المسألة الأولى :

لدينا رباعي الوجوه $OABC$ ثلاثي الزاوية القائمة رأسه O أي أن المستقيمات (OA) و (OB) و (OC) متعامدة مثنى مثنى. و بفرض أن $OC=1$ و $OB=2$ و $OA=3$.

ولنختر معلماً متجانساً $\left(O;\frac{1}{3}\overrightarrow{OA},\frac{1}{2}\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)$ والمطلوب:

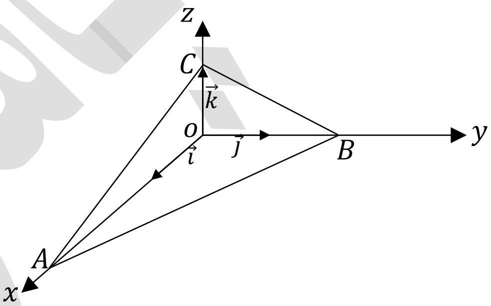
① اكتب معادلة للمستوي (ABC).

② بفرض النقطة H المسقط القائم للنقطة O على المستوي (ABC) أعطِ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (OH) واستنتج إحداثيات H.

③ احسب $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}$ واستنتج أن H نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC.

④ احسب بعد O عن (ABC)

ثم احسب حجم رباعي الوجوه $OABC$ ثم استنتج مساحة ABC



الحل: ① $A(3,0,0)$ و $B(0,2,0)$ و $C(0,0,1)$

$\overrightarrow{AB}(-3,2,0)$ و $\overrightarrow{AC}(-3,0,1)$

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ شعاعاً ناظماً للمستوي (ABC) بشرط a,b,c ليست جميعها أصفار فيكون

$$\overrightarrow{AB}.\vec{n}=0\Rightarrow -3a+2b=0$$

$$\overrightarrow{AC}.\vec{n}=0\Rightarrow -3a+c=0$$

بفرض $b=3$ نجد أن $a=2$ وبالتالي $c=6$ و منه $\vec{n}(2,3,6)$

$$2x+3y+6z+d=0$$

$$A(3,0,0)\Longrightarrow 6+0+0+d=0\Longrightarrow d=-6$$

$$(ABC): 2x+3y+6z-6=0$$

② إيجاد معادلات(OH): نلاحظ أن $\overrightarrow{OH}=\vec{u}=\vec{n}=(2,3,6)$ و المستقيم يمر من $O(0,0,0)$ نكتب التمثيل الوسيطي له:

$$(OH):\begin{cases} x=2t \\ y=3t \\ z=6t \end{cases} \quad ;t\in\mathbb{R}$$

لإيجاد H نعوض معادلات OH في معادلة المستوي (ABC):

$$2(2t)+3(3t)+6(6t)-6=0\Longrightarrow t=\frac{6}{49}$$

نعوض: $x=\frac{12}{49}$ و $y=\frac{18}{49}$ و $z=\frac{36}{49}$ وبالتالي $H\left(\frac{12}{49},\frac{18}{49},\frac{36}{49}\right)$

③ $\overrightarrow{CH}\left(\frac{12}{49},\frac{18}{49},\frac{-13}{49}\right)$ و $\overrightarrow{AB}(-3,2,0)$ ومنه:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH}=(-3)\left(\frac{12}{49}\right)+(2)\left(\frac{18}{49}\right)+(0)\left(\frac{-13}{49}\right)=0$$

ومنه $(AB)\perp(CH)$ .... (I)

$\overrightarrow{BH}\left(\frac{12}{49},\frac{-80}{49},\frac{36}{49}\right)$ و $\overrightarrow{AC}(-3,0,1)$ ومنه:

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BH}=(-3)\left(\frac{12}{49}\right)+(0)\left(\frac{-80}{49}\right)+(1)\left(\frac{36}{49}\right)=0$$

ومنه $(AC)\perp(BH)$ .... (II)

من (I) و (II) نستنتج أن H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC.

