الجداء السلمي في الفراغ

تدرب ص 50

$\frac{1}{50}$

1* $\vec{u}\cdot\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$

$= 2\times\frac{1}{2} + (-3)5 = 1 - 15 = -14$

$\vec{v}\cdot\vec{w} = x_1x_2 + y_1y_2$

$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} + 5(-2) = \frac{1}{6} - 10$

$= -\frac{59}{6}$

$\vec{w}\cdot\vec{u} = x_1x_2 + y_1y_2$

$= 2\times\frac{1}{3} + (-3)(-2) = \frac{2}{3} + 6$

$= \frac{20}{3}$

2* $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2(-\frac{1}{2}) + (-1)3$

$= -1 - 3 = -4$

$\vec{v}\cdot\vec{w} = (-\frac{1}{2})5 + 2\times 3$

$= -\frac{5}{2} + 6 = \frac{7}{2}$

$\vec{w}\cdot\vec{u} = 5\times 2 + 2(-1)$

$= 10 - 2 = 8$

$\frac{2}{50}$

1* $d: 2x + 5y - 5 = 0$

$A(5,3)$

$\Delta \perp d$

$\Rightarrow \vec{n}_d(2,5)$

أي

$\vec{n}_\Delta(-5,2)$

$ax + by + c = 0$

$-5x + 2y + c = 0$

$-5(5) + 2(3) + c = 0$

$-25 + 6 + c = 0$

$-19 + c = 0$

$c = 19$

$\Delta: -5x + 2y + 19 = 0$

2* $d: x - 3y + 2 = 0$

$A(-1,2)$

$\Delta \perp d$

$\Rightarrow \vec{n}_d(1,-3)$

أي

$\vec{n}_\Delta(3,1)$

$ax + by + c = 0$

$3x + y + c = 0$

$-3 + 2 + c = 0$

$-1 + c = 0$

$c = 1$

$\Delta: 3x + y + 1 = 0$

$\frac{3}{50}$

2 $\vec{AC}\cdot\vec{DB} = AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2$

$AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = (\vec{AB} - \vec{BC})$

$(\vec{AB} + \vec{BC}) + (\vec{CD} - \vec{DA})(\vec{CD} + \vec{DA})$

$= \vec{AC}(\vec{AB} - \vec{BC}) + \vec{CA}(\vec{CD} - \vec{DA})$

$= \vec{AC}(\vec{AB} - \vec{BC}) - \vec{AC}(\vec{CD} - \vec{DA})$

$= \vec{AC}(\vec{AB} - \vec{BC} - \vec{CD} + \vec{DA})$

$= \vec{AC}(\vec{DB} - \vec{BD}) = \vec{AC}(2\vec{DB})$

المدرس : محمد فوزي الجراد

دير الزور القصور جانب مدرسة حسان العطرة

م:0934636166

$\vec{w}\cdot\vec{u} = \frac{2}{3}+0+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$

$\|\vec{u}\|=5$, $\|\vec{v}\|=3$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=-4$ $\frac{2}{53}$

1*

$\vec{u}(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}\vec{u}$

$= 25 - 4 = 21$

2*

$\vec{v}(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{v}^2$

$= -4-9 = -13$

3*

$(2\vec{u})(\vec{v}-3\vec{u}) = 2\vec{u}\vec{v}-6\vec{u}^2$

$= 2(-4)-6(25) = -158$

4*

$(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-3\vec{v}) = \vec{u}^2-3\vec{u}\vec{v}$

$+\vec{u}\vec{v}-3\vec{v}^2 = 25+12-4$

$-27 = 6$

$\frac{3}{53}$

$\vec{SA}\times\vec{SB} =$

$\|\vec{SA}\|\times\|\vec{SB}\|\cos A\hat{S}B =$

بما أن المثلث $A\hat{S}B$ متساوي الأضلاع

فكل زاوية $\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow a.a.\frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$

$\vec{SA}\cdot\vec{SC} = 0$

$\vec{SA}\cdot\vec{SC} = -\vec{AS}\cdot\vec{SC}$

طريقة ثانية

$= -\frac{1}{2}\left[\|\vec{AS}+\vec{SC}\|^2-\|\vec{AS}\|^2-\|\vec{SC}\|^2\right]$

$= -\frac{1}{2}\left[\|\vec{AC}\|^2-\|\vec{AS}\|^2-\|\vec{SC}\|^2\right]$

$= 2\vec{AC}\cdot\vec{DB}$

$\frac{4}{50}$

1* $d: 2x+y-5=0$

$A(-2,4)$

$dist(A,d) = \frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$dist(A,d) = \frac{|2(-2)+4-5|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5}$

2* $d: \sqrt{2}x-3y-1=0$

$A(-\sqrt{2},2)$

$dist(A,d) = \frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$dist(A,d) = \frac{|\sqrt{2}(-\sqrt{2})-3(2)-1|}{\sqrt{2+9}}$

$= \frac{9}{\sqrt{11}}$

تمارين ص 53

$\frac{1}{53}$

1* $\vec{u}\cdot\vec{v} = (1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) +$

$\sqrt{3}(0) + (0\times-1) = 1-2 = -1$

$\vec{v}\cdot\vec{w} = 0-0-1 = -1$

$\vec{w}\cdot\vec{u} = 0-3+0 = -3$

2* $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = 1$

$\vec{v}\cdot\vec{w} = \frac{1}{2}+0+\frac{2}{3} = \frac{7}{6}$

$$= -\frac{1}{2}[2a^2 - a^2 - a^2] = 0$$

طريقة (2)

المثلثان $S\hat{A}C$ ، $A\hat{B}C$ طبوقان ، AC مشترك

$SA = BA = a$

$SC = BC = a$

إذاً الزاوية المقابلة للضلع المشتركة

من المثلثين الطبوقين متساوية أي

$\hat{S} = \hat{B} = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC} = 0$

طريقة (3)

نحسب AC من المثلث القائم $A\hat{B}C$

حسب نظرية فيثاغورث إذاً

$AC^2 = 2a^2$

ونجد حسب عكس فيثاغورث إذاً

$AC^2 = SA^2 + SC^2$

$2a^2 = a^2 + a^2$

إذاً المثلث $A\hat{S}C$ قائم في $\hat{S}$

$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC} = 0$ أي

$\boxed{2}$

$$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{SA}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[SC^2 - SA^2 - AC^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[a^2 - a^2 - 2a^2\right] = -a^2$$

طريقة

$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AC}$

نفرض (O) المسقط القائم لـ S على $[AC]$

حيث (O) منتصف $[AC]$

$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}$

$= -AO\cdot AC = -a^2$

$\frac{4}{53}$

نعرف معلماً متجانساً مبدؤه A

$(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$\overrightarrow{AB} = a\vec{i}$ $\quad \overrightarrow{AD} = a\vec{j}$ $\quad \overrightarrow{AE} = a\vec{k}$

