الاتية:-

$$1\text{-}\ y = e^{3x} \rightarrow \acute{y} = e^{3x}.3 = 3e^{3x}$$

$$2\text{-}\ y = e^{\sqrt{x}} \rightarrow \acute{y} = e^{\sqrt{x}}.\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$$

$$3\text{-}y = e^{x^2+2x+1} \rightarrow \acute{y} = e^{x^2+2x+1}.(2x+2)$$

تكامل الدالة الاسية

$$\int e^x dx = e^x + c$$

شرط اكو مشتقة الاس ياله تكدر تكاملها

$$1)\int e^{x^2-2x}.(x-1)dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2-2x}.2(x-1)dx = \frac{1}{2}e^{x^2-2x} + c$$

$$3\text{-}\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int e^{x^{\frac{1}{2}}}.x^{\frac{1}{2}}dx = 2\int e^{x^{\frac{1}{2}}}.\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = 2e^{\sqrt{x}} + c$$

$$4\text{-}\int (5 + 2e^{2x})dx = \int 5dx + \int e^{2x}.2dx = 5x + e^{2x} + c$$

$$5\text{-}\int e^{cos2x}.sin2xdx = -\frac{1}{2}\int e^{cos2x}.-2sin2x\,dx = -\frac{1}{2}e^{cos2x} + c$$

$$6\text{-}\int \frac{e^{tan5x}}{\cos^2 5x}dx = \int e^{tan5x}.\sec^2 5x\,dx = \frac{1}{5}\int e^{tan5x}.5\sec^2 5x\,dx$$

$$= \frac{1}{5}e^{tan5x} + c$$

ملاحظة/ $e^{lnx} = x \quad , \quad lne^x = x$

اذا جان عدنه عدد مرفوع الى داله نستخدم القاعده

$$y = a^u \rightarrow \acute{y} = a^u.lna.\frac{du}{dx}$$

امثلة/ جد المشتقة:-

$$1\text{-}y = 3^{2x-5} \rightarrow \acute{y} = 3^{2x-5}.ln3.(2) = 2ln3.3^{2x-5}$$

$$2\text{-}y = 2^{-x^2} \rightarrow \acute{y} = 2^{-x^2}.ln2.(-2x) = -2ln2.2^{-x^2}$$

مثال:-جد قيمة $a \in R$ اذا علمت ان $\int_1^a \left(x+\frac{1}{2}\right)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\, dx$.

الحل:

$$\int_1^a \left(x+\frac{1}{2}\right)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\, dx$$

$$\therefore [\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x]_1^a = 2tanx]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\left(\frac{a^2}{2}+\frac{1}{2}a\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1)\right) = 2\left(tan\frac{\pi}{4}-tan0\right)$$

$$\frac{a^2}{2}+\frac{a}{2}-1=2 \rightarrow \frac{a^2}{2}+\frac{a}{2}-3=0 \quad *3$$

$$a^2+a-6=0 \quad \rightarrow \quad (a+3)(a-2)=0$$

اما $a+3=0 \rightarrow a=-3$

او $a-2=0 \rightarrow a=2$

مثال:- لتكن $f(x)=x^2+2x+k$ حيث $k \in R$ دالة نهايتها الصغرى تساوي (-5) فجد $\int_1^3 f(x)dx$.

الحل: ∵ للدالة نهاية صغرى $\acute{f}(x)=2x+2=0$

$2x=-2 \rightarrow x=-1$ حرجة

∴ (-1,-5) نهاية صغرى نعوضها في الدالة لايجاد k

$$\therefore \ -5=(-1)^2+2(-1)+k \qquad \therefore \ -5=1-2+k$$

$$-5=-1+k \qquad \therefore k=-5+1=-4$$

$$f(x)=x^2+2x-4$$

$$\therefore \int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 (x^2+2x-4)dx = [\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}-4x]_1^3$$

$$= [\left(\frac{27}{3}+9-12\right)-\left(\frac{1}{3}+1-4\right) = 6-\left(\frac{1}{3}-3\right) = 6-\frac{1}{3}+3 = \frac{9}{1}-\frac{1}{3} = \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3}$$

مثال:-اذا كان للمنحني $f(x) = (x-3)^3 + 1$ نقطة انقلاب(a,b) جد القيمة العددية للمقدار $\int_0^b \acute{f}(x)\,dx -$ $\int_0^a \acute{f}(x)dx$.

الحل:

∵ للدالة نقطة انقلاب $\therefore \acute{f}(x) = 3(x-3)^2.1$

$\acute{\acute{f}}(x) = 6(x-3)^1.1 = 6x - 18 = 0 \quad \therefore 6x = 18 \quad \div 6 \quad \rightarrow x = 3$ مرشحة

$f(3) = (3-3)^3 + 1 = 1 \quad \therefore (3,1)$ نقطة انقلاب $\therefore a = 3, b = 1$

$$\int_0^b \acute{f}(x)dx - \int_0^a \acute{\acute{f}}(x)dx = \int_0^1 3(x-3)62\,dx - \int_0^3 (6x-18)dx$$

$$= 3.\frac{(x-3)^3}{3}]_0^1 - [\frac{6x^2}{2} - 18]_0^3$$

$$= [(1-3)^3 - (0-3)] - [3(3)^2 - 18(3)) - (3(0)^2 - 18(0)]$$

$$= [-8+27] - [27-54] = -8 + 27 = 46$$

المساحات

طريقه الحل:-

1-نساوي الداله بالصفر نطلع قيمه x

2-نشوف قيمه x تنتمي للفتره الي منطيها بالسوال لو لا

3-اذا جانت القيمه الي طلعت تنتمي للفتره معناه نجزء التكامل (نرتب القيم تصاعديا) واذا مجانت تنتمي مانجزء التكامل

