نوطة الوحدة الثانية للجزء الأول رياضيات للأستاذين عباس الصوص و محمد زياد الترزي

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

بالجمع نجد :

$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b$

ومنه

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

② $\bullet \sin nx . \cos nx = \frac{1}{2} \sin 2nx$

$\bullet \sin x \cos(2n+1)x =$

$\frac{1}{2}[\sin 2(n+1)x - \sin 2nx]$

③ $S_n = \cos(nx)\frac{\sin(nx)}{\sin x} : x \neq k\pi$

$S_n = \cos x + \cos 3x + ... + \cos(2n-1)x$

العلاقة صحيحة من أجل $n = 1$

$S_1 = \cos x$

$S_1 = \cos(1 \times x)\frac{\sin(1x)}{\sin x} = \cos x$

نفرض أنها صحيحة من أجل n

ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$

أي لنبرهن أن

$S_{n+1} = \cos(n+1)x \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}$

من العلاقة الفرض :

$S_{n+1} = S_n + \cos(2n+1)x$

$= \cos nx \frac{\sin(nx)}{\sin x} + \cos(2n+1)x$

$= \frac{1}{\sin x}[\cos nx \sin nx + \sin x \cos(2n+1)x]$

$= \frac{1}{2\sin x}[\sin 2nx + \sin(2n+2)x - \sin 2nx]$

$= \frac{1}{2\sin x} \times \sin(2n+2)x$

$= \frac{1}{2\sin x} \times 2\sin(n+1)x \cos(n+1)x$

$= \cos(n+1)x \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}$

فالعلاقة صحيحة من أجل $n+1$

فهي صحيحة أيا كانت $n \in N$.

انطلاقة نشطة :

نشاط (1) صفحة (29)

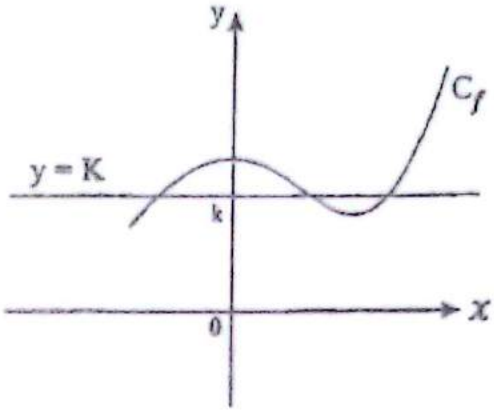
حل المعادلات :

الحل الهندسي لمعادلة $f(x) = K$ هو البحث عن وجود نقاط مشتركة بين الخط البياني C_f للتابع f والمستقيم d الذي معادلته $y = K$ وتكون فواصل النقاط المشتركة بين C_f و d حلولاً للمعادلة $f(x) = K$ في حالة وجودها . ويوجد للمعادلة حلول دوماً إذا كان الخط البياني C_f يتألف من قطعة واحدة .

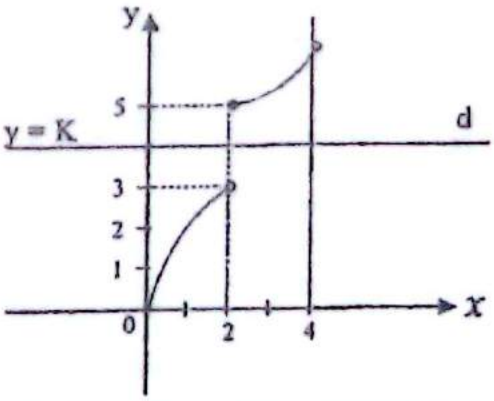
في الشكل أدناه للمعادلة $f(x) = K$

Scanned by CamScanner

عدداً من الحلول حسب $y = K$



وفي الشكل أدناه التابع f معرف على المجال $[0 , 4]$ وليس للمعادلة $f(x) = K$ حلول عندما $K \in [3 , 5]$ لأن التابع غير مستمر عند $x = 2$ والخط البياني C_f لايتألف من قطعة واحدة .

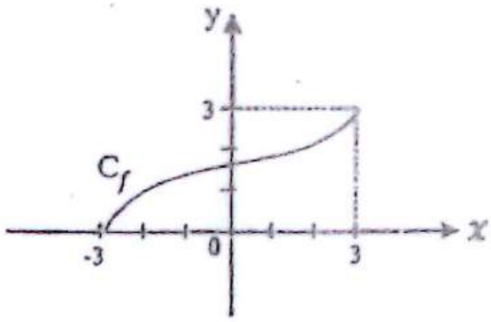


تمرين صفحة (30)

الأشكال المرسومة أدناه هي الخطوط البيانية لتوابع f معرفة على المجال $[-3 , 3]$

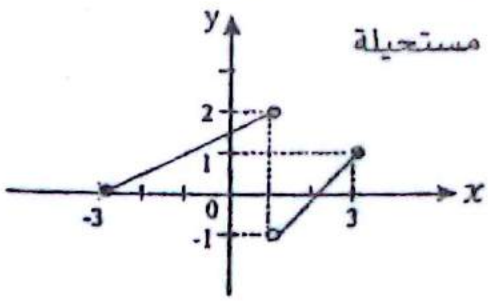
1. عين التوابع المستمرة منها .
2. اذكر في كل حالة عدد حلول المعادلة $f(x) = K$ تبعاً لقيم K .

الحل:



التابع مستمر في المجال $[-3 , 3]$ وللمعادلة حل وحيد إذا كانت $K \in [0 , 3]$

وإذا كانت $K \notin [0 , 3]$ فالمعادلة مستحيلة



التابع لا يتألف من قطعة واحدة فهو غير مستمر

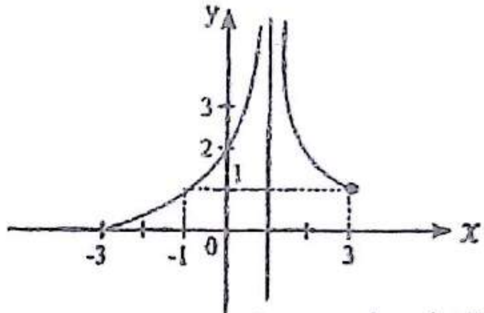
$K\in]-1,0[$ للمعادلة حل وحيد

$K\in[0,1]$ للمعادلة حلان

$K\in]1,2[$ للمعادلة حل وحيد.

$K\in]-\infty,-1[$ المعادلة مستحيلة

$K\in]2,+\infty[$ المعادلة مستحيلة



التابع غير مستمر

$K\in[0,1[$ وللمعادلة حل وحيد

$K\geqslant 1$ للمعادلة حلان .

$K<0$ المعادلة مستحيلة

نشاط (2) صفحة (30)

تابع الجزء الصحيح :

أياً يكن العدد الحقيقي x يوجد عدد صحيح m يحقق $m\leqslant x<m+1$.

يسمى العدد الصحيح m الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x ويرمز له بالرمز $E(x)$ حيث $E(x)=m$

مثال :

$E(4.2)=4$ لأن $4\leqslant 4.2<4+1$

أي $4\leqslant 4.2<5$

$E(-3.7)=-3$ لأن $-4\leqslant -3.7<-3$

$E(5)=5$ لأن $5\leqslant 5<6$

التابع $E(x)$ غير مستمر وليس له نهاية محددة عند كل قيمة صحيحة لـ x .

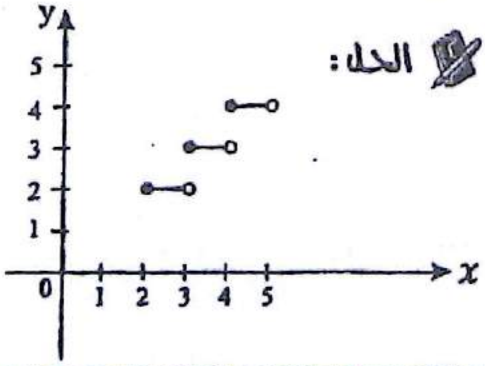
مثال صفحة (30)

ارسم الخط البياني للتابع E على المجال $[2,5]$.

① في أية نقاط من المجال $[2,5]$ التابع E غير مستمر

② هل E مستمر على المجال $]3,5[$ ؟ علل إجابتك .

الحل:



ⓐ التابع E غير مستمر عند $x = 3$ و $x = 4$ و $x = 5$

ⓑ التابع غير مستمر في المجال $]3 , 5[$ لأنه غير مستمر عند $x = 4$

صورة مجال :

صورة مجال I وفق تابع f هي مجموعة الأعداد $f(x)$ عندما تتحول x في المجال I آخذة جميع القيم فيه ونرمز إلى هذه المجموعة بالرمز $f(I)$

مثال :

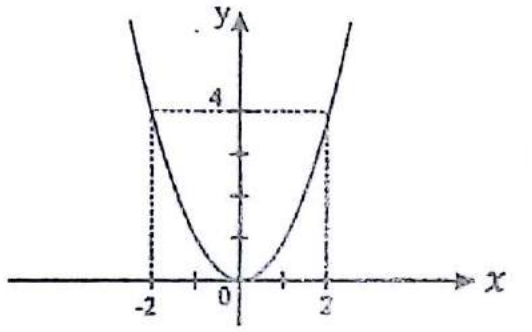
① ارسم الخط البياني للتابع $f: x \to x^2$ لاحظ أن f مستمر على IR فهو مستمر على كل مجال من IR .

② عين وفق f ، صورة كل من المجالات $[0 , 2]$ و $[-2 , 2]$ و $[-2 , 4]$ و $]-\infty , 2]$ و R

الحل:

$f([0 , 2]) = f[-2 , 2] = [0 , 4]$

$f([-2 , 4]) = [0, 16]$



$f(\mathrm{R}) = [0 , \infty[\, , \, f \,]-\infty, 2] =]0 , +\infty[$

نحصل على صورة مجال لتابع مستمر بإسقاط الخط البياني للتابع f الواقع في هذا المجال على محور التراتيب وتكون مجموعة المساقط هي صورة ذلك المجال .

نهاية تابع عند اللانهاية

النهاية الحقيقية (أو المنتهية) عند $+\infty$ (أو $-\infty$) والمقارب الأفقي :

تعريف :

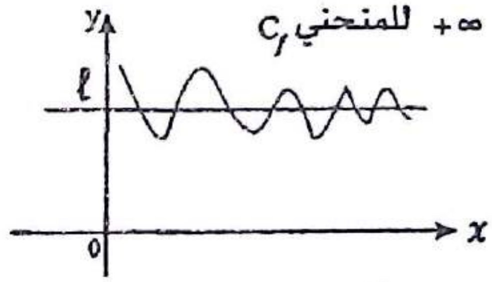
نقول إن نهاية التابع f المعرف بجوار $+\infty$ أو (بجوار $-\infty$) هي ℓ إذا كانت قيم التابع تصبح قريبة من القيمة ℓ أو تتجمع حول ℓ ، عندما تصبح x كبيرة (صغيرة) بما

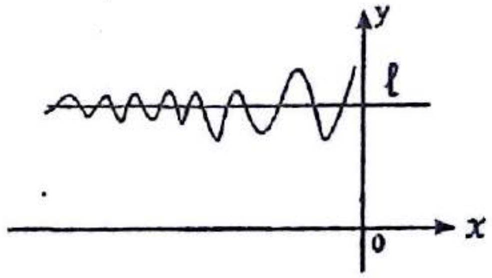
يكفي ونكتب $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

أو $(\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell)$

وبصياغة أدق :

مهما كان العدد $0 < \varepsilon$ فإن قيم $f(x)$ ستقع ضمن المجال $]\ell - \varepsilon , \ell + \varepsilon[$ بدءاً من قيمة معينة A وعندئذ نقول إن المستقيم $y = \ell$ مقارب أفقي عند $+\infty$ للمنحني C_f





أمثلة :

التوابع $x \to \frac{1}{x}$ ، $x \to \frac{1}{x^2}$ ، $x \to \frac{1}{x^n}$ (في حالة عدد طبيعي n غير معدوم) تنتهي إلى الصفر عندما $x \to +\infty$ وكذلك عندما $x \to -\infty$ والمستقيم $y = 0$ وهو محور السينات مقارب لكل منها ونجد أيضاً أن $y = 0$ مقارب للتابع $x \to \frac{1}{\sqrt{x}}$ عندما $x \to +\infty$

النهاية اللانهائية عند $+\infty$ أو $-\infty$

تعريف :

إذا كان التابع f معرفاً في جوار $+\infty$ فإننا نقول إن نهاية f عند $+\infty$ هي $+\infty$ أو عند $(-\infty)$

إذا كانت قيم $f(x)$ تتجاوز أي عدد حقيقي M عندما تكون x كبيرة بما يكفي ونكتب

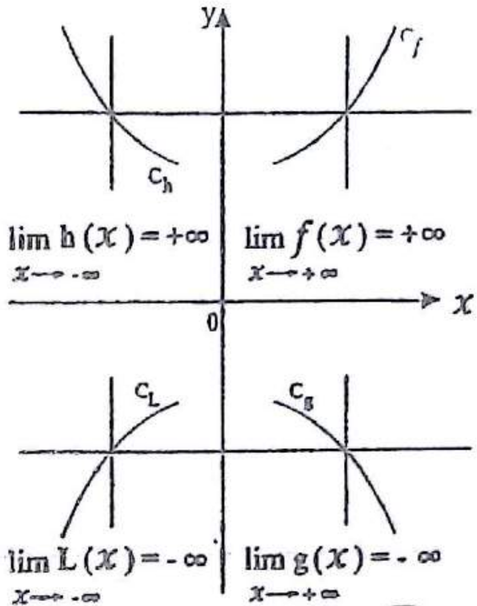
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\quad (\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty)$

ويكافئ هذا التعريف :

أيا كان العدد الحقيقي M وجد عدد حقيقي A يحقق إذا كان $x > A$ $(x > A)$ كان $f(x) > M$

ويعرف بالمثل $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

و $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



ملاحظة:

إن نهاية تابع كثير الحدود عند ∞+ أو ∞- هي من نهاية الحد الأعلى درجة فيه ويسمى الحد المسيطر .

تدرب صفحة (34)

$\frac{1}{34}$ احسب نهايات التوابع الآتية عند ∞+ وعند ∞-.

① $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$

الحل:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (-x^3) = +\infty$$

② $f(x) = -3x^4 + 1$

الحل:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} (-3x^4) = -\infty$$

---

③ $f(x) = 8x^4 - 12x^3 + 5x^2 - x$

الحل:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} (8x^4) = +\infty$$

---

④ $f(x) = 5x^3 - 3x - 1$

الحل:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (5x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (5x^3) = -\infty$$

---

⑤ $f(x) = 7x^3 + 2x^2 - 5x - 1$

الحل:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (7x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (7x^3) = +\infty$$

---

⑥ $f(x) = -2x^4 + 100x^3$

الحل:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} (-2x^4) = -\infty$$

$\frac{2}{34}$ احسب نهاية التابع f المعطى بالعلاقة $f(x)=\frac{5x-1}{x-1}$ عند $+\infty$ ، ثم أعط عدداً A يحقق الشرط إذا كان $x>A$، كان $f(x)$ في المجال $]4,9\ ,\ 5,1[$

الحل:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x}{x}=5$$

يكون $f(x)$ في المجال $]4,9\ ,\ 5,1[$ إذا كان $|f(x)-5|<\frac{1}{10}$

$\frac{1}{10}$ نصف قطر المجال .

$$f(x)-5=\frac{5x-1}{x-1}-5=\frac{4}{x-1}$$

$$|f(x)-5|=\left|\frac{4}{x-1}\right|$$

وبما أن $x>1$ لأن $x\to+\infty$ فإن

$$|f(x)-5|=\frac{4}{x-1}<\frac{1}{10}$$

ومنه $x-1>40$ أي $x>41$

ونجد أن $A=41$

المستقيم $y=5$ مقارب وبما أن

$$f(x)-5=\frac{4}{x-1}>0$$

فالخط البياني C_f يقع فوق المقارب عندما $x>1$

نهاية تابع عند عدد حقيقي

النهاية اللانهائية عند عدد حقيقي

تعريف :

نقول إن نهاية f عند a هي $+\infty$ إذا تجاوزت قيم $f(x)$ أي عدد حقيقي M حين تقترب x بما يكفي من العدد a ونكتب $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$

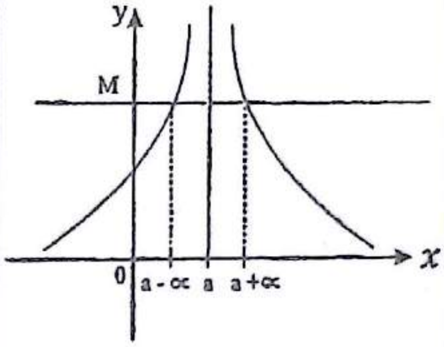
يكافئ التعريف السابق القول مهما كبر العدد الحقيقي M فيوجد مجال مفتوح I مركزه a يحقق :

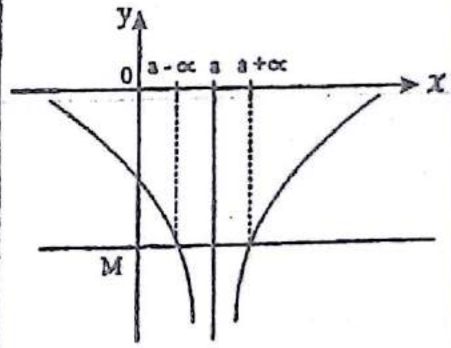
« إذا كان x من $I\cap D_f$ كان $f(x)>M$ »

ونعرف بالمماثلة $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ إذا صارت $f(x)$ سالبة وأصغر من أي عدد حقيقي سالب مثل M عندما تكون x قريبة بما يكفي من a وهذا يكافئ

« إذا كان x من $I\cap D_f$ كان $f(x)<M$ »

ونقول في كل من الحالتين السابقتين أن المستقيم الذي معادلته $x=a$ مقارب شاقولي لمنحني التابع .





ملاحظة:

إذا كانت نهاية التابع عندما تقترب x من a بقيم أصغر من a لاتساوي نهاية التابع عندما تقترب x من a بقيم أكبر من a قلنا إن التابع ليس له نهاية عند a .

مثال :

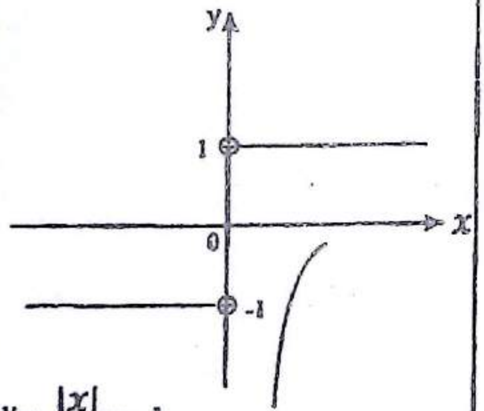
التابع العدد الصحيح $E(2.4) = 2$

وفي هذه الحالة يجب التحدث عن النهاية من اليمين ومن اليسار فنقول

مثلاً $\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell_1$ ، $\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell_2$

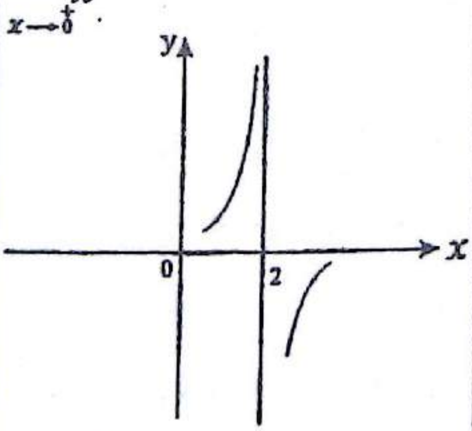
أو $\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell_1$ ، $\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell_2$

وتكون ℓ_1 أو ℓ_2 حقيقية أو لانهائية .



$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = +1$$



$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{2-x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{2-x} = +\infty$$

تدرب صفحة (38)

1/38 احسب نهايات التوابع الآتية عند $+\infty$ وعند $-\infty$ وعند النقطة a المعطاة ويمكن في حالة عدم وجود النهاية حساب النهاية من اليمين والنهاية من اليسار عند a .