$A(0,0,0)$ $\quad E(0,0,a)$

$B(a,0,0)$ $\quad F(a,0,a)$

$C(a,a,0)$ $\quad G(a,a,a)$

$D(0,a,0)$ $\quad H(0,a,a)$

$I(0,\frac{a}{2},a)$ $\quad J(a,a,\frac{a}{2})$

$\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{EA} = (\frac{a}{2},0,0)\cdot(0,0,-a)$

$= 0 + 0 + 0 = 0$

$\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FI}\cdot\overrightarrow{FC}$

$= (-a,\frac{a}{2},0)\cdot(0,0,-a)$

$= 0 + 0 + 0 = 0$

$\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{GJ} = (0,\frac{a}{2},0)\cdot(0,0,-\frac{a}{2})$

$= 0 + 0 + 0 = 0$

$\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{IE} = -EI^2$

$= \frac{a^2}{4}$

$\overrightarrow{JH}\cdot\overrightarrow{JD} = (-a,0,\frac{a}{2})\cdot(-a,0,-\frac{a}{2})$

$= a^2 + 0 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$

تدريب: $56p$

$\frac{1}{56}$

1* $\vec{v}(-\frac{2}{5}, 2, 3)$

$\vec{u}(\frac{5}{4}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = (\frac{5}{4})(-\frac{2}{5}) + 2(-\frac{3}{2}) + 3(\frac{1}{2})$

$= -\frac{1}{2} - 3 + \frac{3}{2} \neq 0$

المدرس: محمد فوزي الجراد

دير الزور القصور جانب مدرسة حسان العطرة

م:0934636166

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير متعامدين

2* $\vec{u}(\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$

$\vec{v}(-\sqrt{2}, 1, 1)$

$\vec{u}.\vec{v} = -2 + 1+\sqrt{2} + 1-\sqrt{2}$

$= 0$

$\Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

3* $\vec{u}(2, \frac{1}{2}, 5)$

$\vec{v}(-\frac{2}{5}, 3, \alpha)$

$\vec{u}.\vec{v} = 2(\frac{-2}{5}) + \frac{1}{2}(3) + 5\alpha$

$= \frac{-23}{10} + 5\alpha$

حتى يكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين يجب أن يتحقق: $\vec{u}.\vec{v} = 0$

$\Rightarrow \frac{-23}{10} + 5\alpha = 0$

$\Rightarrow \alpha = \frac{23}{50}$

4* $\vec{u}(\sqrt{3}, \frac{1}{3}, 2)$

$\vec{v}(\alpha, 2\alpha, \frac{1}{2})$

$\vec{u}.\vec{v} = \sqrt{3}\alpha + \frac{2\alpha}{3} + 1$

حتى يكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين يجب أن يتحقق: $\vec{u}.\vec{v} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{3}\alpha + \frac{2\alpha}{3} + 1 = 0$

