سلسلة نمبرون التعليمية

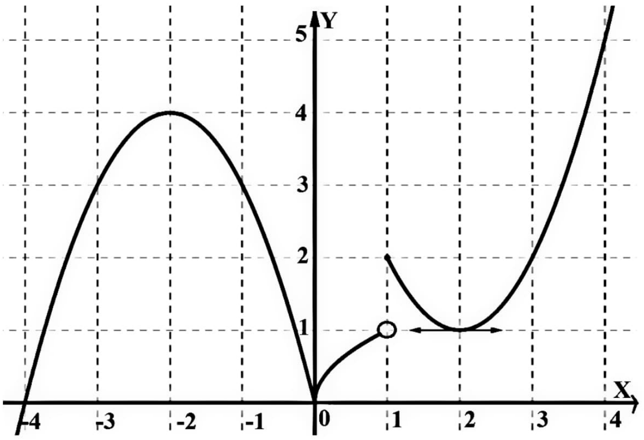
EDUCATION

الاسم: .... امتحان نهايات - اشتقاق للصف الثالث الثانوي ٢٠٢٣م

الدرجة العظمى: ٥٠٠ الرياضيات:

الصفحة الأولى

أولاً: أجب عن الأسئلة الأربعة التالية: (40 درجة لكل سؤال)



السؤال الأول: نجد جانباً الخط البياني C لتابع f معرّف على $\mathbb{R}$ **والمطلوب:**

1) احسب $f'(2)$.

2) دل على القيم الحدية للتابع.

3) ما مجموعة حلول المتراجحة $f'(x) \geq 0$.

4) أيكون f اشتقاقي عند $x = 1$.

5) ناقش بيانياً تبعاً لقيم الوسيط m عدد حلول المعادلة $f(x) = m$.

السؤال الثاني: ليكن f التابع المعرف على $\{-2\} \setminus \mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \frac{x^2+1}{x+2}$، **والمطلوب:**

أثبت أن التابع يقبل مقارب مائل في جوار $\pm\infty$، يُطلب تعيين معادلته.

السؤال الثالث: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق: $f(x) = -x\sqrt{x(x-3)}$ **والمطلوب:**

1. عيّن D_f. **2**. ادرس قابلية اشتقاق f على D_f. **3**. اكتب معادلة كل مماس للخط البياني C تجده.

السؤال الرابع: احسب النهاية في كل من الحالتين الاتيتين:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\right)$ **2**. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\cos\frac{1}{x} - 1\right)$

ثانياً: أجب عن التمارين الأربعة التالية: (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: ليكن g التابع المعرف على $I =]-1,+\infty[$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{x^3+2x-3}{(x+1)^2}$ **والمطلوب:**

عيّن ثلاثة أعداد حقيقية $c\,,b,a$ تُحقق أياً كان x من I العلاقة: $f(x) = ax + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$.

التمرين الثاني: ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$، **والمطلوب:**

1. احسب $\boldsymbol{f(-x)}$ ماذا تستنتج بخصوص الخط البياني $\boldsymbol{C_f}$ ؟

2. تحقق أن f دوري دوره 2π.

3. أثبت أن $f'(x) = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$، ثم ادرس تغييرات f على $[\boldsymbol{0,\pi}]$.

يتبع في الصفحة الثانية...

الصفحة الثانية

التمرين الثالث: ليكن f التابع المعرف على $]0,2]$ وفق:

$$f(x) = \frac{E(x)+1}{x} - E(x)$$

1) اكتب عبارة $f(x)$ بصيغة لا تحوي $E(x)$.

2) هل f مستمر على $]0,2]$.

التمرين الرابع: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = 2x - \sqrt{|x^2-1|}$، **والمطلوب:**

1) ادرس نهاية f عند $-\infty$ و $+\infty$.

2) احسب $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ و $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-3x)$

3) استنتج أن الخط البياني للتابع f يقبل مقاربين مائلين Δ_1 , Δ_2 يُطلب إيجاد معادلتيهما.

ثالثاً: حل المسألة الاتية: $\left(100\right.$ درجة لكل مسألة$\left.\right)$

المسألة الأولى: ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق: $f(x) = \frac{2x}{(x-1)^2} - 1$

1) أوجد نهايات التابع على أطراف مجموعة التعريف، مبيّناً ماله من مقاربات أفقية وشاقولية.

2) ادرس الوضع النسبي للتابع ومقاربه الأفقي.

3) ادرس تغييرات التابع f .

4) أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]0,1[$.

5) **استنتج** $g'(x)$ إذا علمت أن $g(x) = f(\sin x)$، أثبت أن g اشتقاقي على المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

6) ارسم مقاربات $\boldsymbol{C}$ في معلم متجانس، ثم ارسم $\boldsymbol{C}$.