4-نكامل كل جزء حصلنه عليه من نقطه 3

5-خلي في بالك نحط مطلق للمساحه لان لايمكن ان تكون سالبه

مثال١/ جد المساحة المحدد بمنحني الدالة $f(x)=x^3-4x$ ومحور السينات بالفترة $[-2,2]$

الحل /

$x^3-4x=0$ ← خطوه رقم 1 ساويت الداله بالصفر

$x(x^2-4)=0$

$x=0$ ← طلعت قيم اكس طلع 0ينتمي اما -+2 من حدي التكامل

$or\ x^2-4=0 \implies x^2=4 \implies x=\mp 2$ ← جزئنه التكامل

الفترات هي $[-2,0],[0,2]$

$A_1=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)dx=\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{-2}^{0}$ ← اجريت التكامل ع كل فتره جزئناها

$[0]-[\frac{(-2)^4}{4}-2(-2)^2]=-[4-8]=4$

$A_1=\int_{0}^{2}(x^3-4x)dx=\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{0}^{2}$

$=[\frac{(-2)^4}{4}-2(-2)^2]-[0]=4-8=-4$

$A=|A_1|+|A_2|=4+4=8$ وحدة مربعة ← جمعنه التكاملات خوش

مثال/ جد مساحة المنطقة التي يحدها مخطط الدالة $y=x^2$ ومحور السينات والمستقيمات $x=3$, $x=1$ ؟

الحل:-

نجعل $y=0$ $\quad\therefore x=0\notin[1,3]$ $\quad\therefore y=0=x^2$

$$A=\int_1^3 x^2dx=\frac{x^3}{3}]_1^3=\left[\frac{27}{3}-\frac{1}{3}\right]=\frac{26}{3}$$

$$A=\left|\frac{26}{3}\right|=\frac{26}{3}$$

مثال/جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=x^3-3x^2+2x=0$ ومحور السينات.

الحل:-

نجعل $y=0$ $\quad\therefore x^3-3x^2+2x=0$

$x(x^2-3x+2)=0 \rightarrow x(x-2)(x-1)=0$

$x-1=0 \rightarrow x=1$ او $x-2=0 \rightarrow x=2$ او $x=0$ اما

الفترات $[0,1]$, $[1,2]$

$$A1=\int_0^1 (x^3-3x^2+2x)dx=[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}]_0^1=\left(\frac{1}{4}-1^3+1^2\right)-0$$

$$=\frac{1}{4}-1+1=\frac{1}{4}$$

$$A2=\int_1^2 (x^3-3x^2+2x)dx=[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}]_1^2$$

$$=\left[\left(\frac{16}{4}-8+4\right)-\left(\frac{1}{4}-1+1\right)\right]=-\frac{1}{4}$$

$$A=|A1|+|A2|=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

مثال/ جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=x^2-1$ ومحور السينات على الفترة [-2,3]

الحل:

نجعل $y=0$ $\quad\therefore x^2=1\quad\therefore x^2-1=0$

$$x=1\pm\in[-2,3]$$

الفترات $[-2,-1]\ ,\quad[-1,1]\ ,\quad[1,3]$

$$A1=\int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx=\frac{x^3}{3}-]_{-2}^{-1}=\left(-\frac{1}{3}-(-1)-\left(-\frac{8}{3}\right)-(-2)\right)$$

$$=-\frac{1}{3}+1+\frac{8}{3}-2=\frac{7}{3}-1=\frac{7-3}{3}=\frac{4}{3}$$

$$A2=\int_{-1}^{1}(x^2-1)dx=\frac{x^3}{3}-x]_{-1}^{1}=(\left(\frac{1}{3}-1\right)-\left(-\frac{1}{3}-(-1)\right)$$

$$=\frac{1}{3}-1+\frac{1}{3}-1=\frac{2}{3}-2=\frac{2-6}{3}=-\frac{4}{3}$$

$$A3=\int_1^3(x^2-1)dx=\frac{x^3}{3}-x]_1^3=(\left(\frac{27}{3}-3\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right))$$

$$=6-\frac{1}{3}+1=7-\frac{1}{3}=\frac{21-1}{3}=\frac{20}{3}$$

$$A=|A1|+|A2|+|A3|$$

$$= \left|\frac{4}{3}\right| + \left|-\frac{4}{3}\right| + \left|\frac{20}{3}\right| = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{20}{3} = \frac{28}{3}$$

مثال/جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $y = cosx$ ومحور السينات على الفترة $[-\pi, \pi]$.