$\alpha(\sqrt{3} + \frac{2}{3}) + 1 = 0$

$\alpha = \frac{-1}{\sqrt{3} + \frac{2}{3}}$

$\frac{2}{56}$

$A(2,-5,1)$ $B(0,2,6)$

$C(-2,3,1)$

$\vec{u} = -4i + j - 3k$

$\vec{AB}(-2,7,5)$

$\vec{AB}.\vec{u} = (-2)(-4) + 7 + 5(-3)$

$= 8 + 7 - 15 = 0$

$\Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{u}$

$\Rightarrow (AB) \perp d$

$\frac{3}{56}$

$\vec{u} = 6$

$\vec{v} = 8$

$\vec{u} + \vec{v} = 10$

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(100 - 36 - 64) = 0$

$\frac{4}{56}$

$(\vec{u}+\vec{v}) \perp (\vec{u}-\vec{v})$

$\Rightarrow (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = 0$

$(\vec{u}^2) - (\vec{v}^2) = 0$

$\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2$

$\Rightarrow \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

تدريب 59

$\frac{1}{59}$

1* $A(1,0,5)$

$\vec{n}(1,-1,0)$

$P: ax + by + cz + d = 0$

$x - y + d = 0$

$A \in P \Rightarrow 1 - 0 + d = 0$

$d = -1$

$P: x - y - 1 = 0$

2* $A(\sqrt{2}, -2, 5)$

$\vec{n}(2, -3, -1)$

$ax + by + cz + d = 0$

$Q: 2x - 3y - z + d = 0$

$A \in Q \Rightarrow 2\sqrt{2} + 6 - 5 + d = 0$

$2\sqrt{2} + 1 + d = 0$

2* $A(0,0,0)$

$P: Z = 2$

$P \parallel Q \Rightarrow \vec{n}_P = t\,\vec{n}_Q$

$t = 1 \Rightarrow \vec{n}_P = \vec{n}_Q$

$\vec{n}_Q(0,0,1)$

$ax + by + cz + d = 0$

$z + d = 0$

$A \in Q \Rightarrow d = 0$

$Q: Z = 0$

3* $A(0,3,0)$

$P: x + y = 5$

$P \parallel Q \Rightarrow \vec{n}_P = t\,\vec{n}_Q$

$t = 1 \Rightarrow \vec{n}_P = \vec{n}_Q$

$\vec{n}_Q(1,1,0)$

$ax + by + cz + d = 0$

$x + y + d = 0$

$A \in Q \Rightarrow 0 + 3 + d = 0$

$\Rightarrow d = -3$

$Q: x + y - 3 = 0$

4* $A(-1,2,-3)$

$P: 5x - 3y + 4z = 8$

$P \parallel Q \Rightarrow \vec{n}_P = t\,\vec{n}_Q$

$t = 1 \Rightarrow \vec{n}_P = \vec{n}_Q$

$\vec{n}_Q(5,-3,4)$

$ax + by + cz + d = 0$

$5x - 3y + 4z + d = 0$

$A \in Q \Rightarrow -5 - 6 - 12 + d = 0$

$d = 23$

$\Rightarrow d = -2\sqrt{2} - 1$

$Q: 2x - 3y - z - 2\sqrt{2} - 1 = 0$

3* $A(\frac{1}{2}, 3, -1)$

$\vec{n}(\frac{2}{3}, 4, -1)$

$ax + by + cz + d = 0$

$R: \frac{2}{3}x + 4y - z + d = 0$

$A \in R \Rightarrow \frac{1}{3} + 12 + 1 + d = 0$

$\frac{1}{3} + 13 + d = 0$

$\Rightarrow d = -\frac{40}{3}$

$R: \frac{2}{3}x + 4y - z - \frac{40}{3} = 0$

4* $A(0,-3,0)$

$\vec{n}(\sqrt{3}, 2, 0)$

$ax + by + cz + d = 0$

$S: \sqrt{3}x + 2y + d = 0$

$A \in S \Rightarrow -6 + d = 0$

$\Rightarrow d = 6$

$S: \sqrt{3}x + 2y + 6 = 0$

1* $A(1,0,1)$ $\frac{2}{59}$

$P: 2x - y + 3z = 4$

$P \parallel Q \Rightarrow \vec{n}_P = t\,\vec{n}_Q$

$t = 1 \Rightarrow \vec{n}_P = \vec{n}_Q$

$\Rightarrow \vec{n}_P = \vec{n}_Q(2,-1,3)$

$ax + by + cz + d = 0$

$2x - y + 3z + d = 0$

$A \in Q \Rightarrow 2 + 3 + d = 0$

$d = -5$

$Q: 2x - y + 3z - 5 = 0$

المدرس : محمد فوزي الجراد

دير الزور القصور جانب مدرسة حسان العطرة م:0934636166

2 * $P: 2x + y + 5 = 0$

$Q: 4x + 2y + z + 5 = 0$

$\vec{n}_P(2, 1, 0)$

$\vec{n}_Q(4, 2, 1)$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0$

الأشعة غير مرتبطة خطياً لعدم تناسب المركبات

أي المستويين متقاطعين

$\frac{5}{59}$

$A(5, -3, 4)$

$P: 2x - y + 3z - 5 = 0$

$dist(A, P) = \frac{|10 + 3 + 12 - 5|}{\sqrt{4 + 1 + 9}}$

$= \frac{20}{\sqrt{14}}$

$B(2, 2, 5)$

$Q: y - z = 0$

$dist(B, Q) = \frac{|2 - 5|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

الأنشطة

نشاط (1) خواص رباعي الوجوه المنتظم

*1 خواص عامة

.1

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AB}\| \, \|\vec{AC}\| \cos \hat{A}$ .a

بما أن المثلث ABC متساوي الأضلاع

$\Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = a \times a \times \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$

$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \|\vec{AB}\| \, \|\vec{BC}\| \cos(\vec{AB}, \vec{BC})$

$= a \times a \times -\frac{1}{2} = -\frac{a^2}{2}$

$Q: 5x - 3y + 4z + 23 = 0$

$\frac{3}{59}$

$P: 7x + 3y - z - 1 = 0$

$Q: 6x - 11y - 9z - 5 = 0$

$R: 2x - 3y + 5z + 4 = 0$

1*

$\vec{n}_P(7, 3, -1)$

$\vec{n}_Q(6, -11, -9)$

$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 42 - 33 + 9 \neq 0$

أي أن المستويين غير متعامدين

2*

$\vec{n}_P(7, 3, -1)$

$\vec{n}_R(2, -3, 5)$

$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_R = 14 - 9 - 5 = 0$

أي أن المستويين متعامدين

3*

$\vec{n}_Q(6, -11, -9)$

$\vec{n}_R(2, -3, 5)$

$\vec{n}_Q \cdot \vec{n}_R = 12 + 33 - 25 \neq 0$

أي المستويين متعامدين

$\frac{4}{59}$

1* $P: x - y + z = 0$

$Q: x - y + z - 3 = 0$

$\vec{n}_P(1, -1, 1)$

$\vec{n}_Q(1, -1, 1)$

$1 = 1 = 1$

الأشعة مرتبطة خطياً لتناسب المركبات

أي المستويين متوازيين غير متقاطعين

$\vec{AB}\cdot\vec{AD} = \|\vec{AB}\|\,\|\vec{AD}\| \cos(\vec{AB},\vec{AD})$

بما أن المثلث ABD متساوي الأضلاع

$\Rightarrow \vec{AB}\cdot\vec{AD} = a \times a \times \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$

b.

$\vec{AB}\cdot\vec{CD} = \vec{AB}(\vec{CA}+\vec{AD}) = \vec{AB}(\vec{AD}-\vec{AC})$

$= \vec{AB}\cdot\vec{AD} - \vec{AB}\cdot\vec{AC}$

$= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$

$\Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{CD}$

c.

بما أن رباعي الوجوه منتظم ورؤوسه متناظرة

$\Rightarrow \vec{AD} \perp \vec{BC}$ و $\vec{AC} \perp \vec{BD}$

d.

$\vec{IJ} = \vec{IB} + \vec{BC} + \vec{CJ}$

$\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{CD}$

$\vec{AB}\cdot\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AB}\cdot\vec{AB} + \vec{AB}\cdot\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{AB}\cdot\vec{CD}$

$= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$

$\Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{IJ}$

$\vec{CD}\cdot\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AB}\cdot\vec{CD} + \vec{CD}\cdot\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{CD}\cdot\vec{CD}$

$= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$

$\Rightarrow \vec{CD} \perp \vec{IJ}$

2.

a.

$\vec{AG}\cdot\vec{CD} = (\vec{AB}+\vec{BG})\vec{CD}$

$= \vec{AB}\cdot\vec{CD} + \vec{BG}\cdot\vec{CD}$

$= 0 + 0 = 0$

$\vec{AG}\cdot\vec{BD} = (\vec{AC}+\vec{CG})\vec{BD}$

$= \vec{AC}\cdot\vec{BD} + \vec{CG}\cdot\vec{BD}$

$0 + 0 = 0$

$\Rightarrow \vec{AG} \perp \vec{CD}$

$\vec{AG} \perp \vec{BD}$

$\vec{AG}$ عمودي على مستقيمين متقاطعين في المستوي BCD إذن AG هو ارتفاع نازل من A إلى المستوي BCD

b.

مما سبق نجد أن ارتفاعات رباعي الوجوه المنتظم تكون من الرأس إلى مركز ثقل الوجه المقابل للرأس

3.

a. G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$(B,1) \quad (C,1) \quad (D,1)$

النقطة O مركز الأبعاد متناسبة لـ

$(A,1) \quad (G,3)$

حسب الخاصة التجميعية

$\vec{AO} = \frac{3}{4}\vec{AG}$

النقاط A, O, G تقع على استقامة واحدة

لما كان G مركز ثقل المثلث BCD كان

$3\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}$

$9\vec{AG}^2 = (\vec{AB}+\vec{AC}+\vec{AD})(\vec{AB}+\vec{AC}+\vec{AD})$

$= \vec{AB}^2 + \vec{AC}^2 + \vec{AD}^2 + 2\vec{AB}\cdot\vec{AC} + 2\vec{AB}\cdot\vec{AD} + 2\vec{AC}\cdot\vec{AD}$

$= a^2 + a^2 + a^2 + 2\frac{a^2}{2} + 2\frac{a^2}{2} + 2\frac{a^2}{2}$

$= 3a^2 + 3a^2 = 6a^2$

$\Rightarrow 3AG = \sqrt{6}a$

إذن $AG = \frac{\sqrt{6}}{3}a$

b. طالما أن I مركز الأبعاد لـ (C,1) (C, 1)

و J مركز الأبعاد لـ (D,1) (D, 1)

(A,1) (B,1) حسب الخاصة التجميعية

O مركز الأبعاد المتناسبة لـ (I,2)

(J,2)

$\Rightarrow$ O منتصف $[IJ]$

C.

