تمرينات ومسائل:

6. نتأمل في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{K})$ النقاط الآتية:

$$E(3,1,2)\quad D(-3,-5,6)\quad C(5,5,0)$$
$$B(1,-2,1)\quad A(2,0,1)$$

أثبت انتماء النقاط A و B و C و D إلى مستوٍ P وتبين إذا كانت النقطة E تنتمي إلى المستوي P.

$$\vec{AD} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AC}$$
$$(-5,-5,0) = \alpha(-1,-2,0) + \beta(3,5,-1)$$
$$= (-\alpha,-2\alpha,0) + (3\beta,5\beta,-\beta)$$
$$(-5,-5,0) = (-\alpha+3\beta,-2\alpha+5\beta,-\beta)$$

$$-\alpha + 3\beta = -5$$
$$-2\alpha + 5\beta = -5$$
$$-\beta = 5 \Rightarrow \boxed{\beta = -5}$$

$$-2\alpha - 25 = -5$$
$$-2\alpha = 20$$
$$\boxed{\alpha = -10}$$

نعوض (1)

$$-(-10) + 3(-5)$$
$$10 - 15 = -5$$

الأشعة مرتبطة خطياً والنقاط في مستوٍ واحد.

Subject :

$$\vec{AE} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AC}$$

$$(1,1,1) = (-\alpha+3\beta, -2\alpha+5\beta, -\beta)$$

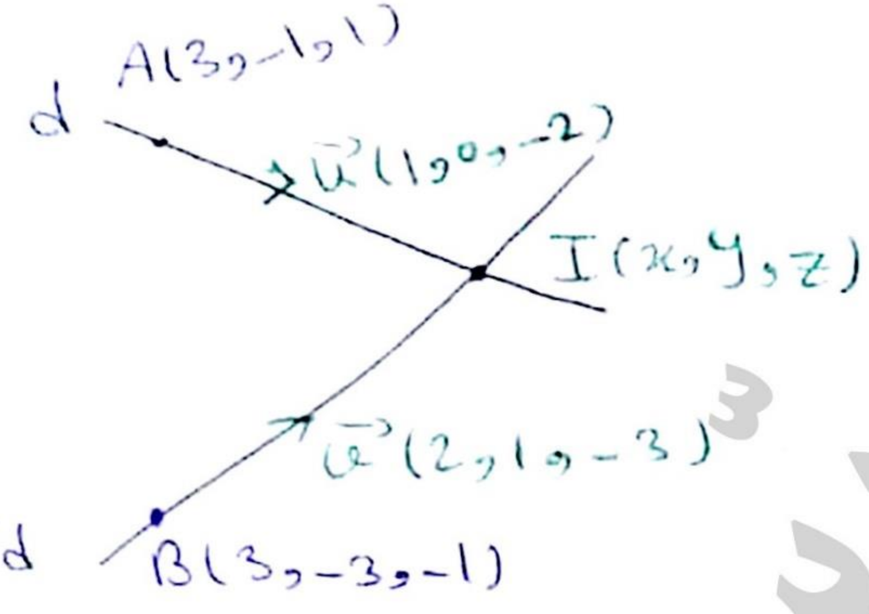
$$-\alpha+3\beta = 1$$
$$-2\alpha+5\beta = 1$$
$$-\beta = 1 \Rightarrow \boxed{\beta = -1}$$

$$-2\alpha - 5 = 1$$
$$-2\alpha = 6$$
$$\boxed{\alpha = -3}$$

$$-(-3) + 3(-1)$$
$$3 - 3 = 0 \neq 1$$

الأشعة غير مرتبطة خطياً حيث E ليست في نفس المستوي.

5) في معلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، لدينا النقطتان $A(3,-1,1)$ $B(3,-3,-1)$ والشعاعان $\vec{u}(1,0,-2)$ و $\vec{v}(2,1,-3)$ ، d هو المستقيم المار بالنقطة A والموجه بالشعاع $\vec{u}$ و d' هو المستقيم المار بالنقطة B والموجه بالشعاع $\vec{v}$ أثبت أن المستقيمين d و d' متقاطعان ثم عين I نقطة تقاطعهما.



