الوحدة الأولى: الحركة والتحريك

الدرس الأول: الحركة التوافقية البسيطة

الاستطالة السكونية:

نشكل هزازة توافقية بسيطة من جسم كتلته m معلق بطرف نابض مرن شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته k استنتج العلاقة المحددة للاستطالة السكونية لهذا النابض

القوى الخارجية المؤثرة في مركز عطالة الجسم:

قوة الثقل $\vec{W}$ وقوة توتر النابض $\vec{F}_{s_0}$

بما أن الجسم ساكن:

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{W} + \vec{F}_{s_0} = \vec{0}$$

بالإسقاط على محور شاقولي موجه نحو الأسفل:

$$W - F_{s_0} = 0 \Rightarrow W = F_{s_0}$$

تؤثر في النابض القوة $\vec{F}'_{s_0}$ التي تسبب له الاستطالة x_0

$$F'_{s_0} = F_{s_0} = kx_0 \quad (1)$$

نعوض في (1):

$$W = kx_0 \Rightarrow mg = kx_0$$

$$x_0 = \frac{mg}{k}$$

الدراسة التحريكية (استنتاج علاقة قوة الإرجاع)

برهن أن محصلة القوى الخارجية المؤثرة في مركز عطالة الجسم الصلب المعلق بالنابض هي قوة إرجاع تعطى بالعلاقة: $F = -kx$

حالة السكون:

القوى الخارجية المؤثرة في مركز عطالة الجسم: قوة الثقل $\overrightarrow{W}$ وقوة توتر النابض $\vec{F}_{s_0}$

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{W} + \vec{F}_{s_0} = \vec{0}$$

بالإسقاط على محور شاقولي موجه نحو الأسفل:

$$W - F_{s_0} = 0 \Rightarrow W = F_{s_0}$$

تؤثر في النابض القوة $\vec{F}'_{s_0}$ التي تسبب له الاستطالة x_0

$$F'_{s_0} = F_{s_0} = kx_0 \Rightarrow W = kx_0 \quad (1)$$

حالة الحركة:

القوى الخارجية المؤثرة في مركز عطالة الجسم: قوة الثقل $\overrightarrow{W}$ وقوة توتر النابض $\vec{F}_s$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \overrightarrow{W} + \vec{F}_s = m\vec{a}$$

بالإسقاط على محور شاقولي موجه نحو الأسفل:

$$W - F_s = ma \quad (2)$$

تؤثر في النابض القوة $\vec{F}'_s$ التي تسبب له الاستطالة $(x_0 + x)$

$$F'_s = F_s = k(x_0 + x) \quad (3)$$

نعوض (1) و (3) في (2) فنجد:

$$kx_0 - k(x_0 + x) = ma$$

$$kx_0 - kx_0 - kx = ma \Rightarrow F = -kx$$

انطلاقاً من العلاقة $-kx = ma$ برهن أن حركة الجسم الصلب المعلق بالنابض في النواس المرن غير المتخامد حركة جيبية انسحابية (توافقية بسيطة)، ثم استنتج علاقة الدور الخاص لهذا النواس

$$-kx = ma \Rightarrow -kx = m(x)''_t$$

$$(x)''_t = -\frac{k}{m}x \qquad (1)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلا جيبيا من الشكل:

$$x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

للتحقق من صحة الحل نشتق تابع المطال مرتين بالنسبة للزمن:

$$(x)'_t = v = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0\, t + \varphi)$$

$$(x)''_t = a = -\omega_0^2 X_{max}\cos(\omega_0\, t + \varphi)$$

$$(x)''_t = -\omega_0^2 x \quad (2)$$

بالمقارنة بين (1) و (2) نجد:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$$

وهذا محقق لأن m , k موجبان، فالحركة جيبية انسحابية

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

تابع المطال

1- اكتب الشكل العام للتابع الزمني للمطال في النواس المرن، كيف يصبح شكل هذا التابع بفرض أن الجسم كان في مطاله الأعظمي الموجب في اللحظة $t = 0$ (استنتج الشكل المختزل لتابع المطال)

2- ارسم المنحني البياني لتغيرات المطال مع الزمن خلال دور

3- حدد المواضع التي يأخذ فيها المطال: a) قيمة عظمى (طويلة) b) قيمة معدومة

4- حدد قيمة المطال في اللحظة: $t = \frac{3T_0}{2}$

1) $$x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

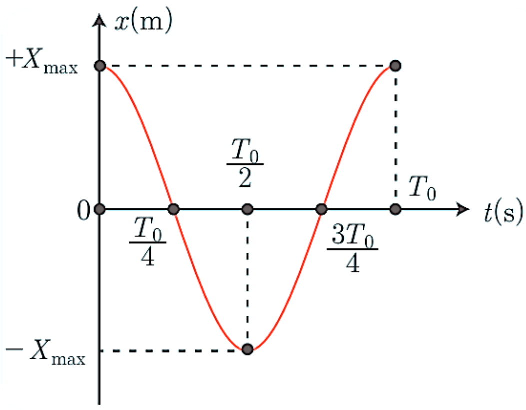
$$t = 0 \Rightarrow x = X_{max}$$

$$X_{max} = X_{max}\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0\,rad$$

$$x = X_{max}\cos\omega_0 t$$

2)

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
x	X_{max}	0	$-X_{max}$	0	X_{max}



3) a) المطال أعظمي (طويلة) في الموضعين الطرفيين $x = |\mp X_{max}|$

b) المطال معدوم في مركز الاهتزاز $x = 0$

4) $$x = X_{max}\cos\frac{2\pi}{T_0}t$$

$$t = \frac{3T_0}{2} \Rightarrow x = X_{max}\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\times\frac{3T_0}{2}\right) = X_{max}\cos\pi = -X_{max}$$

تابع السرعة:

1- انطلاقاً من التابع الزمني للمطال في النواس المرن $x = X_{max} \cos \omega_0 t$ استنتج التابع الزمني للسرعة

2- ارسم المنحني البياني لتغيرات السرعة مع الزمن خلال دور

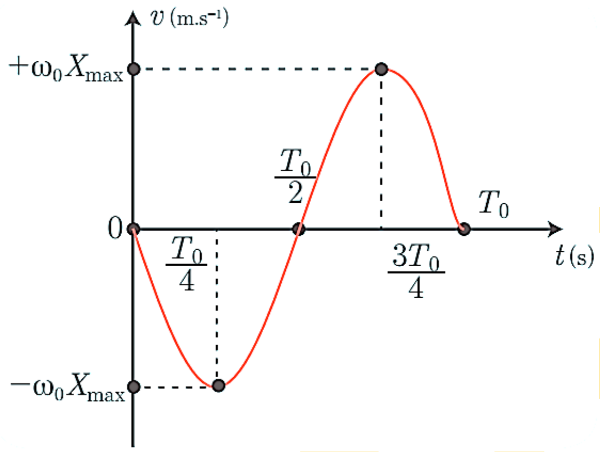
3- حدد المواضع التي تأخذ فيها السرعة: a) قيمة عظمى (طويلة) b) قيمة معدومة

4- حدد قيمة السرعة وجهة الحركة في اللحظة: $t = \frac{5T_0}{4}$

1) $v = (x)'_t = -\omega_0 X_{max} sin \omega_0 t$

2)

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
v	0	$-\omega_0 X_{max}$	0	$\omega_0 X_{max}$	0



3) a) السرعة عظمى (طويلة) في مركز الاهتزاز $v_{max} = |\mp \omega_0 X_{max}|$

b) السرعة معدومة في الموضعين الطرفيين $v = 0$

4) $v = -\omega_0 X_{max} sin \frac{2\pi}{T_0} t$

$$t = \frac{5T_0}{4} \Rightarrow v = -\omega_0 X_{max} sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \times \frac{5T_0}{4}\right) =$$

$$= -\omega_0 X_{max} sin \frac{5\pi}{2} = -\omega_0 X_{max}$$

الحركة بالاتجاه السالب (نحو الأعلى)

تابع التسارع:

1- انطلاقاً من التابع الزمني للمطال في النواس المرن $x = X_{max} \cos \omega_0 t$ استنتج التابع الزمني للتسارع بدلالة مطال الحركة

2- ارسم المنحني البياني لتغيرات التسارع مع الزمن خلال دور

3- حدد المواضع التي يأخذ فيها التسارع: a) قيمة عظمى (طويلة) b) قيمة معدومة

4- حدد قيمة التسارع في اللحظة: $t = \frac{5T_0}{4}$

5- هل التسارع ثابت أم متغير؟ لماذا؟

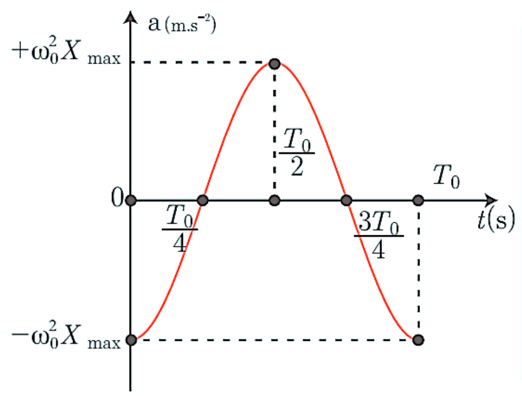
(1

$$v = (x)'_t = -\omega_0 X_{max} sin\omega_0 t$$

$$a = (x)''_t = -\omega_0^2 X_{max} cos\omega_0 t \Rightarrow a = -\omega_0^2 x$$

(2

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
a	$-\omega_0^2 X_{max}$	0	$\omega_0^2 X_{max}$	0	$-\omega_0^2 X_{max}$



(3 a) التسارع أعظمي (طويلة) في الموضعين الطرفيين $a_{max} = |\pm\omega_0^2 X_{max}|$

b) التسارع معدوم في مركز الاهتزاز $a = 0$

(4

$$a = (x)''_t = -\omega_0^2 X_{max} cos\frac{2\pi}{T_0} t$$

$$= -\omega_0^2 X_{max} cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \times \frac{5T_0}{4}\right) = 0$$

(5 التسارع متغير، لأن قيمته تتغير بتغير المطال

الطاقة الميكانيكية:

1- برهن أن الطاقة الميكانيكية في الهزازة التوافقية البسيطة طاقة ثابتة (استنتج العلاقة المحددة للطاقة الميكانيكية للنواس المرن غير المتخامد)

2- حدد المواضع التي تكون فيها الطاقة الكامنة المرونية: a) عظمى b) معدومة

3- حدد المواضع التي تكون فيها الطاقة الحركية: a) عظمى b) معدومة

4- ما شكل الطاقة الميكانيكية عندما: a) $x = X_{max}$ b) $x = 0$

5- ارسم المنحني البياني لتغيرات الطاقات (الكامنة المرونية والحركية والميكانيكية) بدلالة المطال

6- ارسم المنحني البياني لتغيرات الطاقات (الكامنة المرونية والحركية والميكانيكية) بدلالة الزمن خلال دور واحد

1)

$$E_{tot} = E_P + E_k = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$v = (x)'_t = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2 cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_{max}^2 sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = m\omega_0^2$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2 cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}kX_{max}^2 sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2[cos^2(\omega_0 t + \varphi) + sin^2(\omega_0 t + \varphi)]$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2$$

2) a) الطاقة الكامنة المرونية عظمى في المطالين الأعظميين

$$x = \pm X_{max} \Rightarrow E_p = E_{tot}$$

b) الطاقة الكامنة المرونية معدومة في مركز الاهتزاز

$$x = 0 \Rightarrow E_p = 0$$

3) الطاقة الحركية عظمى في مركز الاهتزاز

$$x = 0 \Rightarrow E_p = 0 \Rightarrow E_k = E_{tot}$$

b) الطاقة الحركية معدومة في المطالين الأعظميين

$$x = \pm X_{max} \Rightarrow v = 0 \Rightarrow E_k = 0$$

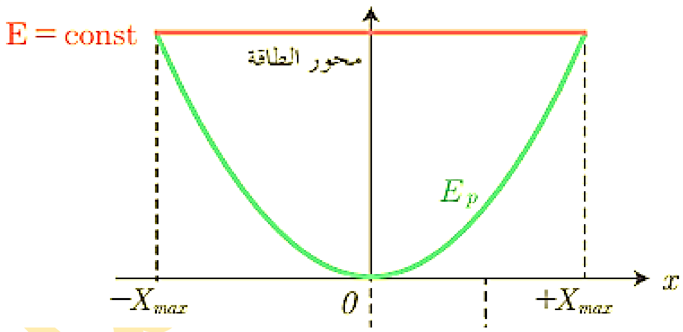
4) a) $x = \pm X_{max} \Rightarrow E_p = E_{tot}$

الطاقة الميكانيكية هي طاقة كامنة مرونية

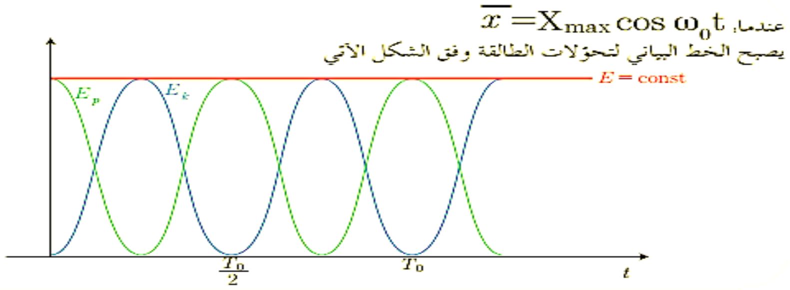
b) $x = 0 \Rightarrow E_p = 0 \Rightarrow E_k = E$

