النهايات

السؤال الأول:

أوجد كلاً مما يأتي:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4}+2x+1\right)$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2-4x}-3x\right)$

4) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{\sqrt{2x^3-1}-1}{x-1}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-x\right)$

الحل:

١) يوجد حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty-\infty)$.

$$\sqrt{x^2-4}+2x+1=\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}+2x+1$$

$$=|x|\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}+2x+1$$

في جوار $-\infty$: $|x|=-x$

$$=-x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}+2x+1=x\left(-1\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}+2\right)+1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4}+2x+1\right)$$
$$=-\infty\left(-\sqrt{1-0}+2\right)+1=-\infty$$

٢) يوجد حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty-\infty)$

$$\sqrt{x^2-4}+x=\frac{\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)}{\sqrt{x^2-4}-x}$$

$$=\frac{x^2-4-x^2}{\sqrt{x^2-4}-x}=\frac{-4}{\sqrt{x^2-4}-x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4}+1\right)=\frac{-4}{+\infty}=0$$

٣) يوجد حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty-\infty)$

$$\sqrt{9x^2-4x}-3x$$
$$=\frac{\left(\sqrt{9x^2-4x}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2-4x}+3x\right)}{\sqrt{9x^2-4x}+3x}$$

$$=\frac{9x^2-4x-9x^2}{\sqrt{9x^2-4x}+3x}=\frac{-4x}{\sqrt{x^2\left(9-\frac{4}{x}\right)}+3x}$$

في جوار $+\infty$: $|x|=+x$

$$=\frac{-4x}{x\sqrt{9-\frac{4}{x}}+3x}=\frac{-4x}{x\left(\sqrt{9-\frac{4}{x}}+3\right)}$$

$$=\frac{-4}{\sqrt{9-\frac{4}{x}}+3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2-4x}-3x\right)=\frac{-4}{\sqrt{9-0}+3}=-\frac{4}{6}$$

٤) يوجد عدم تعيين من الشكل $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\frac{\sqrt{2x^3-1}}{x-1}=\frac{\left(\sqrt{2x^3-1}-1\right)\left(\sqrt{2x^3-1}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{2x^3-1}+1\right)}$$

$$=\frac{2x^3-1-1}{(x-1)\left(\sqrt{2x^3-1}+1\right)}$$

$$=\frac{2(x^3-1)}{(x-1)\left(\sqrt{2x^3-1}+1\right)}$$

$$=\frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)\left(\sqrt{2x^3-1}+1\right)}=\frac{2(x^2+x+1)}{\sqrt{2x^3-1}+1}$$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt{2x^3-1}}{x-1}\right)=3$$

٥) يوجد عدم تعيين من الشكل $(+\infty-\infty)$

$$\sqrt{x+1}-x=\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-x$$

في جوار $+\infty$: $|x|=+x$

$$=x\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)=x\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-x\right)=+\infty\left(\sqrt{0}-1\right)=-\infty$$

السؤال الثاني:

أوجد كلاً مما يأتي:

1) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2x+\sin3x}{x+\tan6x}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\tan^2(2x-2)}{x^2-2x+1}$

3) $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}(\sin x).\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$

4) $\lim\limits_{x\to2}\left(|x-2|\cos^2\left(\dfrac{1}{x-2}\right)\right)$

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{2+\cos\left(\frac{1}{x}\right)}$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x-\sin x}$

7) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[3]{x}.\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x.\sin x}$

9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x-\sin3x}{x^3}$

الحل:

١) يوجد حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$\frac{2x+\sin3x}{x+\tan6x}=\frac{x\left(2+\frac{\sin3x}{x}\right)}{x\left(1+\tan\frac{6x}{x}\right)}=\frac{2+3\frac{\sin3x}{3x}}{1+6\frac{\tan6x}{6x}}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2x+\sin3x}{x+\tan6x}=\frac{2+3(1)}{1+6(1)}=\frac{5}{7}$$

لأن:

الأستاذ: حسام الأعرج ٠٩٤٤٧٧١٠٦٧
الأستاذ: زياد دقماق ٠٩٣٣٨١٣٢١٠

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1\,,\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$$