الحل:

نجعل $y = 0$

$$\therefore cosx = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in [-\pi, \pi]$$

$$x = -\frac{\pi}{2} \in [-\pi, \pi]$$

الفترات $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$$A1 = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} cosxdx = sinx]_{-\pi}^{\frac{-\pi}{2}} = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin(-\pi) = -sin\frac{\pi}{2} + sin\pi = -1$$

$$A2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cosx\, dx = sinx]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = sin\frac{\pi}{2} + sin\frac{\pi}{2} = 1 + 1 = 2$$

$$A3 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} cosx\, dx = sinx]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = sin\pi - sin\frac{\pi}{2} = 0 - 1 = -1$$

$$A = |A1| + |A2| + |A3| = |-1| + |2| + |-1| = 4$$

مساحة المنطقة المستوية المحددة بمنحنيين

خطوات الحل :-

1-نساوي الدالتين نطلع نقاط التقاطع الي تنتمي للفتره

2- بعدها راح تكون داله جديده الي هيه (فرق بين دالتين) الي هي نكاملها .

مثال/ جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $y = \sqrt{x}$ و المستقيم $y = x$.

الحل:

$\sqrt{x} = x$ بالتربيع

$$x = x^2 \rightarrow x^2 - x = 0 \quad x(x-1) = 0$$

$$\therefore x = 1 \quad \text{او} \quad x - 1 = 0 \quad \text{اما} \quad x = 0$$

$$A=\int_0^1(\sqrt{x}-x)dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}]_0^1=\left(\frac{1^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\right)-0=\frac{1}{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{4-3}{2}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore A=\left|\frac{1}{6}\right|=\frac{1}{6}$$

مثال / جد مساحة المنطقة المحصورة المحددة بالمنحنيين $f(x)=cosx$,$g(x)=sinx$ وعلى الفترة $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ ؟

$$sinx=cosx$$

$$\frac{\text{sinx}}{\text{cosx}}=1 \qquad \rightarrow tanx=1 \quad \text{موجب}$$

$$x=\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{الاول}$$

$$x=\frac{5\pi}{4}\notin\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

الفترات $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right],\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$

$$A1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}(cosx-sinx)dx=[sinx+cosx]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=[\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}]-\left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right]-[-1+0]$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}+1=\sqrt{2}+1$$

$$A2=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(cosx-sinx)dx=[sinx+cosx]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=[\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}]-[\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}=[1+0]-\left[\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right]=1-\sqrt{2}$$

$$A=|A1|+|A2|=\left|\sqrt{2}+1\right|+\left|-(\sqrt{2}-1)\right|=\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1=2\sqrt{2}$$

المسافه

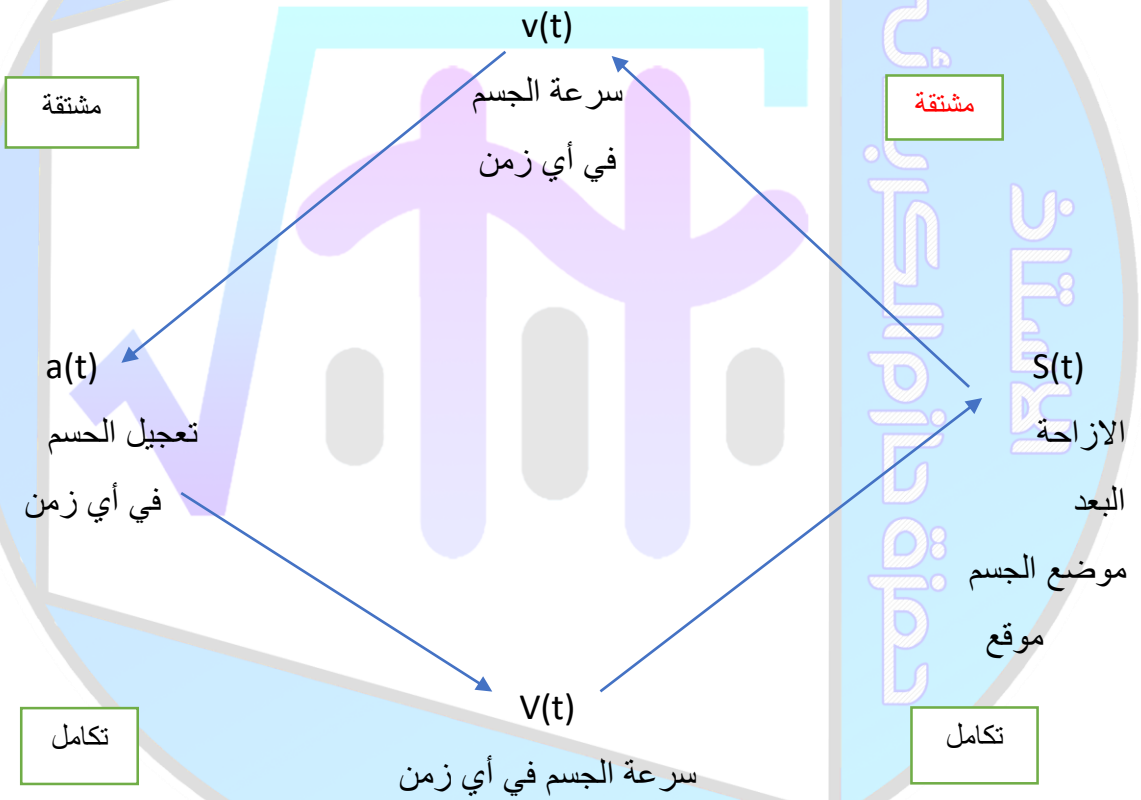
جسم يتحرك على خط مستقيم ويكلك المساحه املقطوعه خلال فتره زمنيه [t1,t2] نستخدم القانون

$$d = \left| \int_{t1}^{t2} v(t)dt \right|$$

الازاحه والسرعه والتعجيل

$$S = \int_{t1}^{t2} v(t)dt$$

مخطط



توضيح

1-نشتق السرعه ينطيني تعجيل

2-نكامل التعجيل ينطيني سرعه

3-نكامل السرعه ينطيني ازاحه

4-نشتق الازاحه ينطيني سرعه

مثال/ جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V(t) = 2t - 4\ m/s$ فجد :-

a – المسافة المقطوعة في الفترة [1,3]