الطاقة الميكانيكية هي طاقة حركية

5)



6)



علاقة السرعة بالمطال:

اثبت صحة العلاقة: $v = \omega_0\sqrt{X_{max}^2 - x^2}$ في الحركة التوافقية البسيطة

$$E_{tot} = E_P + E_K$$

$$\frac{1}{2}kX_{max}^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow m = \frac{k}{\omega_0^2}$$

$$\frac{1}{2}kX_{max}^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}\frac{k}{\omega_0^2}v^2$$

$$X_{max}^2 = x^2 + \frac{1}{\omega_0^2}v^2$$

$$X_{max}^2 - x^2 = \frac{1}{\omega_0^2}v^2$$

$$v^2 = \omega_0^2(X_{max}^2 - x^2)$$

$$v = \omega_0\sqrt{X_{max}^2 - x^2}$$

دراسة حركة جسم معلق بنابض أفقي:

نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته k مثبت من أحد طرفيه ويربط بطرفه الآخر جسم صلب كتلته m يمكنه أن يتحرك على سطح أفقي أملس كما في الشكل المجاور نشد الجسم مسافة أفقية مناسبة ونتركه دون سرعة ابتدائية المطلوب:

a- ادرس حركة الجسم واستنتج التابع الزمني للمطال

b- استنتج علاقة الطاقة الحركية للجسم بدلالة X_{max} في كل من الموضعين: A و B :

$x_A = -\frac{X_{max}}{2}$ و $x_B = \frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$ ، ماذا تستنتج؟

a) القوى الخارجية المؤثرة في مركز عطالة الجسم:

قوة الثقل $\vec{W}$ ، قوة توتر النابض $\vec{F_s}$ ، قوة رد فعل السطح $\vec{R}$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{W} + \vec{F_s} + \vec{R} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على محور أفقي موجه نحو اليمين:

$$0 - F_s + 0 = ma \Rightarrow -F_s = ma$$

تؤثر في النابض القوة $\vec{F_s}'$ التي تسبب له الاستطالة x : $F_s' = F_s = kx$

$$-kx = ma \Rightarrow -kx = m(x)''_t \Rightarrow (x)''_t = -\frac{k}{m}x \qquad (1)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلا جيبيا من الشكل:

$$x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

للتحقق من صحة الحل نشتق تابع المطال مرتين بالنسبة للزمن:

$$(x)'_t = v = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$(x)''_t = a = -\omega_0^2 X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$(x)''_t = -\omega_0^2 x \quad (2)$$

بالمقارنة بين (1) و (2) نجد: $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$

وهذا محقق لأن k , m موجبان، فالحركة جيبية انسحابية

b) $$E_{tot} = E_P + E_k \Rightarrow E_k = E_{tot} - E_p = \frac{1}{2}kX_{max}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_k = \frac{1}{2}k(X_{max}^2 - x^2)$$

$$x_A = -\frac{X_{max}}{2} \Rightarrow E_{k_A} = \frac{1}{2}k(X_{max}^2 - x_A^2) = \frac{1}{2}k\left(X_{max}^2 - \frac{X_{max}^2}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}kX_{max}^2\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}E_{tot}$$

$$x_B = \frac{X_{max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow E_{k_B} = \frac{1}{2}k(X_{max}^2 - x_B^2) = \frac{1}{2}k\left(X_{max}^2 - \frac{X_{max}^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}kX_{max}^2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}E_{tot}$$

بزيادة القيمة المطلقة للمطال تقل الطاقة الحركية وتزداد الطاقة الكامنة المرونية

نوع حركة الجسم بعد الانفصال عن النابض:

جسم معلق بنابض مرن شاقولي حلقاته متباعدة يهتز بدوره الخاص، ما نوع حركة الجسم بعد انفصاله عن النابض في كل من الموضعين الآتيين ولماذا؟

a - مركز الاهتزاز وهو يتحرك بالاتجاه السالب؟ b - المطال الأعظمي الموجب؟

لحظة انفصال الجسم يخضع لقوة ثقله فقط

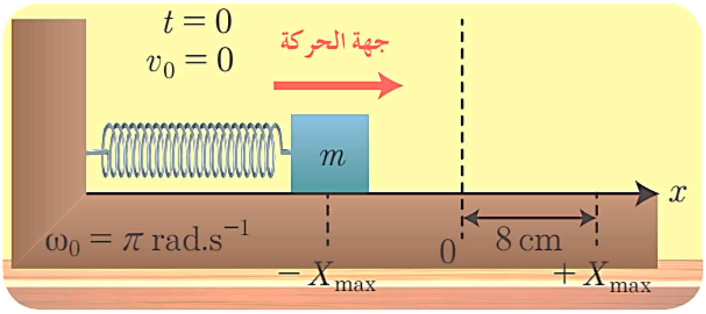
$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{W} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{g} = \vec{a} = \overrightarrow{const}$$

a) قذف شاقولي نحو الأعلى (لأن الجسم مزود بسرعة ابتدائية شاقولية للأعلى)

b) سقوط حر (لأن السرعة الابتدائية للجسم معدومة)

أولاً: اخترِ الإجابةَ الصحيحةَ فيما يأتي:

1. تابعُ المطال الذي يصفُ حركة الهزّازة الجيبيّة في الشكل المجاور هو:



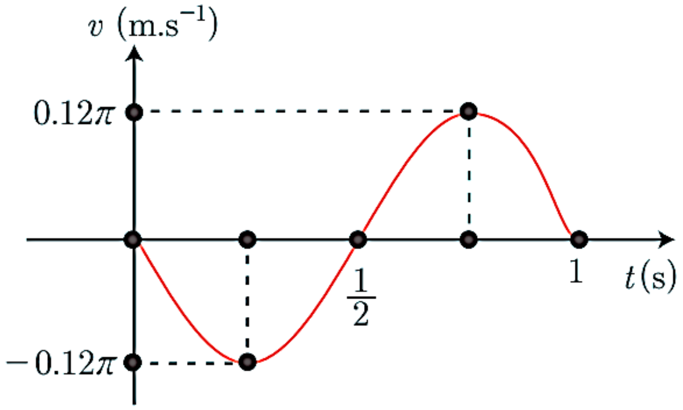
a. $\overline{x} = 0.08\cos(\pi t + \pi)$

b. $\overline{x} = 8\cos(\pi t - \pi)$

c. $\overline{x} = 0.008\cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$

d. $\overline{x} = 0.8\cos \pi t$

2. الرسمُ البيانيُّ جانباً يمثّلُ تغيّراتِ السرعةِ مع الزمنِ لجسمٍ مرتبطٍ بنابضٍ مرنٍ يتحرّكُ بحركةٍ توافقيّةٍ بسيطة، فيكونُ التابعُ الزمنيُّ للسرعة هو:



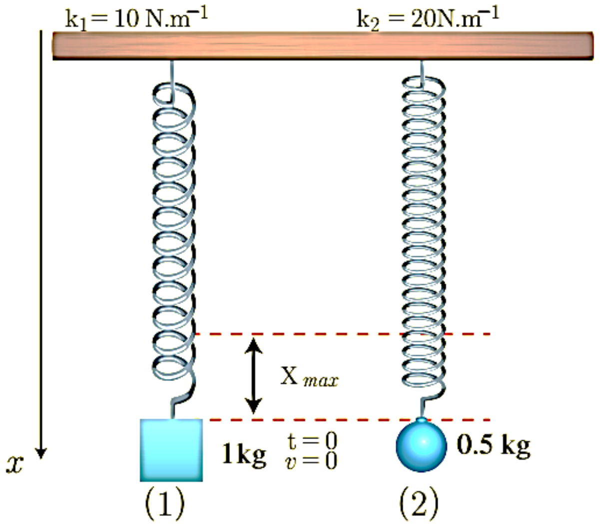
a. $\overline{v} = 0.06\pi \cos \pi t$

b. $\overline{v} = -0.06\pi \cos 2\pi t$

c. $\overline{v} = -0.12\pi \sin 2\pi t$

d. $\overline{v} = 0.12\pi \sin \pi t$

3. يمثّلُ الشكلُ المجاورُ هزّازتان توافقيّتان (1) و (2) تنطلقان من الموضع نفسِه، وفي اللحظةِ نفسها، فإنّهما بعد مضي $3\,s$ من بدءِ حركتِهما:



a. تلتقيان في مركز الاهتزاز.

b. تلتقيان في الموضع $+X_{max}$

c. لا تلتقيان لأنّ مطالَ الأولى $+X_{max}$ ومطالَ الثانية $-X_{max}$.

d. لا تلتقيان لأنّ مطالَ الأولى $-X_{max}$ ومطالَ الثانية $+X_{max}$.

المسألة الأولى:

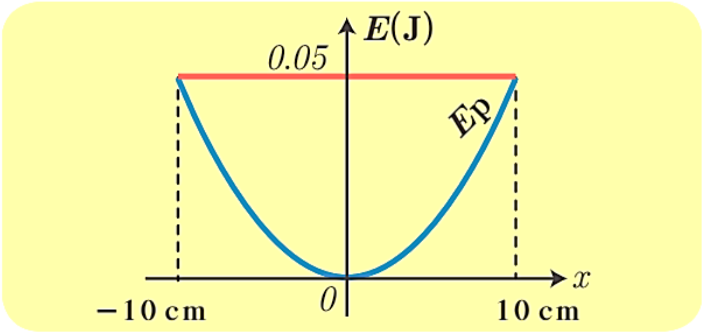
تتألّفُ هزّازةٌ جيبيّةٌ انسحابية من نابضٍ مرنٍ شاقوليٍّ مهملِ الكتلةِ حلقاتُهُ متباعدةٌ، ثابتُ صلابتِه $k = 10\,\mathrm{N.m^{-1}}$ ، مثبّتٌ من أحد طرفيه، ويحملُ في طرفه الآخر جسماً كتلَتُه m ، ويُعطى التابعُ الزمنيُّ لمطال حركتها بالعلاقة.

$$\overline{x} = 0.1\cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$$

المطلوب:

1. أوجدْ قيمَ ثوابت الحركة ودورَها الخاصّ.
2. احسبْ كتلة الجسم m.
3. احسب قيمةَ السّرعة في موضع مطالُه $x = 6\,\mathrm{cm}$، والجسمُ يتحرّكُ بالاتّجاه الموجبِ للمحور.
4. حدّد موضع الجّسم وجهة حركته لحظة بدء الزّمن.

المسألة الثانية:



يوضّحُ الرسمُ البيانيُّ المجاورُ تغيّراتِ الطاقةِ الكامنةِ المرونية بتغيّرِ الموضعِ لهزّازةٍ توافقيّةٍ بسيطةٍ مؤلّفةٍ من نابضٍ مرنٍ مهملَ الكتلة حلقاتُهُ متباعدةٌ ثابتُ صلابتِه k معلّقٌ به جسمٌ كتلتُه $0.4\,\text{kg}$.

المطلوب:

1. استنتجْ قيمةَ ثابت صلابة النابض k.
2. احسبْ الدورَ الخاصّ للحركة.
3. احسبْ قيمةَ السرعة عند المرور في مركز الاهتزاز.

المسألة الثالثة:

نشكّلُ هزّازةً توافقيّةً بسيطة من جسمٍ كتلتُهُ $m = 1\,\text{kg}$ معلّقٌ بطرفِ نابضٍ مرنٍ شاقوليٍّ مهملِ الكتلةِ حلقاتُهُ متباعدةٌ فينجزُ 10 هزّاتٍ في $8\,\text{s}$، ويرسمُ في أثناءِ حركتِه قطعةً مستقيمةً طولُها $24\,\text{cm}$.

المطلوب:

1. استنتجْ قيمةَ الاستطالة السكونيّة لهذا النابض، ثمّ احسبْ قيمتها.
2. احسبْ قيمةَ السرعة العظمى (طويلة).
3. احسبْ قيمةَ التسارع في مطال $x = 10\,\text{cm}$.
4. احسبِ الطاقةَ الكامنةَ المرونيّة في موضع مطاله $x = -4\,\text{cm}$، واحسب الطاقة الحركيّة عندئذٍ.

المسألة الرابعة:

تهتزُّ كرةٌ معدِنيّةٌ كتلتُها m بمرونةِ نابضٍ شاقوليٍّ مهملِ الكتلة، حلقاتُهُ متباعدةٌ، ثابتُ صلابته $k = 16\,\mathrm{N.m^{-1}}$ بحركة توافقيّة بسيطة دورُها الخاصّ $1\,\mathrm{s}$، وبسعةِ اهتزازٍ $X_{\max} = 0.1\,\mathrm{m}$ ، وبفرض مبدأ الزمن لحظة مرور الكرة بنقطة مطالُها $\frac{X_{\max}}{2}$ وهي تتحرّك بالاتّجاه السالب.

المطلوب:

1. استنتجِ التابعَ الزمنيَّ لمطال حركة الكرة انطلاقاً من شكله العامّ.
2. عيّنْ لحظتَي المرور الأوّلِ والثالثِ للكرة في موضع التوازن.
3. احسبْ شدّة قوّة الإرجاع في نقطة مطالُها $x = +0.1\,\mathrm{m}$
4. احسبْ كتلة الكرة.