$OA = OB$

وجدنا سابقاً

$2\vec{IJ} = \vec{AB} + 2\vec{BC} + \vec{CD}$

لكن $\vec{IJ} = 2\vec{IO}$

$\Rightarrow 4\vec{IO} = \vec{AB} + 2\vec{BC} + \vec{CD}$

$4\vec{IO} \times 4\vec{IO} = (\vec{AB} + 2\vec{BC} + \vec{CD})$
$(\vec{AB} + 2\vec{BC} + \vec{CD})$

$16 IO^2 = AB^2 + 2\vec{AB}.\vec{BC} + 2\vec{BC}$
$\vec{AB} + 4BC^2 + 2\vec{BC}.\vec{CD} + \vec{CD}.\vec{AB}$
$+ 2\vec{CD}.\vec{AC} + \vec{CD}^2 = 2a^2$

$\Rightarrow IO = \frac{\sqrt{2}}{4} a$

d. بما أن رباعي وجوه منتظم

$\Rightarrow OA = OB = OC = OD = \frac{\sqrt{6}}{4} a$

4.

a.

طريقة (1)

$\vec{OA}.\vec{OB} = OA.OB \cos A\hat{O}B$

$= \frac{6}{16} a^2 \cos A\hat{O}B = \frac{3}{8} a^2 \cos A\hat{O}B$

طريقة (2)

$\vec{OA}.\vec{OB} = (\vec{OI} + \vec{IA})(\vec{OI} + \vec{IB})$

$= (\vec{OI} + \vec{IA})(\vec{OI} - \vec{IA})$

$= OI^2 - IA^2 = \frac{2}{16} a^2 - \frac{a^2}{4}$

$= -\frac{2a^2}{16} = -\frac{a^2}{8}$

$\Rightarrow -\frac{a^2}{8} = \frac{3}{8} a^2 \cos A\hat{O}B$

$\Rightarrow \cos A\hat{O}B = -\frac{1}{3}$

b.

بالاعتماد على الآلة الحاسبة نجد

$\cos A\hat{O}B = -\frac{1}{3}$

$A\hat{O}B \simeq 109,47°$

ومن تطابق المثلثات $A\hat{O}B, B\hat{O}C, C\hat{O}D$

و $A\hat{O}D$ نجد

$A\hat{O}B = B\hat{O}C = C\hat{O}D = A\hat{O}D$

2* تطبيق في الكيمياء

a. الزاوية المطلوبة هي ذاتها

$A\hat{O}B \simeq 109,47°$

b. طول الرابطة C-H تساوي

$OA = \frac{\sqrt{6}}{4} a$

$\Rightarrow a = \frac{4}{\sqrt{6}} \times 1,09 \times 10^{-10} = 1,779 \times 10^{-10}$

نشاط (2) استعمال معلم

1* رباعي الوجوه ثلاثي الزوايا القائمة

1.

a. $OH \perp HA \Rightarrow \vec{OH}.\vec{HA} = 0$

$OH \perp HB \Rightarrow \vec{OH}.\vec{HB} = 0$

$OH \perp HC \Rightarrow \vec{OH}.\vec{HC} = 0$

$3x = \vec{OH}.\vec{OA} = \vec{OH}(\vec{OH} + \vec{HA})$
$= \vec{OH}^2$

$2y = \vec{OH}.\vec{OB} = \vec{OH}(\vec{OH} + \vec{HB})$
$= \vec{OH}^2$

$z = \vec{OH}.\vec{OC} = \vec{OH}(\vec{OH} + \vec{HC})$
$= \vec{OH}^2$

$\Rightarrow k = OH^2$

$x = \frac{k}{3} \; , \; y = \frac{k}{2} \; , \; z = k$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{k^2}{9} + \frac{k^2}{4} + k^2$

$OH^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$k = \frac{49}{36} k^2 \Rightarrow k = \frac{36}{49}$

$\Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{12}{49}, \frac{18}{49}, \frac{36}{49}\right)$

b.

$\overrightarrow{AB}(-3, 2, 0)$

$\overrightarrow{OC}(0, 0, 1)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$

$\overrightarrow{OH}\left(\frac{12}{49}, \frac{18}{49}, \frac{36}{49}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OH} = \frac{-36+36}{49} + 0 = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OH} \; ; \; \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OC}$

$\Rightarrow (AB) \perp (OCH)$

c.

$\overrightarrow{CH}\left(\frac{12}{49}, \frac{18}{49}, \frac{-13}{49}\right)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CH}$

$\overrightarrow{AC}(-3, 0, 1)$

$\overrightarrow{BH}\left(\frac{12}{49}, -\frac{80}{49}, \frac{36}{49}\right)$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BH} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BH}$

$(AC) \perp (BH)$ مما سبق نجد أن

$(AB) \perp (HC)$

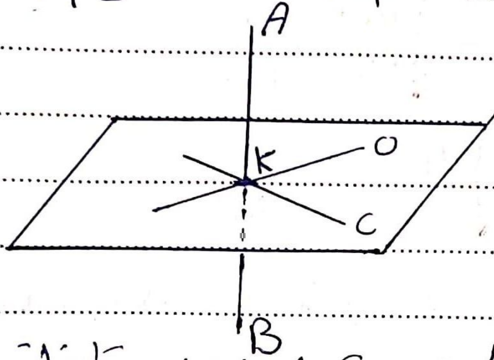
أي H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث (ABC)

2.

a. من الطلب السابق وجدنا أن

$(AB) \perp (OCH)$

أي جميع نقاط المستوي (OCH) لها المسقط القائم ذاته على المستقيم (AB)



وبالتالي O و C لهما المسقط ذاته وليكن k على (AB)

النقاط A, k, B واقعة على استقامة واحدة أي

$\overrightarrow{AK} = t\,\overrightarrow{AB}$

$$\begin{pmatrix} x-3 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x - 3 = -3t$

$x = 3 - 3t$

$y = 2t$

$z = 0$

لكن

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{Ok} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{Ok} = 0$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$-3x + 2y = 0$

$-9 + 9t + 4t = 0$

المدرس : محمد فوزي الجراد

دير الزور القصور جانب مدرسة حسان العطرة م:0934636166

$$\begin{pmatrix} x-a \\ y \\ z-a \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -a \\ a \\ -a \end{pmatrix}$$

$x-a=-a\lambda \Rightarrow x=a-a\lambda$

$y=a\lambda$

$z-a=-a\lambda \Rightarrow z=a-a\lambda$

نعوض في (1)

$-(a-a\lambda)+a\lambda-(a-a\lambda)+a=0$

$-a+a\lambda+a\lambda-a+a\lambda+a=0$

$3a\lambda=a$

$\Rightarrow \lambda=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow H(\frac{2}{3}a, \frac{1}{3}a, \frac{2}{3}a)$