$2t - 4 = 0 \rightarrow \quad 2t = 4 \rightarrow \quad t = 2 \quad \in [1,3]$

الفترات $[1,2]$, $[2,3]$

$$d = \left|\int_1^2 V(t)dt\right| + \left|\int_2^3 V(t)dt\right|$$

$$= \left|\int_1^2 (2t-4)dt\right| + \left|\int_2^3 (2t-4)dt\right| = [\frac{2t^2}{2} - 4t]_1^2 + [\frac{2t^2}{2} - 4t]_2^3$$

$$= |(4-8) - (1-4)| + |(9-12) - (4-8)| = |-4+3| + |-3+4| = 2$$

b- الازاحة المقطوعة في الفترة [1,3]

$$S = \int_1^3 V(t)dt = \int_1^3 (2t-4)dt = [\frac{2t^2}{2} - 3t]_1^3$$

$$= (9-12) - (1-4) = -3+3 = 0$$

c – المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة

$$d = \left|\int_4^5 V(t)dt\right| = \left|\int_4^5 (2t-4)dt\right| = \left|[\frac{2t^2}{2} - 4t]_4^5\right|$$

$$= |(25-20) - (16-16)| = |5| \rightarrow d = 5$$

d – بعده بعد مضي 4 ثواني من بدء الحركة

$$S = \int_0^4 V(t)dt = \int_0^4 (2t-4)dt = [\frac{2t^2}{2} - 4t]_0^4$$

$$= (16-16) - (0-0) = 0$$

مثال/ جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $18m/s^2$ فأذا كانت سرعته قد أصبحت $82m/s$ بعد مرور 4 ثواني من بدء مرور الحركة جد :-

a- المسافة خلال الثانية الثالثة

$$d = \left|\int_2^3 V(t)dt\right| \qquad V(t) = ?$$

$$V(t) = \int a(t)dt = \int 18dt = 18t + c$$

∵ السرعة 82 بعد مرور 4 ثواني

$$V(t) = 18t + c \rightarrow 82 = 18(4) + c \rightarrow c = 10$$

$$V(t) = 18t + 10$$ السرعة في أي زمن

$$d = \left|\int_2^3 (18t + 10)dt\right| = \left|\frac{18t^2}{2} + 10t\right]_2^3\right| = |[81 + 30| - |[36 + 20]|$$

$= |111 - 56| = |55| = 55m$ المسافة المقطوعة في الثانية الثالثة

b- بعده عند نقطة بدء الحركة بعد مرور 3 ثواني

$$S = \int_0^3 V(t)dt = \int_0^3 (18t + 10) = \frac{18t^2}{2} + 10t]_0^3$$

$(81 - 30) - 0 = 111m$ البعد بعد مرور 3 ثواني من بدء الحركة

مثال:-تتحرك نقطة من السكون وبعد t ثانية من بدء الحركة اصبحت سرعتها $100t - 6t^2 m/s$. اوجد الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الاول الذي بدات منه.ثم احسب التعجيل عندها.

الحل:- ∵ النقطة تعود الى موضعها الاول اي الازاحة =صفر , $S=0$

$$S = \int v(t)dt = \int (100 - 6t^2)dt = \frac{100t^2}{2} - \frac{6t^3}{3} + c$$

∵ الجسم يتحرك من السكون ∴ $S = 0 \ , \ t = 0$

$$o = 50(0)^2 - 2(0)^3 + c \qquad \therefore c = 0$$

$\therefore S = 50t^2 - 2t^3 \rightarrow \therefore o = 50t^2 - 2t^3$ ÷ 2 لان الجسم يعود الى موضعه الاول

$25t^2 - t^3 = 0$ اي $S = 0$

$t^2(25 - t) = 0$ اما $t^2 = 0 \quad \therefore t = 0$ يهمل

او $25 - t = 0 \quad \therefore t = 25$ الزمن اللازم لعودة الجسم الى موضعه الاول

$a(t) = v(t) = 100 - 12t$

$a(25) = 100 - 12(25) = 100 - 300 = -200 m/\sec^2.$

الحجوم الدورانية

شوف مجرد قانونين صادي واسيني وتطبيق مباشر

اذجان السوال محور سيني $V = \pi \int_a^b y^2 dx$

فتره التكامل هوه ينطيها الك x=a الى x=b هيج ينطيها وحنا متعودين الصغير جوه والجبير فوك

اذجان صادي $V = \pi \int_a^b x^2 dy$

فتره التكامل هوه ينطيها الك y=a الى y=b هيج ينطيها وحنا متعودين الصغير جوه والجبير فوك

مثال/المنطقة المحددة بين $0 \le x \le 4$, $y = \sqrt{x}$ ومحور السينات دارت حول محور السينات جد حجمها ؟