* شرط تقاطع مستقيمات في الفراغ: ← غير متوازيات
يقعان في مستوي واحد.

$$\frac{1}{2} \neq \frac{0}{1} \neq \frac{-2}{-3}$$

غير متوازيات (هل أشعة التوجيه مرتبطة خطياً؟
مركبات غير متناسبة (أشعة التوجيه غير مرتبطة)
d ، d' غير متوازيات.

$$\vec{AB} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$$

$$(0,-2,-2) = (\alpha, 0, -2\alpha) + (2\beta, \beta, -3\beta)$$

$$(0,-2,-2) = (\alpha + 2\beta, \beta, -2\alpha - 3\beta)$$

$$\alpha + 2\beta = 0$$
$$\beta = -2$$
$$-2\alpha - 3\beta = -2$$

$$-2\alpha + 6 = -2$$

$$-2\alpha = -8 \qquad$$ نعوض في 3 $\beta = -2$

$$\alpha = 4$$

نعوض في ①

$$\alpha + 2\beta = 0$$

$$4 + (-4) = 0$$

الأشعة الثلاث مرتبطة خطياً.

$\Rightarrow$ d و d' في مستوي واحد و غير متوازيان

$\Rightarrow$ فهما متقاطعان .

$I(x, y, z)$ نقطة التقاطع

I على d فيه $\vec{u}$ ، $\vec{AI}$ مرتبطان .

$$\vec{AI} = \alpha \vec{u}$$

$$(x-3, y+1, z-1) = (\alpha, 0, -2\alpha)$$

$$x - 3 = \alpha$$

$$y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$$

$$z - 1 = -2\alpha$$

I من d' $\Leftarrow$ $\vec{BI}$ و $\vec{u'}$ مرتبطان خطياً

$$(x-3, y+3, z+1) = (2\beta, \beta, -3\beta)$$

$$x - 3 = 2\beta$$

$$y + 3 = \beta \Rightarrow \beta = 2$$

$$z + 1 = -3\beta$$

$$x - 3 = 4 \Rightarrow x = 7$$
$$z + 1 = -6 \Rightarrow z = -7$$

$$I(7, -1, -7)$$

* تمرين 15 وظيفة .

(6) نتأمل المكعب $ABCDEFGH$. النقطة I من الحرف CD تحقق المساواة $\vec{DI} = \frac{1}{4}\vec{DC}$ والنقطة J من BC تحقق المساواة $\vec{BJ} = \frac{3}{4}\vec{BC}$ أثبت أن المستقيم (HI) يوازي المستوي (EGJ) .

إذا أثبتنا أن HI يقع في المستوي (EGJ) فهو يوازيه من خلال الارتباط الخطي .

$$(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$$

$A(0,0,0)$ $B(1,0,0)$ $D(0,1,0)$
$E(0,0,1)$ $C(1,1,0)$ $G(1,1,1)$
$F(1,0,1)$ $H(0,1,1)$ $I(\frac{1}{4},1,0)$
$J(1,\frac{3}{4},0)$

$$\vec{EJ}, \vec{EG}, \vec{HI}$$

$$\vec{HI} = \alpha\vec{EG} + \beta\vec{EJ}$$
$$(\frac{1}{4}, 0, -1) = \alpha(1,1,0) + \beta(1,\frac{3}{4},-1)$$

$$= (\alpha, \alpha, 0) + (\beta, \tfrac{3}{4}\beta, -\beta)$$

$$(\tfrac{1}{4}, 0, -1) = (\alpha + \beta, \alpha + \tfrac{3}{4}\beta, -\beta)$$

$$\alpha + \beta = \tfrac{1}{4}$$

$$\alpha + \tfrac{3}{4}\beta = 0 \Rightarrow \alpha = -\tfrac{3}{4}$$

$$-\beta = -1 \Rightarrow \beta = 1$$

نعوض في ①:

$$-\tfrac{3}{4} + 1 = \tfrac{1}{4}$$

الأشعة الثلاث مرتبطة خطياً.