.3

$\overrightarrow{A'H}(\frac{2}{3}a, \frac{1}{3}a, -\frac{1}{3}a)$

$$\overrightarrow{A'H}\cdot\overrightarrow{AC'} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}a \\ \frac{1}{3}a \\ -\frac{1}{3}a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -a \\ a \\ -a \end{pmatrix}$$

$= -\frac{2}{3}a^2+\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{3}a^2=0$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC'} \perp \overrightarrow{A'H}$

H هو المسقط القائم للنقطة A' على (AC')

$\overrightarrow{DH}(-\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a, \frac{2}{3}a)$ .4

$\overrightarrow{AC'}(-a, a, -a)$

$\overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{DH} = \frac{1}{3}a^2+\frac{1}{3}a^2-\frac{2}{3}a^2=0$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC'} \perp \overrightarrow{DH}$

إذن H هو المسقط القائم لـ D على المستقيم (AC')

.a $13t=9$

$\Rightarrow t=\frac{9}{13}$

$\Rightarrow k(\frac{12}{13}, \frac{18}{13}, 0)$

.b

$OK=\sqrt{\frac{144}{169}+\frac{324}{169}}$

$=\sqrt{\frac{468}{338}}=\frac{6}{\sqrt{13}}$

وبما أن المثلث قائم في O KOC

$\Rightarrow \tan O\hat{K}C=\frac{OC}{OK}=\frac{\sqrt{13}}{6}$

بالاستعانة بالآلة الحاسبة نجد

$O\hat{K}C \approx 31^\circ$

نعتبر مبدأ المعلم *2

.1 $D'(0,0,0)$ $D(a,0,0)$

$C(a,a,0)$ $C'(0,a,0)$

$A'(0,0,a)$ $A(a,0,a)$

$B'(0,a,a)$ $B(a,a,a)$

.a .2

$\overrightarrow{AC'}(-a, a, -a)$

$\overrightarrow{BH}(x-a, y-a, z-a)$

$$\begin{pmatrix} -a \\ a \\ -a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x-a \\ y-a \\ z-a \end{pmatrix}=0$$

$-ax+a^2+ay-a^2-az+a^2=0$

$-ax+ay-az+a^2=0$

$-x+y-z+a=0$ ......(1)

.b

$\overrightarrow{AH}(x-a, y, z-a)$

م:0934636166
دير الزور القصور جانب مدرسة حسان العطرة
المدرس : محمد فوزي الجراد

5.

a. نفرض $k(\alpha, \beta, \gamma)$

$\overrightarrow{C'k} = t\overrightarrow{C'A}$

$$\begin{pmatrix} \alpha-0 \\ \beta-a \\ \gamma \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} a-0 \\ 0-a \\ a-0 \end{pmatrix}$$

$\alpha = at$

$\beta = a - at$

$\gamma = at$

لكن

$\overrightarrow{D'k} \perp \overrightarrow{AC'} \Rightarrow \overrightarrow{D'k}\cdot\overrightarrow{AC'} = 0$

$$\begin{pmatrix} \alpha-0 \\ \beta-0 \\ \gamma-0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0-a \\ a-0 \\ 0-a \end{pmatrix} = 0$$

$-\alpha a + \beta a - \gamma a = 0$

$-a^2t + a^2 - a^2t - a^2t = 0$

$a^2 = 3ta^2 \Rightarrow t = \frac{1}{3}$

أي

$k\left(\frac{a}{3}, \frac{2}{3}a, \frac{a}{3}\right)$

b. $\overrightarrow{C'k}\left(\frac{a}{3}, \frac{-a}{3}, \frac{a}{3}\right)$

$\overrightarrow{HA}\left(\frac{a}{3}, \frac{-a}{3}, \frac{a}{3}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{C'k} = \overrightarrow{HA}$

c. إن k هو نظيرة H بالنسبة O مركز المكعب

بالتالي k المسقط لـ C و B' ذاته على (AC')

تمرينات ومسائل

$\frac{1}{64}$

1* $\vec{u}(2,5)$ $\vec{v}(-2,5)$
$\vec{w}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right)$ $\vec{t}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}\right)$
$\vec{s}\left(2, -\frac{4}{5}\right)$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = -4 - 25 = -29$

غير متعامدين

$\vec{u}\cdot\vec{w} = -1 + 1 = 0$

متعامدين

$\vec{u}\cdot\vec{t} = 1 - 1 = 0$

متعامدين

$\vec{u}\cdot\vec{s} = 4 - 4 = 0$

متعامدين

$\vec{v}\cdot\vec{w} = 1 - 1 = 0$

متعامدين

$\vec{v}\cdot\vec{t} = -1 + 1 = 0$

متعامدين

$\vec{v}\cdot\vec{s} = -4 + 4 = 0$

متعامدين

$\vec{w}\cdot\vec{t} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{25} \neq 0$

غير متعامدين

$\vec{w}\cdot\vec{s} = -1 - \frac{4}{25} \neq 0$

غير متعامدين

$\vec{t}\cdot\vec{s} = 1 + \frac{4}{25} \neq 0$

غير متعامدين

2* ① $A(4,1)$ $B(-1,2)$

$\overrightarrow{AB}(-5,1)$

$ax + by + c = 0 \Rightarrow -5x + y + c = 0$

$I(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$

منتصف $\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow -5(\frac{3}{2}) + \frac{3}{2} + C = 0$

$-\frac{15}{2} + \frac{3}{2} + C = 0$

$-\frac{12}{2} + C = 0$

$\Rightarrow C = 6$

$-5x + y + 6 = 0$

② $A(-5,3)$ $B(-2, \frac{1}{3})$

$\overrightarrow{AB}(3, -\frac{8}{3})$

$ax + by + C = 0 \Rightarrow 3x - \frac{8}{3}y + C = 0$

$J(-\frac{7}{2}, \frac{10}{6})$

منتصف $\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow 3(-\frac{7}{2}) - \frac{8}{3}(\frac{10}{6}) + C = 0$

$-\frac{21}{2} - \frac{80}{18} + C = 0$

$-\frac{189}{18} - \frac{80}{18} + C = 0$

$-\frac{269}{18} + C = 0$

$\Rightarrow C = \frac{269}{18}$

$3x - \frac{8}{3}y + \frac{269}{18}$

3* $A(-5,2)$ $B(1,-1)$

$C(-3,3)$ $E(-\frac{9}{4}, -1)$

$\overrightarrow{AC}(2,1)$

$\vec{n}_{AC}(-1,2)$

$ax + by + C = 0$

$-x + 2y + C = 0$

$C \in AC$

$3 + 6 + C = 0$

$C = -9$

$AC: -x + 2y - 9 = 0$

$L_1 = \frac{|-(-\frac{9}{4}) + 2(-1) - 9|}{\sqrt{1+4}}$

$= \frac{35}{4\sqrt{5}}$

$\overrightarrow{AB}(6, -3)$

$\vec{n}_{AB}(3, 6)$

$ax + by + C = 0$

$3x + 6y + C = 0$

$B \in AB$ $3 - 6 + C = 0$

$C = 3$

$AB: 3x + 6y + 3 = 0$

$L_2 = \frac{|3(-\frac{9}{4}) + 6(-1) + 3|}{\sqrt{9+36}}$

$= \frac{39}{12\sqrt{5}} = \frac{13}{4\sqrt{5}}$

$L_1 \neq L_2$

أي أن E ليست متساوية البعد عن المستقيمين 2

حل لعبة (1)