سلسلة نمبرون التعليمية

EDUCATION

الدرس الثاني: الحركة الجيبية الدورانية (نواس الفتل)

الدراسة التحريكية واستنتاج طبيعة الحركة:

نعلق ساقاً معدنية متجانسة طولها l كتلتها m من منتصفها إلى سلك فتل شاقولي ثابت فتله k ندير الساق بزاوية θ عن وضع توازنها في مستوٍ أفقي ونتركها دون سرعة ابتدائية ادرس تحريكياً هذا النواس واستنتج طبيعة حركته

القوى الخارجية المؤثرة في الساق:

قوة الثقل $\vec{W}$ ، قوة توتر السلك $\vec{T}$ ، $\vec{\eta}$: مزدوجة الفتل (تقاوم عملية الفتل)

نطبق العلاقة الأساسية في التحريك الدوراني:

$$\sum \Gamma_{\Delta} = I_{\Delta}\alpha \Rightarrow \Gamma_{\vec{W}/\Delta} + \Gamma_{\vec{T}/\Delta} + \Gamma_{\vec{\eta}/\Delta} = I_{\Delta}\alpha$$

$\Gamma_{\vec{W}/\Delta} = \Gamma_{\vec{T}/\Delta} = 0$: لأن حاملي $\vec{W}$ و $\vec{T}$ منطبقان على محور الدوران

$$-k\theta = I_{\Delta}\alpha \Rightarrow -k\theta = I_{\Delta}(\theta)''_t \Rightarrow (\theta)''_t = -\frac{k}{I_{\Delta}}\theta \qquad (1)$$

وهي معادلة تفاضلية تقبل حلاً جيبيا من الشكل

$$\theta = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$(\theta)'_t = -\omega_0\theta_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2\theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2\theta \qquad (2)$$

بالمطابقة بين (1) و (2) نجد: $\omega_0^2 = \frac{k}{I_{\Delta}} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I_{\Delta}}} > 0$

وهذا محقق لأن k , I_{Δ} موجبان، فالحركة جيبية دورانية

استنتاج طبيعة الحركة والدور الخاص

انطلاقا من العلاقة: $-k\theta = I_{\Delta}\alpha$ برهن أن حركة النواس الفتل جيبية دورانية ثم استنتج علاقة الدور الخاص

$$-k\theta = I_{\Delta}\alpha \Rightarrow -k\theta = I_{\Delta}(\theta)''_t$$

$$(\theta)''_t = -\frac{k}{I_{\Delta}}\theta \qquad (1)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبيا من الشكل

$$\theta = \theta_{max}\, cos(\omega_0 t + \varphi)$$

للتحقق من صحة الحل نشتق مرتين بالنسبة للزمن

$$(\theta)'_t = \omega = -\omega_0\theta_{max}\, sin(\omega_0\, t + \varphi)$$

$$(\theta)''_t = \alpha = -\omega_0^2\theta_{max}\, cos(\omega_0\, t + \varphi)$$

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2\theta \qquad (2)$$

بالمطابقة بين (1) و (2) نجد:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{I_{\Delta}} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I_{\Delta}}} > 0$$

وهذا ممكن لأن k , I_{Δ} موجبان

فالحركة جيبية دورانية

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{I_{\Delta}}}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta}}{k}}$$

استنتاج طبيعة الحركة من علاقة الطاقة الميكانيكية:

انطلاقا من مصونية الطاقة الميكانيكية برهن أن حركة نواس الفتل جيبية دورانية

$$E_{tot} = E_P + E_k$$

$$const = \frac{1}{2}k\theta^2 + \frac{1}{2}I_\Delta\omega^2$$

نشتق طرفي العلاقة بالنسبة للزمن:

$$0 = \frac{1}{2}k2\theta\omega + \frac{1}{2}I_\Delta 2\omega\alpha$$

$$0 = k\theta + I_\Delta\alpha$$

$$-k\theta = I_\Delta\alpha \Rightarrow -k\theta = I_\Delta(\theta)''_t$$

$$(\theta)''_t = -\frac{k}{I_\Delta}\theta \qquad (1)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبيا من الشكل

$$\theta = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

للتحقق من صحة الحل نشتق مرتين بالنسبة للزمن

$$(\theta)'_t = -\omega_0\theta_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2\theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2\theta \qquad (2)$$

بالمطابقة بين (1) و (2) نجد:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{I_\Delta} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I_\Delta}} > 0$$

وهذا ممكن لأن k , I_Δ موجبان فالحركة جيبية دورانية

العلاقة بين الدور الخاص وطول سلك الفتل:

نعلق ساقين متماثلين بسلكي فتل متماثلين طول الأول l_1 وطول الثاني l_2 فإذا علمت أن $T_{0_1} = 2T_{0_2}$ أوجد العلاقة بين طولي السلكين

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k'\frac{(2r)^4}{l}}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta l}{k'(2r)^4}} = const\sqrt{l}$$

$$\frac{T_{0_1}}{T_{0_2}} = \frac{const\sqrt{l_1}}{const\sqrt{l_2}}$$

$$\frac{2T_{0_2}}{T_{0_2}} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}$$

$$2 = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}$$

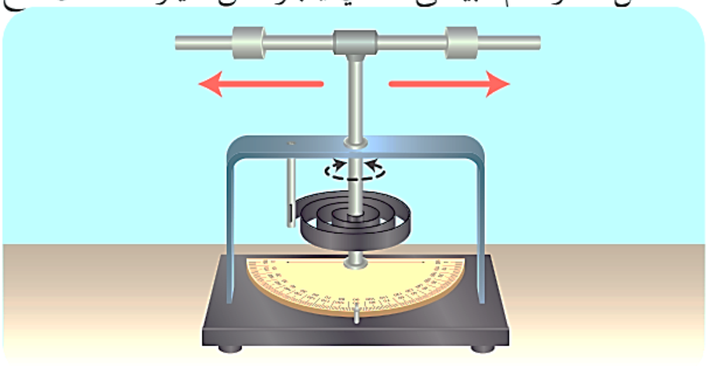
نربع الطرفيين:

$$4 = \frac{l_1}{l_2}$$

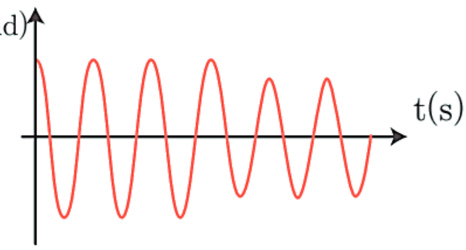
$$l_1 = 4l_2$$

أولاً: اخترِ الإجابةَ الصحيحةَ فيما يأتي:

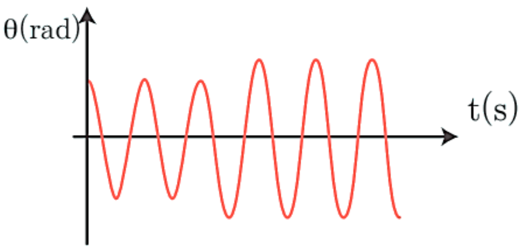
1. يهتزُّ نوّاس فتل بدور خاصّ T_0، في لحظة ما أثناء حركته ابتعدت الكتلتان عن محور الدوران بالمقدار نفسِه كما هو موضّحٌ بالشكل، فالرسمُ البيانيُّ الذي يعبّرُ عن تغيّر المطال مع الزمن في هذه الحالة هو:



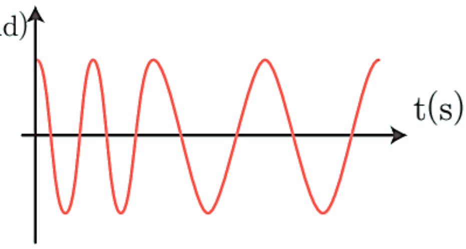
a.



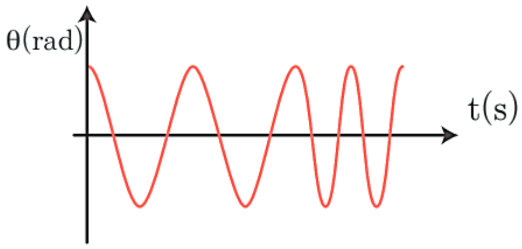
b.



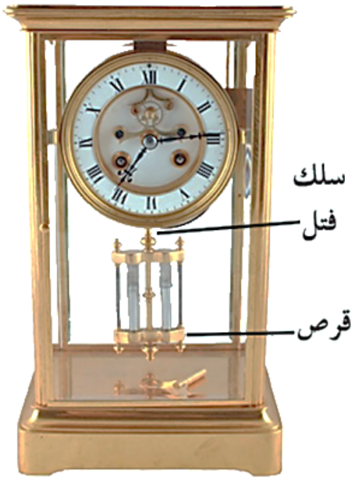
c.



d.



2. ميقاتيّةٌ تعتمدُ في عملها على نوّاس فتل كما في الشكل المجاور، ولتصحيح التأخير الحاصل بالوقت فيها، قدّم الطلّاب مقترحاتِهم، فإنّ الاقتراح الصحيح هو:



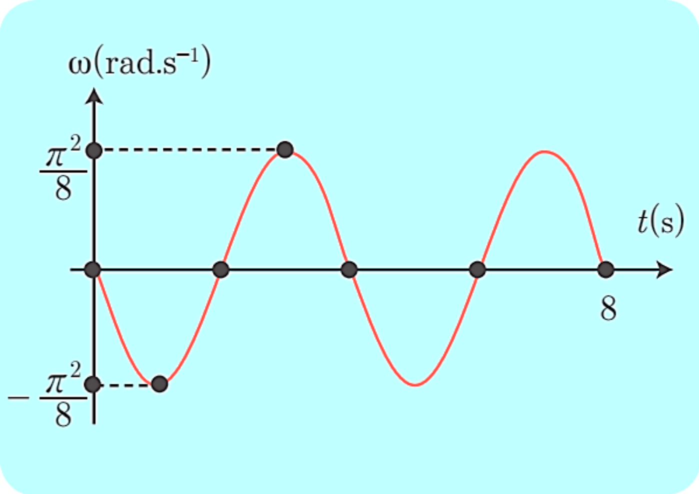
a. زيادةُ طول سلك الفتل بمقدار ضئيل

b. زيادة كتلة القرص مع المحافظة على قطره.

c. إنقاصُ طول سلك الفتل بمقدار ضئيل.

d. زيادةُ قطر القرص مع المحافظة على كتلته.

3. يمثّلُ الرسمُ البيانيُّ المجاورُ تغيّراتِ السرعةِ الزاويّة لنوّاس فتل بتغيّر الزمن، فإنّ تابع السرعة الزاويّة الذي يمثّله هذا المنحني هو:



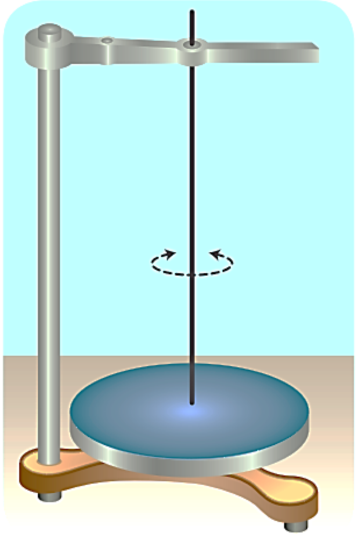
a. $\overline{\omega} = \frac{\pi^2}{8}\sin 3\pi t$

b. $\overline{\omega} = -\frac{\pi^2}{8}\sin 2\pi t$

c. $\overline{\omega} = +\frac{\pi^2}{8}\sin \frac{\pi}{2} t$

d. $\overline{\omega} = -\frac{\pi^2}{8}\sin \frac{\pi}{2} t$

المسألة الأولى:

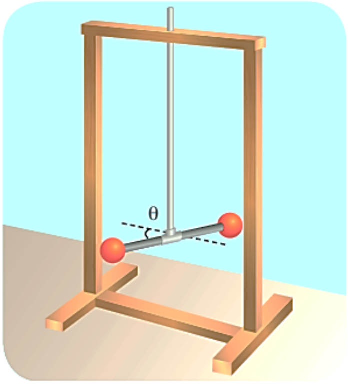


يتألّفُ نوّاس فتل من قرصٍ متجانسٍ كتلتُه $m = 2\,\text{kg}$ ، نصفُ قطره $r = 4\,\text{cm}$ ، معلّقٌ من مركزه إلى سلكِ فتلٍ شاقوليٍّ ثابتُ فتله $k = 16 \times 10^{-3}\,\text{m.N.rad}^{-1}$ ، نديرُ القرص في مستوٍ أفقيٍّ زاوية $\theta = +\frac{\pi}{4}\,\text{rad}$ عن وضع توازنِه، ونتركُهُ دونَ سرعةٍ ابتدائيّةٍ في اللحظة $t = 0$.