الحل:- $V = \pi \int_a^b y^2 dx \quad \because y = \sqrt{x} \to y^2 = x$

$x = a$

$= \pi \int x dx = \pi \frac{x^2}{2}]_0^4$

$V = \pi \left(\frac{16}{2} - 0\right) = 8\pi$ وحدة مكعبة

مثال/المنطقة المحددة بين المنحني $1 \le y \le 4$, $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$ دارت حول الصادات جد حجمها؟

الحل:-

$v = \pi \int_1^4 x^2 \, dy \quad \because x = \frac{1}{\sqrt{y}} \quad \to x^2 = \frac{1}{y}$

$= \pi \int_1^4 \frac{1}{y} dy = \pi ln|y|]_1^4 = \pi(ln4 - ln1) = \pi ln4 = \pi ln2^2 = 2ln2$

مثال:-اوجد الحجم الدوراني المتولد من دوران القطع المكافئ $y = x^2$ والمستقيمين x=2 و x=1 حول المحور السيني .

الحل:-

$$v = \pi \int_{x=a}^{b} y^2 \, dx \qquad \because y = x^2 \qquad \therefore y^2 = x^4$$

$$= \pi \int_{x=1}^{2} x^4 \, dx = \pi \frac{x^5}{5}]_1^2 = \pi\left(\frac{32}{5} - \frac{1}{5}\right) = \frac{31}{5}\pi$$

مثال/ اوجد الحجم الناتج من دوران منحني الدالة $y = x^2 + 1$ والمستقيم y=4 حول المنحني الصادي .

الحل:-

$$v = \pi \int_{y=a}^{b} x^2 \, dy \qquad y = x^2 + 1 \to x^2 = y - 1$$

$$= \pi \int_{1}^{4} (y - 1) \, dy \qquad x = 0 \text{ نجعل و نجد } y$$

$$\therefore y = 0^2 + 1 = 1 = y$$

$$= \pi\left(\frac{y^2}{2} - y\right)]_1^4 = \pi\left[\left(\frac{16}{2} - 4\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] = \pi(4 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \pi\left(4 + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi(8+1)}{2}$$

$$= \frac{9}{2}\pi$$

القسم الثاني الامتحان الشامل

س1/جد تكامل كل مماياتي ؟

① $\int \sqrt{e^{2x-4}}\ dx$

② $\int \frac{x}{x-1}\ dx$

③ $\int \frac{\sqrt{(cot2x)}}{\sin^2 x}\ dx$

④ $\int \cos^2 3x\ dx$

⑤ $\int \frac{7-lnx}{x(3+lnx)}\ dx$

⑥ $\int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}}\ dx$

⑦ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sinx+cosx)^2 dx$

⑧ $\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{3x^3-2x^5}\ dx$

⑨ $\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9}\ dx$

⑩ $\int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1}\ dx$

س2/جد المساحة المحددة بمنحني الدالة لكل مماياتي ؟

1) $f(x)=sin4x$ $\quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

2) $f(x)=(x-1)^3$ $\quad x\epsilon\ [-1,3]$

س3/جد المساحة المحددة بمنحني دالتين ؟

1) $f(x)=x$ $\quad f(x)=\sqrt{x}$ $\quad x\in[-1,1]$

2) $f(x)=sinx$ $\quad g(x)=sinxcosx$ $\quad x\in[0,2\pi]$

س4\جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t)=3t^2+4t+7$ جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مضي 4 ثواني من بدا الحركة ثم جد التعجيل عندها ؟

س5/ المنطقة المحددة بين $0\le x\le 4$ $\quad y=\sqrt{x}$ ومحور السينات دارات حول محور السينات جد حجمها

الفصل الخامس

المعادلات التفاضليه

المعادله التفاضليه اشلون نعرفها (من نلكي بالمعادله مشتقه وحده اوثنين ....)نكول عليها معادله تفاضليه

بعض الامثله الي تبين النه (المعادله) هي معادله تفاضليه

$$1)\ \frac{dy}{dx} = 3x - 4x \qquad 4)\ y' + x^2y + x = y$$
$$2)\ x^2y'' + xy' - x^3y = 0$$

شلون عرفنه المعادلات الي فوك هي معادلات تفاضليه لان بيها مشتقات

(هسه عرفنه المعادله نجي لشي مهم هو رتبه ودرجه المعادله التفاضليه)

1- رتبه المعادله التفاضليه .....هي اعلى مشتقه بالمعادله يعني نشوف المشتقات مثلا اولى وثانيه نكول الرتبه الثانيه لان اعلى شي بيها الثانيه)

2-درجه المعادله التفاضليه.....هي اعلى اس ل علو مشتقه بالمعادله التفاضليه

مثال جد رتبه ودرجه المعادله التفاضليه :-

$1)\ \frac{dy}{dx} + x - 7y = 0$ من الرتبه الاولى والدرجه الاولى

$2)\ \frac{d^2y}{dx^2} = 5x - 3xy + 7$ من الرتبه الثانيه والدرجه الاولى

$3)\ (y''')^3 + y' - y = 0$ من الرتبه الثالثه والدرجه الثالثه

$7)\ y^{(4)} + cosy + x^2y\,y' = 0$ من الرتبه الرابعه والدرجه الاولى

ملاحظه مهمه:-منكدر نطلع (رتبه ودرجه المعادله)اذا جان المعادله بيها جذر (الحل نتخلص من الجذر ياله نكدر)