7) ليكن h التابع المعرف بالعلاقة: $h(x) = f(|x|)$، **استنتج** C_h.

انتهت الأسئلة...

أولاً:

السؤال الأول:

1) $f'(2) = 0$

2) $f(-2) = 4$ قيمة حدية كبرى محلية

$f(0) = 0$ " صغرى محلية

$f(1) = 2$ " كبرى محلية

$f(2) = 1$ " صغرى محلية

3) $x \in [-4, -2] \cup]0, 1[\cup [2, +\infty[$

4) غير اشتقاقية عند $x = 1$ ، لأنه غير مستمرة

5) * حل وحيد للمعادلة $f(x) = m$ لما:

$m \in]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$

* يوجد حلان للمعادلة عند

$m = 4$, $m = 0$

* يوجد ثلاثة حلول للمعادلة لما:

$m \in]0, 1] \cup]2, 4[$

* يوجد أربعة حلول للمعادلة لما:

$m \in]1, 2]$

السؤال الثاني:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x+2}$$

$x^2 + 1$ ÷ $x + 2$ = $x - 2$

$x^2 + 2x$

$1 - 2x$

$-4 - 2x$

5

$$f(x) = x - 2 + \frac{5}{x+2}$$

باعتبار المقارب المائل $\Delta : y = x - 2$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y_\Delta) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{5}{x+2}\right) = 0$$

كذلك الأمر بالنسبة لـ $-\infty$

إذن $\Delta : y = x - 2$

مقارب مائل لـ C_f عند $\mp\infty$

السؤال الثالث:

$$f(x) = -x\sqrt{x(x-3)}$$

1) تعيين D_f: $x(x-3) \geq 0$

التي تحقق

$x \in]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[$

إذن $D_f = \mathbb{R} \setminus]0, 3[$

(ونقبل دراسة إشارة المقدار لتعيين D_f)

2) ندرس قابلية الاشتقاق عند $x = 3$

نفرض:

$$t(x) = \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

$$= \frac{-x\sqrt{x(x-3)}}{x - 3}$$

$$\lim_{x \to 3^+} t(x) = \frac{0}{0}$$ عدم تعيين

$$\lim_{x \to 3^+} t(x) = \lim_{x \to 3^+} \left(-x\sqrt{\frac{x(x-3)}{(x-3)^2}}\right)$$

$$= \lim_{x \to 3^+} \left(-x\sqrt{\frac{x}{x-3}}\right) = -3(\infty)$$

$$\lim_{x \to 3^+} t(x) = -\infty$$

إذن f غير اشتقاقي عند 3

ويقبل نصف مماس شاقولي (من اليمين)

معادلته $X = 3$

* ندرس قابلية الاشتقاق عند $\boxed{X=0}$

$$h(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \frac{-x\sqrt{x(x-3)} - 0}{x}$$

$$h(x) = -\sqrt{x(x-3)}$$

$$\lim_{x \to 0} h(x) = 0 \in R$$

ومنه f اشتقاقي عند $x = 0$

ويقبل نصف مماس أفقي معادلته

$y = 0$ (من اليسار)

السؤال الرابع

$\boxed{1}$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}\right) = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين نزيل

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}\right) = \frac{1}{4}$$

$\boxed{2}$

$$\lim_{x \to \infty} x\left(\cos\frac{1}{x} - 1\right) = \infty(1-1)$$

حالة عدم تعيين نزيل

$$\lim_{x \to +\infty} \left[x\left(-\left(1 - \cos\frac{1}{x}\right)\right)\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[-x\left(2\sin^2\left(\frac{1}{2x}\right)\right)\right]$$

نفرض $t = \frac{1}{x} \Leftarrow x = \frac{1}{t}$

تسعى x إلى $+\infty$

تسعى t إلى الصفر

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x\left(\cos\frac{1}{x} - 1\right)\right) =$$

$$= \lim_{t \to 0} \left[-\frac{\cancel{2}\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\cancel{2}\frac{t}{2}}\right]$$

$$= \lim_{t \to 0} \left[-\frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}} \times \sin\frac{t}{2}\right]$$

$$= (-1)(0) = 0$$

ثانياً : التمرين الأول :

$$f(x) = \frac{(x-1)(x^2+3x+3)}{(x+1)^2}$$

$$f(x) = \frac{x^3+2x^2-3}{(x+1)^2}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3+2x^2-3 & x^2+2x+1 \\ x^3+2x^2+x & x \\ \hline -3-x & \end{array}$$

$$f(x) = x + \frac{-(x+3)}{(x+1)^2}$$

$$f(x) = ax + \frac{b}{(x+1)} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

$$\frac{-(x+3)}{(x+1)^2} = \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