٢) يوجد حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$\frac{\tan^2(2x-2)}{x^2-2x+1}=\frac{\tan^2(2x-2)}{(x-1)^2}$$

$$=\left(\frac{\tan(2x-2)}{x-1}\right)^2=\left(2\frac{\tan(2x-2)}{2x-2}\right)^2$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\tan^2(2x-2)}{x^2-2x+1}=\big(2(1)\big)^2=4$$

لأن:

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$$

٣) يوجد حالة عدم تعيين من الشكل $0(\infty)$

$$(\sin x)\ \sqrt{1+\frac{1}{x}^2}=(\sin x)(\sqrt{\frac{1}{x^2}(x^2+1)}$$

عندما $x\overset{>}{\to}0$: $|x|=+x$

$$=\frac{(\sin x)}{x}\sqrt{x^2+1}$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}(\sin x)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1.\sqrt{0+1}=1$$

٤) $0\le\cos^2\left(\frac{1}{x-2}\right)\le1$

ضرب بـ $0<|x-2|$

$$0\le|x-2|\cos^2\frac{1}{x-2}\le|x-2|$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to2}(0)=0\\ \lim_{x\to2}(|x-2|)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to2}\left(|x-2|\cos^2\frac{1}{x-2}\right)=0$$

حسب مبرهنة الإحاطة.

٥) $-1\le\cos\frac{1}{x}\le1$

$$1\le2+\cos\frac{1}{x}\le3$$

$$1\ge\frac{1}{2+\cos\frac{1}{x}}\ge\frac{1}{3}$$

$$x^2\ge\frac{x^2}{2+\cos\frac{1}{x}}\ge\frac{x^2}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to0}(x^2)=0\\ \lim_{x\to0}\left(\frac{x^2}{3}\right)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to0}\left(\frac{x^2}{2+\cos\frac{1}{x}}\right)=0$$

حسب مبرهنة الإحاطة.

٦) $-1\le\sin x\le+1$

$$+1\ge-\sin x\ge-1$$

$$x+1\ge x-\sin x\ge x-1$$

الدالة الأساسية دالة متزايدة تماماً

$$e^{x+1}\ge e^{x-\sin x}\ge e^{x-1}$$

بما أنَّ:

$$\lim_{x\to+\infty}e^{x-1}=+\infty$$

فإن:

$$\lim_{x\to+\infty}e^{x-\sin x}=+\infty$$

حسب مبرهنة الإحاطة.

٧) $-1\le\sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\le+1$

للضرب بـ $\sqrt[3]{x}$ نميز حالتين:

١] $0<\sqrt[3]{x}$

$$-\sqrt[3]{x}\le\sqrt[3]{x}\sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\le\sqrt[3]{x}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\overset{>}{\to}0}(-\sqrt[3]{x})=0\\ \lim_{x\overset{>}{\to}0}(\sqrt[3]{x})=0\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left(\sqrt[3]{x}\sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\right)=0$$

حسب مبرهنة الإحاطة.

٢] $0>\sqrt[3]{x}$

$$-\sqrt[3]{x}\ge\sqrt[3]{x}\sin\frac{4}{\sqrt[3]{x}}\ge\sqrt[3]{x}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\overset{<}{\to}0}(-\sqrt[3]{x})=0\\ \lim_{x\overset{<}{\to}0}(\sqrt[3]{x})=0\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\overset{<}{\to}0}\left(\sqrt[3]{x}\sin\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)=0$$

حسب مبرهنة الإحاطة.

من (١) و(٢) نجد أن:

$$\lim_{x\to0}\left(\sqrt[3]{x}\sin\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)=0$$

٨) تذكر:

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$$

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}$$

الحل:

يوجد حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$\frac{1-\cos x}{x.\sin x}=\frac{2.\sin^2\frac{x}{2}}{x.2.\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{x}{2}}{x.\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\tan\frac{x}{2}}{x}=\frac{1}{2}\frac{\tan\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{x.\sin x}\right)=\frac{1}{2}(1)=\frac{1}{2}$$