④

$$dist\ (O,ABC)=\frac{\|0+0+0-6\|}{\sqrt{4+9+36}}=\frac{6}{\sqrt{49}}=\frac{6}{7}$$

$$V_{C-OAB}=\frac{1}{3}\ S_{OAB}\ .h$$

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}.3.2=3$$

$$h=OC=1$$

$$\Rightarrow V_{C-OAB}=\frac{1}{3}.3.(1)=1$$

$$V_{C-OAB}=V_{O-ABC}$$

$$1=\frac{1}{3}S_{ABC}\ .h$$

$$1=\frac{1}{3}.S_{ABC}.\frac{6}{7}\Longrightarrow S_{ABC}=\frac{7}{2}$$

المسألة الثانية:

نتأمل في معلم متجانس $\left(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$النقاط:

$D(3,3,-3)$, $C(1,-1,1)$, $B(4,-2,3)$, $A(2,4,3)$

① أثبت أن النقاط C , B , A ليست واقعة على استقامة واحدة .

② عين إحداثيات المسقط القائم $\grave{D}$ للنقطة D على المستوي (ABC) .

③ لتكن النقطة $F(0,6,2)$ أوجد a و b التي تحقق

$$\overrightarrow{AF}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$$

ثم استنتج أن النقاط A,B,C,F تقع في مستوٍ واحد

④ أوجد المعادلة الديكارتية التي تمثلها مجموعة النقاط M التي تحقق العلاقة $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ ثم أثبت أنها تمثل معادلة كرة قطرها AB

الحل:

① $\overrightarrow{AB}(2,-6,0)$ و $\overrightarrow{AC}(-1,-5,-2)$

$\left(\frac{2}{-1}\neq\frac{-6}{-5}\neq\frac{0}{-2}\right)$ فالشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً فالنقاط C , B , A ليست على استقامة واحدة.

② بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ شعاعاً ناظماً على (ABC)

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow 2a-6b=0 \quad ...(1)$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0 \Rightarrow -a-5b-2c=0 \quad ...(2)$$

نفرض $b=1$ نعوض في (1) : $2a=6\Rightarrow a=3$

نعوض في (2) : $-3-5-2c=0\Rightarrow c=-4$

$$\vec{n}(3,1,-4)$$

$$(ABC): 3(x-1)+1(y+1)-4(z-1)=0$$

$$(ABC): 3x+y-4z+2=0$$

ليكن d المستقيم المار من D و العمودي على (ABC)

$$\overrightarrow{u_d}=\vec{n}$$

$$d:\begin{cases} x=3t+3 \\ y=t+3 \\ z=-4t-3 \end{cases} \quad ; \quad t\in\mathbb{R}$$

نعوض المعادلات الوسيطية لـ d في P

$$9t+9+t+3+16t+12+2=0$$

$$26t+26=0\Rightarrow t=-1$$

$$D'(0,2,1)$$

③ $\overrightarrow{AF}=a\ \overrightarrow{AB}\ +\ b\ \overrightarrow{AC}$

$$\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}2\\-6\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-1\\-5\\-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a-b\\-6a-5b\\0-2b\end{pmatrix}$$

$$2a-b=-2 \quad ①$$

$$-6a-5b=2 \quad ②$$

$$-2b=-1 \quad ③$$

من ③ $\boxed{b=\frac{1}{2}}$ نعوض في ①: $2a-\frac{1}{2}=-2$

$$2a=-\frac{3}{2}\Rightarrow \boxed{a=-\frac{3}{4}}$$

نتحقق في ②: $-6\left(-\frac{3}{4}\right)-5\left(\frac{1}{2}\right)\overset{?}{=}2$

$2=2$ محققة

إذاً $\overrightarrow{AF}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

و منه حسب مبرهنة (4) الأشعة $\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطياً

و منه A,B,C,F تقع في مستوٍ واحد

④ بفرض $M(x,y,z)$ نعوض في العلاقة $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

$$\begin{pmatrix}2-x\\4-y\\3-z\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}4-x\\2-y\\3-z\end{pmatrix}=0$$

$$(2-x)(4-x)+(4-y)(-2-y)+(3-z)^2=0$$

$$8-2x-4x+x^2-8-4y+2y+y^2+(z-3)^2=0$$

$$x^2-6x+y^2-2y+(z-3)^2=0$$

$$\underbrace{x^2-6x+9}-9+\underbrace{y^2-2y+1}-1+(z-3)^2=0$$

$$(x-3)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=10$$

المعادلة تمثل كرة مركزها $(3,1,3)$ و نصف قطرها $\sqrt{10}$

نلاحظ أن: $AB=\sqrt{4+36+0}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}=2R$

منتصف AB هو $I=\left(\frac{4+2}{2},\frac{4-2}{2},\frac{3+3}{2}\right)=(3,1,3)$

إذاً الكرة السابقة قطرها AB

المسألة الثالثة :

في المعلم المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(6,1,1)$ والمستويان :

$$P_1: x-2y=5$$

$$P_2: y+z=4$$

1- اثبت ان المستويين متقاطعين

2- جد تمثيلاً وسيطياً للفصل المشترك لهما d

3- اكتب معادلة المستوي Q المار من النقطة A و يعامد الفصل المشترك d

4- اوجد إحداثيات النقطة B نقطة تقاطع المستوي Q مع الفصل المشترك d

5- احسب بعد A عن الفصل المشترك d

الحل: ❶

$\vec{n}_1(1,-2,0)$ $\vec{n}_2(0,1,1)$, غير مرتبطان خطياً ومنه P_1 , P_2 متقاطعان

❷ من ① : $x=2y+5$

من ② : $z=-y+4$

➢ بفرض $y=t$:

$$d:\begin{cases} x=2t+5 \\ y=t \\ z=-t+4 \end{cases} \quad ; t\in R$$

❸ Q يعامد d $\Leftarrow$ $\vec{n}_Q=\vec{u}_d(2,1,-1)$

مار من $A(6,1,1)$

$$Q: 2(x-6)+(y-1)-(z-1)=0$$

$$Q: 2x+y-z-12=0$$

❹ B تقاطع Q مع d :

➢ نعوض معادلات d في Q :

$$4t+10+t+t-4-12=0$$

$$6t=6\Rightarrow t=1$$

➢ نعوض في d :

$$\left.\begin{array}{l} x=2+5=7 \\ y=1 \\ z=-1+4=3 \end{array}\right\} \Rightarrow B(7,1,3)$$

❺ إن بعد A عن d هو نفسه بعد A عن B

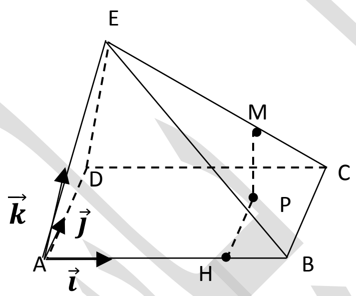
ومنه البعد المطلوب : $AB=\sqrt{1+0+4}=\sqrt{5}$

المسألة الرابعة:

$EABCD$ هرم قاعدته مربع ورأسه E، $[EA]$ عمودي على المستوي $(ABCD)$ في معلم متجانس $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا $\overrightarrow{AB}=3\vec{i}$ و $\overrightarrow{AD}=3\vec{j}$ و $\overrightarrow{AE}=3\vec{k}$ والمطلوب:

1) **جد إحداثيات النقاط A,B,C,D,E**
2) **جد إحداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث EDB**
3) **احسب $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{ED}$ و $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GD}$ ماذا نستنتج ؟**
4) **جد معادلة المستوي (EGD)**
5) **اعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EC)**
6) **بفرض M نقطة تحقق $\overrightarrow{EM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EC}$**
و لتكن P مسقط M على $(ABCD)$
و لتكن H مسقط P على (AB)
احسب طول MH