1) $f(x)=\frac{x-3}{x-1}$ $a=1$

ملاحظة : عندما نكتب $x \to \pm\infty$

فهذا يعني أن $x \to -\infty$ أو $x \to +\infty$

الحل:

التابع معرف على

$]-\infty , 1 [\cup] 1 , +\infty [$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x}{x}\right) = 1$$

المستقيم $y=1$ مقارب يوازي $x'x$

$$f(x)-1=\frac{x-3}{x-1}-1=\frac{-2}{x-1}$$

عندما $x<1$ فإن $f(x)-1>0$ و C_f يقع فوق المقارب .

عندما $x>1$ فإن $f(x)-1<0$ و C_f يقع تحت المقارب .

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$$

المستقيم $x=1$ مقارب $/\!/ \, y'y$

---

2) $f(x)=\frac{x^2+2}{x-2}$ $a=2$

الحل:

التابع معرف على

$]-\infty , 2 [\cup] 2 , +\infty [$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} (x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} (x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$$

المستقيم $x=2$ مقارب شاقولي والخط البياني C_f يقع على يمين المقارب باتجاه $+\infty$ وإلى يسار المقارب باتجاه $-\infty$.

---

3) $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ $a=-1$

الحل:

التابع معرف على

$]-\infty , -1 [\cup] -1 , +\infty [$

$$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \lim_{x \to \mp\infty} \left(\frac{2x}{x}\right) = 2$$

المستقيم $y=2$ مقارب .

$$f(x)-2 = \frac{2x-1}{x+1} - 2 = \frac{-3}{x+1}$$

عندما $x > -1$ فإن $f(x)-2 < 0$

والخط البياني C_f يقع تحت المقارب

وعندما $x < -1$ فإن $f(x)-2 > 0$

والخط البياني C_f يقع فوق المقارب

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty$$

المستقيم $x=-1$ مقارب $/\!/ y'y$ و C_f يقع إلى يمينه باتجاه $-\infty$ والى يساره باتجاه $+\infty$

---

④ $f(x) = \dfrac{5x+1}{x+1}$ $\quad a=-1$

الحل:

التابع معرف على

$]-\infty , -1[\cup]-1 , +\infty[$

$$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \lim_{x \to \mp\infty} \left(\frac{5x}{x}\right) = 5$$

المستقيم $y=5$ مقارب $/\!/ x'x$

$$f(x)-5 = \frac{5x+1}{x+1} - 5 = \frac{-4}{x+1}$$

عندما $x > -1$ فإن $f(x)-5 < 0$

والخط البياني C_f تحت المقارب $y=5$

عندما $x < -1$ فإن $f(x)-5 > 0$

والخط البياني C_f فوق المقارب $y=5$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty$$

المستقيم $x=-1$ مقارب $/\!/ y'y$ والخط البياني C_f يقع إلى يمين المقارب باتجاه $-\infty$ وإلى يسار المقارب باتجاه $+\infty$.

---

⑤ $f(x) = \dfrac{x+2}{(x-2)^2}$ $\quad a=2$

الحل:

التابع معرف على

$]-\infty , 2[\cup]2 , +\infty[$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

المستقيم $x'x$ مقارب باتجاه $\pm\infty$

ونلاحظ أن إشارة $f(x)$ هي من إشارة $(x+2)$ فإذا كانت $x > -2$ فإن $f(x) > 0$ و C_f يقع فوق محور السينات باتجاه $+\infty$ وإذا كانت

$x < -2$ فإن $f(x) < 0$ و C_f يقع تحت محور السينات باتجاه $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to 2^{+}} f(x) = +\infty$

المستقيم $x = 2$ مقارب والخط البياني C_f يقع إلى يمين ويسار المقارب باتجاه $+\infty$.

---

⑥ $a = -2$ $\quad f(x) = 3x - 5 + \dfrac{2}{x+2}$

الحل:

التابع معرف على

$]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (3x - 5) + \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x-2}$

$= -\infty + 0 = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (3x - 5) + \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x+2}$

$= +\infty + 0 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -2^{+}} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim\limits_{x \to -2^{-}} f(x) = -\infty$

المستقيم $x = -2$ مقارب $// y'y$ والخط البياني C_f يقع إلى يمين المقارب باتجاه $+\infty$ وإلى يساره باتجاه $-\infty$.

$\boxed{\frac{2}{38}}$ جد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x) = \dfrac{5x - 1}{(x - 1)^2}$ عند $x = 1$ ثم عين عدداً α يحقق الشرط إذا كان x عنصراً من المجال $]1 - \alpha \; , \; 1 + \alpha[$ مختلفاً عن الواحد كان $f(x) > 10^3$

الحل:

f معرف على $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to 1^{+}} f(x) = +\infty$

$f(x) > 10^3 \iff \dfrac{5x - 1}{(x - 1)^2} > 10^3 \iff$

$5x - 1 > 10^3 (x - 1)^2 \quad \iff$

$5x - 5 + 4 > 10^3 (x - 1)^2 \iff$

$10^3 (x - 1)^2 - 5(x - 1) - 4 < 0$

لندرس تحقق المتراجحة

نلاحظ أن الطرف الأول منها ثلاثي حدود بعد أن نفرض $x - 1 = t$

$10^3 t^2 - 5t - 4 < 0$

$\Delta = 25 + 16000 = 16025$

$\sqrt{\Delta} = 126,6$

$t_1 = \dfrac{+5 + 126,6}{2 \times 10^3} \approx 0,07 =$

$$t_2 = \frac{+5 - 126,6}{2 \times 10^3} \approx -0,06$$

ونجد أن المتراجحة محققة إذا كانت

$$-0,06 < t < 0,07$$

أي $|x - 1| < 0.07$

ويمكن اعتبار : $\alpha = 0,07$

العمليات على النهايات

من المفيد الرجوع إلى الكتاب صفحة (39) واستيعاب الجداول التي تبين نهايات مجموع وجداء وقسمة تابعين في حالة نهاية التابعين إلى أعداد حقيقية أو لانهائية أو حقيقية ولا نهائية معاً ، ونجد في هذه الجداول عدم الإجابة عن الحالات $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ، $0 \times \pm\infty$ ، $+\infty - \infty$ والتي نسميها حالات عدم التعيين والتي تحتاج لتعيينها دراسة كل منها بحسب التوابع التي أدت إليها .

تدرب صفحة (42)

$\frac{1}{42}$ احسب نهايات التوابع الآتية عند $+\infty$ وعند $-\infty$ وعند النقاط a المعطاة ويمكن عند الحاجة حساب النهاية من اليمين ومن اليسار عند a

① $f(x) = \dfrac{2x^2}{(x-1)(2-x)}$ $\quad a = 1 , 2$

الحل :

التابع معرف على

$]-\infty , 1 [\cup] 1 , 2 [\cup] 2 , +\infty [$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2x^2}{-x^2}\right) = -2$$

المستقيم $y = -2$ مقارب

$$f(x) + 2 = \frac{2x}{-x^2 + 3x - 2} + 2$$

$$= \frac{2(3x-2)}{(x-1)(2-x)}$$

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$		1		2		$+\infty$
البسط	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
المقام	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)+2$	$+$	0	$-$	‖	$+$	‖	$-$	

والخط البياني C_f يقع فوق المقارب في كل من المجالين

$]-\infty , \frac{2}{3}[\ , \ ]1 , 2[$

وتحت المقارب في المجالين

$]\frac{2}{3} , 1[\ , \ ]2 , +\infty[$

• عند $a = 1$ نجد :

$\lim_{x \to \overset{+}{1}} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to \overset{-}{1}} f(x) = -\infty$

ونجد أن $x = 1$ مقارب $\parallel y'y$

والخط C_f يقع إلى يمين المقارب باتجاه $+\infty$ وإلى يسار المقارب باتجاه $-\infty$.

• عند $a = 2$ نجد :

$\lim_{x \to \overset{+}{2}} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to \overset{-}{2}} f(x) = +\infty$

ونجد أن $x = 2$ مقارب $\parallel y'y$

والخط C_f يقع الى يمين المقارب باتجاه $-\infty$ والى يسار المقارب باتجاه $+\infty$

---

2) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-4} \qquad a = 2 , -2$

الحل:

التابع معرف على

$]-\infty , -2[\cup]-2 , +2[\cup]2 , +\infty[$

$$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{2}{x} = 0$$

المستقيم $y = 0$ وهو $x'x$ مقارب

x	$-\infty \quad -2 \quad -\frac{1}{2} \quad 2 \quad +\infty$
البسط	$- \quad - \quad 0 \quad + \quad +$
المقام	$+ \quad 0 \quad - \quad - \quad 0 \quad +$
$f(x)$	$- \quad \vert \quad + \quad 0 \quad - \quad \vert \quad +$

والخط البياني فوق المقارب في كل من المجالين

$]-2 , -\frac{1}{2}[$ و $]2 , +\infty[$

وتحت المقارب في كل من المجالين

$]-\frac{1}{2} , +2[$ و $]-\infty , -2[$

• $\lim_{x \to \overset{+}{2}} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to \overset{-}{2}} f(x) = -\infty$

المستقيم $x = 2$ مقارب $\parallel y'y$ والخط C_f يقع الى يمين المقارب باتجاه $+\infty$ والى يساره باتجاه $-\infty$.

• $\lim_{x \to \overset{+}{-2}} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to \overset{-}{-2}} f(x) = -\infty$

المستقيم $x = -2$ مقارب $\parallel y'y$

والخط C_f يقع إلى يمين المقارب باتجاه $+\infty$ والى يساره باتجاه $-\infty$.

---

3) $f(x) = x^2 - 2 + \frac{1}{(1-x)^2}$ $\quad a = 1$

الحل :

التـابع معـرف علـى $\mathbb{R} / \{1\}$

$$\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \lim_{x\to\mp\infty} (x^2 - 2) + \lim_{x\to\mp\infty} \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$= +\infty + 0 = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 - 2 + \infty = +\infty$$

المستقيم $x = 1$ مقارب والخط البياني C_f يقـع إلى يمين ويسـار المقـارب باتجاه $+\infty$

---

4) $f(x) = x + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x-2}$ $\quad a = 1 , 2$

الحل :

التـابع معـرف علـى

$]-\infty , 1[\cup]1 , 2[\cup]2 , +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x + \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1-x} - \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-2}$$

$$= -\infty + 0 - 0 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x + \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x} - \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-2}$$

$$= 1 - \infty + 1 = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 + \infty + 1 = +\infty$$

المستقيم $x = 1$ مقارب والخط البياني يقـع إلى يسـار المقـارب باتجاه $+\infty$ وإلى يمين المقارب باتجاه $-\infty$.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2 - 1 + \infty = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2 - 1 - \infty = -\infty$$

المستقيم $x = 2$ مقارب $y'y //$ والخط البيانـي C_f يقـع إلى يمـين المقارب باتجاه $+\infty$ وإلى يسار المقارب باتجاه $-\infty$.

$\boxed{\frac{2}{42}}$ عين فيما يأتي مجموعة تعريف التابـع f ، ثـم ادرس في كـل حالـة نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه وادرس ، عـنـد اللزوم ، النهايـة من اليمين والنهاية من اليسار .

1) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x} - 1}$

الحل :

التـابع معـرف علـى

$]0 , 1[\cup]1 , +\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -1$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

المستقيم $x = 1$ مقارب $y'y \parallel$

والخط البياني C_f يقع إلى يسار المقارب باتجاه $-\infty$ وإلى يمين المقارب باتجاه $+\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

---

② $f(x) = x^2 + \sqrt{x} - 1$

الحل:

f التابع معرف على $[0 , +\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -1 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

---

③ $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$

الحل:

f التابع معرف على $]0 , +\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

المستقيم $x = 0$ وهو محور التراتيب مقارب والخط البياني C_f يقع إلى يمينه باتجاه $+\infty$

---

④ $f(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{x + 1}$

الحل:

f التابع معرف على $[0 , +\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

المستقيم $y = 1$ مقارب $x'x \parallel$

$f(x) - 1 = \frac{x + \sqrt{x}}{x + 1} - 1 = \frac{\sqrt{x} - 1}{x + 1}$

وإشارة $f(x) - 1$ من إشارة $\sqrt{x} - 1$ لأن $x + 1 > 0$ ضمن مجموعة التعريف

ومنه فإن C_f يقع تحت المقارب في المجال $[0 , 1[$ وفوق المقارب في المجال $]1 , +\infty[$

---

⑤ $f(x) = \frac{x^2 + x - \sqrt{x}}{x^2 + 1}$

الحل:

f التابع معرف على $[0 , +\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \quad ,$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim \frac{x^2}{x^2} = 1$

المستقيم $y = 1$ مقارب $\parallel x'x$

---

⑤ $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{x}$

الحل:

f معرف إذا كان $x \geqslant 0$ و $x - 1 \geqslant 0$

والشرط الأخير كاف أي

$D_f = [1, +\infty[$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -1$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x-1} - \sqrt{x})$

$= \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x-1-x}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}$

$= \lim_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}} = 0$

المستقيم $y = 0$ وهو $x'x$ مقارب

والخط البياني C_f يقع تحت المقارب

لأن المقام $\sqrt{x-1}+\sqrt{x}$ موجب

أي $f(x) < 0$

$\boxed{\frac{3}{42}}$ أوجد نهاية التابع f المعين

بالعلاقة $f(x) = \dfrac{-2x+1}{x+3}$

عند $+\infty$ ، ثم أوجد عدداً A يحقق

الشرط إذا كان $x > A$ كان $f(x)$

في المجال $]-2.05 , -1.95[$

الحل:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{-2x}{x} = -2$

إذا كان $f(x)$ في المجال $]-2.05 , -1.95[$

أي $-2.05 < f(x) < -1.95$

وبإضافة $+2$ إلى جميع الأطراف نجد

$-0.05 < f(x) + 2 < 0.05$

أي $|f(x) + 2| < 0.05$

$f(x) + 2 = \dfrac{-2x+1}{x+3} + 2 = \dfrac{7}{x+3}$

أي $\left|\dfrac{7}{x+3}\right| < 0.05$ وبجوار $+\infty$

نجد $x + 3 > 0$ ومنه $\dfrac{7}{x+3} < 0.05$

$\dfrac{7}{0.05} < x + 3$ أي $x > \dfrac{7}{0.05} - 3$

$x > 140 - 3$ أي $x > 137$

ومنه فإن $A = 137$

$\boxed{\frac{4}{42}}$ أوجد نهاية التابع f المعين

بالعلاقة $f(x) = \dfrac{x+3}{x-3}$

عند $(+5)$ ، ثم أوجد مجالاً I مركزه

$(+5)$ يحقق الشرط إذا انتمى x إلى

المجال I ، انتمى $f(x)$ إلى المجال

$]3.95 , 4.05[$

الحل :

$\lim_{x \to 5} f(x) = 4$

لنكتب أن $f(x)$ في المجال

$]3.95 , 4.05[$

$+3.95 < \frac{x+3}{x-3} < 4.05$

وبطرح 1 من جميع الأطراف نجد :

$2.95 < \frac{x+3}{x-3} - 1 < 3.05$

$2.95 < \frac{6}{x-3} < 3.05$

وبما أن $x \to 5$ فإن $x-3 > 0$

والمتراجحة السابقة تكتب

$\frac{1}{2.95} > \frac{x-3}{6} > \frac{1}{3.05}$

$\frac{6}{2.95} > x-3 > \frac{6}{3.05}$

$5.03 > x > 4.97$

والمجال هو : $I =]4.97 , 5.03[$

مبرهنات الإحاطة :

مبرهنة (1) :

لتكن f و g و h ثلاثة توابع معرفة

على مجال من النمط $I =]b , +\infty[$

ولنفرض أنه عند كل عدد x من I

تحقق المتراجحة

$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$

ثم لفنرض أن للتابعين g و h النهاية

ℓ ذاتها عند $+\infty$ عندئذ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

مبرهنة (2) :

ليكن f و g تابعين معرفين على

المجال $I =]b , +\infty[$

ولنفرض عند كل x من I تحقق

المتراجحة $|f(x) - \ell| \leqslant g(x)$

ثم لنفرض أن $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

عندئذٍ : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

مبرهنة (3) :

ليكن f و g تابعين معرفين على

المجال $I =]b , +\infty[$

① إذا كان $f(x) \geqslant g(x)$ عند كل x

من المجال I وكان $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

كان $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

② إذا كان $f(x) \leqslant g(x)$ عند كل x

من I وكان $\lim_{x \to +\infty} g = -\infty$

كان $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

ملاحظة :

تبقى نتائج المبرهنتين 1 و 2 صحيحة عندما تؤخذ النهايات عند $-\infty$ ، إذ يكفي أن نستبدل المجال $]b, +\infty[$ بالمجال $]-\infty, b[$

تدريب صفحة (46)

$\frac{1}{46}$ اجب عن الأسئلة الآتية :

① f تابع يحقق

$$\frac{3x+\cos x}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{3x+7}{x-1}$$

أياً كان $x > 1$ ، ما نهاية f عند $+\infty$.

الحل:

نعلم أن $-1 \leqslant \cos x \leqslant +1$.

وإذا كانت $x > 1$ فإن

$$-\frac{1}{x} \leqslant \frac{\cos x}{x} \leqslant \frac{1}{x}$$

ولما كان

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

فإن

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

$$\frac{3x+\cos x}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{3x+7}{x-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} \leqslant \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

$$\leqslant \lim_{x\to+\infty} \frac{3x+7}{x-1}$$

$$3+0 \leqslant \lim_{x\to+\infty} f(x) \leqslant 3$$

ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$

---

② أثبت أن

$$\frac{-1}{x+1} \leqslant \frac{\cos x}{x+1} \leqslant \frac{1}{x+1}$$

أياً كان $x > -1$ استنتج نهاية $f : x \longrightarrow \frac{\cos x}{x+1}$ عند $+\infty$ ، ثم ادرس بالمثل نهاية التابع ذاته عند $-\infty$.

الحل:

نعلم أن $-1 \leqslant \cos x \leqslant +1$ - أياً كانت x ومن أجل $x > -1$ فإن المتراجحة السابقة تكتب

$$\frac{-1}{x+1} \leqslant \frac{\cos x}{x+1} \leqslant \frac{1}{x+1}$$

ولما كان $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x+1} = 0$

فإن $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x+1} = 0$

حسب مبرهنة الإحاطة.

المتراجحة $-1 \leqslant \cos x \leqslant +1$

تكتب عندما $x < -1$ بالشكل :

$$\frac{-1}{x+1} \geqslant \frac{\cos x}{x+1} \geqslant \frac{1}{x+1}$$

وبالطريقة السابقة ذاتها نستنتج أن

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\cos x}{x+1} = 0$$

لأن $\lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x+1} = 0$

---

6 f تابع يحقق

$$|f(x)-3| \leqslant \frac{1}{x+1}$$

أيا كان $x \geqslant 0$ مانهاية f عند $+\infty$؟

الحل:

حسب المبرهنة (2) فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$

لأن $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$

---

7 f تابع يحقق $f(x) \geqslant \frac{1}{4}x^2$

أيا كان $0 > x$ مانهاية f عند $-\infty$؟

الحل:

حسب المبرهنة (3) نجد أن :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

وذلك لأن $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}x^2 = +\infty$

---

8 أثبت أن $x^2 - 5\sin x \geqslant x^2 - 5$

أيا كان العدد الحقيقي x ، استنتج من المتراجحة السابقة نهاية

$x \to x^2 - 5\sin x$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$

الحل:

نعلم أن $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ ومنه

نضرب جميع الأطراف بـ -5

$$+5 \geqslant -5\sin x \geqslant -5$$

نجمع إلى جميع الأطراف x^2 فنجد

$$x^2+5 \geqslant x^2 - 5\sin x \geqslant x^2 - 5$$

عندما $x \to +\infty$ فإن

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2-5) = +\infty$$

وبالتالي حسب مبرهنة الإحاطة (3)

نجد $\lim (x^2 - 5\sin x) = +\infty$

وعندما $x \to -\infty$ فإن

$$\lim_{x\to-\infty} (x^2-5) = +\infty$$

فحسب المبرهنة (3) فإن

$$\lim_{x\to-\infty} (x^2 - 5\sin x) = +\infty$$

2/46 ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,+\infty[$ وفق $f(x)=\sqrt{1+x}-\sqrt{x}$

① تحقق أن $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$

أياً كان $x \geqslant 0$

② استنتج أن

$$\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

في حالة $x>0$

③ مانهاية f عند $+\infty$؟

الحل:

$$f(x)=\sqrt{1+x}-\sqrt{x}$$

$$=\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{(1+x)-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$$

بما أن $x \geqslant 0$ فإن $1+x>x$

وبالتالي $\sqrt{1+x}>\sqrt{x}$ ومنه

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{x}>2\sqrt{x}$$

و

$$2\sqrt{1+x}>\sqrt{1+x}+\sqrt{x}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}>\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$$

و

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}>\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

ومنه

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}>\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}>\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

ولما كان

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{1+x}}=0$$

فإن

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}=0$$

أي

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

نهاية تابع مركب

مبرهنة :

نتأمل ثلاثة توابع f و g و h ونفرض أن $f(x)=goh(x)=g(h(x))$

إذا كان $\lim_{t\to b} g(t)=c$, $\lim_{x\to a} h(x)=b$

فعندئذ : $\lim_{x\to a} f(x)=c$ سواء كانت المقادير a و b و c أعداداً حقيقية منتهية أو مقادير لا نهائية .