المطلوب:

1. احسبِ الدورَ الخاصّ للنوّاس.
2. استنتج التابعَ الزمنيَّ للمطال الزاويّ انطلاقاً من شكله العامّ.
3. احسبِ الطاقةَ الكامنةَ في وضع مطاله الزاويّ $\theta = \frac{\pi}{8}\,\text{rad}$ ، ثمّ احسب الطاقة الحركيّة عندئذٍ. (عزم عطالة قرص حول محور عمودي على مستويه ومارّ من مركزه $I_{\Delta/c} = \frac{1}{2}mr^2$)

المسألة الثانية:



ساقٌ مهملةُ الكتلةِ طولُها l، نثبّتُ في كلٍّ من طرفيها كتلةً نقطيّةً $125\,g$، ونعلّقُ الجملة من منتصفها إلى سلكِ فتلٍ شاقوليٍّ ثابتُ فتله $16\times10^{-3}\ m.N.rad^{-1}$ لتؤلّفَ الجملةُ نوّاسَ فتلٍ، نزيحُ الساقَ عن وضعِ توازنها في مستوٍ أفقي بزاوية $\theta=\frac{\pi}{3}\,rad$ وتُتركُ دونَ سرعةٍ ابتدائيّةٍ لحظةَ بدءِ الزمن، فتهتزُّ بحركةٍ جيبيّةٍ دورانيّةٍ، دورُها الخاصّ $2.5\,s$

المطلوب:

1. استنتج التابعَ الزمنيّ للمطال الزاويّ انطلاقاً من شكله العامّ.
2. احسبْ قيمةَ السرعة الزاويّة للساق لحظة مرورِها الأوّل بوضع التوازن.
3. احسبْ طولَ الساق.

المسألة الثالثة:

ساقٌ أفقيّةٌ متجانسةٌ طولُها $l = ab = 40\,\text{cm}$ معلّقةٌ بسلك فتلٍ شاقوليّ يمرُّ من منتصفها.

a. نديرُ الساقَ في مستوٍ أفقيٍّ بزاوية $\theta = 60^\circ$ انطلاقاً من وضع توازنها، ونتركُها دون سرعة ابتدائيّة في اللحظة $t = 0$ فتهتزّ بحركة جيبيّة دورانيّة دورُها الخاصّ $T_0 = 1\,\text{s}$ فإذا علمتَ أنّ عزم عطالة الساق بالنسبة لسلك الفتل $I_{\Delta/c} = 2 \times 10^{-3}\,\text{kg.m}^2$

المطلوب:

1. استنتج التابعَ الزمنيَّ للمطال الزاويّ انطلاقاً من شكله العامّ.
2. احسبْ قيمةَ السرعة الزاويّة للساق لحظة مرورها الثاني بوضع التوازن.
3. احسبْ قيمةَ التسارع الزاويّ للساق عندما تصنع زاوية (-30°) مع وضع توازنها.

b. نثبّت بالطرفين a, b كتلتين نقطيّتين $m_1 = m_2 = 75\,\text{g}$ استنتجْ قيمةَ الدورِ الخاصّ الجديد للجملة المهتزّة، ثم احسب قيمةَ ثابت فتل السلك.

c. نقسّمُ سلكَ الفتل قسمين متساويين، ونعلّقُ الساقَ بعدئذٍ بنصفَي السلك معاً؛ أحدُهما من الأعلى، والآخرُ من الأسفل ومن منتصفها، ويثبّت طرف هذا السلك من الأسفل بحيث يكون شاقوليّاً. استنتجْ قيمةَ الدور الخاصّ الجديد للساق (دون وجود كتل نقطية). افترض $\pi^2 = 10$

الدرس الثالث: الاهتزازات غير التوافقية (النواس الثقلي غير المتخامد)

الدراسة التحريكية واستنتاج طبيعة حركة النواس الثقلي المركب:

نعلق جسما صلبا كتلته m مركز عطالته C إلى محور دوران أفقي Δ مار من النقطة O من الجسم حيث البعد $d = OC$ نزيح الجسم عن موضع توازنه الشاقولي بزاوية θ ونتركه دون سرعة ابتدائية ليهتز في مستوٍ شاقولي ادرس تحريكياً هذا النواس الثقلي واستنتج طبيعة حركته من أجل السعات الزاوية الصغيرة

القوى الخارجية المؤثرة في الجسم:

قوة ثقل الجسم $\vec{W}$ و قوة رد فعل محور الدوران $\vec{R}$

بتطبيق العلاقة الأساسية في التحريك الدوراني:

$$\sum \Gamma_{\Delta} = I_{\Delta}\alpha$$

$$\Gamma_{\vec{W}/\Delta} + \Gamma_{\vec{R}/\Delta} = I_{\Delta}\alpha$$

باختيار الجهة الموجبة للدوران عكس جهة دوران عقارب الساعة نجد:

$\Gamma_{\vec{R}/\Delta} = 0$: لأن $\vec{R}$ يمر من محور الدوران

$$\Gamma_{\vec{W}/\Delta} = -d\sin\theta\, W$$

$$-d\sin\theta\, W = I_{\Delta}\alpha$$

$$-mgd\sin\theta = I_{\Delta}(\theta)''_t$$

$$(\theta)''_t = -\frac{mgd}{I_{\Delta}}\sin\theta$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تحتوي $\sin\theta$ بدلاً من θ فحلها ليس جيبياً وبالتالي حركة النواس الثقلي اهتزازية غير توافقية

من أجل السعات الزاوية الصغيرة:

$$\theta \le 0.24\, rad \Rightarrow \sin\theta = \theta$$

$$(\theta)''_t = -\frac{mgd}{I_\Delta}\theta \quad (1)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل:

$$\theta = \theta_{max}\, cos(\omega_0 t + \varphi)$$

للتأكد من صحة الحل نشتق تابع المطال الزاوي مرتين بالنسبة للزمن:

$$(\theta)'_t = -\omega_0 \theta_{max}\, sin(\omega_0\, t + \varphi)$$

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2 \theta_{max}\, cos(\omega_0\, t + \varphi)$$

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2 \theta \quad (2)$$

بالموازنة بين (1) و (2) نجد:

$$\omega_0^2 = \frac{mgd}{I_\Delta}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}} > 0$$

وهذا محقق لأن $m\ ,g\ ,d\ ,I_\Delta$ مقادير موجبة فالحركة جيبية دورانية من أجل السعات الصغيرة

استنتاج طبيعة الحركة والدور الخاص للنواس الثقلي المركب:

تعطى المعادلة التفاضلية التي تصف حركة النواس الثقلي غير المتخامد من أجل السعات الزاوية الكبيرة بالشكل: $(\theta)''_t = -\frac{mgd}{I_\Delta} sin\theta$ كيف تصبح شكل تلك المعادلة من أجل السعات الزاوية الصغيرة $\theta_{max} \le 0.24\ rad$ استنتج علاقة الدور الخاص للنواس الثقلي في حالة السعات الزاوية الصغيرة

من أجل θ صغيرة $\Leftarrow sin\,\theta \approx \theta$

$$(\theta)''_t = -\frac{mgd}{I_\Delta}\theta \qquad (1)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلا جيبيا من الشكل

$$\theta = \theta_{max}\, cos(\omega_0 t + \varphi)$$

للتأكد من صحة الحل نشتق تابع المطال الزاوي مرتين بالنسبة للزمن:

$$(\theta)'_t = -\omega_0\theta_{max}\, sin(\omega_0\, t + \varphi)$$

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2\theta_{max}\, cos(\omega_0\, t + \varphi)$$

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2\theta \qquad (2)$$

بالمطابقة بين (1) و (2) نجد:

$$\omega_0^2 = \frac{mgd}{I_\Delta} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}} > 0$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

تعريف النواس الثقلي البسيط والدور الخاص

مما يتألف النواس الثقلي البسيط عملياً ونظرياً، ثم استنتج علاقة دوره الخاص انطلاقاً من علاقة الدور الخاص للنواس الثقلي المركب في حالة السعات الصغيرة.

عملياً: كرة صغيرة كتلتها m كثافتها النسبية كبيرة معلقة بخيط مهمل الكتلة لا يمتط طوله l كبير بالنسبة نصف قطر الكرة

نظرياً: نقطة مادية تهتز بتأثير ثقلها على بعد ثابت l من محور دوران أفقي ثابت

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

$$I_\Delta = ml^2$$

$$d = l$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

الدراسة التحريكية واستنتاج طبيعة حركة النواس الثقلي البسيط:

كرة صغيرة كتلتها m نعدها نقطة مادية نعلقها بخيط خفيف مهمل الكتلة لا يمتط طوله l نزيح الكرة عن الشاقول بزاوية θ ونتركها دون سرعة ابتدائية ادرس تحريكياً هذا النواس الثقلي البسيط واستنتج طبيعة حركته من أجل السعات الزاوية الصغيرة

القوى الخارجية المؤثرة في الكرة:

ثقل الكرة $\vec{W}$ ، قوة توتر الخيط $\vec{T}$

بتطبيق العلاقة الأساسية في التحريك:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{W} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على المماس الموجه بجهة إزاحة الكرة

$$-W\sin\theta + 0 = ma_t$$

$$-mg\sin\theta = ml\alpha$$

$$-g\sin\theta = l(\theta)''_t$$

$$(\theta)''_t = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

من أجل السعات الزاوية الصغيرة:

$$\theta \leq 0.24\, rad \;\Rightarrow sin\,\theta = \theta$$

$$(\theta)''_t = -\frac{g}{l}\theta \qquad (1)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل:

$$\theta = \theta_{max}\, cos(\omega_0 t + \varphi)$$

للتأكد من صحة الحل نشتق تابع المطال الزاوي مرتين بالنسبة للزمن:

$$(\theta)'_t = -\omega_0\theta_{max}\, sin(\omega_0\, t + \varphi)$$

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2\theta_{max}\, cos(\omega_0\, t + \varphi)$$

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2\theta \qquad (2)$$

بالموازنة بين (1) و (2) نجد:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} > 0$$

وهذا محقق لأن l , g مقداران موجبان فالحركة جيبية من أجل السعات الصغيرة

استنتاج طبيعة الحركة والدور الخاص للنواس الثقلي البسيط:

تعطى المعادلة التفاضلية التي تصف حركة النواس الثقلي البسيط غير المتخامد من أجل السعات الزاوية الكبيرة بالشكل: $(\theta)''_t = -\frac{g}{l} sin\theta$ كيف تصبح شكل تلك المعادلة من أجل السعات الزاوية الصغيرة $\theta_{max} \leq 0.24\ rad$ استنتج علاقة الدور الخاص للنواس الثقلي البسيط في حالة السعات الزاوية الصغيرة

من أجل θ صغيرة $\Leftarrow sin\,\theta \approx \theta$

$$(\theta)''_t = -\frac{g}{l}\theta \quad (1)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلا جيبيا من الشكل

$$\theta = \theta_{max}\, cos(\omega_0 t + \varphi)$$

للتأكد من صحة الحل نشتق تابع المطال الزاوي مرتين بالنسبة للزمن:

$$(\theta)'_t = -\omega_0 \theta_{max}\, sin(\omega_0\, t + \varphi)$$

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2 \theta_{max}\, cos(\omega_0\, t + \varphi)$$

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2 \theta \quad (2)$$

بالمطابقة بين (1) و (2) نجد:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} > 0$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

استنتاج علاقة السرعة الخطية وتوتر الخيط لكرة النواس الثقلي البسيط:

كرة صغيرة كتلتها m نعدها نقطة مادية نعلقها بخيط خفيف مهمل الكتلة لا يمتط طوله l نزيح الكرة عن الشاقول بزاوية θ_{max} ونتركها دون سرعة ابتدائية المطلوب A) استنتج العلاقة المحددة لسرعة كرة النواس عندما يصنع الخيط زاوية θ مع الشاقول وكيف يصبح شكل العلاقة عند المرور بالشاقول

B) استنتج العلاقة المحددة لتوتر خيط التعليق عندما يصنع الخيط زاوية θ مع الشاقول وكيف يصبح شكل العلاقة عند المرور بالشاقول

A) القوى الخارجية المؤثرة: ثقل الكرة $\vec{W}$ ، توتر الخيط $\vec{T}$

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين:

الأول: المطال الأعظمي $\theta_1 = \theta_{max}, v_1 = 0$

الثاني: وضع يصنع فيه الخيط مع الشاقول الزاوية θ $\theta_2 = \theta, v_2 = v$

$$\Delta E_k = \sum W_{\vec{F}}$$

$$E_{k_2} - E_{k_1} = W_{\vec{W}} + W_{\vec{T}}$$

$W_{\vec{T}} = 0$: لأن حامل $\vec{T}$ يعامد الانتقال في كل لحظة

$E_{k_1} = 0$: لأن الكرة تركت دون سرعة ابتدائية

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

$$\frac{1}{2}v^2 = gh$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

$$h = l(\cos\theta_2 - \cos\theta_2) = l(\cos\theta - \cos\theta_{max})$$

$$v = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_{max})}$$

عند المرور بالشاقول:

$$\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1$$

$$v = \sqrt{2gl(1 - \cos\theta_{max})}$$

B) نطبق العلاقة الأساسية في التحريك:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{W} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على محور الناظم:

$$-W\cos\theta + T = ma_c$$

$$T = ma_c + W\cos\theta$$

$$= m\frac{v^2}{l} + mg\cos\theta$$

$$= m\frac{2gl(\cos\theta - \cos\theta_{max})}{l} + mg\cos\theta$$

$$= 2mg(\cos\theta - \cos\theta_{max}) + mg\cos\theta$$

$$= 2mg\cos\theta - 2mg\cos\theta_{max} + mg\cos\theta$$

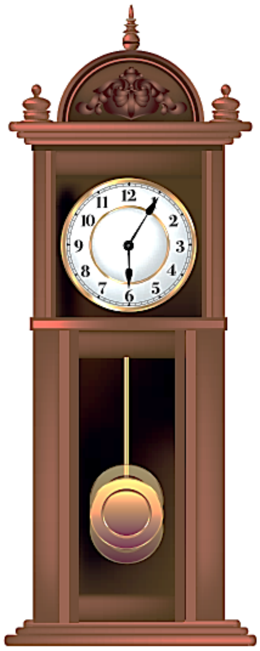
$$= 3mg\cos\theta - 2mg\cos\theta_{max}$$

$$T = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_{max})$$

عند المرور بالشاقول:

$$\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1$$

$$T = mg(3 - 2\cos\theta_{max})$$



أولا: اخترِ الإجابةَ الصحيحةَ فيما يأتي:

1. قمتَ بزيارةِ بيتِ جدّك، وطلبتْ إليك جدّتُك تصحيحَ الميقاتيّة المعلّقة على الجدار، وهي مؤلّفة من ساق منتهية بقرص قابل للحركة صعوداً أو هبوطاً، فاتّصلت بالساعة الناطقة فأشارت إلى السادسة تماماً عندما كانت الميقاتيّةُ تشيرُ إلى السادسة وخمسِ دقائقَ، ولتصحيح قياس الوقت يجبُ:

a. إيقافُ الميقاتيّة، وخفضُ القرص بمقدار ضئيل ثمّ إعادة تشغيلها.

b. إيقافُ الميقاتيّة، ورفعُ القرص بمقدار ضئيل ثمّ إعادة تشغيلها.

c. تصحيحُ عقربِ الدقائق، وإعادتُه ليشيرَ الوقتُ إلى السادسة تماماً.

d. إيقافُ الميقاتيّة مدّة خمسِ دقائقَ، ثمّ إعادةُ تشغيلها مرّة أخرى.