⇐ (HI) من المستوي EGJ فهو يوازيه

⑧ . ABCDE هرم رأسه E وقاعدته مربع

BE عمودي على المستوي (ABCD)، $EB = 4\sqrt{2}$

و $AB = 4$. M نقطة من القطعة ED

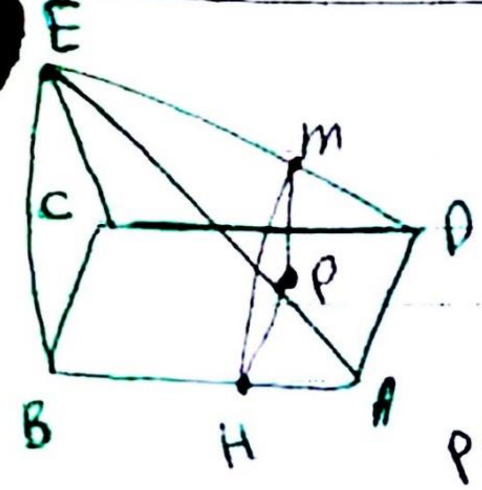
تحقق $3\vec{DM} = \vec{DE}$. لتكن P المسقط القائم

للنقطة M على المستوي (ABCD) و H

المسقط القائم للنقطة P على المستقيم (AB).

احسب طول القطعة المستقيمة (MH).

Subject :



$(B, \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}, \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}, \frac{1}{4\sqrt{2}}\overrightarrow{BD})$

$B(0,0,0)$ $A(4,0,0)$

$C(0,4,0)$ $E(0,0,4\sqrt{2})$

$D(4,4,0)$ $m(x,y,z)$

$P(\frac{8}{3},\frac{8}{3},0)$ $\Rightarrow m(\frac{8}{3},\frac{8}{3},\frac{4\sqrt{2}}{3})$

$H(\frac{8}{3},0,0)$

$3\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DE}$

$3(x-4, y-4, z) = (-4,-4,4\sqrt{2})$

$3x-12=-4 \Rightarrow 3x=8 \Rightarrow x=\frac{8}{3}$

$3y-12=-4 \Rightarrow 3y=8 \Rightarrow y=\frac{8}{3}$

$3z=4\sqrt{2} \Rightarrow z=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

$\overrightarrow{MH}(0,-\frac{8}{3},-\frac{4\sqrt{2}}{3})$

$\|\overrightarrow{MH}\| = \sqrt{0+\frac{64}{9}+\frac{32}{9}} = \sqrt{\frac{96}{9}} = \frac{\sqrt{36}}{3}$

(1.3) • نتأمل في معلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقاط: $A(3,2,1)$ ، $B(1,2,0)$ ، $C(3,1,-2)$.

①. أثبت أن النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة.

②. عند أية قيمة للوسيط m تنتمي النقطة $M(m,1,3)$ إلى المستوي (ABC).

③. ما العلاقة بين x و y لتقع النقاط A و B و C و $D(x,y,3)$ في مستوٍ واحد؟

$$\vec{AB}(-2,0,-1) \qquad \frac{0}{-1} \neq \frac{-1}{-3}$$
$$\vec{AC}(0,-1,-3)$$

①

مركبات غير متناسبة $\Leftarrow$ الشعاعات غير مرتبطان خطياً $\Leftarrow$ نقاط ليست على استقامة واحدة. $\Leftarrow$ النقاط في مستوٍ واحد.

②

$$\vec{AM} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}$$
$$(m-3, -1, 2) = (-2\alpha, 0, -\alpha) + (0, -\beta, -3\beta)$$
$$= (-2\alpha, -\beta, -\alpha - 3\beta)$$

① $m - 3 = -2\alpha$

② $-1 = -\beta \Rightarrow \beta = 1$ نعوض في ③

③ $2 = -\alpha - 3\beta$

Subject:

$$2 = -\alpha - 3$$
$$\Rightarrow \alpha = -5$$

نعوض في ①:

$$m - 3 = 10 \Rightarrow \boxed{m = 13}$$

③

$$\overrightarrow{AD} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$$
$$(x-3, y-2, 2) = (-2\alpha, -\beta, -\alpha - 3\beta)$$

① $x - 3 = -2\alpha$

② $y - 2 = -\beta \Rightarrow \beta = -y + 2$

③ $2 = -\alpha - 3\beta$

نعوض في ③:

$$2 = -\alpha - 3(-y + 2)$$
$$2 = -\alpha + 3y - 6$$
$$\alpha = 3y - 8$$

نعوض في ①:

$$x - 3 = -6y + 16$$
$$\boxed{x + 6y = 19}$$

(16) • جد على محور الفواصل نقطة C متساوية البعد عن النقطتين $A(2,-1,3)$ $B(0,5,-1)$