تدرب صفحة (49)

1/49 فيمايأتي ، نعطي تابعاً f معرفاً على مجموعة D ويطلب حساب نهاية f عند a .

① $a = 5$ $\quad f(x)=\sqrt{\dfrac{x+3}{x-5}}$

$D =]5\,,+\infty[$

الحل :

نفرض $h(x)=\dfrac{x+3}{x-5}$ ومنه

$\lim\limits_{x\to 5^+} h(x)=+\infty$

ومنه فإن

$\lim\limits_{x\to 5} f(x)=\lim\limits_{h(x)\to+\infty}\sqrt{h(x)}=+\infty$

---

② $a=-\infty$ $\quad f(x)=\sqrt{-x^3+x^2+x}$

$D =]-\infty\,,\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}[$

الحل :

نفرض $h(x)=-x^3+x^2+x$ ومنه

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=+\infty$

ومنه فإن

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{h(x)\to+\infty}\sqrt{h(x)}=+\infty$

---

③ $a=-\infty$ $\quad f(x)=\sqrt{\dfrac{-x+1}{x^2+1}}$

$D =]-\infty\,,1[$

الحل :

نفرض أن $X=h(x)=\dfrac{-x+1}{x^2+1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{x^2}=0$

ومنه فإن

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{X}=0$

فيمايلي سنعطي أجوبة التمارين وعلى الطالب إيجاد النتائج :

④ $a=1$ $\quad f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$D =]-1\,,+1[$

الحل :

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$

---

⑤ $a=1$ $\quad f(x)=\cos\pi x+\dfrac{1}{(x-1)^2}$

$D = IR / \{1\}$

الحل :

$\lim\limits_{x\to 1^{\pm}} f(x)=+\infty$

---

⑥ $a=+\infty$ $\quad f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi x+1}{x+2}\right)$

$D = IR / \{-2\}$

الحل :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\cos\pi=-1$

---

⑦ $a=1\ ,\ -\infty$ $\quad f(x)=\sqrt{\dfrac{2x^2}{1-x}}$

$D =]-\infty\,,1[$

الحل :

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

---

⑧ $a=+\infty$ ، $f(x)=\sin\frac{1}{\sqrt{x}}$

$D=]0,+\infty[$

الحل :

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\sin 0=0$

---

⑨ $a=+\infty$ ، $f(x)=(x-\sqrt{x}+\frac{1}{x})^2$

$D=]0,+\infty[$

الحل :

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

---

⑩ $a=+\infty$ ، $f(x)=\cos^2(\pi\times\sqrt{\frac{x-1}{x+1}})$

$D=]-\infty,-1[\cup[1,+\infty[$

الحل :

$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=1$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}=1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\cos^2\pi\times 1=1$

$\frac{2}{49}$ ليكن f التابع المعرف على المجال $]-5,+\infty[$ وفق : $f(x)=\frac{x-3}{x+5}$

① احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ،

واستنتج $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$

② أعد حساب $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$ بعد كتابة $f(f(x))$ بدلالة x .

الحل :

①

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

$\lim_{x\to+\infty} f(f(x))=\lim_{f(x)\to 1} f(f(x))=$

$f(1)=-\frac{1}{3}$

② $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(\frac{x-3}{x+5})$

$=\frac{\frac{x-3}{x+5}-3}{\frac{x-3}{x+5}+5}=\frac{-2x-18}{6x+22}$

$=\frac{-x-9}{3x+11}$

$\lim_{x\to+\infty}(f\circ f)(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{3x}=-\frac{1}{3}$

المقارب المائل

تعريف :

ليكن f تابعاً معرفاً على مجال من النمط $I=]\alpha,+\infty[$ (أو من النمط $]-\infty,\alpha[$) ، وليكن C_f الخط البياني للتابع f في معلم معطى ، وكذلك ليكن Δ المستقيم

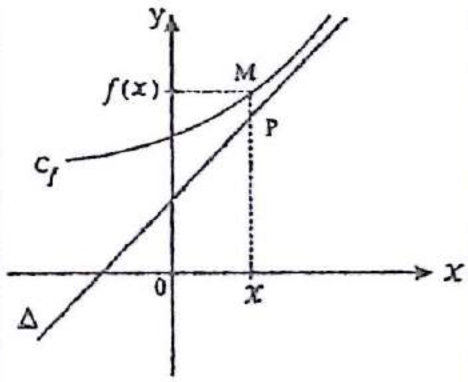
الذي معادلته $y = ax + b$

نقول إن المستقيم Δ مقارب للخط البياني C_f في جوار $+\infty$ (في جوار $-\infty$) إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$

أو

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$



ولدراسة الوضع النسبي للمقارب والخط البياني C_f ندرس إشارة الفرق $f(x) - (ax+b)$

فإذا كان الفرق موجباً كان C_f فوق المقارب Δ

وإذا كان الفرق سالباً كان C_f تحت المقارب Δ

تدرب صفحة (51)

$\frac{1}{51}$ فيما يأتي بين معللاً إجابتك إذا كان المستقيم Δ مقارباً مائلاً للخط البياني C_f للتابع f عند $+\infty$ أو عند $-\infty$.

ادرس بعد ذلك الوضع النسبي للخط C_f ومقاربه Δ .

(1) $y = 2x + 3$ $\quad f(x) = 2x + 3 + \frac{10}{x-1}$

الحل:

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (2x+3)] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{10}{x+1} = 0$$

فالمستقيم Δ مقارب

دراسة الوضع النسبي :

إن إشارة $f(x) - y_\Delta$ هي من إشارة $\frac{10}{x+1}$ أي من إشارة $x+1$

فإذا كانت $x > -1$ فيكون C_f فوق المقارب .

وإذا كانت $x < -1$ فيكون C_f تحت المقارب .

---

② $\Delta : y = -x + 1$ $f(x) = -x + 1 - \frac{1}{x^2}$

الحل:

$f(x) - y_\Delta = \frac{-1}{x^2}$

$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - y_\Delta] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-1}{x^2} = 0$

فالمستقيم $y = -x + 1$ مقارب مائل

وبما أن . $f(x) - y_\Delta = -\frac{1}{x^2} < 0$

فالخط البياني C_f يقع تحت المقارب

---

③ $\Delta : y = x$ $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$

الحل:

$f(x) - y_\Delta = \frac{\sin x}{x}$

نعلم أن $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

ومنه في حالة $x > 0$

$-\frac{1}{x} \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant \frac{1}{x}$

ولما كان : $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0$

فإن $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

وبصورة مماثلة نجد عندما $x \to -\infty$

حيث

$\lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{x} = 0 \geqslant \lim_{x \to -\infty} \frac{\sin x}{x} \geqslant \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

وبالتالي فإن $\lim_{x \to \mp\infty} [f(x) - x] = 0$

والمستقيم $\Delta : y = x$ مقارب مائل

لدراسة الوضع النسبي بين Δ و C_f

ندرس إشارة $\frac{\sin x}{x}$

مبدئياً لندرس الإشارة في

المجال $]0, 2\pi[$

في المجال $]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\pi, \frac{3\pi}{2}[$

نجد أن $\frac{\sin x}{x} > 0$

وفي المجال $]\frac{\pi}{2}, \pi[\cup]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$

نجد أن $\frac{\sin x}{x} < 0$

وهكذا فيكون C_f فوق Δ في كل من المجالات

$]2k\pi, 2\pi K + \frac{\pi}{2}[\cup](2K+1)\pi,$
$(2K+1)\pi + \frac{\pi}{2}[$

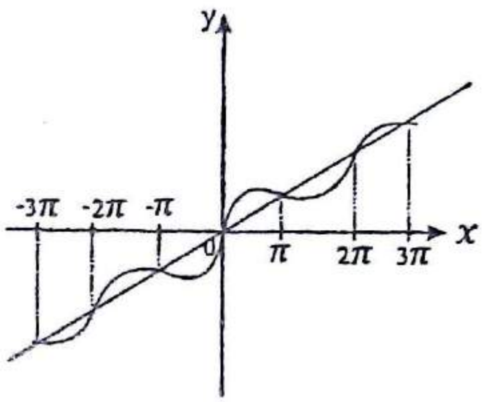
حيث $k \in \overset{+}{Z}$

و C_f تحت المقارب Δ في كل من المجالات

$]2k\pi + \frac{\pi}{2}, (2K+1)\pi[\cup]$
$(2K+1)\pi + \frac{\pi}{2}, 2(K+1)\pi[$

حيث $k \in \overset{+}{Z}$

ويكون C_f تحت المقارب Δ في كل



---

④ $f(x)=3x+7-\frac{5}{\sqrt{|x|}}$

$\Delta : y=3x+7$

الحل :

التابع معرف على $\mathbb{R}^*$

$f(x)-y_{\Delta}=\frac{-5}{\sqrt{|x|}}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-y_{\Delta})=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-5}{\sqrt{|x|}}=0$

فالمستقيم Δ مقارب مائل في جوار $+\infty$ و $-\infty$ والخط البياني C_f يقع تحت المقارب لأن $\frac{-5}{\sqrt{|x|}}<0$

---

⑤ $f(x)=\frac{2x^2-7x-3}{x-4}$

$\Delta : y=2x+1$

الحل :

التابع معرف على $\mathbb{R}/\{4\}$

$f(x)-y_{\Delta}=\frac{2x^2-7x-3}{x-4}-(2x+1)$

$=\frac{2x^2-7x-3-2x^2+8x-x+4}{x-4}$

$f(x)-y_{\Delta}=\frac{1}{x-4}$

$\lim\limits_{x\to\mp\infty}(f(x)-y_{\Delta})=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x-4}=0$

فالمستقيم $y=2x+1$ مقارب مائل

ونجد أن C_f يقع فوق المقارب إذا كانت $x>4$ وتحت المقارب إذا كانت $x<4$

---

⑥ $f(x)=\frac{x^3-3x-5}{(x+1)^2}$

$\Delta : y=x-2$

الحل :

التابع معرف على $\mathbb{R}/\{-1\}$

نقسم البسط على المقام في $f(x)$

فنجد $f(x)=x-2+\frac{-3}{(x+1)^2}$

$f(x)-y_{\Delta}=f(x)-(x-2)=\frac{-3}{(x+1)^2}$

$\lim\limits_{x\to\mp\infty}(f(x)-y_{\Delta})=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{(x+1)^2}=0$

فالمستقيم $y_\Delta = x - 2$ مقارب

وبما أن $f(x) - y_\Delta = \frac{-3}{(x+1)^2} < 0$

فالخط البياني للتابع C_f يقع تحت المقارب Δ

---

⑦ $f(x) = \frac{-x^2 - 4x + \sin x}{x}$

$\Delta : y = -x - 4$

الحل :

f التابع معرف على $\mathbb{R}^*$

$f(x) = -x - 4 + \frac{\sin x}{x}$

$f(x) - y_\Delta = \frac{\sin x}{x}$

وقد مر معنا أكثر من مرة أن

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ ولذلك فإن

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - y_\Delta) = \lim\limits_{x \to \mp\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

ونجد $y = -x - 4$ مقارب مائل وبدراسة مماثلة للدراسة التي أجريناها في التمرين(3) نتعرف إلى وضع C_f بالنسبة للمقارب Δ .

---

⑧ $f(x) = \frac{x^2 + \frac{3}{2}x + \sqrt{x} + 1}{2x + 1}$

$\Delta : y = \frac{1}{2}x + 1$

الحل :

f التابع معرف من أجل $x \geqslant 0$

نقسم البسط على المقام أو نحسب $f(x) - y_\Delta$ فنجد

$f(x) = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{\sqrt{x}}{2x+1}$

$f(x) - y_\Delta = \frac{\sqrt{x}}{2x+1}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - y_\Delta) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{2x+1} = 0$

فالمستقيم $y_\Delta = \frac{1}{2}x + 1$ مقارب

وبما أن $\frac{\sqrt{x}}{2x+1} > 0$ في مجموعة التعريف فإن C_f يقع فوق المقارب Δ

الاستمرار

تعريف :

لتكن a نقطة من C_f ، نقول إن التابع f مستمر عند a إذا وفقط إذا

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

ونقول إن التابع مستمر على مجموعة

D محتواة في D_f، إذا وفقط إذا كان مستمراً عند كل نقطة من نقاط D

مبرهنة :

① إذا كان التابع f اشتقاقياً في نقطة a ، كان مستمراً في a والعكس غير صحيح دوماً .

② إذا كان التابع f اشتقاقياً على المجال I كان مستمراً على I .

نتائج :

مجموع تابعين مستمرين هو تابع مستمر، جداء تابعين مستمرين هو تابع مستمر، قسمة تابعين مستمرين هو تابع مستمر، شرط أن يكون معرفاً عند النقط المدروسة .

مركب تابعين مستمرين هو تابع مستمر .

التوابع المرجعية :

• التوابع كثيرات الحدود اشتقاقية على IR فهي مستمرة على D .

• التوابع الكسرية اشتقاقية على مجموعة تعريفها D فهي مستمرة على D .

• التابعان $x \to \sin x$ و $x \to \cos x$ اشتقاقيان على R ، فهما مستمران في IR

نتيجة :

الخط البياني C_f لتابع مستمر في مجال يتألف من قطعة واحدة في ذلك المجال .

تدرب صفحة (54)

$\frac{1}{54}$ نتأمل التابع f المعطى وفق العلاقة :

$f(x)=\sqrt{1-\cos x}$.

① مامجموعة تعريف f

② أيكون f مستمراً على مجموعة تعريفه ؟

③ بين أن التابع f زوجي ويقبل العدد 2π دوراً له .

④ ليكن g مقصور التابع f على

المجال $[0, \pi]$ أثبت أن g اشتقاقي وارسم خطه البياني .

⑤ استنتج الخط البياني للتابع f على المجال $[-2\pi , +2\pi]$ ، ماهي مجموعة تعريف f ؟

الحل:

① التابع معرف إذا كان

$1 - \cos x \geqslant 0$ أي $\cos x \leqslant 1$

وهذه المتراجحة محققة أياً كانت $x \in \mathbb{R}$ فالتابع f معرف على $\mathbb{R}$

② التابع f مستمر على $\mathbb{R}$ لأنه أياً كانت $a \in \mathbb{R}$ فإن :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \sqrt{1 - \cos a} = f(a)$$

③ يكون f المعرف على $\mathbb{R}$ زوجياً إذا تحقق $f(-x) = f(x)$ أياً كانت $x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \sqrt{1 - \cos -x}$$

$$= \sqrt{1 - \cos x} = f(x)$$

فالتابع f زوجي .

يكون التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ دورياً ودوره a إذا تحقق $f(x + a) = f(a)$

أياً كانت $x \in \mathbb{R}$

$$f(x + 2\pi) = \sqrt{1 - \cos(x + 2\pi)}$$

$$= \sqrt{1 - \cos x} = f(x)$$

فالتابع f دوري ودوره $a = 2\pi$.

④ $g(x) = \sqrt{1 - \cos\theta} = \sqrt{2 \sin^2 \frac{x}{2}}$

$$g(x) = \sqrt{2}\left|\sin \frac{x}{2}\right| = \sqrt{2} \sin \frac{x}{2}$$

وذلك لأن $\sin \frac{x}{2} > 0$ في المجال $[0, \pi]$ ونجد أن g من التوابع المرجعية فهو قابل الاشتقاق في المجال $[0, \pi]$ ومشتقه :

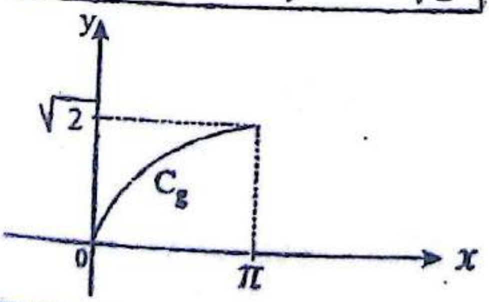
$$g'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$g'(x) = 0 \implies \cos \frac{x}{2} = 0$$

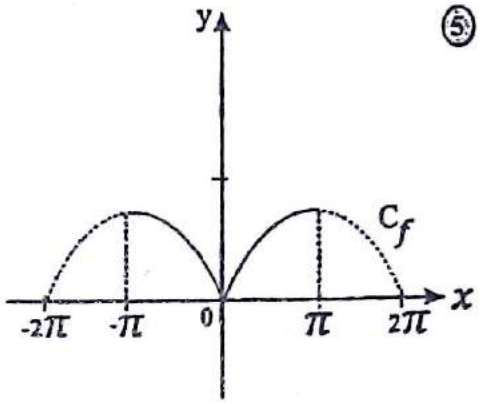
ونجد في هذا المجال $x = \pi$

و $g(\pi) = \sqrt{2}$

x	0		π
$g'(x)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+$	0
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$



⑤



نلاحظ من الشكل أن المشتق f' غير معرف عند $x=2\pi k$ لأن

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \lim_{x\to 0^+} f'(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

في الحقيقة الخط البياني للتابع f أي C_f يقع فوق محور السينات لأن

$$f(x)=\sqrt{1-\cos x}>0$$

وبصورة عامة فإن

$$f(x)=\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|$$

وأن التابع متزايد في كل مجال من النمط $]2k\pi\ ,\ (2k+1)\pi[$ حيث $k\in Z$ ويكتب :

$$f(x)=\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$$

وهو متناقص في كل مجال من النمط $](2k+1)\pi\ ,\ 2(k+1)\pi[$ حيث $k\in Z$ ويكتب :

$$f(x)=-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$$

وهو يساوي الصفر عند $x=2\pi k$

التوابع المستمرة وحل المعادلات

مبرهنة :

إذا كان f تابعاً مستمراً على مجال $[a , b]$ عندئذ أياً كان العدد الحقيقي y المحصور بين $f(a)$ و $f(b)$، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b يحقق $f(c)=y$ وهذا يعني أنه أياً يكن y من المجال $[f(a)\ ,\ f(b)]$ فللمعادلة $f(x)=y$ بالمجهول x حل واحد على الأقل في المجال $I=[a , b]$.

مبرهنة :

إذا كان f تابعاً مستمراً ومتزايداً تماماً على مجال $I=[a , b]$

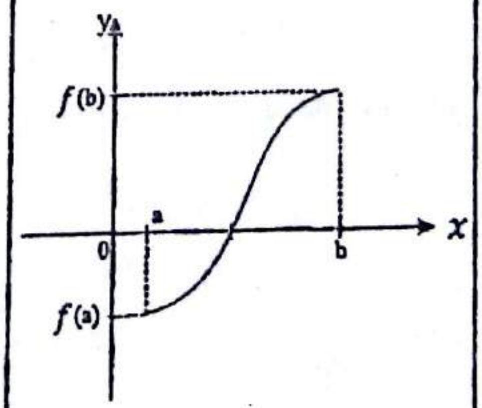
- صورة المجال $f(I)=[f(a), f(b)]$
- إذا كان y من $[f(a)\ ,\ f(b)]$ فللمعادلة

$f(x)=y$ بالمجهول x ، حل وحيد فقط في I .