$8)\ (y'')^2 = \sqrt{1 + (y')^2}$ نربع الطرفين علمود اتخلص من الجذر

$(y'')^4 = \left(1 + (y')\right)$ الرتبه الثانيه والدرجه الرابعه

حل المعادلات التفاضليه الاعتياديه

بالسوال راح يكون عدنه معادله (عرفنها شنو) وعدنا علاقه

اكو شروط للعلاقه هي

1-مابيها اي مشتقه

2-معرفه على فتره معينه (هاي موشغلك شغل ابو السوال)

3-تحقق المعادله التفاضليه (هاي النقطه هي شغلك)

طريقه الحل :

1-اروح اسئل المعادله التفاضليه كم مشتقه تحتاجين (نشتق العلاقه بعدد رتبه المعادله يعني اذ رتبه المعادله 2 اشتق مرتين)

2-نشتق ونعوض بالطرفين مال العلاقه لازم الطرف الايمن يساوي الايسر

مثال / بين ان العلاقه $y = x^2 + 3x$ حلا للمعادله التفاضليه $xy' = x^2 + y$

$$y = x^2 + 3x \rightarrow y' = 2x + 3$$

شتقيت العلاقه مره وحده لان المعادله التفاضليه تريد مني مشتقه وحده

$$LHS = xy' = x(2x + 3) = 2x^2 + 3x$$
$$R.H.S = x^2 + y = x^2 + x^2 + 3x \rightarrow 2x^2 + 3x$$
$$L.H.S = R.H.S$$

العلاقه تمثل حلا للمعادله التفاضليه.:

مثال/ اثبت ان $y = x\ln|x| - x$ احد حلول المعادله $x\frac{dy}{dx} = x + y$ $x > 0$

$$y = xln|x| - x$$
$$\frac{dy}{dx} = x.\frac{1}{x} + \ln|x|\,1 - 1$$
$$= 1 + \ln|x| - 1 = \ln|x|$$
$$L.H.S = x\frac{dy}{dx} = xlnx$$
$$R.H.S = x + y$$
$$= x + xln|x| - x = xlnx|x|$$

$\therefore L.H.S = R.H.S$

مثال / هل $y^2 = 3x^2 + x^3$ هو حلا للمعادله $y\,y'' + (y')^2 - 3x = 5$

$y^2 = 3x^2 + x^3$
$2y\,y' = 6x + 3x^2$
$2y.y + y'.2.y' = 6 + 6x$
$[2y\,y'' + 2(y')^2 = 6 + 6x] \div 2$
$yy'' + (y')^2 = 3 + 3x$
$yy'' + (y')^2 - 3x = 3$
$L.H.S = y\,y'' + (y')^2 - 3x = 3$
$R.H.S = 5$

العلاقه لاتمثل حلا للمعادله التفاضليه

مثال/ برهن ان $y=3cos2x+2sin2x$ هو حلا للمعادله التفاضليه $y''+4y=0$

$y = 3cos2x + 2sin2x$
$y' = 3[-sin2x].2 + 2[cos2x].2$
$= -6sin2x + 4cos2x$
$y'' = -6[cos2x].2 + 4[-sin2x].2$
$= -12cos2x - 8sin2x$
$L.H.S = y'' + 4y = -12cos2x - 8sin2x + 4[3cos2x + 2sin2x]$
$= -12cos2x - 8sin2x + 12cos2x + 8sin2x$
$R.H.S = 0$
$L.H.S = R.H.S$

العلاقه تمثل حلا للمعادله التفاضليه

مثال:-هل $y=tanx$ حلا للمعادله $y'' = 2y(1 + y^2)$

$y = tanx$
$y' = \sec^2 x = (secx)^2$
$y'' = 2(secx)^1.secx.tanx.1$
$= 2\sec^2 x\,tanx$
$L.H.S = y'' = 2\sec^2 x\,tanx$
$R.H.S = 2y(1 + y^2)$
$= 2tanx(1 + \tan^2 x) \quad = 2tanx(\sec^2 x)$

$L.H.S = R.H.S$

.: العلاقه تمثل حلا للمعادله التفاضليه

طرق حل المعادلات التفاضليه

1- طريقه فصل المتغيرات

طريقه الحل:-

1-نخلي كل الحدود الي بيها x ويه dx بجه يعني ماريد اي اثرلل ريمهم (اما نقسم اونضرب حسب السوال)

2- نخلي كل الحدود الي بيها ريه dyبجه يعني ماريد اي اثرلل xيمهم

3-من فصلنه نجي انكامل الطرفين

ملاحظه:-1-اذا لكينه y' تحول الى $\frac{dy}{dx}$

2-اذا انطاني قيمه x,y نعوضهم بعد التكامل علمود نطلع قيمهة c

مثال:-حل المعادله $\frac{dy}{dx} = 2x + 5$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+5}{1} \rightarrow dy = (2x+5)dx$$
$$\int dy = \int (2x+5)dx$$
$$y = \frac{2x^2}{2} + 5x + c$$
$$y = x^2 + 5x + c$$

مثال / حل المعادله $dy = sinx\cos^2 y\, dx$ حيث $y \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, cos \neq 0$

$$[dy = sinx\cos^2 y\, dx\,] \div \cos^2 y$$
$$\frac{dy}{\cos^2 y} = \frac{\sin\cos^2 y}{\cos^2 y}dx \rightarrow \int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int sinxdx$$
$$= \int \sec^2 y = \int sinx\, dx \rightarrow tany = -cosx + c$$