❶



$A(0,0,0),\ B(3,0,0), D(0,3,0), E(0,0,3), C(3,3,0)$

❷ $G(1,1,1)$

❸ $\overrightarrow{AG}(1,1,1), \overrightarrow{GD}(-1,2,-1), \overrightarrow{ED}(0,3,-3)$

$$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GD}=-1+2-1=0$$

$$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{ED}=0+3-3=0$$

ومنه (AG) يعامد (GD) و (ED)

وبالتالي (AG) يعامد المستوي (EGD) .

❹ $D(0,3,0)$, $\vec{n}=\overrightarrow{AG}(1,1,1)$

$$(x-0)+(y-3)+(z-0)=0$$

$$(EGD):\ x+y+z-3=0$$

❺ $\overrightarrow{EC}(3,3,-3)$

$$d:\begin{cases} x=3t+3 \\ y=3t+3 \\ z=-3t \end{cases};t\in R$$

6- بفرض $M(x,y,z)$

$$\overrightarrow{EM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EC}$$

$$\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-3 \end{pmatrix}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}\Rightarrow \left.\begin{matrix} x=2 \\ y=2 \\ z=-1 \end{matrix}\right\}\Rightarrow M(2,2,-1)$$

P مسقط M على $(A;\vec{i},\vec{j})$ و منه $P(2,2,0)$

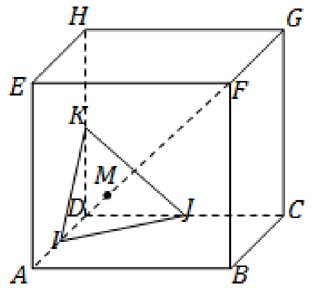
H مسقط M على $(A;\vec{i})$ و منه $H(2,0,0)$

$$HM=\sqrt{0+4+1}=\sqrt{5}$$

المسألة الخامسة:

$ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه 2 فيه I,J,K منتصفات $[AD],[CD],[DH]$ بالترتيب و M نقطة تقاطع $[DF]$ مع (IJK) والمطلوب:

1) **باختيار المعلم $\left(D;\frac{1}{2}\overrightarrow{DA},\frac{1}{2}\overrightarrow{DC},\frac{1}{2}\overrightarrow{DH}\right)$ احسب إحداثيات I,J,K.**
2) **أثبت أن (DF) يعامد (IJK) ثم أكتب معادلة المستوي (IJK)**
3) **أوجد إحداثيات M.**
4) **أتكون M نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث IJK؟**
5) **أثبت أن M مركز ثقل المثلث IJK وماذا تستنتج؟**
6) **احسب حجم رباعي الوجوه $DIJK$**



الحل:

1) $I(1,0,0), J(0,1,0), K(0,0,1)$

2) $F(2,2,2), D(0,0,0)$

$\overrightarrow{DF}(2,2,2)$, $\overrightarrow{IJ}(-1,1,0), \overrightarrow{IK}(-1,0,1)$

$$\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{IJ}=-2+2+0=0$$

$$\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{IK}=-2+0+2=0$$

إذاً (DF) يعامد (IJK)

$\overrightarrow{DF}$ ناظم على المستوي (IJK):

$$2(x-1)+2(y-0)+2(z-0)=0$$

ومنه $(IJK): x+y+z-1=0$

3) المعادلات الوسيطية لـ (DF):

$$(DF):\begin{cases} x=2t \\ y=2t \\ z=2t \end{cases};t\in\mathbb{R}$$

نعوض في (IJK):

$$2t+2t+2t-1=0\Rightarrow t=\frac{1}{6}$$

نعوض في (DF):

$$\left.\begin{matrix} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{3} \\ z=\frac{1}{3} \end{matrix}\right\}\Rightarrow M\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

4) $\overrightarrow{KM}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right), \overrightarrow{IJ}(-1,1,0)$

$$\overrightarrow{KM}.\overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+0=0$$

ومنه $(IJ)\perp(KM)$

$$\overrightarrow{JM}\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\overrightarrow{IK}(-1,0,1)$$

$$\overrightarrow{JM}.\overrightarrow{IK}=-\frac{1}{3}+0+\frac{1}{3}=0$$

ومنه $(IK)\perp(JM)$

وبالتالي M نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث IJK.