$\frac{2}{64}$

لنعرف معلماً متجانساً

$(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$

$I(\frac{1}{2}, 0)$ $J(1, \frac{1}{2})$

$D(0,1)$ $\overrightarrow{CI}(-\frac{1}{2}, -1)$

$C(1,1)$ $\overrightarrow{DJ}(1, -\frac{1}{2})$

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 20+1-18 = 3$

$\vec{AB}\cdot\vec{CD} = -5-4+9 = 0$

$\vec{AB} \perp \vec{CD}$

$\vec{DB}\cdot\vec{AC} = 8+4-\frac{25}{2} = \frac{-21}{2}$

$\vec{MB}\cdot\vec{CD} = -\frac{5}{2}-\frac{4}{2}+\frac{9}{2} = 0$

$\vec{MB} \perp \vec{CD}$

3* ① $P: x+2y-5z+7=0$

$Q: x+2y+z-3=0$

$\vec{n}_P(1,2,-5)$

$\vec{n}_Q(1,2,1)$

$\vec{n}_P\cdot\vec{n}_Q = 1+4-5 = 0$

$\Rightarrow P \perp Q$

② $P: x-3y+2=0$

$Q: y-2z+3=0$

$\vec{n}_P(1,-3,0)$

$\vec{n}_Q(0,1,-2)$

$\vec{n}_P\cdot\vec{n}_Q = 0-3+0 = -3$

$P \not\perp Q$

4* ① $P: x+y-2z+4=0$

$A(0,\sqrt{2},1)$

$dist(A,P) = \frac{|\sqrt{2}-2+4|}{\sqrt{1+1+4}}$

$= \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

② $P: 3x+y-\frac{z}{2}+7=0$

$A(5,-2,0)$

$dist(A,P) = \frac{|15-2+7|}{\sqrt{10+\frac{1}{4}}}$

$= \frac{40}{\sqrt{41}}$

$\vec{DJ}\cdot\vec{CI} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 0$

بما أن جداءهما السلمي يساوي الصفر أي

$\vec{DJ} \perp \vec{CI}$

طريقة (2)

$\vec{DJ}\cdot\vec{CI} = (\vec{DC}+\vec{CJ})(\vec{CB}+\vec{BI})$

$= \vec{DC}\cdot\vec{CB} + \vec{DC}\cdot\vec{BI} + \vec{CJ}\cdot\vec{CB} + \vec{CJ}\cdot\vec{BI}$

$= 0 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + 0 = 0$

$\Rightarrow \vec{DJ} \perp \vec{CI}$

$\frac{3}{64}$

1* ① $\vec{u}(1,-2,5)$

$\vec{v}(2,-\frac{3}{2},1)$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2+3+5 = 10$

غير متعامدين

② $\vec{u}(\sqrt{2},\sqrt{3},0)$

$\vec{v}(\sqrt{2},\sqrt{3},1)$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2+5 = 5$

غير متعامدين

2* $A(4,1,-2)$ $B(-1,2,4)$

$C(0,2,-5)$ $D(1,-2,-\frac{7}{2})$

$\vec{AB}(-5,1,6)$

$\vec{AC}(-4,1,-3)$

$\vec{CD}(1,-4,\frac{3}{2})$

$\vec{DB}(-2,4,\frac{15}{2})$

$M(\frac{3}{2},\frac{3}{2},1)$

$\vec{MB}(-\frac{5}{2},\frac{1}{2},3)$

المدرس : محمد فوزي الجراد

دير الزور القصور جانب مدرسة حسان العطرة م:0934636166

$\frac{4}{65}$

$A(1,-1,2)$

$B(2,0,4)$

$P: x - y + 3z - 4 = 0$

$\overrightarrow{AB}(1,1,2)$

$\overrightarrow{n_P}(1,-1,3)$

$\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1}$

الشعاعين غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب المركبات

نفرض $\overrightarrow{n_Q}(a,b,c)$

$\overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{n_Q} \Rightarrow \overrightarrow{n_P} \cdot \overrightarrow{n_Q} = 0$

$a - b + 3c = 0$

$b = a + 3c \quad ...(1)$

$\overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{n_Q} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$a + b + 2c = 0$

$b = -a - 2c \quad ...(2)$

من (1) و (2)

$a + 3c = -a - 2c$

$2a = -5c$

نفرض $c = 2$

$\Rightarrow a = -5$

$b = 1$

$\overrightarrow{n_Q}(-5,1,2)$

$Q: -5x + y + 2z + d = 0$

$A \in Q \Rightarrow -5 - 1 + 4 + d = 0$

$\Rightarrow d = 2$

$Q: -5x + y + 2z + 2 = 0$

$\frac{5}{66}$

$A(3,-1,2)$

$P: 2x - y + z - 4 = 0 \quad ...(1)$

$Q: x + y + 2z - 5 = 0 \quad ...(2)$

$\overrightarrow{n_P}(2,-1,1)$

$\overrightarrow{n_Q}(1,1,2)$

$2 \neq -1$

الناظمين غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب المركبات أي المستويين متقاطعين بفصل مشترك

نجمع (1) و (2)

$3x + 3z - 9 = 0$

$3x = -3z + 9$

$x = -z + 3 \quad ...(3)$

نعوض من (3) في (2)

$-z + 3 + y + 2z - 5 = 0$

$y + z - 2 = 0$

$y = -z + 2$

$M(-z+3, -z+2, z)$

$z = 0 \Rightarrow M_1(3,2,0)$

$z = 1 \Rightarrow M_2(2,0,1)$

نفرض $A'(a,b,c)$ مسقط قائم لـ A على الفصل المشترك للمستويين أي A' و M_1 و M_2 تقع على استقامة واحدة أي الشعاعين :

$\overrightarrow{M_1A'}$ و $\overrightarrow{M_1M_2}$

مرتبطين خطياً

$\overrightarrow{M_1A'} = t\overrightarrow{M_1M_2}$

$-23 \neq 0$

إذاً $\vec{AB}$ و $\vec{n}$ غير متعامدين أي أن

$\vec{AB}$ لا يوازي P إذاً هو يقطع المستوي

في النقطة $C(a,b,c)$ ولإيجادها

C

$\vec{AC} = \alpha \vec{AB}$

$$\begin{pmatrix} a-2 \\ b+1 \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$a-2 = -3\alpha \Rightarrow a = -3\alpha + 2$