2. ميقاتيّتان متماثلتان مضبوطتان عند سطح الأرض بالتوقيت المحلّيّ، نضع الأولى بالطابق الأرضيّ لناطحة سحاب، بينما نضع الثانية في الطابق الأخير، فإنّه بعد شهر مع ثبات درجة الحرارة:

a. تشيران إلى التوقيت نفسِه.

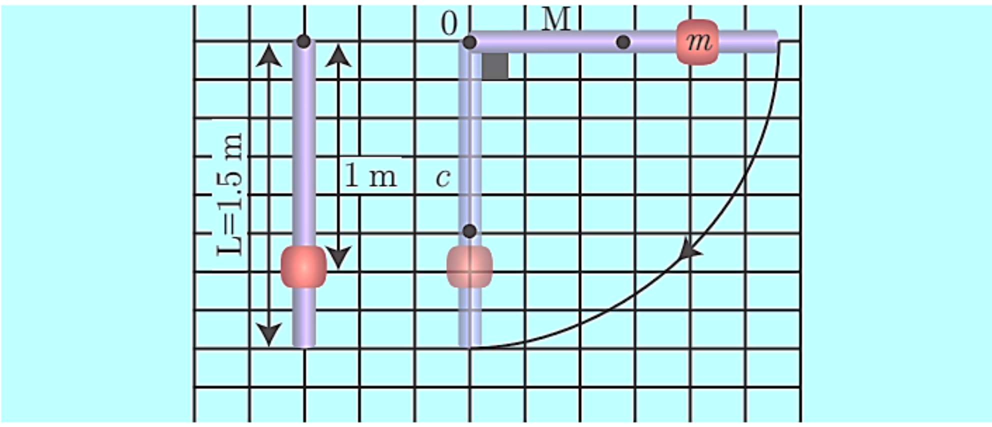
b. تقدّمُ الثانية، ويجب تعديلُها.

c. تؤخرُ الثانية، ويجبُ تعديلُها.

d. تؤخرُ الأولى، ويجبُ تعديلُها

المسألة الأولى:

يتألّفُ نـوّاسٌ ثقليٌّ مركّبٌ من ساقٍ شاقوليّةٍ، متجانسةٍ، كتلتُها $M = 0.5\,\text{kg}$ ، طولُها $1.5\,\text{m}$ ، يمكنُها أنْ تنوسَ حولَ محورٍ أفقيٍّ مارٍّ من طرفها العلويّ، ومثبّت عليها كتلةٌ نقطيّة $m' = 0.5\,\text{kg}$ على بُعد $1\,\text{m}$ من هذا الطرف، كما في الشكل المجاور



المطلوب:

1. احسبْ دورَ هذا النوّاس في حالة السّعات الزاويّة الصغيرة.
2. نزيحُ جملة النوّاس عن موضع توازنها الشاقوليّ بزاوية $\frac{\pi}{2}\,\text{rad}$ ، ونتركُها دون سرعة ابتدائيّة. احسبِ الطاقةَ الحركيّة للنوّاس لحظة مروره بالشاقول، ثمّ احسب السرعة الخطّيّة للكتلة النقطيّة m' عندئذٍ.
(عزم عطالة ساق حول محور عموديّ على مستويها ومارّ من مركز عطالتها $I_{\Delta/c} = \frac{1}{12} M L^2$)

المسألة الثانية:

خيط مهمل الكتلة لا يمتط طوله $l = 40\,\mathrm{cm}$ نعلق في نهايته كرة صغيرة نعدها نقطة مادية كتلتها $m = 100\,\mathrm{g}$

المطلوب:

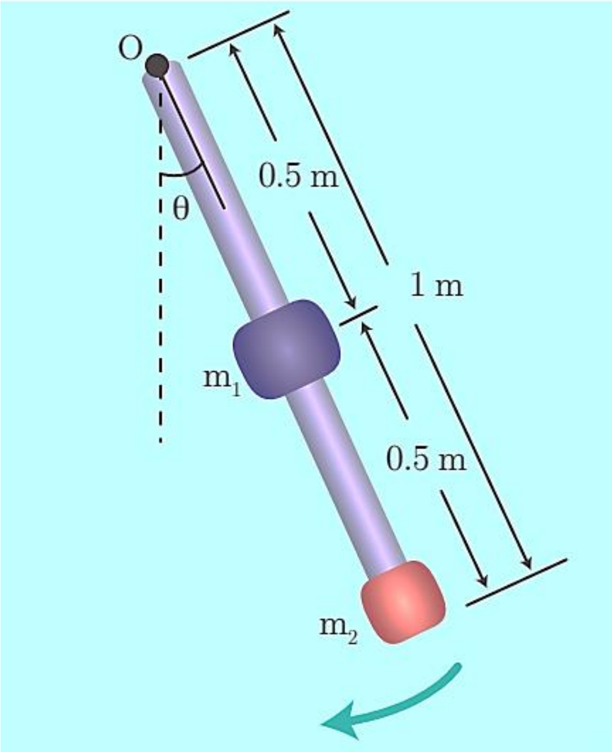
1. يحرف الخيط عن وضع التوازن بزاوية $\theta_{\max}$ ونترك الكرة بدون سرعة ابتدائية فتكون سرعتها لحظة مرورها بالشاقول $v = 2\,\mathrm{m.s^{-1}}$ استنتج قيمة الزاوية $\theta_{\max}$.
2. استنتج بالرموز علاقة توتر خيط النواس لحظة مروره بوضع الشاقول ثم احسب قيمته.

المسألة الثالثةُ:

نعلّقُ كرةً صغيرةً نعدُّها نقطةً ماديّةً، كتلتُها $m = 0.5\,\mathrm{kg}$ بخيطٍ مهملِ الكتلة، لا يمتطُّ، طولُه $l = 1.6\,\mathrm{m}$، لتؤلّفَ نوّاساً ثقليّاً بسيطاً، ثمّ نزيحُ الكرة إلى مستوٍ أفقيّ يرتفع $h = 0.8\,\mathrm{m}$ عن المستوي الأفقيّ المارّ منها وهي في موضع توازنها الشاقوليّ، ليصنعَ خيطُ النوّاس مع الشاقول زاوية θ، ونتركُها دون سرعة ابتدائيّة،

المطلوب:

1. استنتجْ بالرموز العلاقةَ المحدّدة لسرعة الكرة عند مرورها بالشاقول، ثمّ احسبْ قيمتها، موضّحاً بالرسم.
2. استنتجْ قيمةَ الزاوية θ، ثمّ احسبْ قيمتها.
3. احسبْ دورَ هذا النوّاس.
4. استنتجْ بالرموز العلاقةَ المحدّدة لشدّة قوّة توتّر الخيط عند المرور بالشاقول، ثمّ احسب قيمتها.



المسألة الرابعة:

ساقٌ شاقوليّةٌ، مهملةُ الكتلة، طولُها $L = 1\,m$، نثبّت في منتصفها كتلةً نقطيّة $m_1 = 0.4\,kg$، ونثبّتُ في طرفها السفليّ كتلةً نقطيّة $m_2 = 0.2\,kg$، لتؤلّفَ الجملةُ نوّاساً ثقليّاً مركّباً يمكنُه أنْ ينوسَ في مستوٍ شاقوليٍّ حولَ محورٍ أفقيٍّ مارٍّ من الطرف العلويّ للساق.

المطلوب:

1. احسبْ دورَ نوساتِها صغيرةِ السّعة.
2. نزيحُ الجملة عن موضع توازنها بزاوية $\theta_{max} > 0.24\,rad$، ونتركُها دون سرعة ابتدائيّة، فتكونُ السرعةُ الخطيّةُ لمركز عطالة جملة النوّاس لحظةَ مرورها بالشاقول، $v = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} m.s^{-1}$ **المطلوب:**

a. احسبِ السرعةَ الخطيّةَ للكتلة النقطيّة m_2.

b. استنتجْ قيمةَ الزاوية θ_{max}.

المسألة الخامسةُ:

يتألفُ نوّاسٌ ثقليٌّ من ساقٍ شاقوليّةٍ، مهملةِ الكتلة طولُها L، تحملُ في كلٍّ من طرفيها كتلةً نقطيّة m'، نعلّقُ الجملة بمحور دوران أفقيّ يبعد $\frac{L}{4}$ عن طرف الساق العلويّ، نزيحُ الجملة عن وضع توازنها الشاقوليّ بزاوية $\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{rad}$، ونتركُها دون سرعة ابتدائيّة في اللحظة $t = 0$، فتهتزّ بدور خاصّ $\mathrm{T_0} = 2.5\,\mathrm{s}$.

المطلوب:

1. استنتج التابعَ الزمنيّ للمطال الزاويّ لحركة هذا النوّاس انطلاقاً من شكله العامّ.
2. استنتجْ بالرموز العلاقة المحدّدة لطول الساق، ثمّ احسب قيمته.
3. احسبْ قيمة السرعة الزاويّة العُظمى للحركة (طويلة).
4. لنفرضْ أنّه في إحدى النَّوْسات انفصلتِ الكتلةُ السفليّةُ عن الساق، استنتج الدورَ الخاصَّ الجديد للجملة في حالة السّعات الزاويّة الصغيرة.

الدرس الرابع: ميكانيك السوائل

تعاريف:

عرف ما يلي: 1- الجريان المستقر 2- خط الانسياب (الجريان) 3- أنبوب التدفق 4- معدل التدفق الكتلي لمائع 5- معدل التدفق الحجمي لسائل

1- الجريان المستقر: هو الجريان الذي تكون فيه سرعة جسيم السائل وضغطه وكثافته ودرجة حرارته مقادير ثابتة مع مرور الزمن في أي نقطة ثابتة نختارها في المائع

2- خط الانسياب: هو خط وهمي يوضح المسار الذي يسلكه جسيم المائع أثناء الجريان عندما ينتقل من نقطة إلى أخرى أثناء الجريان

3- أنبوب التدفق: هو أنبوب وهمي ينتج من اجتماع خطوط الانسياب المارة من منحنٍ مغلق داخل السائل

4- التدفق الكتلي لسائل: هو كتلة كمية المائع التي تعبر مقطع الأنبوب في واحدة الزمن

5- التدفق الحجمي لسائل: هو حجم كمية المائع التي تعبر مقطع الأنبوب في واحدة الزمن

تفسير علمي:

فسر علميا: عدم تقاطع خطوط الانسياب لسائل

خط الانسياب يمس في كل نقطة شعاع سرعة جسيم السائل في تلك النقطة

تقاطع خطوط الانسياب يعني وجود أكثر من سرعة للجسيم بالمكان نفسه وباتجاهات مختلفة باللحظة نفسها وهذا مستحيل

ميزات السائل المثالي:

عدد مع الشرح ميزات السائل المثالي

1- غير قابل للانضغاط: كتلته الحجمية ثابتة مع مرور الزمن

2- عديم اللزوجة: قوى الاحتكاك الداخلي بين مكوناته مهملة عندما تتحرك بالنسبة لبعضها البعض (لا يوجد ضياع للطاقة)

3- جريانه مستقر: حركة جسيمات السائل لها خطوط انسياب محددة (سرعة جسيمات السائل عند نقطة معينة تكون ثابتة بمرور الزمن أي أن نسبة سرعات جسيمات السائل متساوية في نفس النقطة)

4- جريانه غير دوراني: لا تتحرك جسيمات السائل حركة دورانية حول أي نقطة في مجرى الجريان

استنتاج معادلة الاستمرارية:

يتحرك سائل داخل أنبوب مساحة كل من مقطعي طرفيه مختلفان s_1 ، s_2 (السائل لا يتجمع داخل الأنبوب ويملؤه تماما وجريانه مستمر) استنتج معادلة الاستمرارية

v_1: سرعة السائل عبر المقطع s_1

v_2: سرعة السائل عبر المقطع s_2

V_1 : حجم كمية السائل التي تعبر المقطع s_1 لمسافة x_1 في الزمن Δt

V_2: حجم كمية السائل التي تعبر المقطع s_2 لمسافة x_2 في الزمن Δt

حجم كمية السائل التي تعبر المقطع s_1 تساوي حجم كمية السائل التي تعبر المقطع s_2 في المدة الزمنية نفسها

$$Q'_1 = Q'_2 \Rightarrow \frac{V_1}{\Delta t} = \frac{V_2}{\Delta t} \Rightarrow \frac{s_1 v_1 \Delta t}{\Delta t} = \frac{s_2 v_2 \Delta t}{\Delta t} \Rightarrow s_1 v_1 = s_2 v_2 = const$$

تفسيرات علمية:

فسر علميا باستخدام العلاقات الرياضية:

1- اختلاف سرعة جريان الماء عبر مقاطع مختلفة المساحة في مجرى نهر جريانه أفقي

حسب معادلة الاستمرارية $s_2 v_2 = s_1 v_1$ تتناسب السرعة عكساً مع مساحة مقطع النهر

لذلك تزداد السرعة عندما تنقص المساحة، وتنقص السرعة عندما تزداد المساحة

2- ينقص مقطع عمود الماء المتدفق من الخرطوم عندما توجه فوهته للأسفل ويزداد مقطعه عندما توجه فوهته رأسيا للأعلى

حسب معادلة الاستمرارية $s_2 v_2 = s_1 v_1$ تتناسب السرعة عكساً مع مساحة المقطع

عندما توجه فوهته للأسفل: سرعة جريان الماء تزداد كلما اقترب من سطح الأرض فينقص مقطع الماء المتدفق

عندما توجه فوهته للأعلى: سرعة جريان الماء تنقص كلما ابتعد عن سطح الأرض فيزداد مقطع الماء المتدفق

3- يندفع الماء بسرعة كبيرة من ثقب صغير حدث في جدار خرطوم ينقل الماء

حسب معادلة الاستمرارية $s_2 v_2 = s_1 v_1$ تتناسب السرعة عكساً مع مساحة المقطع

وبما أن مساحة مقطع الثقب صغيرة فتكون سرعة اندفاع الماء منه كبيرة

4- تستطيع خراطيم سيارات الإطفاء إيصال الماء لارتفاعات ومسافات كبيرة

حسب معادلة الاستمرارية $s_2 v_2 = s_1 v_1$ تتناسب السرعة عكساً مع مساحة المقطع

إن فوهة الخرطوم ضيقة لذا تكون سرعة الماء كبيرة فتكون طاقته الحركية كبيرة لذا يصل إلى ارتفاعات أعلى ومسافات كبيرة

5- تكون مساحات فتحات الغاز في موقد الغاز صغيرة

حسب معادلة الاستمرارية $s_2 v_2 = s_1 v_1$ تتناسب السرعة عكساً مع مساحة المقطع

تكون مساحات فتحات الغاز صغيرة لكي يندفع منها بسرعة كبيرة

6- لجعل الماء المتدفق من فتحة خرطوم يصل إلى مسافات أبعد نغلق جزءاً من فتحة الخرطوم

حسب معادلة الاستمرارية $s_1v_1 = s_2v_2$ تتناسب السرعة عكساً مع مساحة المقطع

نغلق جزءاً من فتحة الخرطوم لكي تنقص مساحة مقطع الماء فتزداد سرعة جريانه فتزداد طاقته الحركية لذا يصل إلى ارتفاعات أعلى ومسافات أطول

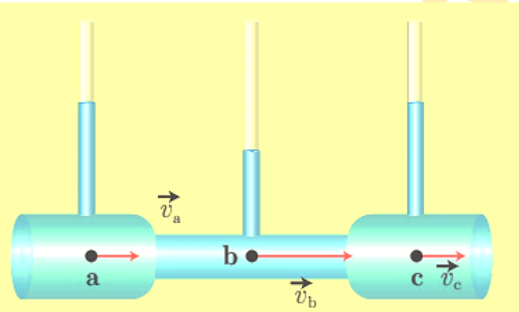
نص قانون برنولي ومعادلته:

اكتب نص قانون برنولي في الجريان المستقر واكتب العلاقة الرياضية المعبرة عنه

إن مجموع الضغط والطاقة الحركية لواحدة الحجوم والطاقة الكامنة الثقالية لواحدة الحجوم تساوي مقدارا ثابتا عند أي نقطة من نقاط خط الانسياب لمائع جريانه مستقر:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$$

علاقة السرعة بالارتفاع:



لاحظ الشكل المجاور: سائل جريانه مستقر عبر أنبوب أفقي ذي مقاطع مختلفة

1- عند أي نقاط تكون سرعة جسيم السائل أكبر؟ ولماذا؟

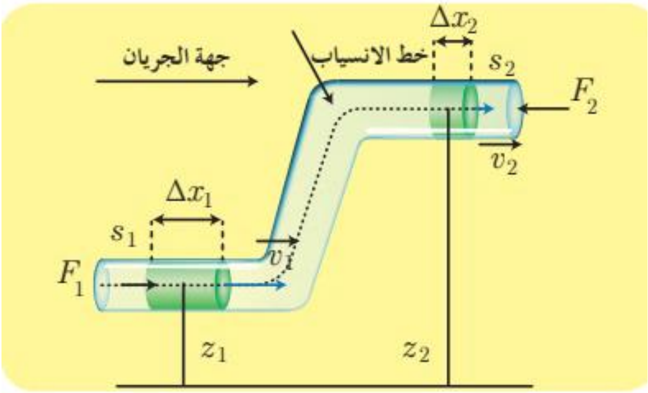
2- فسر سبب اختلاف ارتفاع سوية السائل في الأنابيب الشاقولية عند النقاط a، b، c

1) السرعة عند b أكبر لأن مساحة مقطع الأنبوب أصغر عند b

2) بما أن السرعة عند b أكبر منها عند a وc فالضغط عند b أقل منها عند a وc وبالتالي الارتفاع عند b أقل مما هي عليه عند a وc

استنتاج معادلة برنولي:

تمر كمية صغيرة من السائل بين مقطعين كما في الشكل المجاور استنتج معادلة برنولي



يتأثر سطح المقطع s_1 بقوة F_1 لها جهة الجريان وتنتقل نقطة تأثيرها مسافة Δx_1 في مدة زمنية Δt فتقوم بعمل محرك (موجب):

$$W_1 = F_1 \Delta x_1 = P_1 s_1 \Delta x_1 = P_1 \Delta V$$

يتأثر سطح المقطع s_2 بقوة F_2 معيقة للجريان لها جهة تعاكس جهة الجريان وتنتقل نقطة تأثيرها مسافة Δx_2 في مدة زمنية Δt فتقوم بعمل مقاوم (سالب):

$$W_2 = -F_2 \Delta x_2 = -P_2 s_2 \Delta x_2 = -P_2 \Delta V$$

حيث حجم كمية السائل التي تعبر المقطع s_1 في المدة الزمنية Δt يساوي حجم كمية السائل التي تعبر المقطع s_2 في المدة الزمنية نفسها (لأن السائل غير قابل للانضغاط)

العمل الكلي المبذول لتحريك كمية السائل من المقطع الأول إلى المقطع الثاني يساوي مجموع عمل قوة الثقل وعمل قوة ضغط السائل:

$$W_T = W_w + W_1 + W_2 = -mg(z_2 - z_1) + P_1 \Delta V - P_2 \Delta V$$

وبحسب مصونية الطاقة:

$$W_T = E_{k_2} - E_{k_1}$$

$$W_T = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$-mg(z_2 - z_1) + P_1 \Delta V - P_2 \Delta V = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$-mgz_2 + mgz_1 + P_1 \Delta V - P_2 \Delta V = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$P_1\Delta V+\frac{1}{2}mv_1^2+mgz_1=P_2V+\frac{1}{2}mv_2^2+mgz_2$$

$$m=\rho\Delta V$$

$$P_1\Delta V+\frac{1}{2}\rho\Delta Vv_1^2+\rho\Delta Vgz_1=P_2V+\frac{1}{2}\rho\Delta Vv_2^2+\rho\Delta Vgz_2$$

نقسم طرفي العلاقة على ΔV :

$$P_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho gz_1=P_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho gz_2$$

العلاقة بين السرعة والارتفاع:

انطلاقاً من معادلة برنولي استنتج العلاقة بين ضغط السائل وسرعته إذا كان الأنبوب أفقياً

$$P_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho gz_1=P_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho gz_2$$

إذا كان الأنبوب أفقياً:

$$z_1=z_2$$

$$P_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=P_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$P_1-P_2=\frac{1}{2}\rho v_2^2-\frac{1}{2}\rho v_1^2$$

$$P_1-P_2=\frac{1}{2}\rho(v_2^2-v_1^2)$$

ينقص ضغط السائل كلما ازدادت سرعته

معادلة المانومتر:

انطلاقاً من معادلة برنولي استنتج قانون الضغط في الموائع الساكنة (معادلة المانومتر)

$$P_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho g z_1=P_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho g z_2$$

إذا كان السائل ساكناً:

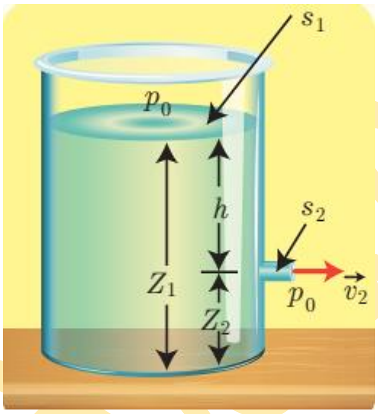
$$v_1=v_2=0$$

$$P_1+\rho g z_1=P_2+\rho g z_2$$

$$P_1-P_2=\rho g z_2-\rho g z_1=\rho g(z_2-z_1)=\rho g h$$

نظرية تورشيللي:

يحتوي خزان على سائل كتلته الحجمية ρ مساحة سطح مقطعه s_1 كبيرة بالنسبة لفتحة جانبية مساحة مقطعها s_2 صغيرة تقع قرب قعره وعلى عمق h من السطح الحر للسائل استنتج العلاقة المحددة للسرعة التي يخرج بها السائل من الفتحة الجانبية



نطبق معادلة برنولي على جزء صغير من السائل انتقل من سطح الخزان بسرعة $v_1 \approx 0$ ليخرج من الفتحة s_2 إلى الوسط الخارجي بسرعة v_2 :

$$P_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho g z_1=P_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho g z_2$$

السطح المفتوح والفتحة معرضتان للضغط الجوي النظامي:

$$P_1=P_2=P_0$$

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho g z_1=\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho g z_2$$

بما أن السرعة v_1 مهملة بالنسبة للسرعة v_2 نأخذ: $v_1=0$

$$\rho g z_1=\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho g z_2$$

نقسم طرفي العلاقة على ρ :

$$gz_1 = \frac{1}{2}v_2^2 + gz_2$$

$$\frac{1}{2}v_2^2 = gz_2 - gz_1$$

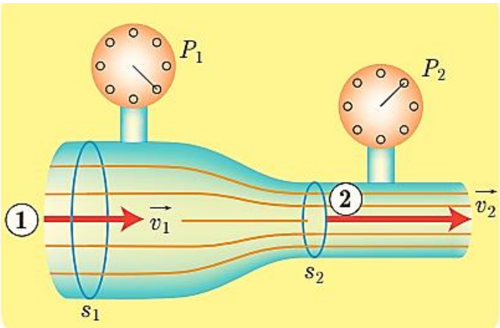
$$v_2^2 = 2(gz_2 - gz_1)$$

$$= 2g(z_2 - z_1) = 2gh$$

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

أنبوب فنتوري

اشرح مبدأ عمل أنبوب فنتوري واستنتج علاقة فرق الضغط بين نقطتين تقعان في المستوى الأفقي نفسه من أنبوب فنتوري الأولى تقع في الجذع الرئيس والثانية في الاختناق



يتألف أنبوب فنتوري من أنبوب مساحة مقطعه s_1 يجري فيه سائل بسرعة v_1 في منطقة ضغطها P_1 فيصل لاختناق مساحته s_2

نطبق معادلة برنولي بين النقطتين 1 و 2 اللتين تقعان في المستوى الأفقي نفسه

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$$

$$z_1 = z_2$$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$$

$$s_1 v_1 = s_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{s_1}{s_2} v_1$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho[(\frac{s_1}{s_2}v_1)^2 - v_1^2]$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho[(\frac{s_1}{s_2})^2 - 1]v_1^2$$

ويقاس فرق الضغط بين نقطتين باستخدام جهاز قياس الضغط

$$s_2 < s_1 \Rightarrow P_2 < P_1$$

الضغط في الاختناق أقل من الضغط في الجذع الرئيس للأنبوب

تفسيرات علمية:

فسر علمياً باستخدام العلاقات الرياضية:

1- اندفاع ستائر النوافذ المفتوحة إلى خارج السيارة عندما تتحرك بسرعة معينة

حسب معادلة برنولي: $P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$

الضغط ينقص بزيادة السرعة

فيكون ضغط الهواء خارج النوافذ أقل من ضغط الهواء داخل السيارة وبالتالي يخرج الهواء من داخل السيارة نحو الخارج ويخرج مع الهواء الستائر

2- عندما تهب الأعاصير ينصح بفتح النوافذ في البيوت

حسب معادلة برنولي: $P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$

الضغط ينقص بزيادة السرعة

عند فتح النوافذ تتساوى سرعة الرياح أسف وأعلى سقف البيت (ذو السقف القابل للنزع) فيتساوى الضغط أسفل وأعلى سقف البيت فلا يُنتزع

أولا: اخترِ الإجابةَ الصحيحةَ ممّا يأتي:

1. عندما تهبُّ رياحٌ أفقيّةٌ عند فوّهة مدخنة شاقوليّة فإنّ:

a. سرعةَ خروج الدخان من فوّهة المدخنة:

a. تزداد　　b. تنقص　　c. تبقى دون تغيّر　　d. تنعدم

b. ويمكن تفسيرُ النتيجة وفقَ:

a. مبدأ باسكال　　b. مبدأ برنولي　　c. قاعدة أرخميدس　　d. معادلة الاستمراريّة

2. يتّصف السائلُ المثاليُّ بأنّه:

a. قابلٌ للانضغاط وعديمُ اللزوجة.　　b. غيرُ قابل للانضغاط ولزوجتُه غيرُ مهملة.

c. غيرُ قابل للانضغاط وعديمُ اللزوجة.　　d. قابلٌ للانضغاط ولزوجتُه غيرُ مهملة.