5) مركز ثقل IJK:

$$\left(\frac{1+0+0}{3},\frac{0+1+0}{3},\frac{0+0+1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

إذاً M مركز ثقل المثلث IJK وبما أنها نقطة تلاقي الارتفاعات أيضاً فالمثلث IJK متساوي الأضلاع

6) القاعدة IJK مثلث متساوي الأضلاع مساحتها

$$s=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}.\left(\sqrt{2}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(بحيث $a=\|\overrightarrow{IK}\|=\sqrt{1+0+1}=\sqrt{2}$)

ويكون ارتفاع الهرم هو :

$$h=dist\,(D,IJK)=\frac{\|0+0+0-1\|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow V=\frac{1}{3}\,S\,.h=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{6}$$

المسألة السادسة: (100 درجة)

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط $A(2,-2,3)$ و $B(4,-3,-1)$ و $C\left(0,-\frac{1}{2},-3\right)$ والمستوي $\mathcal{P}$ الذي معادلته $2x-y+3z-4=0$ والمطلوب:

1) **تحقق أن المستقيم (AB) ليس عمودياً على $\mathcal{P}$. ثم أعط معادلة للمستوي Q العمودي على $\mathcal{P}$ والمار بالنقطتين A و B**
2) **أكتب معادلة للكرة التي مركزها النقطة B وتمس المستوي $\mathcal{P}$.**
3) **أعط تمثيلاً وسيطياً لنصف المستقيم $[AB)$.**
4) **ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,-1)$ و $(C,2)$ أثبت أن إحداثيات النقطة G هي $(-1,0,-1)$.**
5) **بين أن M مجموعة نقاط الفراغ التي تحقق المساواة: $\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=12$ تمثل كرة S عين مركزها واحسب نصف قطرها. ثم أثبت أن المستوي $\mathcal{P}$ يقطع الكرة S. عين نصف قطر الدائرة المقطع.**

الحل:

1) $\overrightarrow{AB}(2,-1,-4)$ و $\vec{n}_{\mathcal{P}}(2,-1,3)$

نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}_{\mathcal{P}}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة $\left(\frac{2}{2}\neq\frac{3}{-4}\right)$ فالمستقيم (AB) لايعامد المستوي $\mathcal{P}$

إيجاد معادلة المستوي Q بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ شعاع ناظم على المستوي Q فيكون $\vec{n}\perp\vec{n}_{\mathcal{P}}$ ومنه $\vec{n}.\vec{n}_{\mathcal{P}}=0$ وبالتالي

$$\mathbf{2a-b+3c=0}$$

و $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ ومنه $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$ وبالتالي

$$\mathbf{2a-b-4c=0}$$

بفرض $\boxed{a=1}$ فيكون $-b+3c=-2$ و $-b-4c=-2$

بالطرح نجد $\boxed{c=0}$ نعوض نجد $\boxed{b=2}$ وبالتالي $\vec{n}(1,2,0)$

فمعادلة المستوي Q هي:

$$1(x-2)+2(y+2)+0(z-3)=0$$

$$x+2y+2=0$$

2)

$$R=dist(B,\mathcal{P})=\frac{|2(4)-(-3)+3(-1)-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}}=\frac{4}{\sqrt{14}}$$

فمعادلة الكرة هي: $\boxed{(x-4)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=\frac{16}{14}}$