الأستاذ: حسام الأعرج ٠٩٤٤٧٧١٠٦٧
الأستاذ: زياد دقماق ٠٩٣٣٨١٣٢١٠

لأن: $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$

٩) تذكر: $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

الحل:

$$\frac{3\sin x-\sin 3x}{x^3}=\frac{3\sin x-3\sin x+4\sin^3 x}{x^3}$$

$$=4\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3$$

$$\lim_{x\to0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{x^3}=4(1)^3=4$$

السؤال الثالث:

أوجد كلاً مما يأتي:

1) $\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left(\ln(x)+\frac{1}{x}\right)$ 2) $\lim_{x\to1}\frac{\ln(x)}{x^2-4x+3}$

3) $\lim_{x\to1}\frac{e^x-e}{x^2-x}$ 4) $\lim_{x\to+\infty}[\ln(e^x+1)-x]$

5) $\lim_{x\to-\infty}(2x-1+e^{1-x})$ 6) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x}-\ln(1))$

الحل:

١) يوجد حالة عدم تعيين $+\infty-\infty$

$$\ln(x)+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}(x.\ln(x)+1)$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left(\ln(x)+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{+0}(0+1)=+\infty$$

لأن:

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}(x.\ln(x))=0$$

٢) يوجد عدم تعيين $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\frac{\ln(x)}{x^2-4x+3}=\frac{\ln(x)}{(x-3)(x-1)}$$

$$=\frac{\ln(x-1+1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x-3}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln(x)}{x^2-4x+3}=(1).\frac{1}{1-3}=-\frac{1}{2}$$

لأن: $\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$

٣) يوجد عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$\frac{e^x-e}{x^2-x}=\frac{e(e^{x-1}-1)}{x(x-1)}$$

$$=\frac{e}{x}\cdot\frac{e^{x-1}-1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{e^x-e}{x^2-x}=\frac{e}{+1}(1)=+e$$

لأن: $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

٤) يوجد عدم تعيين $(+\infty-\infty)$

$$\ln(e^x+1)-x=\ln(e^x+1)-\ln(e^x)$$

$$=\ln\left(\frac{e^x}{e^x}+\frac{1}{e^3}\right)$$

$$=\ln(1+e^{-x})$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln(e^x+1)-x)=\ln(1)=0$$

٥) يوجد عدم تعيين $(+\infty-\infty)$

$$2x-1+e^{1-x}=2x-1+\frac{e}{e^x}$$

$$=\frac{2x.e^x-1+e}{e^x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}(2x-1+e^{1-x})=\frac{2(0)-1+e}{+0}=+\infty$$

لأن: $\lim_{x\to-\infty}(x.e^x)=0$

٦) يوجد عدم تعيين $+\infty-\infty$

$$\sqrt[3]{x}-\ln(x)=\sqrt[3]{x}\left(1-\frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}\right)$$

$$=\sqrt[3]{x}\left(1-\frac{\ln\left(\sqrt[3]{x}\right)^3}{\sqrt[3]{x}}\right)$$

$$=\sqrt[3]{x}\left(1-\frac{3\ln\left(\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x}-\ln(x)\right)=+\infty(1-3(0))=+\infty$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$

السؤال الرابع:

أوجد كلاً مما يأتي:

1) $\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-1}{\tan x}$ 2) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\ln(1+3x)}$

3) $\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}\right)$ 4) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}$

5) $\lim_{x\overset{>}{\to}0} e^{\frac{1}{x}}.\sin x$ 6) $\lim_{x\overset{>}{\to}0}(\sin 3x).\ln(4x)$

الحل:

١) يوجد عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$\frac{e^{4x}-1}{\tan x}=\frac{4x\,\frac{e^{4x}-1}{4x}}{x\,\frac{\tan x}{x}}=\frac{4.\frac{e^x-1}{4x}}{\frac{\tan x}{x}}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-1}{\tan x}=\frac{4(1)}{1}=4$$

لأن: $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$ $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

٣) يوجد عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}=\frac{e^{-x}\left(e^{2x}+1-\frac{2}{e^{-x}}\right)}{2\sin^2 x}$$

$$=\frac{e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^{-2x}-2e^x+1}{\sin^2 x}=\frac{e^{-x}}{2}\frac{(e^x-1)^2}{\sin^2 x}$$