• تبقى المبرهنة صحيحة في حالة تابع متناقص تماماً صحيحة تماماً على أن نستبدل المجال $[f(b),f(a)]$ بالمجال $[f(a),f(b)]$

نتيجة :

إذا كان f مستمراً ومطرداً على المجال $I=[a,b]$ وكان $f(a)\times f(b)<0$ كان للمعادلة $f(x)=0$ بالمجهول x حل وحل واحد فقط في المجال I



مبرهنة :

نفرض a و b عنصرين من المجموعة $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$

ولنفرض $a<b$ والتابع f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $I=[a,b]$ وأن $J=f(I)$

المجال I	صورة المجال I وفق تابع متزايد تماماً
$I=[a,b]$	$f(I)=[f(a),f(b)]$
$I=]a,b]$	$f(I)=]\lim\limits_{x\to a}f(x),f(b)]$
$I=[a,b[$	$f(I)=[f(a),\lim\limits_{x\to b}f(x)[$
$I=]a,b[$	$f(I)=]\lim\limits_{x\to a}f(x),\lim\limits_{x\to b}f(x)[$

وتبقى المبرهنة صحيحة في حالة التابع f متناقص تماماً بعد استبدال $f(a)$ بـ $f(b)$ وبالعكس في الصور $f(I)$

التابع العكسي :

إذا كان f مستمراً ومطرداً تماماً على المجال I وكان $f(I)=J$ حيث J مجال فإن أياً كان x من I فإن $y=f(x)\in J$ وأيا كان العدد الحقيقي y من J فيوجد عدد واحد فقط x من I يحقق $f(x)=y$

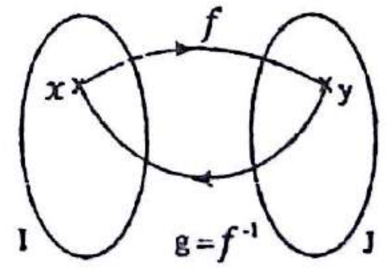
أي يمكننا أن نعرف تابعاً g منطلقة J بحيث إذا كان x الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=y$ كان $g(y)=x$ نقول عن التابع g أنه التابع العكسي لـ f ونرمز له بالرمز f^{-1}

وعليه أيا كان x من I فإن

$f^{-1}(f(x))=x$

وأياً كان y من J فإن :

$f(f^{-1}(y))=y$



في هذه الحالة نسمي f تقابلاً ونسمي $g=f^{-1}$ التقابل العكسي لـ f

• الخطان البيانيان لتقابل وتقابله العكسي متناظران بالنسبة للمستقيم $y=x$ المنصف للربع الأول والثالث

مثال :

ليكن f التابع المعرف على $I=]-\infty,0]$ وفق $y=f(x)=x^2$

أوجد $J=f(I)$ وبرهن أن f تقابل ثم أوجد تقابله العكسي .

الحل:

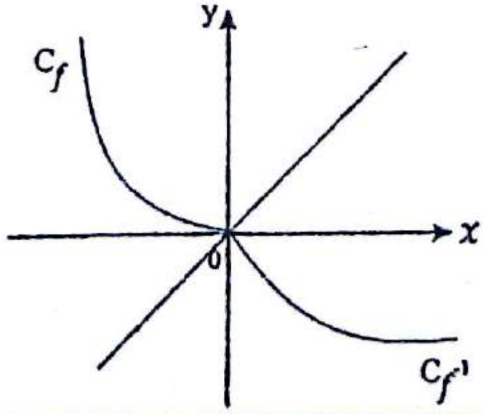
التابع f مستمر ومتناقص تماماً في مجموعة تعريفه I ونجد

$J=f(I)=[0,+\infty[$

كما نجد أن للمعادلة $y=f(x)$ أي $y=x^2$ حل وحيد في I ومنه $x=-\sqrt{y}$ فالتابع f تقابل وتقابله العكسي $f^{-1}(y)=-\sqrt{y}$

أي $f^{-1}(x)=-\sqrt{x}$

وهو معرف على $J=[0,+\infty[$



تدريب صفحة (61)

$\frac{1}{61}$ التابع f معرف على R وفق : $f(x)=x^3-x^2+x-2$ ، علل لماذا يكون للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]1,2[$

الحل:

التابع كثير حدود فهو مستمر واشتقاقي على IR

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$f'(x)=3x^2-2x+1$

$f'(x)=0 \Rightarrow \Delta=4-12=8<0$

وإشارة ثلاثي الحدود من إشارة أمثال x^2 أي $f'(x)>0$

فالتابع متزايد تماماً في مجموعة تعريفه فهو مستمر ومتزايد تماماً في المجال $[1,2]$ ونجد أن :

$f(1).f(2)=-1\times4=-4<0$

فللمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $[1,2]$

$\frac{2}{61}$ التابع f معرف على IR وفق : $f(x)=x^3-3x^2+1$ ، علل لماذا يكون للمعادلة $f(x)+1=0$ ثلاثة و فقط ثلاثة حلول حقيقية؟

الحل:

التابع كثير حدود فهو مستمر واشتقاقي على IR ؟

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$f'(x)=3x^2-6x$

$f'(x)=0 \Rightarrow 3x(x-2)=0 \Rightarrow$

$x=0$, $x=2$

ومنه $x=0 \Rightarrow f(0)=1$

$x=2 \Rightarrow f(2)=-3$

نكتب جدول التغيرات

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$
$f(x)+1$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

من الجدول يتبين أن $f(x)+1$ يمر من قيمة سالبة إلى قيمة موجبة في المجال $]-\infty,0[$ فلا بد له أن يمر

على الصفر في هذا المجال وكذلك

يمر في المجال]0 , 2[

من القيمة الموجبة 2 إلى القيمة

السالبة 2- أي

$[f(0)+1]\times[f(2)+1] = 2\times -2 < 0$

فلا بد أن يكون للمعادلة

$f(x)+1=0$ جذر في المجال [0 , 2]

وبالمثل نرى في المجال [2 , +∞[

أن $f(x)+1$ ينتقل من قيمة سالبة

(-2) إلى قيمة موجبة ∞+ فلا بد له

من أن يمر على الصفر من أجل

قيمة لـ x في هذا المجال .

فللمعادلة ثلاثة جذور

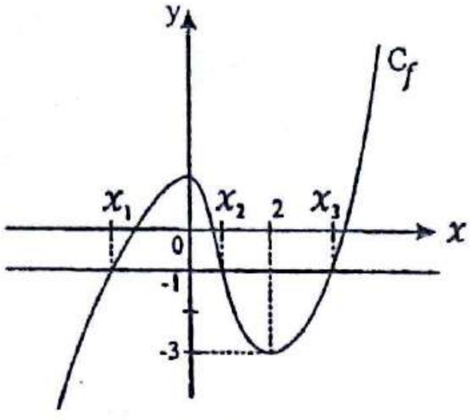
$x_1<0$ ، $0<x_2<2$ ، $x_3>2$

وفي الخط البياني للتابع f نرى أن

المستقيم $y=-1$ يقطع C_f في ثلاث

نقاط فواصلها هي جذور المعادلة

$f(x)=-1$ أو $f(x)+1=0$



3/61 ليكن التابع المعرف على المجال

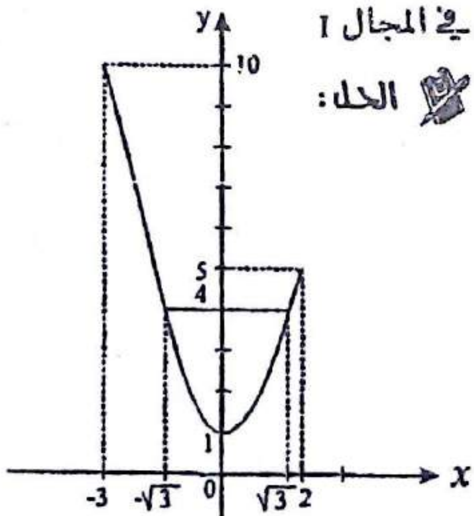
$I=[-3\ ,\ 2]$ وفق $f(x)=x^2+1$

① ارسم خطه البياني C_f واحسب $f(I)$

② ما عدد حلول المعادلة $f(x)=4$

في المجال I

الحل :



① $I=[-3\ ,\ 0]\cup[0\ ,\ 2]$

$f(I)=f([-3\ ,\ 0])\cup f([0\ ,\ 2])$

$f(I)=[1\ ,\ 10]\cup[1\ ,\ 5]=[1\ ,\ 10]$

المستقيم $y = 4$ يقطع الخط البياني

في المجال $]-3 , 2[$ بنقطتين فللمعادلة

$f(x) = 4$ جذران هما $x = \pm\sqrt{3}$

$\boxed{\frac{4}{61}}$ ليكن f التابع المعرف على المجال

$I = [2 , 3]$ وفق $f(x) = \frac{1}{x - 1}$

1. ارسم خطه البياني C_f واحسب $f(I)$

2. ماعدد حلول المعادلة $f(x) = \frac{3}{4}$ في المجال I .

الحل:

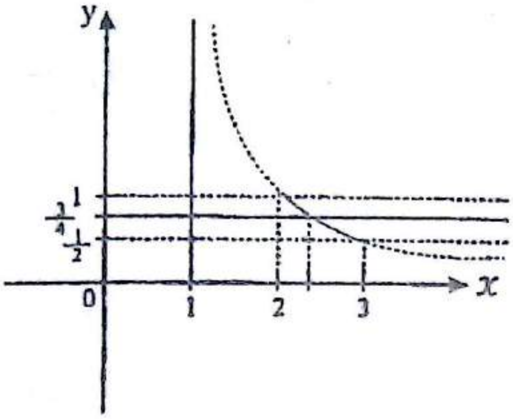
التابع f معرف ومستمر في كل من المجالين $]-\infty , 1[\cup]1 , +\infty[$ فهو مستمر في المجال $I = [2 , 3]$

$f'(x) = \frac{-1}{(x - 1)^2} < 0$

والتابع متناقص في المجال $[2 , 3]$

وعليه فإن $f([2 , 3]) = [f(3) , f(2)]$

$f(I) = [\frac{1}{2} , 1]$



ونجد أن $y = \frac{3}{4} \in [\frac{1}{2} , 1]$ فللمعادلة حل وحيد في المجال $[2 , 3]$.

(انظر الشكل)

$\boxed{\frac{5}{61}}$ ليكن f التابع المعرف على IR وفق $f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$

1. احسب $f(-1)$ و $f(-\frac{1}{2})$ و $f(0)$ و $f(1)$

2. استنتج أن للمعادلة $f(x) = 0$ ثلاثة حلول في المجال $[-1 , 1]$

الحل:

$f(-1) = -\frac{3}{2}$, $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

$f(0) = -\frac{1}{2}$, $f(1) = \frac{1}{2}$

بما أن التابع كثير حدود فهو مستمر واشتقاقي على R

ونجد أن $f'(x) = 12x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \implies x = \pm\frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$, $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$ $\quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$
$f(x)$	$-\infty \nearrow \frac{1}{2} \searrow -\frac{3}{2} \nearrow +\infty$

في المجال $[-1, -\frac{1}{2}]$ نجد أن

$f(-1) \times f(-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2} \times \frac{1}{2}$

$= -\frac{3}{4} < 0$

وبما أن f مستمر في المجال

$[-1, -\frac{1}{2}]$

فللمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في

هذا المجال .

وفي المجال $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ التابع f

مستمر

$f(-\frac{1}{2}) \times f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \times -\frac{3}{2}$.

$= -\frac{3}{4} < 0$

فللمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في

هذا المجال .

وفي المجال $[\frac{1}{2}, 1]$ حيث f أيضاً مستمر

$f(\frac{1}{2}) \times f(1) = -\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{3}{4} < 0$

فللمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في

هذا المجال .

وبالتالي فإن للمعادلة $f(x) = 0$

ثلاثة جذور في IR وهذه الجذور

في المجال .

$[-1, -\frac{1}{2}] \cup [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$

$= [-1, 1]$

$\frac{6}{61}$ ليكن f التابع المعرف على IR

وفق : $f(x) = 1 + 3x - x^3$

① ادرس نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$

② احسب $f'(x)$ وادرس إشارته

ونظم جدولاً بتغيرات f

③ أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ ثلاثة

جذور فقط ينتمي كل واحد منها

إلى المجالات :

$[1, 2]$, $[-1, 1]$, $[-2, -1]$

الحل:

① $f(x) = 1 + 3x - x^3$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (-x^3) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-x^3) = -\infty$$

② $f'(x) = 3 - 3x^2$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow$

$x = 1 \quad , \quad x = -1$

$f(-1) = -1 \quad , \quad f(1) = 3$

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

التابع مستمر واشتقاقي في IR فهو مستمر واشتقاقي في كل مجال من IR

في المجال $[-2 , -1]$ التابع متناقص تماماً كما يظهر من جدول التغيرات وبما أن

$f(-2) \times f(-1) = 3 \times -1 = -3 < 0$

فللمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في المجال $[-2 , -1]$

في المجال $[-1 , 1]$ التابع f متزايد تماماً $f(-1) \times f(1) = -1 \times 3 = -3 < 0$

فللمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد

في المجال $[1 , 2]$ التابع f متناقص تماماً $f(1) \times f(2) = 3 \times -1 = -3 < 0$

فللمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في هذا المجال .

وعليه فإن للمعادلة $f(x) = 0$ ثلاثة جذور فقط في مجموعة التعريف IR

$\frac{7}{68}$ ليكن التابع f المعرف على IR وفق :

$f(x) = x - \cos x$

① أحسب $f(0)$ و $f(\frac{\pi}{2})$ واستنتج أنه يوجد عدد حقيقي ∞ يحقق $f(\alpha) = 0$

② اشرح لماذا كل حل للمعادلة $f(x) = 0$ يجب أن ينتمي إلى المجال $[-1 , 1]$

③ استنتج أن كل حل للمعادلة $f(x) = 0$ يجب أن ينتمي إلى المجال $[0 , 1]$

④ برهن أن التابع $x \to x - \cos x$ متزايد تماماً على المجال $]0 , 1[$ واستنتج أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل

حقيقي وحيد α ينتمي إلى المجال $]0,1[$

الحل:

$f(x) = x - \cos x$

① التابع f مستمر لأنه مجموع تابعين مستمرين في $\mathbb{R}$

$f(0) = 0 - 1 = -1 \;,\; f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$

$f'(x) = 1 + \sin x \geqslant 0$

ونجد في المجال $[0, \frac{\pi}{2}]$ المشتق $f'(x) > 0$ والتابع متزايد تماماً في هذا المجال وبما أن

$f(0) \times f(\frac{\pi}{2}) = -1 \times \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} < 0$

فللمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α ينتمي للمجال $[0, \frac{\pi}{2}]$: $f(\alpha) = 0$

② إذا كانت $f(x) = 0$ فهذا يعني أن

$x - \cos x = 0 \Rightarrow x = \cos x$

وبما أن $-1 \leqslant \cos x \leqslant +1$

فإن $x \in [-1, 1]$

وكل حل يجب أن ينتمي إلى المجال الأخير .

③ نلاحظ أن $f(0) = -1$

و $f(1) = 1 - \cos 1 > 0$

إذاً $f(1) \times f(0) < 0$

وبسبب استمرار التابع وتزايده في المجال $[0, 1]$ فيوجد للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $[0, 1]$

④ التابع $f(x) = x + (-\cos x)$ مجموع تابعين متزايدين تماماً في المجال $[0, 1]$

(وقد رأينا أن $f(0) \times f(1) < 0$)

فللمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α ينتمي إلى المجال $]0, 1[$ حيث $f(\alpha) = 0$

أنشطة صفحة (64)

نشاط(1) البحث عن مقاربات مائلة

① **أمثلة**

$\boxed{\frac{1}{64}}$ $\boxed{1}$ f هو التابع المعرف على $]0, +\infty[$ وفق $f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{x}$

① لماذا يمكن تأكيد أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x - \frac{1}{2}$ مقارب للخط C_f في جوار $+\infty$.

② بين الوضع النسبي للخطين C_f و Δ .

الحل:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y_\Delta = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

فالمستقيم Δ مقارب مائل وبما أن $\frac{1}{x} > 0$ في المجال $]0, +\infty[$ فالمنحني C_f يقع فوق المقارب باتجاه $+\infty$

$\boxed{2}$ f هو التابع المعرف على $[0, +\infty[$ وفق $f(x) = \frac{2x^2+1}{x+3}$

بإعطاء x قيماً كبيرة ، تكون $f(x)$ قريبة من $\frac{2x^2}{x} = 2x$ فيمكن إذن أن يكون مستقيم معادلته من النمط $y = 2x + b$ مقارباً للخط البياني C_f سنسعى لكتابة $f(x)$ بالصيغة $f(x) = 2x + b + \frac{c}{x+3}$

① عين عددين b و c يحققان المساواة $y = 2x + b + \frac{c}{x+3}$ أياً كان $x \geqslant 0$

② استنتج أن C_f يقبل مقارباً مائلاً Δ . وبين وضعه بالنسبة إلى C_f .

الحل:

① نقسم البسط على المقام فنجد

$$f(x) = 2x - 6 + \frac{19}{x+3}$$

ومنه فإن $b = -6$ و $c = 19$

② لنبرهن على أن المستقيم Δ :

$y = 2x - 6$

هو مقارب مائل للمنحني :

$$f(x) - y_\Delta = \frac{19}{x+3}$$

$$\lim_{x\to+\infty} [(f(x) - y_\Delta] = \lim_{x\to+\infty} \frac{19}{x+3} = 0$$

وبما أن إشارة $\frac{19}{x+3} > 0$ في المجال $]0, +\infty[$ فالمنحني C_f يقع فوق المقارب Δ .

---

③ **الحالة العامة**

ليكن f تابعاً يحقق $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

① المستقيم Δ معادلته

$y = ax + b \quad (a \neq 0)$

ونفترض أن $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

أثبت أن $a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ و

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax)$$

الحل :

في حالة $x > 0$ نكتب

$$f(x) = ax + b + [f(x) - (ax + b)]$$

$$\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{f(x) - (ax + b)}{x}$$

وبأخذ نهاية الطرفين عند $+\infty$ نجد

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a + \lim_{x \to +\infty} \frac{b}{x} + \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - (ax + b)}{x}$$

وبما أن

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b) = 0 , \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{b}{x} = 0$$

فإن $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$

وحسب مبرهنات النهاية تستطيع

أن نكتب $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

على الشكل $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \to +\infty} b$

ومنه $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = b$

$\boxed{3}$ تطبيق :

ليكن f التابع المعرف على $[0 , +\infty[$

وفق $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ بالاستفادة من $\boxed{2}$

أثبت أن C_f يقبل مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$

الحل :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \frac{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x}$$

وفي جوار $+\infty$ نجد :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$$

إذاً : $a = 1$

$$f(x) - ax = f(x) - x = \sqrt{x^2 + 1} - x$$

$$f(x) - x = \frac{(\sqrt{1 + x^2} - x)(\sqrt{1 + x^2} + x)}{(\sqrt{1 + x^2} + x)}$$

$$f(x) - x = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2} + x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2} + x} = 0$$

إذاً : $b = 0$

فالمستقيم $y = x$ مقارب لـ C_f ونجد

أن $\frac{1}{\sqrt{1 + x^2} + x} > 0$ فالخط البياني

C_f يقع فوق المقارب في جوار $+\infty$

ويمكن أن نبحث عن المقارب المائل

في جوار $-\infty$ لنجد أن $y = -x$ مقارب

مائل وأن C_f يقع فوق المقارب .