3)

$$[AB):\begin{cases}x=2t+2\\y=-t-2\\z=-4t+3\end{cases}\quad ;\,t\in[0,+\infty[$$

4)

$$x_G=\frac{x_A-x_B+2x_C}{2}=\frac{2-4+0}{2}=-1$$

$$y_G=\frac{y_A-y_B+2y_C}{2}=\frac{-2+3-1}{2}=0$$

$$z_G=\frac{z_A-z_B+2z_C}{2}=\frac{3+1-6}{2}=-1$$

ومنه $G(-1,0,-1)$

5) $\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=12$

بما أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,-1)$ و $(C,2)$ فإن : $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG}$

ومنه $\|2\overrightarrow{MG}\|=12$ أي $\|\overrightarrow{MG}\|=6$

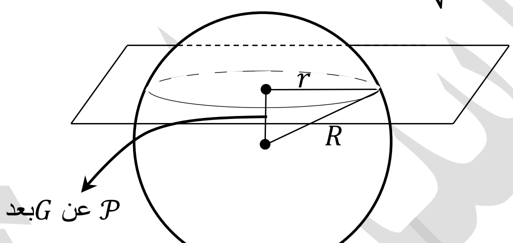
فمجموعة النقاط M تمثل كرة مركزها $G(-1,0,-1)$ ونصف قطرها 6

$$dist(G,\mathcal{P})=\frac{|2(-1)-(0)+3(-1)-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}}=\frac{9}{\sqrt{14}}<R=6$$

فالمستوي $\mathcal{P}$ يقطع الكرة S.

بفرض r نصف قطر الدائرة المقطع فيكون:

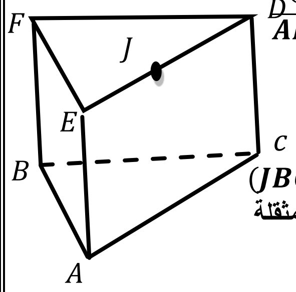
$$r^2=36-\frac{81}{14}=\frac{423}{14}\Longrightarrow r=\sqrt{\frac{423}{14}}$$



المسألة السابعة:

$ABCEFD$ موشور قائم قاعدته ABC مثلث قائم في A ، النقطة J منتصف $[ED]$

نتأمل في المعلم المتجانس $(A,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ بحيث : $\overrightarrow{AE}=4\vec{K}$ ، $\overrightarrow{AC}=4\vec{\jmath}$ ، $\overrightarrow{AB}=3\vec{\imath}$ ،



1- **جد إحداثيات النقاط B,C,D,E,F,J**
2- **جد معادلة للمستوي (JBC)**
3- **اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (JC)**
4- **احسب بعد النقطة E عن المستوي (JBC)**
5- **عين K مركز الابعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(J,2),(B,1),(C,2)$**

الحل:

1) $A(0,0,0), B(3,0,0), C(0,4,0)$

$E(0,0,4), F(3,0,4), D(0,4,4)$

وبما أن J منتصف $[ED]$ فإن: $J(0,2,4)$

2) نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم على المستوي بشرط a,b,c ليست جميعها أصفاراً.

$\overrightarrow{JB} = (3,-2,-4)$

$$\vec{n}.\overrightarrow{JB} = 0 \Longrightarrow 3a - 2b - 4c = 0 \qquad (1)$$

$\overrightarrow{BC} = (-3,4,0)$

$$\vec{n}.\overrightarrow{BC} = 0 \Longrightarrow -3a + 4b = 0 \qquad (2)$$

نفرض $b = 3$ نعوض في (2) فنجد $a = 4$ نعوض في (1) نجد

$$12 - 6 - 4c = 0 \Longrightarrow c = \frac{6}{4} \Longrightarrow c = \frac{3}{2}$$

$$\vec{n}\left(4,3,\frac{3}{2}\right) \overset{(\times 2)}{\Longrightarrow} \vec{n}(8,6,3)$$

$$(JBC): 8(x-3) + 6(y-0) + 3(z-0) = 0$$

$$\boxed{(JBC): 8x + 6y + 3z - 24 = 0}$$

3)

$$\overrightarrow{JC}(0,2,-4) \quad , \quad C(0,4,0)$$

$$(JC)\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t + 4 \\ z = -4t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