3. خرطومٌ مساحةُ مقطعه عند فوّهة دخول الماء فيه s_1 وسرعةُ جريان الماء عند تلك الفوّهة v_1، فتكونُ سرعةُ خروج الماء v_2 من نهاية الخرطوم حيثُ أنّ مساحةُ المقطع $s_2 = \frac{1}{4}s_1$ مساويةً:

a. v_1　　b. $\frac{1}{4}v_1$　　c. $4\,v_1$　　d. $16\,v_1$

المسألة الأولى:

لملْءِ خزّانٍ حجمُه $600\,\mathrm{L}$ بالماء استُعمِلَ خرطومٌ مساحةُ مقطعِه $5\,\mathrm{cm}^2$ فاستغرقت العمليّة $300\,\mathrm{s}$.

المطلوب:

1. احسبْ معدّلَ التدفّق الحجميّ Q'.
2. احسبْ سرعة تدفّق الماء من فتحة الخرطوم.
3. كمْ تصبحُ سرعة تدفّق الماء من فتحة الخرطوم إذا نَقَصَ مقطعُها ليصبحَ رُبعَ ما كان عليه؟

المسألة الثانيةُ:

ترفعُ مِضخّةٌ الماءَ من خزّانٍ أرضيٍّ عبرَ أنبوبٍ مساحةُ مقطعِه $s_1 = 10\,\text{cm}^2$ إلى خزّانٍ يقعُ على سطح بناء، فإذا علمتَ أنّ مساحةَ مقطعِ الأنبوب الذي يصبُّ في الخزّان العلويّ $s_2 = 5\,\text{cm}^2$، وأنّ معدّل الضخّ $Q' = 0.005\,\text{m}^3.\text{s}^{-1}$.

المطلوب:

1. احسب سرعةَ الماءِ عندَ دخولِه الأنبوبَ وعند فتحةِ خروجِه من الأنبوبِ.
2. احسب قيمةِ ضغطِ الماءِ عندَ دخولِه الأنبوبَ علماً بأنّ الضغطَ الجويّ $1 \times 10^5\,\text{Pa}$، والارتفاعَ بينَ الفوّهتين $20\,\text{m}$
3. احسب العمل الميكانيكي اللازم لضخ $100\,\text{L}$ من الماء إلى الخزان العلوي.

$\rho_{H_2O} = 1000\,\text{kg.m}^{-3}\quad,\quad g = 10\,\text{m.s}^{-2}$

المسألة الثالثةُ:

ينتهي أنبوبُ ماءٍ مساحةُ مقطعِه $10\,cm^2$ إلى رشّاش الاستحمام، وفيه 25 ثقباً متماثلاً، مساحةُ مقطعِ كلِّ ثقبٍ $0.1\,cm^2$، فإذا علمتَ أنّ سرعةَ تدفّق الماء عبر الأنبوب $50\,cm.s^{-1}$.

المطلوب:

1. احسب معدّلَ التدفّق الحجميّ للماء.
2. احسب سرعةَ تدفّق الماء من كلِّ ثقب.

المسألة الرابعة:

مِحقنٌ أسطوانيُّ الشكلِ مساحةُ مقطعِه $1.25\,cm^2$ مركّبٌ عليه إبرةٌ معدِنيّةٌ مساحة مقطعها $4 \times 10^{-4}\,cm^2$.

المطلوب:

1. احسب سرعةِ تدفقِ المحلولِ عبرَ مقطعِ المحقنِ عندما يكونُ معدّلُ التدفّق $5 \times 10^{-5}\,m^3.s^{-1}$
2. احسب سرعة تدفقِ المحلولِ لحظةَ خروجِهِ من فوّهةِ الإبرة.

الدرس الخامس: النسبية الخاصة

فرضيتا أينشتاين:

اذكر فرضيتا أينشتاين في النسبية الخاصة

1- سرعة انتشار الضوء في الخلاء هي نفسها $c = 3 \times 10^8\ m.s^{-1}$ في جميع جمل المقارنة

2- القوانين الفيزيائية تبقى نفسها في جميع جمل المقارنة العطالية

تفسيرات علمية

فسر علمياً باستخدام العلاقات الرياضية:

1- عندما يكون جسم متحركاً بالنسبة لجملة مقارنة فإن زمنه يتمدد وفق قياس جملة المقارنة تلك

$$t = \gamma t_0$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > 1 \Rightarrow t > t_0$$

2- عندما يكون جسم متحركاً بالنسبة لجملة مقارنة فإن طوله يتقلص وفق قياس جملة المقارنة تلك

$$L = \frac{L_0}{\gamma}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > 1 \Rightarrow L < L_0$$

3- عندما يكون جسم متحركاً بالنسبة لجملة مقارنة فإن كتلته تزداد وفق قياس جملة المقارنة تلك

$$m = \gamma m_0$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > 1 \Rightarrow m > m_0$$

تطبيق (مفارقة التّوْءَمان):

بفرض أنّ أخوين توءمين أحدُهما رائدُ فضاءٍ طار بسرعةٍ قريبةٍ من سرعة الضوء في الخلاء $v = \frac{\sqrt{899}}{30} c$، وبقي رائدُ الفضاء في رحلته سنةً واحدةً وفق ميقاتيّةٍ يحملها، فما الزمنُ الذي انتظره أخوه التوأم على الأرض ليعود رائدُ الفضاء من رحلته؟

تطبيق (السارية والحُجرة):

بفرض أنّ روبوتاً رياضيّاً يحملُ ساريةً أفقيّةً طولُها وهي ساكنة $15\,\mathrm{m}$، يتحرّكُ بسرعةٍ أفقيّة $0.75\,\mathrm{c}$ وأمامَه حُجْرةٌ لها بابانِ أماميٌّ وخلفيّ، البُعد بينهما $10\,\mathrm{m}$، يمكنُ التحكّمُ بفتحهما، وإغلاقهما آنيّاً بالنسبة لمراقبٍ ساكن، هل يمكنُ أنْ تعبرَ الساريةُ الحُجرةَ بأمانٍ إذا أغلقَ المراقبُ الساكنُ البابين وفتحَهما آنياً (بالنسبة له) عندَ عبور الروبوت مع السارية للحُجرة؟ (نعدّ $\sqrt{0.4375} \approx 0.66$).

يحاول العلماء عند دراستهم خصائص الجسيمات تحريكها بسرعات كبيرة جداً باستخدام المسرعات، هل يمكن أن تصل سرعة هذه الجسيمات إلى سرعة انتشار الضوء في الخلاء تماماً؟ لماذا؟

لا، بما أن الجسم يمتلك كتلة سكونية فكلما اقتربت سرعته من سرعة الضوء في الخلاء زادت كتلته، وبالتالي سيحتاج لقوة أكبر لدفعه فإذا تناهت سرعته إلى سرعة الضوء في الخلاء يحتاج إلى إعطاءه قوة لانهائية وهذا غير ممكن

الطاقة في النسبية:

يقف جسم ساكن عند مستو مرجعي (سطح الأرض مثلاً) ما قيمة طاقته الحركية عندئذ؟ وما قيمة طاقته الكامنة الثقالية بالنسبة للمستوي المرجعي؟ هل طاقته الكلية النسبية معدومة؟ ولماذا؟

طاقته الحركية معدومة لإنعدام سرعته: $v = 0 \Rightarrow E_k = 0$

طاقته الكامنة الثقالية معدومة بالنسبة للمستوي المرجعي لأن ارتفاع الجسم عنه معدوم:

$$h = 0 \Rightarrow E_p = 0$$

طاقته الكلية النسبية غير معدومة لأنها مجموع الطاقة الحركية والطاقة السكونية، صحيح أن طاقته الحركية معدومة إلا أنه يمتلك طاقة سكونية:

$$E = E_0 + E_k = m_0c^2 + 0 = m_0c^2 \neq 0$$

كمية الحركة في النسبية:

انطلاقاً من علاقة كمية الحركة في الميكانيك النسبي استنتج العلاقة المحددة لكمية الحركة في الميكانيك الكلاسيكي

$$p = mv = \gamma m_0 v$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$$

وفق التقريب:

$$(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon \; ; \; \varepsilon \ll 1$$

من أجل السرعات الصغيرة:

$$v \ll c \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} \ll 1$$

$$\gamma = 1 + \frac{v^2}{2c^2}$$

$$p = (1 + \frac{v^2}{2c^2}) m_0 v$$

يهمل الحد $\frac{v^2}{c^2}$ بالنسبة للواحد:

$$p = m_0 v$$

الطاقة الحركية في النسبية:

انطلاقاً من علاقة الطاقة الحركية في الميكانيك النسبي استنتج العلاقة المحددة للطاقة الحركية في الميكانيك الكلاسيكي

$$E_k = E - E_0$$

$$= mc^2 - m_0 c^2 = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2$$

$$E_k = (\gamma - 1) m_0 c^2$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$$

وفق التقريب:

$$(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon \; ; \; \varepsilon \ll 1$$

من أجل السرعات الصغيرة:

$$v \ll c \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} \ll 1$$

$$\gamma = 1 + \frac{v^2}{2c^2}$$

$$E_k = \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} - 1\right) m_0 c^2$$

$$= \frac{v^2}{2c^2} m_0 c^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

سؤال:

برهن رياضياً أن كتلة الجسم المتحرك تزداد بمقدار يساوي طاقته الحركية مقسومةً على c^2 (برهن أن الكتلة تكافئ الطاقة) ثم استنتج علاقة الطاقة الكلية في الميكانيك النسبي

$$\Delta m = m - m_0 = \gamma m_0 - m_0$$

$$\Delta m = m_0(\gamma - 1)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$$

وفق التقريب: $(1 + \varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon \; ; \; \varepsilon \ll 1$

من أجل السرعات الصغيرة:

$$v \ll c \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} \ll 1$$

$$\gamma = 1 + \frac{v^2}{2c^2}$$

$$\Delta m = m_0\left(1+\frac{v^2}{2c^2}-1\right) = m_0\frac{v^2}{2c^2} = \frac{\frac{1}{2}m_0v^2}{c^2} = \frac{E_k}{c^2}$$

$$m - m_0 = \frac{E_k}{c^2}$$

نضرب طرفي العلاقة بـ c^2 :

$$mc^2 - m_0c^2 = E_k \Rightarrow E - E_0 = E_k$$

$$E = E_0 + E_k$$

تطبيق (6):

يتحرّكُ إلكترون في أنبوبةٍ تلفاز بطاقة حركيّة $27\times10^{-16}\,J$

1. أحسبِ النسبةَ المئويّة للزيادة في كتلةِ الإلكترون نتيجةَ طاقتهِ الحركيّةِ
2. أحسبْ طاقتَه السكونيّةَ

علماً أنَّ: $m_e = 9\times10^{-31}\,kg$, $c = 3\times10^{8}\,m.s^{-1}$

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

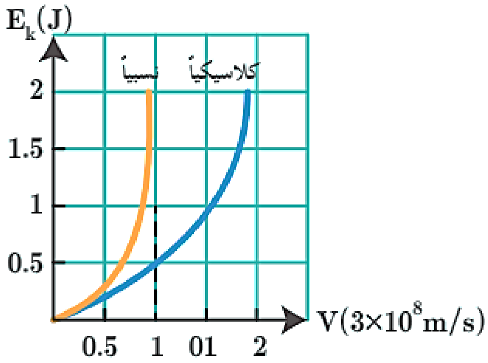
1. أفترضُ أنّ صاروخين في الخلاء يتحرّكُ كلٌّ منهما نحوَ الآخر بسرعةٍ قريبةٍ من سرعةِ انتشارِ الضوءِ في الخلاء، وفي لحظةٍ ما أضاء الصاروخُ الأوّلُ مصابيحَه، إنّ سرعةَ ضوء الصاروخِ الأولِ بالنسبةِ للصاروخِ الثاني هي:

a. c b. أكبر من c c. أصغر من c d. معدومة

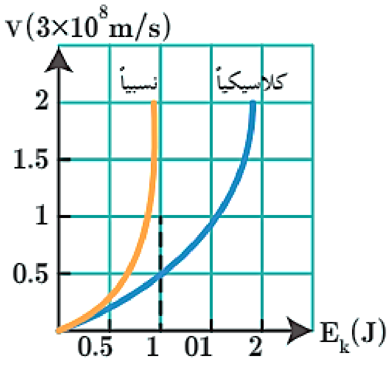
2. أفترضُ أنّ طاقمَ سفينةِ فضاءٍ تطيرُ بسرعةٍ قريبةٍ من سرعةِ انتشارِ الضوءِ في الخلاء يشاهدون تسجيلاً لمباراةِ كرةِ قدمٍ مدّتُها ساعةٌ ونصفٌ، ويتابعُهم مراقبٌ أرضيٌّ بتلسكوبٍ دقيقٍ جدّاً، فيرى مدّة المباراة:

a. هي نفسها. b. أكبر c. أصغر d. معدومة

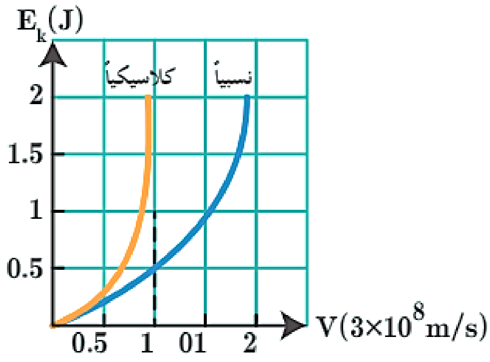
3. المنحني البيانيّ الذي يمثّل العلاقة بين الطاقة الحركيّة لجسمٍ ما، وسرعته هو:



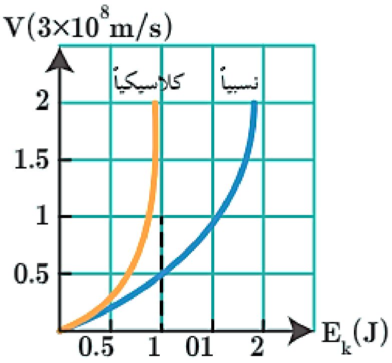
.a



.b



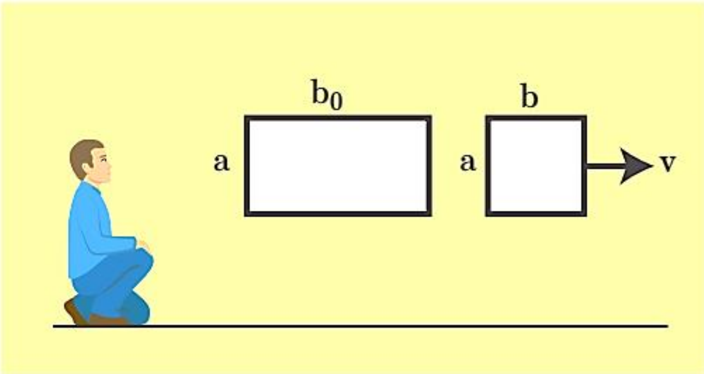
.c



.d

المسالة الأولى:

جسمٌ مستطيلُ الشكلِ طولُه وهو ساكن b_0 يساوي ضعفي عرضه a، يتحرّك هذا الجسمُ بحيثُ يكونُ طولُه موازياً لشعاع سرعته $\vec{v}$ بالنسبة لمراقبٍ في الجملة الساكنة، فيبدو له مربّعاً، احسبْ قيمةَ سرعة الجسم.



المسالة الثانية:

يتحرّكُ إلكترونٌ بسرعة، $\frac{2\sqrt{2}}{3}c$

المطلوب: احسب كميّة حركةِ الإلكترون وفقَ قوانين الميكانيك الكلاسيكيّ، ثمّ وفقَ الميكانيك النسبيّ، أيُّهما الأصحُّ برأيك؟

المسالة الثالثة :

تبلغُ الكتلةُ السكونيّةُ لبروتون $mp = 1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg}$ ، وطاقتُه الكليّة تساوي ثلاثةَ أضعافِ طاقتِهِ السكونيّة.

المطلوب: احسب كلٍّ من طاقته السكونيّة، وطاقته الحركيّة في الميكانيك النسبيّ، وكتلته في الميكانيك النسبيّ.

مسائل عامة

المسألة (1):

نشكّلُ هزّازةً توافقيّةً بسيطةً مؤلّفةً من نابضٍ مرنٍ شاقوليٍّ مهملِ الكتلة، حلقاتُهُ متباعدةٌ، ثابتُ صلابته $k = 10\ \mathrm{N.m^{-1}}$ مثبّتٍ من إحدى نهايتيه إلى نقطةٍ ثابتةٍ، ويحملُ في نهايته الثانية جسماً كتلتُه $m = 0.1\ \mathrm{kg}$ فإذا علمتَ أنّ مبدأ الزمن لحظةَ مرور الجسم في مركز التوازن، وهو يتحرّك بالاتّجاه السالب بسرعة $v = -3\ \mathrm{m.s^{-1}}$.

المطلوب:

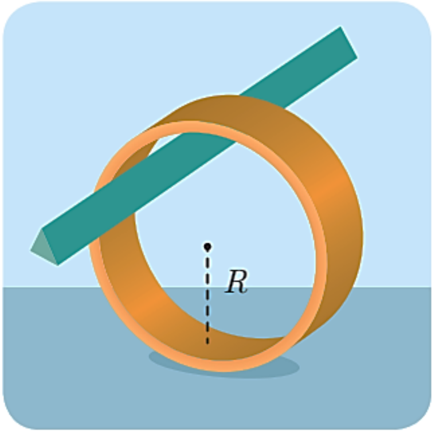
1. احسبْ نبضَ الحركة.
2. استنتج التابعَ الزمنيَّ لمطال الحركة.
3. احسبْ شدّة قوّة الإرجاع في نقطة مطالها $3\ \mathrm{cm}$.

المسألة (2):

تهتزُّ نقطة ماديَّة كتلتها $0.5\,\mathrm{kg}$ بحركة توافقيَّة بسيطة بمرونة نابض مهمل الكتلة، حلقاته متباعدة، شاقوليّ وبدور $4\,\mathrm{s}$ وبسعة اهتزاز $X_{max} = 8\,\mathrm{cm}$ فإذا علمت أنَّ النقطة كانت في موضع مطاله $\frac{X_{max}}{2}$ في بدء الزمن وهي متحرِّكة بالاتِّجاه السالب.

المطلوب:

1. استنتج التابع الزمنيّ لمطال حركة هذه النقطة بعد تعيين قيمة الثوابت.
2. عيّن لحظتي المرور الأوّل والثالث في وضع التوازن.
3. عيّن المواضع التي تكون فيها شدَّة محصِّلة القوى عظمى، واحسب قيمتها، وحدّد موضعاً تنعدم فيه شدَّة هذه المحصِّلة.
4. احسب قيمة ثابت صلابة النابض، وهل تتغيَّر هذه القيمة باستبدال الكتلة المعلَّقة؟
5. احسب الكتلة التي تجعل الدَّور الخاصّ $1\,\mathrm{s}$.



المسألةُ (4):

نعلّقُ حلقةً معدِنيّةً نصفُ قطرها $R = 12.5\,\text{cm}$ ، كتلتُها $M = 0.05\,\text{kg}$ ، بمحور أفقيّ ثابت، كما هو موضّحٌ بالشكل.

المطلوب:

1. احسبِ الدورَ الخاصّ لاهتزاز هذا النوّاس من أجل السّعات الزاوية الصغيرة إذا علمت أنّ عزم عطالة الحلقة حول محور عمودي على مستويها، ومارّ من مركز عطالتها $I_{\Delta/c} = M\,R^2$.
2. احسبْ طول النوّاس البسيط المواقت.

المسألة (5):

يتألّف نوّاس ثقليٌّ من ساق شاقوليّة مهملة الكتلة طولها $1\,\mathrm{m}$ تحمل في نهايتها العلويّة كتلة نقطيّة $m_1 = 0.2\,\mathrm{kg}$ وتحمل في نهايتها السفليّة كتلة نقطيّة $m_2 = 0.6\,\mathrm{kg}$ تهتزُّ هذه السّاق حول محور أفقيّ مارّ من منتصفها

المطلوب:

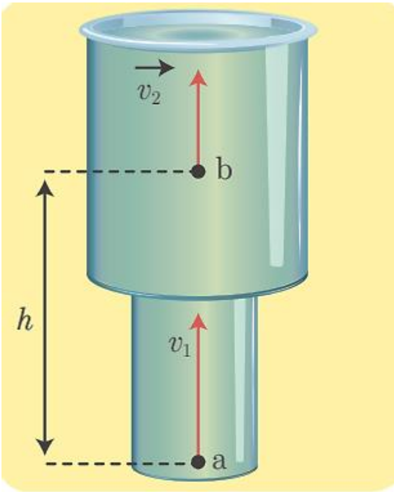
1. احسب دور النوّاس في حالة السّعات الصّغيرة.
2. احسب طول النوّاس البسيط المواقت لهذا النوّاس.
3. احسب دور النوّاس لو ناس بسعة زاوية $\theta_{\max} = 0.4\,\mathrm{rad}$.
4. نزيح الساق عن وضع توازنها الشاقوليّ بزاوية $\theta_{\max} = 60^\circ$ ونتركها دون سرعة ابتدائيّة.
   - **a.** استنتج بالرموز علاقة السّرعة الزاوية لجملة النوّاس لحظة مرورها بشاقول محور التعليق، ثمَّ احسب قيمتها عندئذٍ.
   - **b.** احسب السُّرعة الخطِّيّة لمركز عطالة جملة النوّاس لحظة المرور بالشّاقول.
5. نستبدل بالكتلة m_2 كتلة $m_1 = 0.2\,\mathrm{kg}$ ونعلّق السّاق من منتصفها بسلك فتل شاقوليّ لنشكّل بذلك نوّاساً للفتل، نزيح السّاق الأفقيّة عن وضع توازنها بزاوية ونتركها دون سرعة ابتدائيّة فتهتزُّ بدور $T_0 = 2\pi\,\mathrm{s}$. احسب قيمة ثابت فتل سلك التعليق.
6. احسب قيمة التّسارع الزاوي لنوّاس الفتل عند المرور بوضع $\theta = 0.5\,\mathrm{rad}$.

المسألة (6):

يتألَّف نوَّاس ثقليّ مركّب من قرص متجانس كتلته m نصف قطره $r = \frac{2}{3}\mathrm{m}$ يمكن أن يهتزَّ في مستوٍ شاقوليٍّ حول محور أفقيٍّ مارٍّ من نقطة على محيطه.

المطلوب:

1. انطلاقاً من العلاقة العامّة لدور النوّاس الثقليّ المركّب، استنتج العلاقة المحدِّدة لدوره الخاصّ في حالة السّعات الصّغيرة، ثمَّ احسب قيمة هذا الدّور.
2. احسب طول النوّاس البسيط المواقت لهذا النوّاس المركّب.
3. نثبّت في نقطة من محيط القرص كتلة نقطيّة m' تساوي كتلة القرص m ونجعله يهتزُّ حول محور أفقيٍّ مارٍّ من مركز القرص، احسب دوره في هذه الحالة من أجل السّعات الزاوية الصّغيرة.
4. نزيح القرص من جديد عن وضع توازنه الشاقوليّ بسعة زاوية $\theta_{\max}$ ونتركه دون سرعة ابتدائيّة فتكون السرعة الخطّيّة للكتلة النقطيّة m' لحظة المرور بالشاقول $\frac{2\pi}{3}\mathrm{m.s^{-1}}$ احسب قيمة السعة الزاوية $\theta_{\max}$ (إذا علمت أنَّ: $\theta_{\max} > 0.24\,\mathrm{rad}$, $\mathrm{g} = 10\mathrm{m.s^{-1}}$, $\pi^2 = 10$ عزم عطالة القرص حول محور مارّ من مركزه وعموديّ على مستويه $I_{\Delta/c} = \frac{1}{2} m\, r^2$)



المسألة (7):

يجري الماء داخل الأنابيب الموضَّحة في الشكل من (a) إلى (b) حيث نصف قطر الأنبوب عند (a) $r_1 = 5\,\text{cm}$ و نصف قطر الأنبوب عند النقطة (b) $r_2 = 10\,\text{cm}$ والمسافة الشاقوليَّة بين (a) و (b) $h = 50\,\text{cm}$:

1. احسب سرعة جريان الماء عند النقطة (b) علماً أنَّ سرعة جريان الماء عند النقطة (a) $v_1 = 4\,\text{m.s}^{-1}$.
2. احسب قيمة فرق الضَّغط (P_{a-b}) $(\rho_{\text{H2O}} = 1000\,\text{kg.m}^3)$.

المسألة (8):

تخيّل أنّ مركبة فضاء لها شكل مستطيل تقوم برحلة إلى نجم "الشعرى" وفق مسار مستقيم، بحيث يكون شعاع سرعة المركبة دوماً موازياً لطول المركبة، فتسجّل أجهزة المركبة المسافرة القياسات الآتية:

طول المركبة: $100\,\mathrm{m}$، عرض المركبة: $25\,\mathrm{m}$، المسافة المقطوعة: 4 سنة ضوئيَّة، زمن الرحلة: $\frac{8}{\sqrt{3}}$ سنة،
وتسجّل أجهزة المحطّة الأرضيَّة قياساتها لتلك الرحلة باستخدام تيلسكوب دقيق،
احسب كلّاً من سرعة المركبة وطولها وعرضها في أثناء الرحلة، والمسافة التي قطعتها وزمن الرحلة وفق قياسات المحطّة الأرضيَّة.
(سرعة الضّوء في الخلاء $c = 3 \times 10^{8}\,\mathrm{m.s^{-1}}$)

سلسلة نمبرون التعليمية

EDUCATION