مثال/ اوجد حل المعادله التفاضليه $y' - x\sqrt{y} = 0$ عندما x=2 ,y=9

مادام بالسوال انطاني قيمه x,y معناه وره التكامل تعوضهم

$$y' - x\sqrt{y} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - x\sqrt{y} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = x\sqrt{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy^{\frac{1}{2}}}{1} \rightarrow \left[dy = x\, y^{\frac{1}{2}} dx\right] \div y^{\frac{1}{2}} \rightarrow \left[\frac{dy}{y^{\frac{1}{2}}} = \frac{xy^{\frac{1}{2}}dx}{y^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$\frac{dy}{y^{\frac{1}{2}}} = xdx \rightarrow \int y^{\frac{-1}{2}} dy = \int xdx$$

$$\frac{y^{\left(-\frac{1}{2}\right)}}{\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{2} + c$$

$$2y^{\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{2} + c \qquad [x = 2\ , y = 9]$$

$$2(9)^{\frac{1}{2}} = \frac{(2)^2}{2} + c \rightarrow 2\sqrt{9} = \frac{4}{2} + c \rightarrow 2(3) = 2 + c \rightarrow 6 = 2 + c$$

$$6 - 2 = c \rightarrow c = 4$$

$$\therefore \left[2\, y^{\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{2} + 4\right]\frac{1}{2} \rightarrow y^{\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{4} + 2$$

$$\left[\sqrt{y} = \frac{x^2}{4} + 2\right] \text{ بالتربيع} \rightarrow y = \left(\frac{x^2}{4} + 2\right)^2$$

مثال / حل المعادله $\frac{dy}{dx} = e^{2x+y}$ حيث y=0 عندما x=0

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x+y} \rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{2x}.e^{y}$$

$$[dy = e^{2x}.e^{y}dx\,] \div e^{y}$$

$$\frac{dy}{e^{y}} = \frac{e^{2x}e^{y}dx}{e^{y}} \rightarrow e^{-y}dy = \int e^{2x}dx$$

$$-e^{-y} = \frac{1}{2}e^{2x} + c \rightarrow -e^{0} = \frac{1}{2}e^{0} + c \rightarrow -1 = \frac{1}{2} + c \rightarrow -1 - \frac{1}{2} = c$$

$$c = \frac{-3}{2} \rightarrow \left[-e^{-y} = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}\right].(-1)$$

$$e^{-y} = -\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{3}{2} \rightarrow \left[\frac{1}{e^y} = \frac{3 - e^{2x}}{2}\right]$$ نقلب الطرفين

$$e^y = \frac{2}{3 - e^{2x}} \rightarrow \ln e^y = \ln \frac{2}{3 - e^{2x}} \rightarrow y = \ln \left|\frac{2}{3 - e^{2x}}\right|$$

$$ex\backslash yy' = 4\sqrt{(1 + y^2)^3}$$

$$y\frac{dy}{dx} = 4(1 + y^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{ydy}{dx} = \frac{4(1 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{1}$$

$$\left[y\,dy = 4(1 + y^2)^{\frac{3}{2}}dx\right] \div (1 + y^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{ydy}{(1 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4(1 + y^2)^{\frac{3}{2}}dx}{(1 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int \frac{ydy}{(1 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \int 4\,dx$$

$$\int y(1 + y^2)^{-\frac{3}{2}}dy = \int 4dx$$

مشتقه الداخل $2y$ موجوده غير كامله

$$\frac{\frac{1}{2}(1 + y^2)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = 4x + c \rightarrow \frac{1}{2}.\frac{-2}{1}(1 + y^2)^{\frac{-1}{2}} = 4x + c$$

$$\frac{(-1)}{\sqrt{1 + y^2}} = 4x + c \text{ بالتربيع} \rightarrow \frac{1}{1 + y^2} = (4x + c)^2 \text{ قلب الطرفين}$$

$$1 + y^2 = \frac{1}{(4x + c)^2} \rightarrow y^2 = \frac{1}{(4x + c)^2} - 1$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{(4x + c)^2} - 1}$$

حل المعادله التفاضليه المتجانسه

نستخدمها من منكدرنستخدم طريقه الفصل (واذا جان xمجموع او مطروح من y) (زين شلون نعرف المعادله متجانسه لاحظ)

1-نباوع على مجموع الاسس بكل طرف لازم متساوي زين نطبق مثال وشوف

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^3y+y^3x}{3x^3y}$$

x^3y ← x^3y^1 مجموع الاسس $= 3+1=4$

y^3x ← y^3x^1 مجموع الاسس $= 3+1=4$

$3x^2y$ ← x^3y^1 مجموع الاسس $= 3+1=4$

الطريقه اعلاه هي بدلاله المجموع

مادام تساوت الاسس يعني متجانسه

ملاحظه /كل الدوال الدائريه والاسيه غير متجانسه الا اذانكتبتالزاويه مالتهما بهل صيغه , x/yوالاس كذالك

هسه من عرفنه المعادله المتجانسه طريقه الحل(سهله جدا)

خطوات الحل :-

1-نكتب المعادله بالصوره = $\frac{dy}{dx}$

2-نقسم بسط ومقام الطرف الايمن على اعلاه اس لل x راح تكون عدنه بهل صوره $\left(\frac{y}{x}\right)^{\text{اس}}$