4)

$$dist(E, JBC) = \frac{|0 + 0 + 12 - 24|}{\sqrt{64 + 36 + 9}} = \frac{12}{\sqrt{109}}$$

5)

$$x_K = \frac{\alpha x_C + \beta x_B + \gamma x_J}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{(2)(0) + (1)(3) + (2)(0)}{2 + 1 + 2} = \frac{3}{5}$$

$$y_K = \frac{\alpha y_C + \beta y_B + \gamma y_J}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{(2)(4) + (1)(0) + (2)(2)}{2 + 1 + 2} = \frac{12}{5}$$

$$z_K = \frac{\alpha z_C + \beta z_B + \gamma z_J}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{(2)(0) + (1)(0) + (2)(4)}{2 + 1 + 2} = \frac{8}{5}$$

$$K\left(\frac{3}{5}, \frac{12}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

المسألة العاشرة:

نتأمل النقطتين $A(1,1,1)$ و $B(3,2,0)$ في الفراغ المنسوب إلى معلم متجانس ليكن $\mathcal{P}$ المستوي المار بالنقطة B ويقبل $\overrightarrow{AB}$ شعاعاً ناظماً.

وليكن المستوي Q الذي معادلته $x - y + 2z + 4 = 0$ وأخيراً S الكرة التي مركزها A ونصف قطرها يساوي AB والمطلوب:

1) **أثبت أن $2x + y - z - 8 = 0$ هي معادلة المستوي $\mathcal{P}$.**
2) **جد معادلة الكرة S.**
3) **أثبت أن المستوي Q مستوي مماس للكرة S.**
4) **تيقن أن المستويين $\mathcal{P}$ و Q متقاطعان ثم أعطِ تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك d ثم أثبت أن المستقيم d محتوى في المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$ حيث $C(0,2,-1)$.**

الحل:

1) $B(3,2,0)$ و $\vec{n} = \overrightarrow{AB}(2,1,-1)$

$$2(x-3) + 1(y-2) - 1(z-0) = 0$$

$$P: 2x + y - z - 8 = 0$$

2) $A(1,1,1)$ و $R = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 6$$

3)

$$dist(A,Q) = \frac{|1 - 1 + 2 + 4|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} = R$$

إذاً Q يمس S.

4)

$$\vec{n}_Q(1,-1,2), \vec{n}_{\mathcal{P}}(2,1,-1)$$

نلاحظ أن الشعاعين $\vec{n}_{\mathcal{P}}$ و $\vec{n}_Q$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة $\left(\frac{1}{2} \neq \frac{-1}{1}\right)$ فالمستويان متقاطعان.

$$\begin{cases} x - y + 2z + 4 = 0 & (1) \\ 2x + y - z - 8 = 0 & (2) \end{cases}$$

بالجمع $3x + z - 4 = 0$ ومنه $z = -3x + 4$

نعوض في (2) فنجد: $y = -5x + 12$

بفرض $x = t$ نحصل على التمثيل وسيطي للفصل المشترك:

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = -5t + 12 \\ z = -3t + 4 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

لنوجد معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$

طريقة أولى:

المستوي المحوري يمر بمنتصف القطعة المستقيمة $[BC]$ ولتكن $I\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{-1}{2}\right)$ وشعاع ناظمه $\vec{n} = \overrightarrow{BC}(-3,0,-1)$ فمعادلة المستوي المحوري هي: $-3\left(x - \frac{3}{2}\right) - 1\left(z + \frac{1}{2}\right) = 0$ ومنه

$$-3x - z + 4 = 0$$

نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم d في معادلة المستوي المحوري فنجد: $-3(t) - (-3t + 4) + 4 = 0$

$0 = 0$ فالمستقيم d محتوى في المستوي المحوري.