$$A(2,-1,3) \quad B(0,5,-1) \quad \rangle \; C(x,0,0)$$

$$\vec{AC}(x-2,1,-3) \qquad \|\vec{AC}\| = \sqrt{(x-2)^2+1+9}$$

$$\vec{BC}(x,-5,1) \qquad \|\vec{BC}\| = \sqrt{x^2+25+1}$$

$$\|\vec{AC}\| = \|\vec{BC}\|$$

$$\sqrt{(x-2)^2+10} = \sqrt{x^2+26}$$

$$(x-2)^2+10 = x^2+26$$

$$\cancel{x^2}-4x+4+10 = \cancel{x^2}+26$$

$$-4x+14 = 26 \Rightarrow -4x = 26-14$$

$$-4x = 12$$

$$x = -3$$

$$\Rightarrow C(-3,0,0)$$

(17) • ليكن α عدداً حقيقياً و لنتأمل النقاط الثلاث $A(3,-1,-3)$ $B(-1,5,-3)$ $C(-1,1,\alpha)$
أثبت أن المثلث ABC متساوي الساقين أياً كان

α . أيمكن أن يكون متساوي الأضلاع ؟

$\overrightarrow{AB}(-4, 4, 0) \qquad \overrightarrow{AC}(-4, 0, \alpha+3)$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{16+16+0} = \sqrt{32}$

$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{16+0+(\alpha+3)^2}$

$\overrightarrow{BC}(0, -4, \alpha+3) \Rightarrow \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{16+(\alpha+3)^2}$

نلاحظ: $AC = BC$ أياً كانت α

$\Leftarrow$ فهو متساوي الساقين أياً كانت α.

$$\sqrt{16+(\alpha+3)^2} = \sqrt{32}$$

$$16+(\alpha+3)^2 = 32$$

$$(\alpha+3)^2 = 16$$

نجذر الطرفين:

$\alpha+3 = 4 \Rightarrow \alpha = 1$

$\alpha+3 = -4 \Rightarrow \alpha = -7$

قيمتان لـ α تجعلانه متساوي أضلاع.

Subject :

(18) نتأمل النقطتين $A(2,1,0)$ $B(-1,4,2)$

① أوجد نقطة متساوية البعد عن A و B.

② أوجد العدد الحقيقي λ الذي يجعل النقطة $C(1,1,\lambda)$ متساوية البعد عن A و B

③ أثبت أن $M(x,y,z)$ نقطة من المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط $3x-3y-2z+8=0$.

①

إن منتصف AB يحقق المطلوب:

$$\left(\frac{2-1}{2}, \frac{1+4}{2}, \frac{0+2}{2}\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 1\right)$$

②

$$\overrightarrow{AC}(-1,0,\lambda) \qquad \overrightarrow{BC}(2,-3,\lambda-2)$$

$$\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{1+\lambda^2+0} \qquad \|\overrightarrow{BC}\|=\sqrt{4+9+(\lambda-2)^2}$$

$$\|\overrightarrow{AC}\|=\|\overrightarrow{BC}\|$$

$$\sqrt{1+\lambda^2}=\sqrt{13+(\lambda-2)^2}$$

$$1+\lambda^2=13+(\lambda-2)^2$$

$$1 + \lambda^2 = 13 + \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

$$\cancel{\lambda^2} - \cancel{\lambda^2} + 4\lambda = 17 - 1$$

$$4\lambda = 16$$

$$\lambda = 4$$

3

$$\overrightarrow{AM}(x-2,\ y-1,\ z)$$

$$\|\overrightarrow{AM}\| = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2}$$

$$\overrightarrow{BM}(x+1,\ y-4,\ z-2)$$

$$\|\overrightarrow{BM}\| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2}$$

$$\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{BM}\|$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = (x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 + z^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 + z^2 - 4z + 4$$

$$\cancel{x^2} + 2x \cancel{+1} + \cancel{y^2} - 8y + 16 + \cancel{z^2} - 4z \cancel{+4}$$

$$-\cancel{x^2} + 4x - \cancel{4} - \cancel{y^2} + 2y - \cancel{1} - \cancel{z^2} = 0$$

$$6x - 6y - 4z + 16 = 0$$

$$\boxed{3x - 3y - 2z + 8 = 0}$$ نقسم على ② ،

19. نتأمل النقاط $A(2,3,0)$ $B(2,3,6)$
$M(4,-1,2)$، نهدف إلى حساب بعد M عن
المستقيم (AB).