الأستاذ: حسام الأعرج ٠٩٤٤٧٧١٠٦٧ الأستاذ: زياد دقماق ٠٩٣٣٨١٢٢١٠

$$= \frac{e^{-x}}{2}\left(\frac{e^{x}-1}{\sin x}\right)^{2} = \frac{e^{-x}}{2}\left(\frac{\frac{e^{x}-1}{x}}{\frac{\sin x}{x}}\right)^{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos 2x} = \frac{e^{0}}{2}\left(\frac{1}{1}\right)^{2} = \frac{1}{2}$$

لأن: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x} = 1\,,\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

٤) يوجد عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$\frac{\ln(\cos x)}{x^{2}} = \frac{\ln(\cos x - 1 + 1)}{x^{2}}$$

$$= \frac{\frac{\ln(\cos x - 1 + 1)}{\cos(x) - 1}}{\frac{x^{2}}{\cos x - 1}}$$

$$= \frac{\frac{\ln(\cos x - 1 + 1)}{\cos x - 1}}{\frac{x^{2}}{-2\sin^{2}\frac{x}{2}}}$$

$$= \frac{-2\left(\frac{\ln(\cos x - 1 + 1)}{\cos x - 1}\right)}{\left(\frac{x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^{2}}$$

$$= \frac{-2\left(\frac{\ln(\cos x - 1 + 1)}{\cos x - 1}\right)}{\left(\frac{2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^{2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^{2}} = \frac{-2(1)}{\left(2(1)\right)^{2}} = -\frac{1}{2}$$

لأن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$$

٥) يوجد عدم تعيين $0(\infty)$

$$e^{\frac{1}{x}}.\sin x = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}.\frac{1}{x}.\sin x$$

$$\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}.\frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} e^{\frac{1}{x}}.\sin x = +\infty(1) = +\infty$$

لأن:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^{x}}{x} = +\infty\,,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

٦) يوجد عدم تعيين $0(-\infty)$

$$(\sin 3x).\ln(4x) = \frac{\sin 3x}{x}.x.\ln(4x)$$
$$= 3.\frac{\sin 3x}{3x}.\frac{1}{4}.4x.\ln(4x)$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}(\sin 3x)\ln(4x) = 3(1).\frac{1}{4}(0) = 0$$

لأن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 0\,,\qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x.\ln(x) = 0$$

السؤال الخامس:

أوجد نهاية f عند a الموافقة وذلك في حال وجودها.

١) $f(x) = \sqrt{2x-1-x^{2}}\quad a = 1$

الحل:

نوجد مجموعة التعريف:

$$2x-1-x^{2} \geq 0$$
$$-x^{2}+2x-1 \geq 0$$
$$-x^{2}+2x-1 = 0$$
$$x^{2}-2x+1 = 0$$
$$(x-1)^{2} = 0$$

جذر مضاعف $x = 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-x^{2}+2x-1$		$-$	0	$-$	

$$D = \{1\}$$

الدالة ليست معرفة على جوار محذوف للعدد (١) ومنه لا يوجد نهاية للدالة f عند (١).

٢) $f(x) = \frac{|x+3|}{x+3}\quad a = -3$

الحل:

$$D = \mathbb{R}\setminus\{-3\}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-(x+3)}{x+3}: & x+3 < 0 \\ \frac{x+3}{x+3}: & x+3 > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -1: & x < -3 \\ +1: & x > -3 \end{cases}$$

الدالة معرفة على جوار محذوف للعدد −٣.

$$\lim_{\substack{x\to -3\\ <}} f(x) = -1$$
$$\lim_{\substack{x\to -3\\ >}} f(x) = +1$$

بما أن:

$$\lim_{\substack{x\to -3\\ <}} f(x) \neq \lim_{\substack{x\to -3\\ >}} f(x)$$

فإنه لا يوجد نهاية للدالة f عند −٣.

الأستاذ: حسام الأعرج ٠٩٤٤٧٧١٠٦٧
الأستاذ: زياد دقماق ٠٩٣٣٨١٣٢١٠