3-نعوض مكان كل $\frac{y}{x}$ ب v راح تكون عدنه معادله 1

4-نفرض y=vx ونشتقها $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$ راح تكون عدنه معادله 2

5-نعوض مكان ال $\frac{dy}{dx}$ بمعادله 1 ب $v+x\frac{dv}{dx}$

6-ننقل v للطرف الايمن

7-نفصل المتغيرات

8- نكامل الطرفين

9- نعوض $\frac{y}{x}$ مكان كل v

مثال:- حل المعادله التفاضليه $y' = \frac{3y^2-x^2}{2xy}$

$$y' = \frac{(3y^2 - x^2)}{2xy} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(3y^3 - x^2)}{2xy}$$

نقسم على x^2

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{3y^3 - x^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{3y^2}{x^2}\right) - \left(\frac{x^2}{x^2}\right)}{\frac{y}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{\frac{y}{x}} \qquad [\, v = \frac{y}{x} \,]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3v^2 - 1}{2v} \dots\dots\dots 1$$

$$\rightarrow y = vx \rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{3v^2 - 1}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{3v^2 - 1}{2v} - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{(3v^2 - 1 - 2v^2)}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{(v^2 - 1)}{2v} \qquad [dv \text{ نقسم عله }]$$

$$\frac{x}{dx} = \frac{v^2 - 1}{2vdv} \quad \text{نقلب الطرفين}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{2v}{v^2 - 1}\, dv$$

$$ln\,|x| = ln|v^2 - 1| + ln|c|$$

$$ln|x| = ln|(v^2-1) - c| \rightarrow x = \mp(v^2-1) - c$$

مثال- حل المعادله $(3x-y)y' = x+y$

$$(3x-y)\frac{dy}{dx} = x+y \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{3x-y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x+y}{x}}{\frac{3x-y}{x}} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x}{x}+\frac{y}{x}}{\frac{3x}{x}-\frac{y}{x}} \qquad \left[v = \frac{y}{x}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+v}{3-v} \dots\dots\dots 1$$

$$y = vx \rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{3+v} \rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{3-v} - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v-3v+v^2}{3-v} \rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1-2v+v^2}{3-v} \qquad [dv \text{ نقسم}]$$

$$\frac{x}{dx} = \frac{1-2v+v^2}{(3-v)dv} \quad [\text{بقلب الطرفين}]$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{(3-v)dv}{1-2v+v^2}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{3-v}{(1-v)^2}dv \rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2+1-v}{(1-v)^2}dv \rightarrow \frac{dx}{x} = \left[\frac{2}{(1-v)^2} + \frac{1-v}{(1-v)^2}\right]dv$$

$$\int\frac{dx}{x} = \int 2(1-v)^{-2}dv + \int\frac{1}{1-v}dv$$

$$ln|x| = 2\frac{(1-v)^{-1}}{-1} + [-ln|1-v| + c$$

$$ln|x| = \frac{2}{1-v} - ln|1-v| + c \rightarrow ln|x| = \frac{2}{1-\frac{y}{x}} - ln\left|1-\frac{y}{x}\right| + c$$

$$ln|x| = \frac{2}{\frac{x-y}{x}} - ln\left|\frac{x-y}{x}\right| + c$$

$$ln|x| = \frac{2x}{x-y} - ln\left|\frac{x-y}{x}\right| + c$$

$$ln|x| = \frac{2x}{x-y} - [ln|x-y| - ln|x|] + c$$

$$0 = \frac{2x}{x-y} - ln|x-y| + c$$

$$ln|x-y| = \frac{2x}{x-y} + c$$

$$ex\backslash x\left(\frac{dy}{dx} - tan\frac{y}{x}\right) = y$$

$$\left[x\left(\frac{dy}{dx} - tan\frac{y}{x}\right) = y\right] \quad x \text{ نقسم}$$

$$\frac{dy}{dx} - tan\frac{y}{x} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + tan\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = v + tanv \dots\dots\dots 1$$

$$y = vx \rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = v + tanv$$

$$x\frac{dv}{dx} = v + tanv - v \rightarrow x\frac{dv}{dx} = tanv \quad [dv \text{ نقسم}]$$

$$\frac{x}{dx} = \frac{tanv}{dv} \quad [\text{نقلب الطرفين}]$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{tanv} \rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dv}{\frac{sinv}{cosv}} \rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{cosv}{sinv}dv$$

$$ln|x| = ln|sinv| + ln|c|$$

$$ln|x| = ln|(sinv).c| \quad e \text{ باخذ الطرفين}$$

$$x = \mp(sinv.c) \rightarrow c = \mp\frac{x}{sinv} \rightarrow c = \frac{x}{sin\frac{y}{x}}$$

عزيزي الطالب اعلاه هي مراجعه مركزه ومختصر شامل لمادة الرياضيات هذا المختصر يضمن لكم النجاح والتفوق باذن الله (لقد ورد من الملخص العام السابق ٥٠ درجة نصا و٥٠ درجه مشابه لصيغ اسئلة وضعت فيه)

نهدي هذا العمل لجميع طلبتنا الاعزاء في جميع المحافظات ....

اتمنى لجميع طلبتي الاعزاء النجاح الباهر والمستقبل الزاهر

مدرس الرياضيات

حمزة حازم الكربلائي

قناة التلي كرام @asin180 هاتف 07828808092