$b+1 = 4\alpha \Rightarrow b = 4\alpha - 1$

$c = 5\alpha$

بما أن

$C \in P \Rightarrow 2(-3\alpha+2) - 3(4\alpha-1) + 5\alpha - 5 = 0$

$-6\alpha + 4 - 12\alpha + 3 + 5\alpha - 5 = 0$

$-13\alpha + 2 = 0$

$\Rightarrow \alpha = \frac{2}{13}$

$a = \frac{-6\alpha}{13} + 2 = \frac{20}{13}$

$b = \frac{8}{13} - 1 = \frac{-5}{13}$

$c = \frac{10}{13}$

$C\left(\frac{20}{13}, \frac{-5}{13}, \frac{10}{13}\right)$

$A(2,5,3)$ $\vec{u}(1,1,-2)$ $\frac{7}{67}$

$B(-1,0,-1)$ $\vec{v}(3,-1,-1)$

$\vec{AB}(-3,-5,-4)$

$\frac{1}{3} \neq -1$

$$\begin{pmatrix} a-3 \\ b-2 \\ c \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$a-3 = -t \Rightarrow a = 3-t$

$b-2 = -2t \Rightarrow b = 2-2t$

$c = t$

$\vec{AA'} \perp \vec{M_1 M_2}$

$$\begin{pmatrix} a-3 \\ b+1 \\ c-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$-a+3-2b-2+c-2=0$

$-a-2b+c-1=0$

$-(3-t)-2(-2t+2)+t-1=0$

$-3+t+4t-4+t-1=0$

$6t-8=0 \Rightarrow t = \frac{4}{3}$

$A'\left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$

$AA' = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{-5}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{25}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{42}{9}} = \frac{\sqrt{42}}{3}$

$\frac{6}{67}$

$A(2,-1,0)$

$B(-1,3,5)$

$P: 2x - 3y + z - 5 = 0$

$\vec{AB}(-3,4,5)$

$\vec{n}(2,-3,1)$

$\vec{AB} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{n} = 0$

$-6-12-5=0$

إذاً $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً

$\vec{AB}\cdot\vec{u} = -3-5+8=0$

$\vec{AB}\perp\vec{u}$

$\vec{AB}\cdot\vec{v} = -9+5+4=0$

$\vec{AB}\perp\vec{v}$

$\Rightarrow AB \perp P$

$\frac{8}{67}$

$A(1,2,0)$ $C(1,5,5)$

$B(0,0,1)$ $D(-11,9,-4)$

$\vec{AB}(-1,-2,1)$

$\vec{BC}(1,5,4)$

$-1 \neq \frac{-2}{5}$

$\vec{AB}$ و $\vec{BC}$ غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب المركبات إذاً هما شعاعي توجيه لمستوي

نفرض

$\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n}\perp\vec{AB} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{AB}=0$

$-a-2b+c=0 \quad ...(1)$

$\vec{n}\perp\vec{BC}\Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{BC}=0$

$a+5b+4c=0 \quad ...(2)$

نجمع (1) و (2)

$3b+5c=0$

$b=-\frac{5}{3}c$

$c=3 \Rightarrow b=-5$

نعوض في (1)

$-a+10+3=0$

$a=13$

$n(13,-5,3)$

$(ABC): 13x-5y+3z+d=0$

$A\in(ABC): 13-10+d=0$

$\Rightarrow d=-3$

$(ABC): 13x-5y+3z-3=0$

لدينا مسقط D على المستوي ABC هو D'

نفرض $D'(\alpha,\beta,\gamma)$

إذاً

$\vec{n}$ و $\vec{DD'}$

مرتبطين خطياً

$\vec{DD'} = t\vec{n}$

$$\begin{pmatrix}\alpha+11\\ \beta-9\\ \gamma+4\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}13\\ -5\\ 3\end{pmatrix}$$

$\alpha+11=13t \Rightarrow \alpha=13t-11$

$\beta-9=-5t \Rightarrow \beta=-5t+9$

$\gamma+4=3t \Rightarrow \gamma=3t-4$

$D'\in(ABC)$

$13\alpha-5\beta+3\gamma-3=0$

$13(13t-11)-5(-5t+9)+3(3t-4)-3=0$

$169t-143+25t-45+9t-12-3=0$

$203t-203=0$

$t=1$

$D'(2,4,-1)$

$\frac{9}{68}$

$A(0,0,0)$ $A'(0,0,c)$

$B(b,0,0)$ $B'(b,0,c)$

$C(b,a,0)$ $C'(b,a,c)$

$D(0,a,0) \quad D'(0,a,c)$

$O\left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right)$

$\overrightarrow{OD'} \cdot \overrightarrow{OC} = \|\overrightarrow{OD'}\| \, \|\overrightarrow{OC}\| \cos(\hat{\alpha})$

و $\alpha = \widehat{D'OC}$

$\overrightarrow{OD'}\left(-\frac{b}{2}, \frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right)$

$\|\overrightarrow{OD'}\| = \sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$

$\overrightarrow{OC}\left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}, -\frac{c}{2}\right)$

$\|\overrightarrow{OC}\| = \sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$

$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{OD'} \cdot \overrightarrow{OC}}{\|\overrightarrow{OD'}\| \, \|\overrightarrow{OC}\|} = \frac{\frac{-b^2+a^2-c^2}{4}}{\frac{a^2+b^2+c^2}{4}}$

$= \frac{a^2-b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2}$

وفي حالة الشكل مكعب

$a = b = c$

$\cos\alpha = \frac{-a^2}{3a^2} = \frac{-1}{3}$

$\frac{10}{69}$

$1* \; A(1,2,-3)$

$P: 2x-y+z+1=0$

$dist(A,P) = \frac{|2-2-3+1|}{\sqrt{4+1+1}}$

$= \frac{2}{\sqrt{6}}$

$2* \; A(-1,1,1) \quad B(0,1,0)$

$C(-1,1,0) \quad D(1,2,-3)$

$\overrightarrow{BD}(-1,-3,-3)$

$\overrightarrow{CD}(0,-3,-3)$

$0 \neq 1$

الشعاعين غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب المركبات إذاً الشعاعين يمثلان شعاعي توجيه

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\overrightarrow{BD} \perp \vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{BD} \cdot \vec{n} = 0$

$-a-3b-3c=0 \quad \dots(1)$

$\overrightarrow{CD} \perp \vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \cdot \vec{n} = 0$

$-3b-3c=0$

$-3b=3c$

$-b=c$

$c=1 \Rightarrow b=-1$

نعوض في (1)

$-a+3-3=0$

$\Rightarrow a=0$

$P: -y+z+d=0$

$B \in P: -1+0+d=0$

$d=1$

$P: -y+z+1=0$

$dist(A,P) = \frac{|-1+1+1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{11}{69}$