نشاط (2)

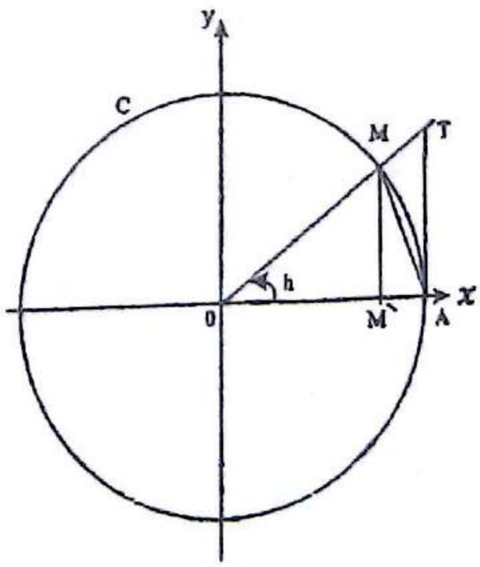
الهدف من هذا النشاط هو حساب النهايتين $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ و $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}$

العمل :

لتكن C الدائرة المثلثية التي مركزها O ، ولتكن M تلك النقطة من C بحيث يكون h التعيين الأساسي بالراديان للزاوية الموجهة $(\vec{OA},\vec{OM})$ وفق هذه الشروط وبالنظر إلى الشكل أدناه نكتب :

$OA=1$ ، $\overline{OM'}=\cos h$ ، $\overline{M'M}=\sin h$

وطول القوس $\widehat{AM}$ يساوي h



ونجد أن

مساحة المثلث OAM ⩽ مساحة القطاع $\widehat{OAM}$ ⩽ مساحة المثلث OAT أي

$$\frac{1}{2}OA\times AT\geqslant\frac{1}{2}OA^2\times h\geqslant\frac{1}{2}OA\times MM'$$

وبما أن $OA=1$ فالمتراجحات السابقة تؤول إلى الشكل

$$\tan h=\frac{\sin h}{\cos h}\geqslant h\geqslant\sin h$$

ومنه $\cos h\leqslant\frac{\sin h}{h}\leqslant 1$ أيا كان h من المجال $]0,\frac{\pi}{2}[$

وبأخذ نهاية جميع الأطراف عندما $h\to 0$ نجد

$$\lim_{h\to 0^+}\cos h\leqslant\lim_{h\to 0^+}\frac{\sin h}{h}\leqslant 1$$

ومنه $1\leqslant\lim_{h\to 0^+}\frac{\sin h}{h}\leqslant 1$

أي حسب مبرهنة الإحاطة نجد

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\sin h}{h}=1$$

② إذا كانت h في المجال $]-\frac{\pi}{2},0[$

نفرض $h=-h'$ مع $h'\in]0,\frac{\pi}{2}[$ ومنه

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = \lim_{h' \to 0} \frac{\sin - h'}{- h'}$$

$$= \lim_{h' \to 0} \frac{- \sin h'}{- h'}$$

$$= \lim_{h' \to 0} \frac{\sin h'}{h'} = 1$$

وذلك لأن $\lim_{h \to 0} h = \lim_{h' \to 0} - h' = 0$

لنحاول إيجاد $\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h^2}$

الحل :

نعلم أن $\cos h = 1 - 2 \sin^2 \frac{h}{2}$

ومنه : $\cos h - 1 = - 2 \sin^2 \frac{h}{2}$

$$\frac{\cos h - 1}{h^2} = - 2 \frac{\sin^2 \frac{h}{2}}{h^2}$$

$$= - \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \frac{h}{2}}{\frac{h^2}{4}}$$

$$= - \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right)^2$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h^2} = - \frac{1}{2} \lim \left(\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right)^2$$

$$= - \frac{1}{2} \times 1^2$$

أي $\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h^2} = - \frac{1}{2}$

تطبيق :

$$f(x) = \frac{\cos 3x - \cos x}{x \sin x}$$

$x \in]-\pi, +\pi[/ \{0\}$

الحل :

نعلم أن $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

نعوض فنجد

$$f(x) = \frac{4 \cos^3 x - 4 \cos x}{x \sin x}$$

$$= \frac{4 \cos x (\cos^2 x - 1)}{x \sin x}$$

$$= \frac{4 \cos x \times - \sin^2 x}{x \sin x}$$

$$= - 4 \cos x \left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = - 4 \lim_{x \to 0} \cos x \times \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$= - 4 \times 1 \times 1 = - 4$$

تمرينات ومسائل صفحة (67)

$\frac{1}{67}$ ادرس في كل حالة نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه ، وعند اللزوم ادرس النهاية من اليمين ومن اليسار .

1) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$

الحل:

التابع معرف على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

---

② $f(x)=2-\frac{4}{x^2}$

الحل:

التابع معرف على $\mathbb{R}^*$

مقارب $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=2 \Rightarrow y=2$

مقارب $\lim_{x\to 0^{\pm}} f(x)=-\infty \Rightarrow x=0$

---

③ $f(x)=x^2+3x-\frac{1}{x+3}$

الحل:

التابع معرف على

$]-\infty,-3[\ \cup\ ]-3,+\infty[$

$$\lim_{x\to\mp\infty} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-3^+} f(x)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to-3^-} f(x)=+\infty$$

المستقيم $x=-3$ مقارب $/\!/\ y'y$

---

④ $f(x)=x+\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x+2}$

الحل:

التابع معرف على

$]-\infty,-2[\ \cup\ ]-2,-1[\ \cup\ ]-1,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to-2^+} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$$

---

⑤ $f(x)=(2x-3)(5-\sqrt{x})$

الحل:

التابع معرف على $[0,+\infty[$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-15 \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} -2x\sqrt{x}=-\infty$$

---

⑥ $f(x)=\cos x+\frac{1}{x}$

الحل:

التابع معرف على $\mathbb{R}^*$

$$\lim_{x\to\mp\infty} f(x)=\lim_{x\to\mp\infty}\cos x+\lim_{x\to\mp\infty}\frac{1}{x}$$

وبما أن $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \cos x$ غير معرف

لأن $-1 \leqslant \cos x \leqslant +1$

فإن $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ غير معرف

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$

---

7) $f(x) = 2x + \sin x$

الحل:

التابع معرف على IR

$-1 \leqslant \sin x \leqslant +1$

ولما كان $2x - 1 \leqslant 2x + \sin x \leqslant 1 + 2x$

$$\lim_{x\to\pm\infty} (2x+1) = \lim_{x\to\pm\infty} (2x-1) = -\infty$$

فحسب نظرية الإحاطة فإن

$$\lim_{x\to-\infty} (2x + \sin x) = -\infty$$

وبالمثل نجد أن :

$$\lim_{x\to+\infty} (2x + \sin x) = +\infty$$

---

8) $f(x) = x^2 + 2x - \frac{1}{x}$

الحل:

التابع معرف على

$]-\infty , 0[\cup]0 , +\infty[$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

---

9) $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 3$

الحل:

التابع معرف على $[0 , +\infty[$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 3$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x}\right) = +\infty$$

---

10) $f(x) = \sqrt{x^2+1} + x$

الحل:

التابع معرف على IR

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

في حالة $x \to -\infty$ فإن

$$f(x) = \infty - \infty$$

ولذلك نكتب $f(x)$ بالشكل

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$$f(x) = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = 0$$

2/67 أوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ عند 1 وعند $-\infty$ وعند $+\infty$ ثم أوجد معادلات المستقيمات المقاربة لخطه البياني وبين وضع الخط البياني بالنسبة إلى مقارباته .

الحل:

f معرف $]-\infty , 1[\cup]1 , +\infty[$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x}=2$$

المستقيم $y=2$ مقارب يوازي $x'x$

$$f(x)-y_{\Delta}=\frac{2x+1}{x-1}-2=\frac{3}{x-1}$$

عندما $x>1$ فالمنحني C_f يقع فوق المقارب .

وعندما $x<1$ فالمنحني C_f يقع تحت المقارب .

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$$

المستقيم $x=1$ مقارب والمنحني C_f يقع إلى يساره باتجاه $\overline{y}$ ويقع إلى يمينه باتجاه $\overset{+}{y}$.

3/67 أوجد نهاية التابع المعرف بالعلاقة $f(x)=\frac{-2x}{x+1}$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$ وعند -1 ثم أوجد معدلات المستقيمات المقاربة لخطه البياني وبين وضع الخط البياني بالنسبة إلى مقارباته . الأفقية .

الحل:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x}=-2$$

المستقيم $y=-2$ مقارب يوازي $x'x$ //

$$f(x)-y_{\Delta}=\frac{-2x}{x+1}+2=\frac{2}{x+1}$$

عندما $x>-1$ فالمنحني C_f يقع فوق المقارب Δ

وعندما $x<-1$ فالمنحني C_f يقع تحت المقارب Δ

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$$

المستقيم $x=-1$ مقارب // $y'y$ و C_f يقع إلى يساره باتجاه $\overline{y}$ ويقع إلى يمينه باتجاه $\overset{+}{y}$.

4/67 f هو التابع المعرف على المجال $]1 , +\infty[$ وفق $f(x)=\frac{2x+\sin x}{x-1}$

① أثبت أن

$\frac{2x-1}{x-1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{2x+1}{x-1}$ أياً كان $x>1$ واستنتج نهاية f عند $+\infty$

الحل:

$-1 \leqslant \sin x \leqslant +1$

ومنه $2x-1 \leqslant 2x+\sin x \leqslant 2x+1$

وبتقسيم جميع الأطراف على $x-1>0$ نجد

$$\frac{2x-1}{x-1} \leqslant \frac{2x+\sin x}{x-1} \leqslant \frac{2x+1}{x-1}$$

ومنه $\frac{2x-1}{x-1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{2x+1}{x-1}$

ولما كانت

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{x-1}=2$$

فحسب مبرهنة الإحاطة فإن

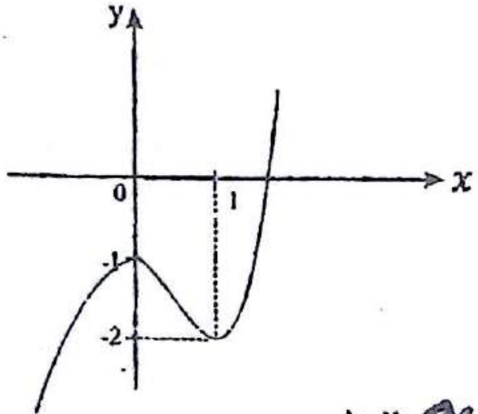
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$$

5/67 ليكن f التابع المعرف على IR وفق $f(x)=2x^3-3x^2-1$ وليكن C خطه البياني المبين في الشكل المرافق

① ادرس نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$

② احسب $f'(x)$ وادرس إشارته ثم نظم جدول بتغيرات f

③ أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل جذراً واحداً فقط ، وإذا رمزنا إلى هذا الجذر بالرمز α ، أثبت أن α ينتمي إلى المجال $[1.6 , 1.7]$



الحل:

①

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

②

$f'(x)=6x^2-6x \Longrightarrow f'(x)=0$

$6x(x-1)=0 \Longrightarrow x=0 \ , \ x=1$

$f(0)=-1 \quad , \quad f(1)=-2$

x	$-\infty$ 0 1 $+\infty$
$f'(x)$	+ 0 − 0 +
$f(x)$	$-\infty \nearrow -1 \searrow -2 \nearrow +\infty$

5 من الجدول نلاحظ أن f متزايد تماماً في المجال $[1,+\infty[$

ونجد أن $f(1.6) = -0.488$

$f(1.7) = 0.156$

وبما أن $f(1.7)\times f(1.6) < 0$

والتابع متزايد تماماً في المجال $[1.6 , 1.7]$ فللمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد $x=\alpha$ ينتمي إلى هذا المجال

$\frac{6}{68}$ نتأمل التابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ بالعلاقة $f(x)=\frac{\sin 3x}{x}$ ، ادرس نهاية f عند الصفر

الحل:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} 3\,\frac{\sin 3x}{3x} = 3\times 1 = 3$$

$\frac{7}{68}$ التابع $x \longrightarrow \sqrt{ax^2+bx+c}$

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}^*$ وفق $f(x)=\sqrt{2x^2+x+1}$ ، وليكن C خطه البياني ، المطلوب هو إثبات أن الخط C يقبل مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$ وكذلك الأمر في جوار $-\infty$.

الحل:

بما أن الحد المسيطر في f هو $\sqrt{2x^2}$ فيمكن أن نخمن أن f في جوار $+\infty$ من مرتبة $\sqrt{2}\,x$ لنبحث عن

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\sqrt{2}\,x)$$

$$f(x)-\sqrt{2}\,x=\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2}\,x$$

$$=\frac{2x^2+x+1-2x^2}{\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2}\,x}$$

$$=\frac{x+1}{x\left[\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2}\right]}$$

ونجد أن

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\sqrt{2}\,x)=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

وهذه المساواة تكافئ

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\sqrt{2}\,x-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=0$$

مما يدل على أن المستقيم Δ :

$$y=\sqrt{2}\,x+\frac{\sqrt{2}}{4}$$

مقارب للخط C_f في جوار $+\infty$

في جوار $-\infty$. نستطيع أن نكتب $f(x)$

$$f(x)=|x|\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

$$=-x\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

لنبحث عن نهاية $f(x)+\sqrt{2}\,x$

في جوار $-\infty$.

$$f(x)+\sqrt{2}\,x=\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2}\,x$$

$$=\frac{2x^2+x+1-2x^2}{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2}\,x}$$

$$=\frac{x+1}{-x\left[\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2}\right]}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-2x\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

أي:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)+\sqrt{2}\,x=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

والمساواة الأخيرة تكافئ

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+\sqrt{2}\,x+\frac{\sqrt{2}}{4}\right]=0$$

مما يدل على أن المستقيم

$$y=-\sqrt{2}\,x-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

مقارب للخط C_f .

$\frac{8}{69}$ من المعلوم أن كثير حدود P من الدرجة n يكتب بالصيغة :

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$$

نهدف إلى إثبات أنه إذا كان n عدداً فردياً ، قبل P جذراً حقيقياً على الأقل .

الحل:

إذا كانت n فردية و $a_n>0$

$$\lim_{x\to-\infty}P(x)=\lim_{x\to-\infty}a_n\cdot x^n=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}P(x)=\lim_{x\to+\infty}a_n\cdot x^n=+\infty$$

ونجد بالعكس عند $a_n<0$

$$\lim_{x\to-\infty}P(x)=\lim_{x\to-\infty}a_n\cdot x^n=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}P(x)=\lim_{x\to+\infty}a_n\cdot x^n=-\infty$$

وفي الحالتين نجد التابع $P(x)$ المستمر ينتقل من قيمة سالبة إلى موجبة أو بالعكس مما يدل أنه توجد قيمتان مثل α و β يكون من أجلهما $f(\alpha)\times f(\beta)<0$

وعندها يكون للمعادلة $P(x)=0$ حل على الأقل في المجال $[\alpha,\beta]$ فإذا كانت $P(x)$ متزايدة تماماً أو متناقصة تماماً فالحل وحيد .

$\frac{9}{69}$ ادرس في كل حالة نهاية التابع f عند a وادرس عند الضرورة النهاية من اليمين ومن اليسار

1 $f(x)=\frac{x-4}{x^2-6x+5}$

$a=-\infty, 1, 5, +\infty$

الحل:

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} = \frac{x}{x^2}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

المستقيم $y=0$ وهو المحور $x'x$ مقارب

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-4)}{(x-1)(x-5)}=-\infty$

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim\frac{(x-4)}{(x-1)(x-5)}=+\infty$

$\lim_{x\to 5^+} f(x)=\lim\frac{(x-4)}{(x-1)(x-5)}=+\infty$

$\lim f(x)=\lim\frac{(x-4)}{(x-1)(x-5)}=-\infty$
$x\to 5^-$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=0$

---

2 $f(x)=\frac{x^2-4x-12}{x^2-4}$

$a=-\infty, -2, +2, +\infty$

الحل:

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=(\frac{x^2}{x^2})=1$

المستقيم $y=1$ مقارب

$\lim_{x\to-2} f(x)=\lim_{x\to-2}\frac{(x-6)(x+2)}{(x-2)(x+2)}$

وبما أن التابع معرف على $R\setminus\{-2, +2\}$ فنجد :

$\lim_{x\to-2} f(x)=\lim_{x\to-2}\frac{x-6}{x-2}=2$

$\lim_{x\to+2} f(x)=\lim_{x\to+2}\frac{(x-6)}{(x-2)}=+\infty$

$\lim_{x\to 2^+} f(x)=-\infty$

---

3 $f(x)=\frac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2}$

$a=-\infty, -2, 1, +\infty$

الحل:

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x^2}=\lim 2x=-\infty$

$\lim_{x\to-2^-} f(x)=\lim_{x\to-2^-}\frac{2x^3-x^2-1}{(x+2)(x-1)}$

$=\lim_{x\to-2^-}\frac{-21}{-0\times-3}=-\infty$

$\lim_{x\to-2^+} f(x)=\lim_{x\to-2^+}\frac{-21}{+0\times-3}=+\infty$

$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{0}{0}$

عدم تعيين لنعين:

$$f(x)=\frac{(x-1)(2x^2+x+1)}{(x+2)(x-1)}$$

وبما أن f معرف على $IR / \{-2 , 1\}$

فإن $$f(x)=\frac{2x^2+x+1}{x+2}$$

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} f(x)=\frac{4}{3}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty} 2x=+\infty$$

---

4) $$f(x)=\frac{1}{x-3}-\frac{2}{x^2-9}$$

$a=-\infty \ , \ -3 \ , \ +3 \ , \ +\infty$

الحل:

• التابع معرف على $IR / \{-3 , +3\}$

$$\lim_{x\to \mp\infty} f(x)=\lim_{x\to \mp\infty}\frac{1}{x-3}-\lim_{x\to \mp\infty}\frac{2}{x^2-9}=0$$

• $$\lim_{x\to -3^-} f(x)=\lim_{x\to -3^-}\frac{1}{x-3}-\lim_{x\to -3^-}\frac{2}{(x-3)(x+3)}$$

$$=-\frac{1}{6}-\infty=-\infty$$

$$\lim_{x\to -3^+} f(x)=-\frac{1}{6}+\infty=+\infty$$

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\infty-\infty$$

نكتب $f(x)$ على الشكل :

$$f(x)=\frac{x+3-2}{x^2-9}=\frac{x+1}{x^2-9}$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$$

---

5) $$f(x)=\frac{x^4-1}{x^3-1}$$

$a=-\infty \ , \ 1 \ , \ +\infty$

الحل:

• التابع معرف على $IR / \{1\}$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^4}{x^3}=\lim_{x\to -\infty} x=-\infty$$

• $$f(x)=\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+x+1}=\frac{4}{3}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty} x=+\infty$$

---

6) $$f(x)=2x+\sin^2 x$$

$a=-\infty \ , \ +\infty$

الحل:

التابع f معرف على IR

$$0\leqslant \sin^2 x\leqslant 1$$

نضيف $2x$ إلى جميع الأطراف فنجد

$$2x\leqslant 2x+\sin^2 x\leqslant 2x+1$$

ولما كان $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x = \lim\limits_{x\to-\infty} (2x+1) = -\infty$

فحسب نظرية الإحاطة فإن

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

وبالمثل نجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

---

7 $f(x) = x^3(2+\cos x)$

$a = -\infty \quad , \quad +\infty$

الحل:

f التابع معرف على IR

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant +1$$

$$1 \leqslant 2+\cos x \leqslant +3 \qquad (1)$$

وبجوار $+\infty$ فإن $x^3 > 0$

نضرب جميع أطراف العلاقة(1) بـx^3

نجد : $x^3 \leqslant x^3(2+\cos x) \leqslant 3x^3$

ولما كان $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^3 = +\infty$

فإن

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

وبجوار $-\infty$ فإن $x^3 < 0$

نضرب جميع أطراف العلاقة(1) بـx^3

نجد : $x^3 \geqslant x^3(2+\cos x) \geqslant 3x^3$

ولما كان $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = \lim\limits_{x\to-\infty} 3x^3 = -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

8 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$

$a = 1 \quad , \quad +\infty$

الحل:

f التابع معرف على $x > 1$

أي على المجال $]1, +\infty[$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$\frac{10}{70}$ ليكن g التابع المعرف على IR

وفق $g(x) = \dfrac{1}{3+2\sin x}$

1 أثبت أن g محدود .

2 استنتج كلاً من النهايتين :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3+2\sin x} \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{3+2\sin x}$$

الحل:

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \quad \Longrightarrow$$

$$-2 \leqslant 2\sin x \leqslant +2 \quad \Longrightarrow$$

$$1 \leqslant 3+2\sin x \leqslant 5 \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{5} \leqslant \frac{1}{3+2\sin x} \leqslant 1$$

وذلك لأن $3 + 2\sin x > 0$ ومنه فإن

$g(x) \in [\frac{1}{5} , 1]$

فالتابع g محدود .