1. أثبت أن M لا تقع على المستقيم AB.
2. أثبت أن لكل نقطة K من المستقيم (AB) إحداثيات من النمط $(2,3,z)$.
3. احسب MK^2 بدلالة z.
4. عند أية قيمة للعدد z يكون MK أصغرياً، حدد إذن بعد M عن (AB).

1

$\overrightarrow{AM}(2,-4,2)$ $\quad \frac{0}{2} = \frac{0}{-4} \neq \frac{6}{2}$

$\overrightarrow{AB}(0,0,6)$ المركبات غير متناسبة

شعاعان غير مرتبطان خطياً

النقاط ليست على استقامة واحدة.

M لا تقع على المستقيم AB.

2

$K(x,y,z)$ من AB.

$\overrightarrow{AK} = \lambda \overrightarrow{AB}$

$$(x-2,\ y-3,\ z) = (0,\ 0,\ 6\lambda)$$

$$x-2 = 0 \Rightarrow x = 2$$
$$y-3 = 0 \Rightarrow y = 3$$
$$z = 6\lambda$$
$$\Rightarrow K(2,\ 3,\ 6\lambda) \quad \text{مخطط}$$

3

$$\overrightarrow{MK}(2,\ 4,\ z-2)$$

$$\|\overrightarrow{MK}\| = \sqrt{4+16+(z-2)^2} = \sqrt{20+(z-2)^2}$$

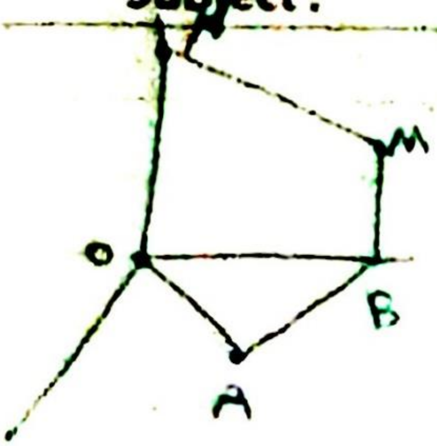
$$MK^2 = 20 + (z-2)^2$$

4

$$MK = \sqrt{20}$$

$$MK^2 = 20 \Leftarrow z = 2$$

20 . m , n عددان حقيقيان موجبان يحققان $n > m > 0$. نتأمل النقاط $A(\sqrt{3},3,0)$ $B(0,6,0)$ $M(0,6,m)$ $N(0,0,n)$ في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ عين m , n ليكون المثلث MAN قائماً في A وحجم المجسم $AOBMN$ يساوي $5\sqrt{3}$.



$\overrightarrow{AM}\ (+\sqrt{3},\ 3,\ m)$

$\|\overrightarrow{AM}\| = \sqrt{3+9+m^2}$

$\overrightarrow{AN} = (-\sqrt{3},\ -3,\ n)$

$\|\overrightarrow{AN}\| = \sqrt{3+9+n^2}$

$\overrightarrow{NM}\ (0,\ -6,\ n-m)$

$\|\overrightarrow{MN}\| = \sqrt{36+n^2-2nm+m^2}$

$\overrightarrow{mB}\ (0,0,\ -m)$

$\|\overrightarrow{mB}\| = m$

$\overrightarrow{ON}\ (0,0,n)$

$\|\overrightarrow{ON}\| = n$

$OB\ (0,6,0)$

$\|\overrightarrow{OB}\| = 6$ $\Rightarrow$ $n = 3$, $m = 2$

$\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{AN}^2 = mN^2$

$12 + m^2 + 12 + n^2 = 36 + n^2 - 2nm + m^2$

$24 + \cancel{m^2} + \cancel{n^2} = 36 + \cancel{n^2} - 2nm + \cancel{m^2}$

$$2mn = 36 - 24$$

$$2nm = 12$$

$$\Rightarrow n \cdot m = 6$$

هرم قاعدته شبه منحرف

$$V_{AOBmn} = 5\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{3} \times S_{OBMN} \times h = 5\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{(\|\overrightarrow{MB}\| + \|\overrightarrow{ON}\|)\,\|\overrightarrow{OA}\| \times MA}{2} = 5\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{(m+n)^2 \times 6}{2} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{m + n = 5}$$

$$\Rightarrow n = 3$$

$$m = 2$$