$\boxed{-(x+3) = b(x+1) + c}$ --- (1

نفرض $\boxed{x=-1}$ $\Leftarrow$

$\boxed{c=-2}$

نعوض في (1) ، نفرض $x=1$

$$-4 = b(2) - 2$$

$$\Rightarrow \boxed{b=-1}$$

$$f(x) = x + \frac{-1}{x+1} + \frac{-2}{(x+1)^2}$$

ومنه

$a = 1$

$b = -1$

$c = -2$

التمرين الثاني :

$$f(x) = 2\sin x + \sin 2x$$

$\boxed{1}$ $f(-x) = 2\sin(-x) + \sin(-2x)$

$$= -2\sin(x) - \sin(2x)$$

$$= -f(x)$$

ومنه التابع فردي و C_f تناظر بالنسبة للمبدأ $(0,0)$

علماً أن الشرط الأول محقق وهو $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$

$\boxed{2}$ $f(x+2\pi) = 2\sin(x+2\pi) + \sin(2x+4\pi)$

نحذف الدورات 2π

$$= 2\sin x + \sin 2x = f(x)$$

ومنه f تابع دوري دوره 2π

ونكتفي بدراسته على $[0,\pi]$

$\boxed{3}$ $f'(x) = 2\cos(x) + 2\cos(2x)$

$$= 2(\cos x + 2\cos^2 x - 1)$$

$$= 2(2\cos x - 1)\underbrace{(\cos x + 1)}_{\text{أكبر من الصفر دوماً}}$$

إشارة $f'(x)$ تتفق مع إشارة

$2\cos x - 1$ المقدار

نقدم المشتقة على المجال $[0,\pi]$

$f'(x) = 0$

$2\cos(x) - 1 = 0$

$x = \frac{\pi}{3}$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$f(\pi) = 0$

$f(0) = 0$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

«سيتم إرفاق الرسم على القناة»

التمرين الثالث

$$f(x) = \frac{E(x)+1}{x} - E(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & ; \ x \in [0,1[\\ \frac{2}{x} - 1 & ; \ x \in [1,2[\\ -\frac{1}{2} & ; \ x = 2 \end{cases}$$

ندرس الاستمرار عند (1)

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$

$f(1) = 1$

f مستمرة عند $\boxed{x=1}$

ندرس الاستمرار عند $x = 2$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq f(2)$

f غير مستمرة عند $x=2$ ومنه غير مستمرة على $[0,2]$

التمرين الرابع

$$f(x) = 2x - \sqrt{|x^2 - 1|}$$

1) ندرس إشارة ما تحت الجذر

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{x^2 - 1}\right) = \infty - \infty$$

حالة عدم تعيين نزيلها

$$\lim_{x \to +\infty} \left[x\left(2 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)\right] = +\infty(1) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty - \infty = -\infty$$

2) [illegible] $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

$$= \infty - \infty$$

حالة عدم تعيين نزيلها

$$\lim_{x \to +\infty} (f - x) = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}\right] = 0$$

$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0$ ومنه عبارة

$y = x$ مقارب مائل لـ C_f بجوار $+\infty$

تتبع

في جوار $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-3x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x-\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$= +\infty-\infty$$

حالة عدم تعيين نزيلها بالضرب بالمرافق

$$\lim_{x\to-\infty}(f-3x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x^2+1}{-x+\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{-x+\sqrt{x^2-1}}\right)=0$$

ومنه $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-3x)=0$

إذن

$\Delta_2: y=3x$ مقارب مائل لـ C_f في جوار $-\infty$

التمرين

1) $f(x)=\dfrac{2x}{(x-1)^2}-1$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-1$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-1$

$\boxed{y=-1}$ مقارب أفقي للخط البياني C_f في جوار $\mp\infty$

$\lim_{x\to1^+}f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to1^-}f(x)=+\infty$

$x=1$ مقارب عمودي للخط C_f في جوار $+\infty$

$$f(x)-y=\frac{2x}{(x-1)^2}>0$$

ومنه C_f فوق Δ لما $x>0$

C_f تحت Δ لما $x<0$

$$f'(x)=-\frac{2x+2}{(x-1)^3}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$

$f(-1)=-\dfrac{3}{2}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$ $+\infty$	$\|$	$+\infty$ $\searrow$	-1