(2) $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

نجمع x إلى جميع الأطراف

$x - 1 \leqslant x + \sin x \leqslant x + 1$

نضرب جميع الأطراف بـ $g(x)$

$$\frac{x-1}{3+2\sin x} \leqslant \frac{x+\sin x}{3+2\sin x} \leqslant \frac{x+1}{3+2\sin x}$$

وبما أن

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{3+2\sin x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{3+2\sin x} = +\infty$$

وذلك لأن $g(x)$ محدود بالمجال $[\frac{1}{5} , 1]$ فحسب مبرهنة الإحاطة

نجد : $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{3+2\sin x} = +\infty$

رأينا أن $g(x) \in [\frac{1}{5} , 1]$

أي $\frac{1}{5} \leqslant \frac{1}{3+2\sin x} \leqslant 1$

وبضرب جميع الأطراف بـx^2 نجد :

$$\frac{x^2}{5} \leqslant \frac{x^2}{3+2\sin x} \leqslant x^2$$

وبما أن $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{5} = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

فحسب مبرهنة الإحاطة نجد :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{3+2\sin x} = +\infty$$

11/70 ليكن f التابع المعين بالعلاقة :

$$f(x) = \frac{3x^2+6x}{x^2-x-2}$$

(1) عين D_f مجموعة تعريف f

(2) أوجد الأعداد a ، b ، c التي تحقق $f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}$ أياً يكن x من D_f

(3) ادرس نهاية f عند حدود المجالات الثلاثة التي تؤلف D_f

الحل :

(1) التابع f يكتب $f(x) = \frac{3x(x+2)}{(x+1)(x-2)}$

فالتابع معرف على $\mathbb{R} \setminus \{-1 , 2\}$

(2) $\frac{3x(x+2)}{(x+1)(x-2)} = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}$

نجعل $x \to +\infty$ في الطرفين فنجد $a = 3$

نضرب الطرفين بـ $x + 1$ ونجعل $x = -1$ فنجد $b = 1$

نضرب الطرفين بـ $x - 2$ ونجعل $x = 2$ فنجد $c = 8$ ومنه

$$f(x) = 3 + \frac{1}{x+1} + \frac{8}{x-2}$$

(3) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

$\frac{12}{70}$ ليكن f التابع المعين بالعلاقة

$$f(x)=\frac{x}{(x-1)^2}$$

① ادرس نهاية f في جوار العدد 1

② أوجد مجالاً I مركزه 1 يحقق

$f(x)>10^6$ أياً يكن x من $I\setminus\{1\}$

الحل:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x}{(x-1)^2}=+\infty$$

إذا كان $f(x)>10^6$

فإن $\frac{x}{(x-1)^2}>10^6$

ومنه بفرض $x\neq 1$ نجد

$$x>10^6(x-1)^2 \implies$$

$$10^6(x-1)^2-x+1-1<0$$

$$10^6(x-1)^2-(x-1)-1<0$$

نفرض $z=x-1$ وندرس إشارة المتراجحة

$$10^6 z^2-z-1<0$$

$$\Delta=1+4\times 10^6\approx 4\times 10^6 \implies$$

$$\sqrt{\Delta}=2\times 10^3$$

$$z_1=\frac{+1+2\times 10^3}{2\times 10^6}\approx 0{,}001$$

$$z_2=\frac{-1-2\times 10^3}{2\times 10^6}\approx -0{,}001$$

والمتراجحة تكون محققة إذا كان

$$-0{,}001<(x-1)<0{,}001$$

أي $0{,}999<x<1{,}001$ ..

إذاً x تقع في المجال

$$I=]0{,}999\ ,\ 1{,}001[$$

$\frac{13}{70}$ ادرس في كل حالة نهاية التابع f عند a

① $f(x)=\sqrt{x^2+2x}-x\ :\ a=+\infty$

الحل:

التابع f عند $+\infty$ يكون من الشكل $+\infty-\infty$ لذلك نكتبه على الشكل

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

$$f(x)=\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

$$=\frac{2x}{|x|\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right]}$$

وبجوار $+\infty$ فإن $|x|=x$ ونجد

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}\times\frac{1}{2}=1$$

---

② $f(x)=\sqrt{4x^2+x}+2x\ :\ a=-\infty$

الحل:

f عند $-\infty$ يكون بالشكل $\infty-\infty$ لذلك نضرب البسط والمقام بمرافق f

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{4x^2+x}-2x}$$

$$=\frac{x}{|x|\left[\sqrt{4+\frac{2}{x}}\right]-2x}$$

وبجوار $-\infty$ فإن $|x| = -x$ ونجد

$$f(x) = \frac{x}{-x\left[\sqrt{4+\frac{2}{x}}+2\right]}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{4+\frac{2}{x}}+2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{-1}{2+2} = -\frac{1}{4}$$

---

③ $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ $\quad a = 3$

الحل:

عند $x = 3$ نجد أن $f(x) = \frac{0}{0}$

لإزالة عدم التعيين نضرب البسط والمقام بمرافق

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$f(x) = \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$

وبما أن f معرف على $[-1, +\infty[\setminus \{3\}$

فإن: $\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{4}$

---

④ $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}-1}$ $\quad a = 0$

الحل:

عند $x = 0$ نجد أن $f(x) = \frac{0}{0}$

نضرب البسط والمقام بمرافق المقام فنجد

$$f(x) = \frac{2x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$f(x) = \frac{2x(\sqrt{x+1}+1)}{x}$$

وبما أن f معرف على $[-1, +\infty[\setminus \{0\}$

فإن $f(x) = 2(\sqrt{x+1}+1)$

وعندما $x \to 0$ نجد

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 4$$

---

⑤ $f(x) = \frac{-x+\sqrt{x}}{x-1}$ $\quad a = 1, +\infty$

الحل:

f معرف على $[0, 1[\cup]1, +\infty[$

عندما $x \to 1$ نجد أن

$$f(x) \to \frac{-1+1}{1-1}$$

نكتب $f(x)$ على الشكل:

$$f(x) = \frac{(-x+\sqrt{x})(\sqrt{x}+x)}{(x-1)(\sqrt{x}+x)}$$

$$f(x) = \frac{x-x^2}{(x-1)(\sqrt{x}+x)}$$

$$= \frac{-x(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+x)} = \frac{-x}{\sqrt{x}+x}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = -\frac{1}{2} \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -1$$

---

(6) $a=-1\ ,\ +\infty$ $\quad f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$

الحل:

f معرف على $]-\infty\ ,-1[\cup]+1\ ,+\infty[$

نهاية التابع عند -1 من الشكل $\frac{0}{0}$

$f(x)=\frac{0}{0}$

لذلك نكتب $f(x)$ على الشكل :

$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x+1}\times\sqrt{x-1}}$$

$$=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\frac{0}{-2}=0$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x+1}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=1$$

ونضيف

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{x+1}{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=-1$$

$\frac{14}{70}$ ادرس في كل حالة نهاية التابع f

(1) $a=0\ ,+\infty$ $\quad : f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$

الحل:

f معرف على $]0,+\infty[$

وعندما $x\to \overset{+}{0}$ فإن $f(x)=\frac{0}{0}$

لذلك نكتب f على الشكل

$$f(x)=\sqrt{x}\ \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\times\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0\times 1=0$$

$$-1\leqslant \sin x\leqslant +1$$

نقسم جميع الأطراف على $\sqrt{x}>0$

فنجد : $\dfrac{-1}{\sqrt{x}}<\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

أي $\dfrac{-1}{\sqrt{x}}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

وعندما $x\to +\infty$ نجد

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{-1}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$$

وحسب مبرهنة الإحاطة فإن

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=0$$

---

(2) $: a=0$ $\quad f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

الحل:

التابع معرف على $\mathbb{R}\setminus\{\pi k\}$

حيث $k\in Z$

ونجد من أجل $x = 0$ أن

$$f(x) = \frac{0}{0}$$

لذلك نكتب $f(x)$:

$$f(x) = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \tan\frac{x}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \tan\frac{x}{2} = 0$$

---

③ $f(x) = \frac{x\sin x}{1-\cos x}$: $a = 0$

الحل:

حسب التمرين السابق نكتب $f(x)$

بالشكل :

$$f(x) = x \times \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$f(x) = 2 \times \frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \times \cos\frac{x}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2 \times 1 \times 1 = 2$$

---

④ $f(x) = \frac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3}$ $a = 2$

الحل:

التابع عند $x = 2$ يكون من الشكل

$$f(x) = \frac{0}{0}$$

لذلك نكتبه على الشكل

$$f(x) = \frac{(2-\sqrt{3x-2})(2+\sqrt{3x-2})(\sqrt{2x+5}+3)}{(2+\sqrt{3x-2})(\sqrt{2x+5}-3)(\sqrt{2x+5}+3)}$$

$$= \frac{(6-3x)(\sqrt{2x+5}+3)}{(2+\sqrt{3x-2})(2x+5-9)}$$

$$= \frac{3(2-x)(\sqrt{2x+5}+3)}{2(x-2)(2+\sqrt{3x-2})}$$

$$= -\frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{2x+5}+3}{2+\sqrt{3x-2}}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = -\frac{3}{2} \times \frac{3+3}{2+2} = -\frac{9}{4}$$

$\frac{15}{70}$ ليكن g التابع المعرف على المجال $]3, +\infty[$ وفق $g(x) = \frac{3x-1}{x-3}$

① احسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

واستنتج $\lim_{x\to+\infty} g(g(x))$

② أعد حساب $\lim_{x\to+\infty} g(g(x))$ بعد كتابة $g(g(x))$ بدلالة x .

الحل:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(g(x)) = \lim_{x\to 3} g(x)$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(g(x)) = \lim_{x\to 3^+} g(x) = +\infty$$

$$g(g(x)) = g\left(\frac{3x-1}{x-3}\right)$$

$$= \frac{3\,\frac{3x-1}{x-3} - 1}{\frac{3x-1}{x-3} - 3} = \frac{8x}{+8} = x$$

$$g(g(x)) = x$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(g(x)) = +\infty$$

16/71 ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-d}$$

جد الأعداد الحقيقية a و b و c و d علماً أن الخواص الآتية محققة

- المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x = 3$ مقارب لـ C_f
- المستقيم المائل الذي معادلته $y = 2x - 5$ مقارب للخط C_f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.
- تنتمي النقطة $A(1, 2)$ إلى الخط C_f

الحل:

نلاحظ أن $\lim_{x \to d} f(x) = +\infty$ أو $-\infty$

وهذا يعني أن المستقيم $x = d$ مقارب

وحسب الفرض نجد أن $d = 3$

نلاحظ أيضاً أن

$$f(x) - (ax + b) = \frac{c}{x-3}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{c}{x-3} = 0$$

فنستنتج أن $y = ax + b$ مقارب

وبمقارنته بالفرض $y = 2x - 5$

نجد أن $a = 2$ و $b = -5$

وبما أن النقطة $A(1, 2)$ من C_f فهي تحقق معادلته

$$f(x) = 2x - 5 + \frac{c}{x-3}$$

$$f(1) = 2 - 5 + \frac{c}{-2} = 2 \implies c = -10$$

ويأخذ التابع الصيغة

$$f(x) = 2x - 5 - \frac{10}{x-3}$$

17/71 فيما يأتي C هو الخط البياني للتابع f الذي ندرسه على مجموعة تعريفه D_f بين في كل حالة ، إن كان ثمة مستقيمات مقاربة (أفقية أو شاقولية أو مائلة) للخط C

1 $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$

الحل :

f معرف على $]-\infty , 3[\cup]3 , +\infty[$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$

المستقيم $y = 1$ مقارب $x'x \,//$

$f(x) - 1 = \frac{x+1}{x-3} - 1 = \frac{4}{x-3}$

إذا كانت $x > 3$ فالخط C_f فوق المقارب .

إذا كانت $x < 3$ فالخط C_f تحت المقارب .

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$

المستقيم $x = 3$ مقارب $// \, y'y$ والخط C_f يقع الى يساره باتجاه $\bar{y}$ والى يمينه باتجاه $\vec{y}$

---

② $f(x) = -x + 3 + \frac{2}{x^2+1}$

الحل :

f معرف على IR

$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (-x+3)] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x^2-3} = 0$

فالمستقيم $\Delta : y_\Delta = -x + 3$ مقارب مائل

③ $f(x) = 1 - \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$

الحل :

التابع معرف على

$]-\infty , 0[\cup]0 , +\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (\frac{x}{2} + 1)] = \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{2}{x} = 0$

فالمستقيم $y = \frac{x}{2} + 1$ مقارب مائل

وبما أن $-\frac{2}{x} > 0$ في حالة $x < 0$

فالخط C_f يقع فوق المقارب وبالعكس يقع تحت المقارب إذا كانت $x > 0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

المستقيم $x = 0$ مقارب وهو $y'y$

ويقع C_f الى يساره باتجاه $\vec{y}$ والى يمينه باتجاه $\bar{y}$.

---

④ $f(x) = 1 - x + \frac{3x}{x^2+2}$

الحل :

f معرف على IR

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (1-x)] = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{3x}{x^2+2} = 0$$

فالمستقيم : $y = 1 - x$ مقارب مائل

5 $f(x) = \frac{2x^2+5x-4}{x}$

الحل:

f معرف على $\mathbb{R}^*$

$$f(x) = 2x + 5 - \frac{4}{x}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (2x+5)] = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{-4}{x} = 0$$

$y = 2x + 5$ مقارب مائل .

والخط C_f يقع تحت المقارب إذاكانت $x > 0$ وفوقه إذا كانت $x < 0$

$$\lim_{x \to \bar{0}} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to \overset{+}{0}} f(x) = -\infty$$

المستقيم $x = 0$ وهو $y'y$ مقارب .

6 $f(x) = \frac{x^2+2+\sin x}{x}$

الحل:

f معرف على $\mathbb{R}^*$

$$f(x) = x + \frac{2+\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2+\sin x}{x} = 0$$

وذلك لأن $1 \leqslant 2 + \sin x \leqslant 3$

في حالة $x > 0$ نجد

$$\frac{1}{x} \leqslant \frac{2+\sin x}{x} \leqslant \frac{3}{x}$$

وفي حالة $x < 0$ نجد

$$\frac{1}{x} \geqslant \frac{2+\sin x}{x} \geqslant \frac{3}{x}$$

وفي كلا الحالتين وحسب مبرهنة الإحاطة نستنتج $\lim_{x \to \mp\infty} \frac{2+\sin x}{x} = 0$

المستقيم $y = x$ مقارب مائل .

$$\lim_{x \to \bar{0}} f(x) = +0 + \frac{2}{-0} + \lim_{x \to \overset{+}{0}} \frac{\sin x}{x}$$
$$= -\infty + 1 = -\infty$$

$$\lim_{x \to \overset{+}{0}} f(x) = 0 + \infty + 1 = +\infty$$

7 $f(x) = \frac{x^2+6x+1}{x^2-1}$

الحل:

f معرف على

$]-\infty , -1 [\cup] -1 , 1 [\cup] 1 , +\infty [$

$$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

المستقيم $y = 1$ يوازي $x'x$ مقارب

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

المستقيمان $x = -1$ ، $x = 1$ مقاربان شاقوليان .

---

8 $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 1}$

الحل:

f معرف على $]-\infty , 1[\cup]1 , +\infty[$

وهو يكتب بعد تقسيم البسط على المقام :

$f(x) = x - 2 - \dfrac{1}{x - 1}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{-1}{x - 1} = 0$

فالمستقيم $y = x - 2$ مقارب مائل .

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

المستقيم $x = 1 \,//\, y'y$ مقارب .

---

9 $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 2}$

الحل:

f معرف على $\mathbb{R}$ وهو يكتب

$f(x) = x - \dfrac{2x - 1}{x^2 + 2}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} -\dfrac{2x - 1}{x^2 + 2} = 0$

فالمستقيم $y = x$ مقارب مائل .

---

10 $f(x) = \dfrac{3x^3 + 2x - 1}{x^2 + 1}$

الحل:

f معرف على $\mathbb{R}$ وهو يكتب

$f(x) = 3x - \dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - 3x] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} -\dfrac{x + 1}{x^2 + 1} = 0$

فالمستقيم $y = 3x$ مقارب مائل .

18/71 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$

1 **a** احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ثم $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x + 1)]$

b استنتج وجود مقارب مائل Δ للخط البياني C_f في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C_f

2 **a** احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

ⓑ أثبت وجود عدد حقيقي a يحقق $\lim \frac{f(x)}{x} = a$ وأن نهاية $f(x) - ax$ عند $-\infty$ عدد حقيقي b .

ⓒ استنتج وجود مقارب مائل Δ للخط C_f في جوار $-\infty$.

الحل:

ⓐ1 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$f(x) - (x+1) = \sqrt{x^2+2x+4} - (x+1)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+1)] = \infty - \infty$

عدم تعيين وعلينا تعيينه

$f(x) - (x+1) =$

$$\frac{[\sqrt{x^2+2x+4} - (x+1)][\sqrt{x^2+2x+4} + (x+1)]}{\sqrt{x^2+2x+4} + (x+1)}$$

$$= \frac{x^2+2x+4 - (x^2+2x+1)}{\sqrt{x^2+2x+4} + (x+1)}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{x^2+2x+4} + (x+1)}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+1)] =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2+2x+4} + x + 1} = 0$

فالمستقيم $y = x + 1$ مقارب مائل

$\sqrt{x^2+2x+4} - (x+1) =$

$\sqrt{(x+1)^2+3} - (x+1) > 0$

و C_f فوق المقارب

ⓑ2 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{x}$$

$$= \frac{|x|}{x}\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}}$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-x}{x}\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 = a$

$f(x) - (-x) = \sqrt{x^2+2x+4} + x$

$$f(x) + x = \frac{(\sqrt{x^2+2x+4} + x)(\sqrt{x^2+2x+4} - x)}{\sqrt{x^2+2x+4} - x}$$

$$= \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+2x+4} - x}$$

$$= \frac{2x}{|x|} \times \frac{(1 + \frac{2}{x})}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} - x}$$

وفي جوار $-\infty$ نجد

$$= \frac{2x}{-x} \times \frac{(1 + \frac{2}{x})}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} + 1}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) + x) =$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(-2x \times \frac{(1+\frac{2}{x})}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+1}\right) = -1$$

ومنه $b = -1$

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) + x + 1) = 0$$

أي أن المستقيم $y = -x - 1$ مقارب مائل في جوار $-\infty$.

ولدراسة الوضع النسبي نبحث عن إشارة $f(x) - y_\Delta$

$$f(x) - y_\Delta = \sqrt{x^2+2x+4} + x + 1$$

$$= \frac{(x^2+2x+4) - (x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x+4} - (x+1)}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{(x+1)^2+3} - (x+1)} > 0$$

وذلك لأن $\sqrt{(x+1)^2+3} > (x+1)$

فالخط البياني C_f يقع أيضاً فوق المقارب المائل Δ : $y = -x - 1$

$\frac{19}{72}$ ليكن C الخط البياني للتابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق :

$$f(x) = \sqrt{x^2+4x+5}$$

① احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

② اكتب ثلاثي الحدود x^2+4x+5 بالصيغة القانونية ، استنتج وجود مقارب مائل للخط البياني C_f للتابع f في جوار $+\infty$ واكتب معادلته .

الحل:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$x^2+4x+5 = (x+2)^2+1$$

$$f(x) = \sqrt{(x+2)^2+1}$$

$$= |x+2| \sqrt{1+\frac{1}{(x+2)^2}}$$

$$\frac{f(x)}{|x+2|} = \sqrt{1+\frac{1}{(x+2)^2}}$$

وفي جوار $+\infty$ نجد

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x+2} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{(x+2)^2}}$$

$$= \sqrt{\lim_{x \to +\infty} 1 + \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(x+2)^2}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x+2} = 1 \quad \Longrightarrow$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x+2)$$

أي $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+2)] = 0$

فالمستقيم $y = x + 2$ مقارب مائل .

$f(x) - (x+2) =$

$\sqrt{(x+2)^2 + 1} - (x+2) > 0$

والمقارب Δ يقع تحت C_f أيا كانت x

20/72 ليكن C الخط البياني للتابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق :

$$f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$$

1. ادرس نهاية f عند $-\infty$ واشرح التأويل الهندسي لهذه النتيجة .
2. أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$
3. ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C

الحل:

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty - \infty$

عدم تعيين ولنعينه نضرب البسط والمقام بمرافق البسط

$$f(x) = \frac{x^2 - (x^2+1)}{x - \sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{x - \sqrt{x^2+1}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{+1}{\sqrt{x^2+1} - x} = 0$$

فالمستقيم $y = 0$ وهو $x'x$ مقارب بجوار $-\infty$. وبما أن $\frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} > 0$ أيا كانت x فإن C_f يقع فوق محور الفواصل .

2. $f(x) - 2x = x + \sqrt{x^2+1} - 2x$

$= \sqrt{x^2+1} - x$

$f(x) - 2x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0$$

وبما أن $f(x) - 2x = \sqrt{x^2+1} - x > 0$ أياً كانت $x \in \mathbb{R}$ فالخط C_f يقع فوق المقارب .

21/72 ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق :

$$f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$$

1. ادرس نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$
2. (a) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 3x)$

   (b) احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) + x)$
3. (a) استنتج أن الخط البياني C يقبل مستقيمين مقاربين Δ_1 و Δ_2

يطلب إيجاد معادلتيهما .

4) ادرس الوضع النسبي للخط C وكل من المقاربين Δ_1 و Δ_2

الحل:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+|x|\sqrt{|4-\frac{1}{x^2}|})$

$=\lim\limits_{x\to-\infty} x[1-\sqrt{|4-\frac{1}{x^2}|}]=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2) 3) $f(x)-3x=\sqrt{|4x^2-1|}-2x$

$=\dfrac{|4x^2-1|-4x^2}{\sqrt{|4x^2-1|}+2x}$

وفي جوار $+\infty$ فإن $|4x^2-1|=4x^2-1$

$f(x)-3x=\dfrac{-1}{\sqrt{|4x^2-1|}+2x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)=0$

المستقيم Δ_1 : $y=3x$ مقارب مائل

b) $f(x)+x=2x+\sqrt{|4x^2-1|}$

$f(x)+x=\dfrac{4x^2-|4x^2-1|}{2x-\sqrt{|4x^2-1|}}$

وفي جوار $-\infty$ فإن $|4x^2-1|=4x^2-1$

$f(x)+x=\dfrac{+1}{2x-\sqrt{4x^2-1}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2x-\sqrt{4x^2-1}}=0$

المستقيم Δ_2 : $y=-x$ مقارب مائل

4) دراسة الوضع النسبي مع المقارب

$\Delta_1: y=3x$

لندرس إشارة الفرق $f(x)-3x$

$f(x)-3x=\sqrt{|4x^2-1|}-2x=0$

إشارة $4x^2-1$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4x^2-1$		+	0	-	0	+	

في المجالين $]-\infty,-\frac{1}{2}]$ و $[\frac{1}{2},+\infty[$

فإن $|4x^2-1|=4x^2-1$

ونجد في المجال $]-\infty,-\frac{1}{2}]$

$f(x)-3x=\sqrt{4x^2-1}-2x>0$

و C_f فوق المقارب

في المجال $[\frac{1}{2},+\infty[$ فإن

$f(x)-3x=\sqrt{4x^2-1}-2x$

$=\sqrt{4x^2-1}-\sqrt{4x^2}<0$

والخط C_f تحت المقارب

في المجال $\left]-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right[$

فإن $|4x^2-1| = 1-4x^2$ ونجد أن

$f(x)-3x=\sqrt{1-4x^2}-2x$

لدراسة الإشارة نبحث عن جذري

المعادلة : $\sqrt{1-4x^2}-2x=0$

$\sqrt{1-4x^2}=2x \quad : \quad x>0$

$1-4x^2=4x^2 \Rightarrow x^2=\frac{1}{8} \quad \Rightarrow$

$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$

والمقبول $x=\frac{\sqrt{2}}{4}$

ونجد في المجال $0<x<\frac{\sqrt{2}}{4}$ أن

نجرب $x=\frac{1}{4}$ فنجد :

$\sqrt{1-4x^2}>2x \Rightarrow f(x)-3x>0$

و C_f فوق المقارب وإذا كانت

$\frac{\sqrt{2}}{4}<x<\frac{1}{2}$ فإن

نجرب $x=\frac{\sqrt{3}}{4}$ فنجد :

$\sqrt{1-4x^2}<2x \Rightarrow f(x)-3x<0$

و C_f تحت المقارب

في المجال $-\frac{1}{2}<x<0$ نجد أن

$f(x)-3x=\sqrt{1-4x^2}+\sqrt{4x^2}>0$

و C_f فوق المقارب

x	$-\infty \quad -\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)-x$	+ C_f فوق المقارب	+ C_f فوق Δ_1	+ C_f فوق Δ_1	− C_f تحت Δ_1	− C_f تحت Δ_1

الخلاصة أن C_f يقع فوق المقارب

عندما $x<\frac{\sqrt{2}}{4}$ وتحت المقارب

عندما $x>\frac{\sqrt{2}}{4}$

ويقطع C_f المقارب عندما $x=\frac{\sqrt{2}}{4}$

ونجد $y=\frac{3\sqrt{2}}{4}$ أي في النقطة

$\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$

دراسة وضع المقارب $y=-x$ مع C_f

$f(x)+x=\sqrt{|4x^2-1|}+2x$

عندما $x\in\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ من الواضح أن

$f(x)+x=\sqrt{4x^2-1}+2x>0$

و C_f فوق المقارب

عندما $x\in\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[$ فإن

$f(x)+x=\sqrt{4x^2-1}+2x=0$

$\sqrt{4x^2-1}=-2x \quad : x\leqslant-\frac{1}{2}$

ومنه $4x^2-1=4x^2 \Rightarrow -1=0$

والمعادلة مستحيلة وتكون

$f(x)+x=\sqrt{4x^2-1}+2x$

من إشارة واحدة ونجد أن

$f(x)+x<0$

و C_f تحت المقارب Δ_2 : $y=-x$

عندما $x\in]-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}[$ فإن

$f(x)+x=\sqrt{1-4x^2}+2x$

لدراسة الإشارة نبحث عن جذور المعادلة :

$\sqrt{1-4x^2}=-2x \quad : \quad -\frac{1}{2}<x<0$

$1-4x^2=4x^2 \Longrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$

والجواب المقبول $x=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

ففي المجال $]-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{4}[$ نجد أن

$f(x)+x<0$

و C_f يقع تحت المقارب في هذا المجال

وفي المجال $]-\frac{\sqrt{2}}{4},+\frac{1}{2}[$ نجد

$f(x)+x>0$

و C_f فوق المقارب

x	$-\infty$ $-\frac{1}{2}$ $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ $\frac{1}{2}$ $+\infty$			
$f(x)+x$	−	−	+	+ +
C_f	C_f تحت Δ_2	C_f تحت Δ_2	C_f فوق Δ_2	C_f فوق Δ_2

و C_f يقطع المقارب $y=-x$ في النقطة $(-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4})$

22/72 ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على IR وفق

$f(x)=\sqrt{4x^2-4x+3}$

1 ادرس نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

2 a اكتب $4x^2-4x+3$ بالشكل القانوني

b ادرس نهاية التابع h المعرف وفق $h(x)=f(x)-\sqrt{(2x-1)^2}$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

c استنتج أن الخط C يقبل مستقيمين مقاربين مائلين يطلب إيجاد معادلتيهما .

3 أثبت أن الخط C يقع فوق كل من هذين المقاربين

الحل:

1 $f(x)=\sqrt{4x^2-4x+3}$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$

② ⓐ $f(x)=\sqrt{4x^2-4x+1+2}$

$f(x)=\sqrt{(2x-1)^2+2}$

ⓑ $h(x)=f(x)-\sqrt{(2x-1)^2}$

$h(x)=\sqrt{(2x-1)^2+2}-\sqrt{(2x-1)^2}$

$$=\frac{(2x-1)^2+2-(2x-1)^2}{\sqrt{(2x-1)^2+2}+\sqrt{(2x-1)^2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{(2x-1)^2+2}+\sqrt{(2x-1)^2}}$$

$\lim_{x\to\pm\infty} h(x)=0$

$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-\sqrt{(2x-1)^2}]=0$

$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-|2x-1|]=0$

فإذا كانت $x>\frac{1}{2}$ فإن

$|2x-1|=2x-1$

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(2x-1)]=0$

والمستقيم $y=2x-1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$ وفي حالة $x<\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to-\infty}[f(x)+(2x-1)]=0$

والمستقيم $y=-2x+1$ مقارب مائل في جوار $-\infty$.

ⓒ $f(x)-|2x-1|=$

$\sqrt{(2x-1)^2+2}-\sqrt{(2x-1)^2}>0$

وذلك لأن $(2x-1)^2+2>(2x-1)^2$

فالخط البياني C_f يقع فوق مقاربيه

$\boxed{\frac{23}{72}}$ ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$$

① ⓐ أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للخط في جوار $+\infty$

ⓑ ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C.

② أصحيح أن المستقيم Δ' الذي معادلته $y=x-1$ مقارب للخط في جوار $-\infty$.

الحل:

$$f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$f(x)-(x+1)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-1$$

$$f(x)-(x+1)=\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}-1$$

وفي جوار $+\infty$ نجد

$$f(x)-(x+1)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=1-1=0$$

فالمستقيم $y=x+1$ مقارب للخط C

$$f(x)-(x+1)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-1<0$$

وذلك لأن $1>\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ ومنه فإن الخط البياني C_f يقع تحت المقارب أياً كانت $x\in IR$

② $$f(x)-y_\Delta=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-(x-1)$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}+1$$

$$=\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}+1$$

وفي جوار $-\infty$ نجد

$$f(x)-y_\Delta=\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}+1$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y_\Delta]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}+1$$

$$=-1+1=0$$

وهذا يعني أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x-1$ مقارب للخط C

وفي جوار $-\infty$ نجد أن الكسر

$$-1<\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}<0$$

مما يدل على أن

$$f(x)-y_\Delta=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}+1>0$$

والخط C_f يقع فوق المقارب .

$\frac{24}{72}$ ليكن f التابع المعرف على IR وفق

$$f(x)=x^3+x+1$$

احسب $f(-1)$ و $f(0)$

ثم أثبت وجود عدد حقيقي وحيد C من المجال $]-1,0[$ يحقق: $f(x)=0$

الحل:

التابع f متزايد تماماً لأن

$$f'(x)=3x^2+1>0$$

$$f(-1)=-1 \quad \text{و} \quad f(0)=1$$

ونجد أن $f(0)\times f(-1)<0$

وعليه فللمعادلة $f(x)=0$ جذر وحيد في المجال $]-1,0[$ لأن f متزايد تماماً ومستمر في هذا المجال

$\frac{25}{72}$ ليكن f التابع المعرف على $IR\setminus\{-1\}$ وفق $f(x)=\frac{x^3}{x+1}$

① أثبت أن f متزايد تماماً على المجال $]-\frac{3}{2},-1[$

② نظم جدولاً بتغيرات f على المجال $]-\frac{3}{2},-1[$

③ أوجد $f(]-\frac{3}{2},-1[)$ وأثبت أن للمعادلة $f(x)=10$ حلاً وحيداً في المجال $]-\frac{3}{2},-1[$

الحل:

$f(x)=\frac{x^3}{x+1}$

$f'(x)=\frac{3x^2(x+1)-x^3}{(x+1)^2}$

$=\frac{2x^3+3x^2}{(x+1)^2}$

$f'(x)=0 \qquad x^2(2x+3)=0$

$x=0\ ,\ f(0)=0\ ,\ x=-\frac{3}{2}\ ,$

$f(-\frac{3}{2})=\frac{27}{4}$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{27}{4}$	↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗	0	↗	$+\infty$

ومن الجدول يتبين أن f متزايد تماماً في المجال $]-\frac{3}{2},-1[$

ونجد أن $f(]-\frac{3}{2},-1[)=]\frac{27}{4},+\infty[$

وبما أن $f(x)=10$ تنتمي إلى صورة المجال $]-\frac{3}{2},-1[$ و f مستمر ومتزايد تماماً في هذا المجال فللمعادلة $f(x)=10$ حل وحيد ينتمي إلى $]-\frac{3}{2},-1[$

$\frac{26}{73}$ ليكن f التابع المعرف على $I=[0,3]$ وفق $f(x)=x^2-2x-3$

① ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

② استنتج قيم x التي تحقق $f(x)=0$

③ عين $f([0,3])$

الحل:

① $f(0)=-3\quad,\quad f(3)=0$

f مستمر واشتقاقي $f'(x)=2x-2$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=1\ ,\ f(1)=-4$

②

x	0		1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	↘	-4	↗	0

ومن الجدول يتبين أن $f(x) = 0$

عندما $x = 3$ في الحقيقة

$f(x) = (x-3)(x+1)$

وفي المجال $[0, 3[$ لا يوجد سوى

الجذر $x = 3$

④ $f([0, 3[) = [-4, 0[$

27/73 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$

وفق $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2+1}$، أثبت أن f

مستمر على $\mathbb{R}$ وعين $f(\mathbb{R})$

الحل:

f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ فهو مستمر

في $\mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{+2x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \implies x = 0 \;,\; f(0) = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

ومن جدول التغيرات يتبين أن

$f(\mathbb{R}) = [0, 1[$

28/73 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$

وفق
$$f(x) = \begin{cases} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$$

① احسب نهاية f عند الصفر

② هل f مستمر عند الصفر ؟ هل

هو مستمر على $\mathbb{R}$ علل إجابتك .

الحل:

نعلم أن $-1 \leqslant \cos\frac{1}{x} \leqslant +1$

نضرب جميع الأطراف بـ $x^2 > 0$

فنجد $-x^2 \leqslant x^2\cos\frac{1}{x} \leqslant +x^2$

ولما كان $\lim\limits_{x\to 0}(-x^2) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$

فحسب مبرهنة الإحاطة فإن

$\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x} = 0$

وبما $f(0) = 0$ فإن

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

فالتابع f مستمر عند الصفر فهو

مستمر على $\mathbb{R}$ لأن $x^2\cos\frac{1}{x}$ يتألف

من تابعين مستمرين على

$]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$\frac{29}{73}$ ليكن f التابع المعرف على IR

وفق
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} & : x\neq 0\\ m & : x=0\end{cases}$$

ما قيمة m التي تجعل f مستمراً على IR

الحل :

لنبحث عن نهاية f عند $x=0$

فإذا كان

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$$

فالتابع مستمر .

عند $x=0$ نجد أن $f(x)=\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{(1-\sqrt{x^2+1})(1+\sqrt{x^2+1})}{x(1+\sqrt{x^2+1})}$$

$$f(x)=\frac{-x^2}{x(1+\sqrt{x^2+1})}$$

$$=\frac{-x}{1+\sqrt{x^2+1}}$$

$$\lim_{x\to 0^{+-}} f(x)=0$$

ونجد أن $f(0)=m=0$

لكي يكون f مستمراً على IR

$\frac{30}{73}$ يرمز بالرمز $E(x)$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x ، ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,2]$ وفق $f(x)=x-E(x)$

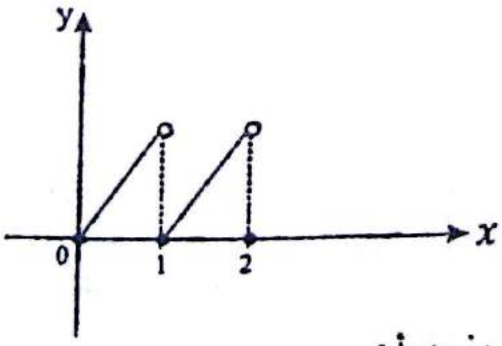
1. ارسم الخط البياني للتابع f على المجال $[0,2]$
2. هل f مستمر على المجال $[0,2]$

الحل :

$f(0)=f(1)=f(2)=0$

عندما $x\in[0,1[$ فإن $f(x)=x$

وعندما $x\in]1,2[$ فإن $f(x)=x-1$



ونجد أن

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=0$ $\lim_{x\to 1^-} f(x)=1$

والنهاية من اليمين عند 1 لا تساوي النهاية من اليسار فالتابع f غير مستمر .

Scanned by CamScanner

31/73 يرمز بالرمز $E(x)$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x ، ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,2]$ وفق $f(x)=E(x)+(x-E(x))^2$

1. اكتب $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$
2. أثبت أن f مستمر على المجال $[0,2]$

الحل:

$f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=2$

في المجال $]0,1[$ يكون $E(x)=0$

و $f(x)=x^2$

في المجال $]1,2[$ يكون $E(x)=1$

و $f(x)=1+(x-1)^2$

ونستطيع أن نكتب $f(x)$ على الشكل

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & : x\in[0,1[\\ 1 & : x=1 \\ 1+(x-1)^2 & : x\in]1,2[\\ 2 & : x=2 \end{cases}$$

ونجد :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=1$$

فالتابع f مستمر عند $x=1$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=f(2)=2$$

والتابع f مستمر عند $x=2$ من اليسار .

ومنه فإن f مستمر في المجال $[0,2]$

32/74 في معلم متجانس، C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $[0,\pi]$ وفق $f(x)=\sin x$ و d هو المستقيم الذي معادلته $y=\frac{1}{2}x$

1. a ارسم كلاً من C و d

   b يبدو أن للمعادلة $\sin x=\frac{1}{2}x$ حلاً وحيداً $\propto$ في المجال $]0,\pi[$ ، استفد من الرسم لإيجاد مجال صغير ينتمي إليه $\propto$

2. نرمز بالرمز g إلى التابع المعرف على $[0,\pi]$ وفق

$$g(x)=\sin x-\frac{1}{2}x$$

   a احسب $g'(x)$ وأثبت أن $g'(x)=0$

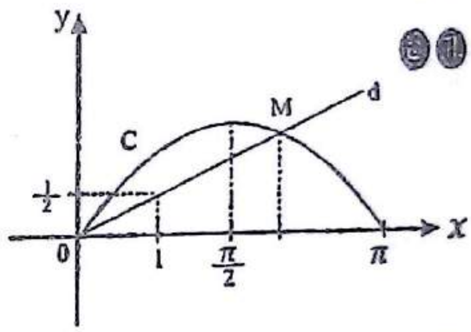
عند $x=\frac{\pi}{3}$

ⓑ نظم جدولاً بتغيرات g

③ استنتج مما سبق أن المعادلة $\sin x=\frac{1}{2}x$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $]0,\pi[$

الحل:

①ⓐ



ⓑ المستقيم d يقطع C في المجال $]0,\pi[$ في نقطة وحيدة M فاصلتها تنتمي للمجال $]0,\pi[$ فلا يوجد في هذا المجال سوى جذر وحيد للمعادلة $\sin x=\frac{1}{2}x$ هو $\propto\in]0,\pi[$ وبالاستفادة من الرسم نلاحظ أن $\propto\in[\frac{\pi}{2},\pi]$

②ⓑ $g(x)=\sin x-\frac{1}{2}x$

$g'(x)=\cos x-\frac{1}{2}$

$g'(x)=0 \Longrightarrow \cos x=\frac{1}{2} \Longrightarrow$

$x=\frac{\pi}{3}$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}\pi$

في المجال $]0,\frac{\pi}{3}]$ لا يوجد جذر للمعادلة $g(x)=0$ أي للمعادلة $\sin x=\frac{1}{2}x$ أما في المجال $]\frac{\pi}{3},\pi[$ نجد أن

$f(\frac{\pi}{3})=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}>0$

$f(\pi)=-\frac{1}{2}\pi<0$

إذاً $f(\frac{\pi}{3}).f(\pi)<0$

وبما أن التابع g مستمر ومتناقص تماماً في المجال $]\frac{\pi}{3},\pi[$ فللمعادلة $f(x)=0$ جذر وحيد في هذا المجال ، وبالتالي فليس للمعادلة $g(x)=0$ سوى جذر وحيد في المجال $]0,\pi[$ هو :

$\propto\in]\frac{\pi}{3},\pi]$

33 / 74 ليكن f تابعاً مستمراً ومطرداً ومعرفاً على المجال $I = [0 , 1]$ ويحقق $f(x) \in I$ أياً يكن x من I نرمز بالرمز K إلى التابع المعرف على I وفق $K(x) = f(x) - x$ ، بتطبيق مبرهنة القيمة الوسطى على التابع K ، أثبت وجود عدد حقيقي a من I يحقق $f(a) = a$

الحل:

f معرف ومستمر على I فرضاً فيكون $K(x)$ المعرف على I مستمر أيضاً لأنه مجموع تابعين مستمرين في I

$K(0) = f(0) - 0 \in I = [0 , 1]$

$K(1) = (f(1) - 1) \in]-1 , 0]$

ومنه فإن $K(0) \times K(1) < 0$

فللمعادلة $K(0) = 0$ جذر وحيد a في المجال $[0 , 1]$ لأن K مستمر ومطرد

$K(a) = 0 \Rightarrow f(a) - a = 0 \Rightarrow$

$f(a) = a$

34 / 74 مجموعة توابع مستمرة

ليكن m عدداً حقيقياً ، وليكن C_m الخط البياني للتابع f_m المعرف على IR وفق $f_m(x) = x^3 + mx^2 - 8x - m$

1 a أثبت أن الخطين البيانيين C_0 و C_1 يتقاطعان في نقطتين A و B أوجد إحداثيات هاتين النقطتين .

b استنتج أن جميع الخطوط البيانية C_m تمر بالنقطتين A و B

2 أوجد نهاية f_m عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

3 استنتج مما سبق أن للمعادلة $f_m(x) = 0$ ثلاثة حلول متمايزة في IR أياً يكن العدد m .