4) ؟

$f(0)=-1$

إذن f مستمرة ومتزايدة تماما على $[0,1[$

كما أن $0\in f([0,1[)=[-1,+\infty[$

إذن يوجد حل وحيد للمعادلة $f(x)=0$

على المجال $[0,1[$ حسب

مبرهنة القيم المتوسطة

5) $g(x)=f(\sin x)$

$$g'(x)=\cos x\left(-\frac{2\sin x+2}{(\sin x-1)^3}\right)$$

$$=-2\cos x\left(\frac{\sin x+1}{(\sin x-1)^3}\right)$$

$$=-\frac{\sin(2x)+2\cos(x)}{(\sin x-1)^3}$$

إذن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

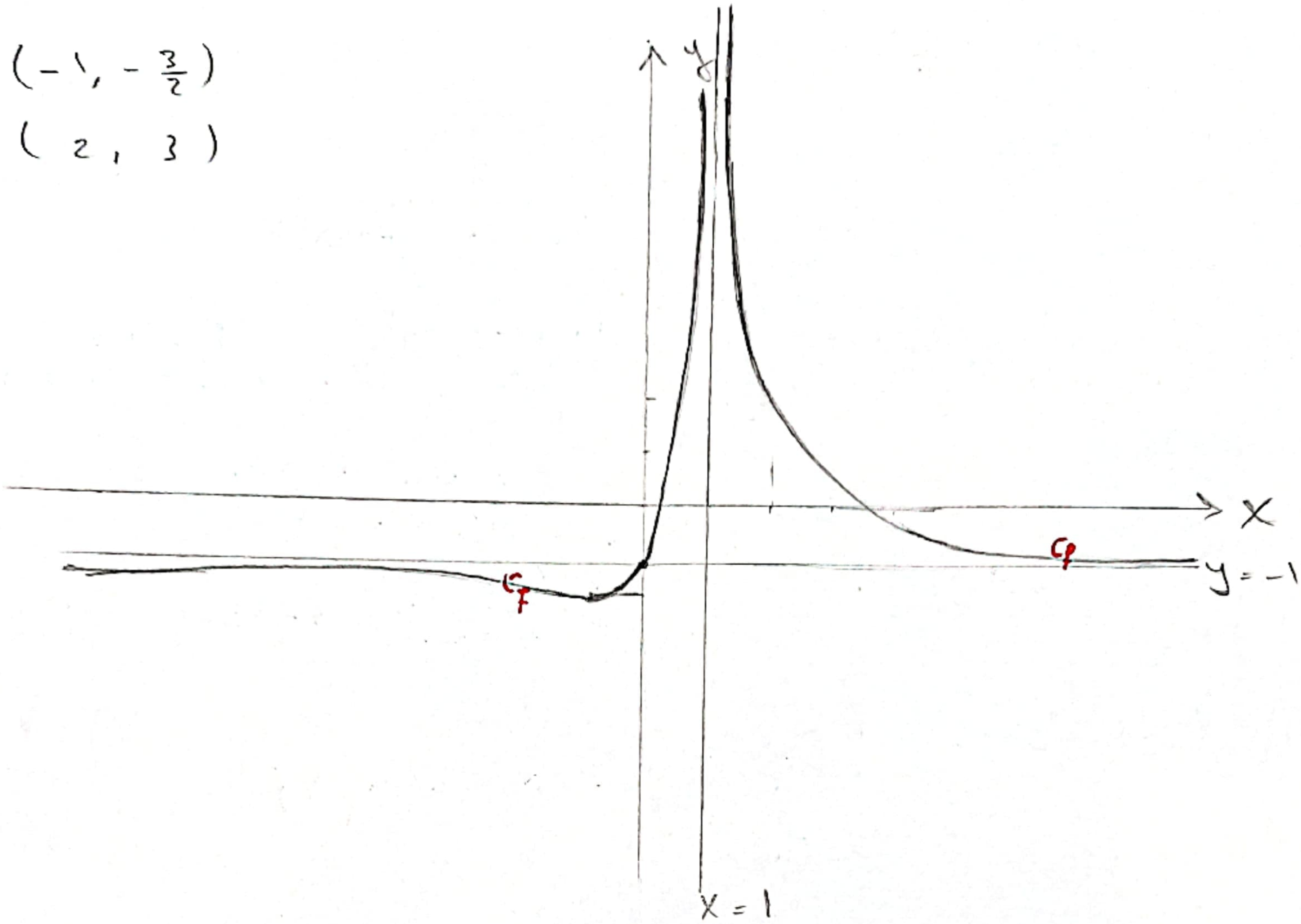
و $\sin x\neq1$ على المجال $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

إذن g قابلة للاشتقاق على $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

$(-1, -\frac{3}{2})$

$(2, 3)$

(6



$h(x) = f(|x|)$

(7