الحل:

$f_m(x) = x^3 + mx^2 - 8x - m$

$C_0 : f_0(x) = x^3 - 8x$

$C_1 : f_1(x) = x^3 + x^2 - 8x - 1$

بالحل المشترك للمعادلتين نجد :

$x^3 - 8x = x^3 + x^2 - 8x - 1$

ومنه $x^2 - 1 = 0$ أي $x = \pm 1$

نعوض في إحدى المعادلتين فنجد :

$x=-1 \Longrightarrow f(-1)=+7$,

$x=1 \Longrightarrow f(1)=-7$

والمنحنيان C_0 و C_1 يشتركان بالنقطتين

$A(-1,7)$, $B(1,-7)$

② إذا كانت جميع الخطوط البيانية تمر من نقطة ثابتة أو من نقطتين ثابتتين فيجب أن تتحقق المساواة

$f(x)=x^3+m\,x^2-8x-m$

أيا كانت m نكتب

$f(x)=x^3-8\,x+m\,(x^2-1)$

ولا تتعلق هذه المساواة بـ m إذا كان

$x^2-1=0 \Longrightarrow x=\pm 1$

ونجد $f(-1)=7$ و $f(1)=-7$

ومنه فجميع الخطوط C_m تمر من النقطتين $A(-1,7)$ و $B(1,-7)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

③ وجدنا أن $f(1)=-7$ و $f(-1)=7$

ومنه فإن $f(-1)\times f(1)<0$ ولما كان f_m كثيرة الحدود فهي مستمرة على IR وبالتالي فيوجد للمعادلة $f_m(x)=0$ جذر وحيد في المجال $[-1,1]$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x)<0$, $f(-1)>0$

إذاً $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\times f(-1)<0$

وبسبب استمرار التابع f فيوجد جذر وحيد للمعادلة $f_m(x)=0$ في المجال $]-\infty,-1[$

وكذلك نجد أن :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\times \lim f_1(1)<0$

ممايدل على وجود جذر للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $]1;+\infty[$ وهذا الجذر وحيد وبالتالي للمعادلة $f_m(x)=0$ ثلاثة جذور متمايزة .

$\frac{35}{74}$ ليكن f تابعاً مستمراً واشتقاقياً على المجال $I=[0,1]$ ويحقق الشرطين :

• أيا كان x من I كان $f(x)$ من I

وأيا كان x من $]0,1[$ كان $f'(x) < 1$.

أثبت أن للمعادلة $f(x) = x$ حلاً وحيداً في I

الحل:

ليكن $h(x)$ التابع المعرف على $[0,1]$

$h(x) = f(x) - x$

إن $h(x)$ مستمر لأنه مجموع تابعين مستمرين واشتقاقي لأنه مجموع تابعين اشتقاقين ومنه

$h'(x) = f'(x) - 1$

وبما أن $f'(x) < 1$ فرضاً وينتمي للمجال $[0,1]$ فإن $h'(x) < 0$

والتابع h متناقص في مجموعة تعريفه ونجد أن

$h(0) = f(0) \geqslant 0$, $h(1) = f(1) - 1$

ولكن $f(1) - 1 \leqslant 0$ لأن $f(x) \in [0,1]$ فرضاً ومنه فإن $h(0) \times h(1) \leqslant 0$

فللمعادلة $h(x) = 0$ جذر وحيد α في المجال $[0,1]$ ويحقق $h(\alpha) = 0$

أي: $f(\alpha) - \alpha = 0$ ومنه $f(\alpha) = \alpha$

$\frac{36}{75}$ ليكن f التابع المعرف على IR وفق $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ ، وليكن C خطه البياني في معلم متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1. أثبت أن للخط C محور تناظر.
2. ادرس نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.
3. أثبت أن $f(x) - x = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}}$ أياً يكن x من IR ، استنتج أن C يقبل مقارباً مائلاً d في جوار $+\infty$ عين الوضع النسبي للخط C ومقاربه d
4. ليكن $\acute{C}$ الخط البياني للتابع g المعرف على IR وفق $g(x) = -f(x)$ وليكن $H = C \cup \acute{C}$ أثبت أن معادلة H هي $y^2 - x^2 = 1$
5. نعتمد معلماً جديداً $(o, \vec{u}, \vec{v})$ حيث $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$ و $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i} + \vec{j})$

ولتكن M نقطة إحداثياتها (x, y) في المعلم $(o, \vec{i}, \vec{j})$ وإحداثياتها $(X ; Y)$ في المعلم $(o, \vec{u}, \vec{v})$

أوجد x و y بدلالة X و Y ، ارسم

الخط H في المعلم $(o, \vec{u}, \vec{v})$

الحل:

● أيا كان $x \in \mathbb{R}$ فإن :

$$f(-x)=\sqrt{1+(-x)^2}=\sqrt{1+x^2}=f(x)$$

فالخط C متناظر بالنسبة لمحور التراتيب .

●
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x)=+\infty$$

●
$$f(x)-x=\sqrt{1+x^2}-x$$

$$=\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$=\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

ومنه
$$f(x)-x=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$\lim_{x \to +\infty}(f(x)-x)=\frac{1}{+\infty}=0$$

فالمستقيم $y=x$ وهو منصف الربع الأول والثالث مقارب مائل في جوار $+\infty$ وبما أن $f(x)-x>0$ أيا كان x من $\mathbb{R}$ وذلك لأن $\sqrt{1+x^2}>-x$ فالخط البياني C يقع فوق المقارب $y=x$

● الخط C̀ يمثل المعادلة

$$g(x)=-f(x)$$

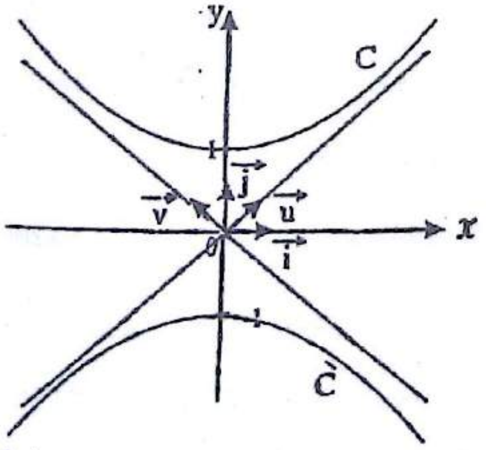
فالمنحني C̀ نظير C بالنسبة لمحور الفواصل معادلته $y=-\sqrt{1+x^2}$

مع $y<0$ بالتربيع نجد $y^2-x^2=1$

معادلة $f(x)$: $y=\sqrt{1+x^2}$

مع $y>0$ بالتربيع نجد $y^2-x^2=1$

ومنه فإن المعادلة $y^2-x^2=1$ تمثل $(C \cup C̀)$ حيث C̀ نظير C بالنسبة لمحور الفواصل .



لنفرض $M(X, Y)$ إحداثيي نقطة من H بالنسبة للجملة $(o, \vec{u}, \vec{v})$ و (x, y) إحداثيي M بالنسبة للجملة $(o, \vec{i}, \vec{j})$ فيكون

$$\overrightarrow{OM}=X\vec{u}+Y\vec{v}$$

نعوض $\vec{u}$ و $\vec{v}$ بدلالة $\vec{j}$ و $\vec{i}$:

$$\overrightarrow{OM} = X\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{j}) + Y\frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i}+\vec{j})$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)\vec{j}$$

$$= x\vec{i} + y\vec{j}$$

ومنه :

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y) \ ,$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)$$

نعوض في معادلة H : $y^2 - x^2 = 1$

نجد : $\frac{1}{2}(X+Y)^2 - \frac{1}{2}(X-Y)^2 = 1$

وبعد فك الأقواس والاختصار نجد معادلة H في الجملة الجديدة :

$$2XY = 1$$

37/76 ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$ وفق $f(x) = |x+1| + \frac{x}{x^2-1}$

❶ اكتب $f(x)$ بصيغة لا تحوي قيمة مطلقة .

ⓑ ادرس نهاية f عند حدود مجالات D_f ثم أوجد $f'(x)$ وادرس إشارته على كل من مجالات D_f .

❷ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

❸ ⓐ تحقق من أن المستقيمين اللذين معادلتاهما $y = x+1$ و $y = -x-1$ هما بالترتيب مقاربان مائلان للخط البياني C عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ، ادرس وضع C بالنسبة إلى هذين المقاربين .

ⓑ أوجد معادلة المماس (T) للخط البياني C في النقطة A منه علماً أن فاصلة A تساوي (0)

ⓒ ارسم T ومقاربي C ثم ارسم C

❺ أثبت أن للمعادلة : $f(x) = 0$ حلاً وحيداً α في المجال $]-1, 1[$ وأوجد مجالاً طوله $\frac{1}{10}$ تنتمي إليه α

الحل:

ⓐ إذا كانت $x > -1$ فإن $|x+1| = x+1$

وإذا كانت $x < -1$ فإن $|x+1| = -x-1$

ومنه فإن

$$f(x) = \begin{cases} -x-1+\frac{x}{x^2-1} & : x < -1 \\ x+1+\frac{x}{x^2-1} & : x > -1 \ , x \neq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 - \dfrac{+x^2+1}{(x^2-1)^2} & : x < -1 \\ 1 - \dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2} & : x > -1 ; x \neq 1 \end{cases}$$

ومن الواضح أنه عندما $x < -1$ فإن $f'(x) < 0$ والتابع متناقص تماماً في المجال $]-\infty , -1[$ أما في حالة $x > -1$ فإن $f'(x) = 1 - \dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$

$$= \frac{(x^2-1)^2 - (x^2+1)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

وتكون إشارة $f'(x)$ حسب الجدول التالي :

x	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$ | $-$	0	$+$

ونلخص إشارة $f'(x)$ على مجموعة التعريف كمايلي :

x	$-\infty$	-1	0	$+1$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	| $-$	0	$-$ | $-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	| $+\infty \searrow$	$+1$	$\searrow -\infty$ | $+\infty \searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}+1$	$\nearrow +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) + x + 1] = \lim_{x\to-\infty} + \frac{x}{x^2-1} = 0$$

فالمستقيم $y = -x - 1$ مقارب مائل في جوار $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x\to+\infty} + \frac{x}{x^2-1} = 0$$

فالمستقيم $y = x + 1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

عندما $x < -1$ فإن $\dfrac{x}{x^2-1} < 0$

والخط C يقع تحت المقارب $y = -x - 1$

عندما $x > -1$ و $-1 < x < 0$

فإن $\dfrac{x}{x^2-1} > 0$ و C فوق المقارب

وفي المجال $]0 , 1[$

$\dfrac{x}{x^2-1} < 0$ C تحت المقارب

وفي المجال $]1 , +\infty[$

$\dfrac{x}{x^2-1} > 0$ C فوق المقارب

ونوجز ذلك في الجدول الآتي :

x	$-\infty$ -1		0	1 $+\infty$
إشارة x	−	+	−	+
x^2-1	C تحت Δ_1	C فوق Δ_2	C تحت Δ_2	C فوق Δ_2

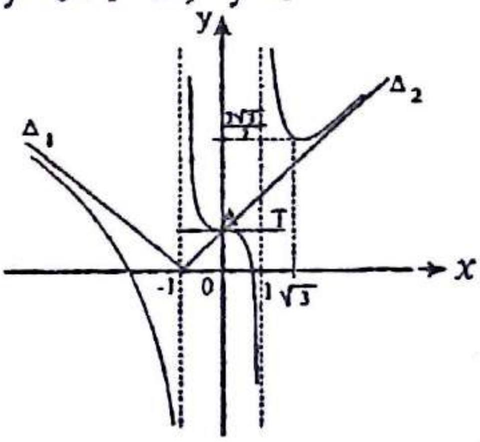
③ المماس عند $x=0$

$f(0)=1 \qquad f'(0)=0$

معادلة المماس

$y=f'(a)(x-a)+f(a)$

$y=0+1 \implies y=1$



④ يتبين من الخط البياني للتابع f في المجال $]-1,1[$ حيث C متناقص ومستمر أن للمعادلة $f(x)=0$ جذر وحيد في المجال $\alpha\in[0,1[$ لنتعرف إلى قيمة تقريبية للجذر α

$f(x)=0 \implies x+1+\frac{x}{x^2-1}=0$

$x^3+x^2-1=0$

ونجد أن $\alpha \approx 0,75$ ومنه فإن

$\alpha\in[0,65 \;,\; 0,85]$

$\frac{38}{76}$ في معلم متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ لدينا النقطتان الثابتتان $A(-3,4)$ و $B(2,1)$ والنقطة المتحولة $M(x,0)$ نقرن بالنقطة M النقطة M' التي نعرفها كمايلي :

• يقطع المستقيم (AM) المحور $(o\vec{j})$ في m .

• يقطع المستقيم (Bm) المحور $(o;\vec{i})$ في M' .

نرمز إلى فاصلة M' بالرمز $f(x)$

① بدون حساب ، خمن نهاية f عند $+\infty$

② أثبت أن $f(x)=\frac{8x}{3x-3}$ عندما تختلف x عن 1 وعن -3 ، ثم استنتج نهاية f عند $+\infty$

③ ادرس نهاية f عند $-\infty$ ، ما التأويل الهندسي لهذه النتيجة .

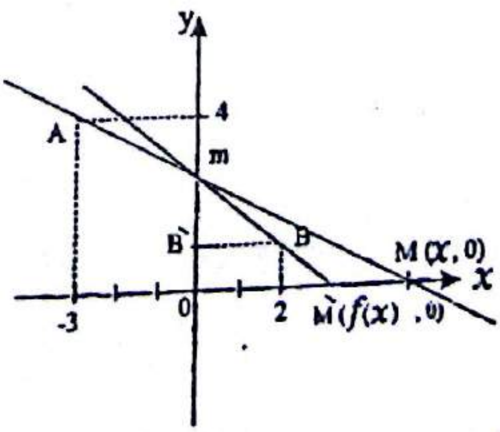
ادرس نهاية f عند $x=1$ ، ماالتأويل الهندسي لهذه النهاية .

④ عندما $x=-3$ يكون المستقيم (AM) موازياً $(o\vec{j})$ وتكون m في اللانهاية يمكن أن نقول في هذه الحالة أن (Bm) يوازي $(o\vec{j})$ وأن M' تقع في $(2,0)$ نعرف عندئذ التابع g وفق $g(x)=f(x)$ عندما تختلف x عن 1 وعن -3 و $g(-3)=2$ ، لماذا يكون g مستمراً عند -3 .

ملاحظة:

نقول في هذه الحالة إننا مددنا استمرار g ليشمل $x=-3$

الحل:



② لنفرض a ميل المستقيم AM فتكون معادلته $y-4=a(x+3)$

ومنه : $y=a(x+3)+4$

يقطع هذا المستقيم محور التراتيب في النقطة m حيث $x=0$ لنجد أن $m(0,3a+4)$ ويقطع هذا المستقيم محور الفصول في النقطة M حيث

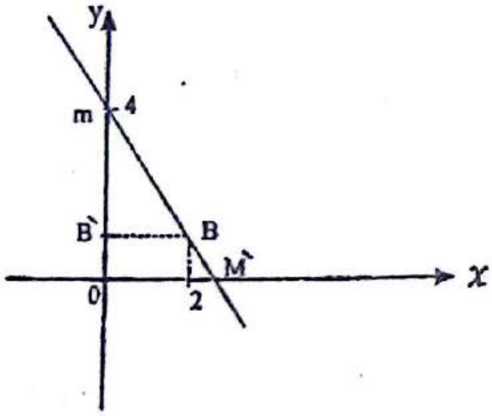
$y=0$ أي $0=ax+3a+4$

ومنه $x=-(3+\frac{4}{a})$ أي

③ عندما $x \to +\infty$ فإن AM يوازي تقريباً محور الفواصل والنقطة m على محور التراتيب في النقطة $(0,4)$

ونجد أن $\frac{OM'}{BB'}=\frac{Om}{mB'}$

أي $\frac{OM'}{BB'}=\frac{4}{3}$ ومنه $OM'=\frac{8}{3}$



$M(x , 0) = M[-(3 + \frac{4}{a}) , 0]$ (1)

ميل (B m) :

$\frac{3a+4-1}{0-2} = -\frac{3}{2}(a+1)$

معادلة (B m) :

$y - 1 = -\frac{3}{2}(a+1)(x-2)$

يقطع (B m) محور الفصول في النقطة

$\grave{M}$ حيث $y = 0$ لنجد فاصلة $\grave{M}$

$0 - 1 = -\frac{3}{2}(a+1)x + 3(a+1)$

$-\frac{3}{2}(a+1)x = 3a+4$

ومنه

$x = -\frac{2}{3}\ \frac{(3a+4)}{a+1}$: $a \neq -1$

أي $\grave{M}(f(x), 0) = \grave{M}[-\frac{2}{3}\ \frac{(3a+4)}{a+1} , 0]$ (2)

بفرض $a \neq -1$

من (1) نجد $x = -(3 + \frac{4}{a})$

$ax = -3a - 4 \implies a(x+3) = -4$

ومنه $a = \frac{-4}{x+3}$ بفرض $x \neq -3$

نعوض في (2)

$f(x) = -\frac{2}{3} \times \frac{3a+4}{a+1}$

$= -\frac{2}{3} \times \frac{\frac{-4}{x+3} \times 3 + 4}{\frac{-4}{x+3} + 1}$

$= -\frac{2}{3} \times \frac{4x}{x-1} = -\frac{8x}{3x-3}$

بفرض $x \neq -3$ و $x \neq 1$

$f(x) = -\frac{8x}{3x-3}$

ونجد أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\frac{8}{3}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{8}{3}$

المستقيم $y = -\frac{8}{3}$ مقارب $/\!/ \grave{x}x$

وهذا يعني أن $\grave{M}$ تقترب من النقطة

$(-\frac{8}{3} , 0)$ كلما ابتعدت M

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$

المستقيم $x = 1$ مقارب $/\!/ \grave{y}y$

وهذا يعني أن $\grave{M}$ تقع في جوار ∞-

على محور الفصول عندما تقترب

M من اليسار من العدد (1) و $\grave{M}$

تقع في جوار ∞+ على محور الفصول

عندما تقترب M من اليمين من

العدد (1)

في الحقيقة عندما تقترب M على

محور الفصول من العدد (1) فإن m

تكون قريبة من $\grave{B}$ ونجد m B يوازي

محور الفصول أي $\grave{M}$ في ∞- أو ∞+

حسب اقتراب M من الواحد من

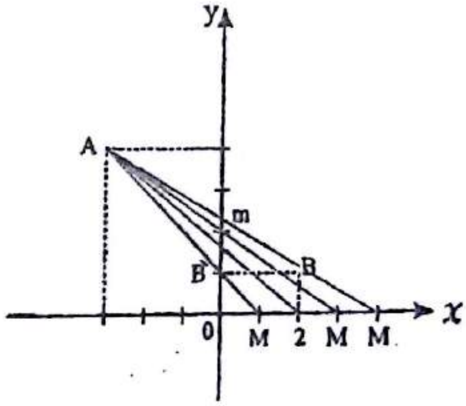
اليمين أو اليسار .

⑤

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & : x\neq -3 \ , \ x\neq 1 \\ 2 & : x=-3 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -3} g(x)=\lim_{x\to -3} f(x)=2=g(-3)$$

وهذا يعني أن g مستمر عند $x=-3$



تعاريف للتذكر .

تعريف العدد المشتق :

ليكن f تابعاً معرفاً على مجال I محتوى في D_f ولتكن a نقطة من I نقول إن ℓ هو العدد المشتق للتابع f عند a إذا وفقط تحقق واحد من الشرطين الآتيين .

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell$$

أو

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell$$

ويرمز للمشتق عند a بالرمز $f'(a)$

• عندما يقبل f عدداً مشتقاً في a نقول إن f اشتقاقي في a .

• عندما يكون f اشتقاقياً عند كل نقطة من مجال I ، نقول إن f اشتقاقي على I

تعريف التابع المشتق :

إذا كان f تابعاً اشتقاقياً على مجال I فالتابع المشتق للتابع f على I هو التابع f' الذي يقرن بكل a من I العدد المشتق $f'(a)$