$AB=2 \quad BC=GC=1$

I منتصف $[AB]$

$(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

*1

$A(0,0,0) \quad B(2,0,0) \quad G(2,1,1)$

$C(2,1,0) \quad D(0,1,0) \quad H(0,1,1)$

$E(0,0,1) \quad F(2,0,1)$

*2

$I(1,0,0)$

$\overrightarrow{IF}(1,0,1)$

$\overrightarrow{FH}(-2,1,0)$

$= -\frac{1}{2} \neq 0$

الشعاعين غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب المركبات أي أنهما يمثلان شعاعي توجيه المستوي IFH

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n} \perp \overrightarrow{IF} \Rightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{IF} = 0$

$a + c = 0$

$\Rightarrow a = -c$

$\vec{n} \perp \overrightarrow{FH} \Rightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{FH} = 0$

$-2a + b = 0$

$-2a = -b$

$2a = b$

$c = 1 \Rightarrow a = -1 \ , \ b = -2$

$P: -x - 2y + z + d = 0$

$H \in P \Rightarrow -2 + 1 + d = 0$

$d = 1$

$P: -x - 2y + z + 1 = 0$

*3

$$dist(G,P) = \frac{|-2-2+1+1|}{\sqrt{1+4+1}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{6}}$$

*4

نفرض مسقط G على IH

$G'(\alpha,\beta,\gamma)$

إذا كانت I و G' و H واقعة على

استقامية النقاط أي أن الشعاعين $\overrightarrow{HG'}$ و $\overrightarrow{HI}$ مرتبطة خطياً

$\overrightarrow{HG'}(\alpha, \beta-1, \gamma-1)$

$\overrightarrow{HI}(1,-1,-1)$

$\overrightarrow{HG'} = t\,\overrightarrow{HI}$

$$\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta-1 \\ \gamma-1\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1 \\ -1 \\ -1\end{pmatrix}$$

$\alpha = t$

$\beta - 1 = -t \Rightarrow \beta = -t + 1$

$\gamma - 1 = -t \Rightarrow \gamma = 1 - t$

نعلم أيضاً

$\overrightarrow{GG'} \perp \overrightarrow{HI}$

$\overrightarrow{GG'}\cdot\overrightarrow{HI} = 0$

$$\begin{pmatrix}\alpha-2 \\ \beta-1 \\ \gamma-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ -1 \\ -1\end{pmatrix} = 0$$

$\alpha - 2 - \beta + 1 - \gamma + 1 = 0$

$\alpha - \beta - \gamma = 0$

$t + t - 1 + t - 1 = 0$

$3t - 2 = 0$

$t = \frac{2}{3}$

$G'\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$$\|\overrightarrow{GG'}\| = \sqrt{\left(2-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$\|\overrightarrow{GG'}\| \neq dist(G,P)$

إذاً المسقط على المستقيم ليس هو المسقط على المستوي

$\frac{12}{69}$

$M(a,b,c)$ نقطة من الفصل المشترك عندئذٍ إحداثياتها تحقق معادلة كل من P و Q

$P: x-y+z=0$

$a-b+c=0$

$Q: 3x+z-1=0$

$3a+c-1=0$

$\Rightarrow c=1-3a$

$b=a+c=a+1-3a=-2a+1$

$M(a,1-2a,1-3a)$

$\|\overrightarrow{AM}\|^2=(a-2)^2+(-1-2a)^2+(2-3a)^2$

$=14a^2-12a+9$

$=14\left(a-\frac{3}{7}\right)^2+\frac{45}{7}$

$dist(A,P)=3\sqrt{\frac{5}{7}}$

$M\in D\left(\frac{3}{7},\frac{1}{7},\frac{-2}{7}\right)$

$A(2,1,2)$ $\frac{13}{69}$

$P: x+y-2z-1=0$

$Q: x+y+z=0$

1* $\vec{n}_P(1,1,-2)$

$\vec{n}_Q(1,1,1)$

$\vec{n}_P\cdot\vec{n}_Q=1+1-2=0$

$\vec{n}_P\perp\vec{n}_Q$

$\Rightarrow P\perp Q$

2* $L_1=\frac{|2+1-4-1|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{2}{\sqrt{6}}$

$L_2=\frac{|2+1+2|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{5}{\sqrt{3}}$

نفرض أن L هو البعد بين A والفصل المشترك للمستويين المتعامدين عندئذٍ حسب فيثاغورث

$L^2=L_1^2+L_2^2$

$L^2=\frac{4}{6}+\frac{25}{3}=\frac{4+50}{6}=\frac{54}{6}$

$=9$

$\Rightarrow L=3$

$\frac{14}{69}$

1* $P: x+y+z=0$

$A(1,0,0)$ $B(0,1,1)$

الشعاعين غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب المركبات إذاً هما شعاعي توجيه Q نفرض

$\vec{n}_Q(a,b,c)$

$\vec{n}_P\perp\vec{n}_Q\Rightarrow\vec{n}_P\cdot\vec{n}_Q=0$

$a+b+c=0$ ....(1)

$\vec{n}_Q\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow\vec{n}_Q\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$-a+b+c=0$ ....(2)

من (2) نجد

$a=b+c$

نعوض في (1)

$b+c+b+c=0$

$2b+2c=0$

$b=1\Rightarrow c=-1\Rightarrow a=0$

$Q : y - z + d = 0$

$B \in Q \Rightarrow 1 - 1 + d = 0$

$d = 0$

$Q : y - z = 0$

2* $p : x + z = 0$

$A(1,2,0) \quad B(1,0,1)$

$\vec{n}_p(1,0,1)$

$\vec{AB}(0,-2,1)$

الشعاعين غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب المركبات فهما يمثلان شعاعي توجيه لـ Q

نفرض

$\vec{n}_Q(a,b,c)$

$\vec{n}_p \perp \vec{n}_Q \Rightarrow \vec{n}_p \cdot \vec{n}_Q = 0$

$a + c = 0 \quad ...(1)$

$\vec{AB} \perp \vec{n}_Q \Rightarrow \vec{n}_Q \cdot \vec{AB} = 0$

$-2b + c = 0 \quad ...(2)$

$a + c = -2b + c$

$\Rightarrow a = -2b$

$b = 1 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow c = 2$

$\vec{n}_Q(-2,1,2)$

$Q : -2x + y + 2z + d = 0$

$A \in Q : -2 + 2 + 0 + d = 0$

$d = 0$

$Q : -2x + y + 2z = 0$

3* $p : 2x + z - 4 = 0$

$A(2,3,-1) \quad B(1,1,1)$

$\vec{n}_p(2,0,1)$

$\vec{AB}(-1,-2,2)$

الشعاعين غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب المركبات فهما يمثلان شعاعي توجيه المستوي Q

نفرض

$\vec{n}_Q(a,b,c)$

$\vec{n}_p \perp \vec{n}_Q \Rightarrow \vec{n}_p \cdot \vec{n}_Q = 0$

$2a + c = 0 \quad ...(1)$

$\vec{n}_Q \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{n}_Q \cdot \vec{AB} = 0$

$-a - 2b + 2c \quad ...(2)$

من (1) نجد

$c = -2a$

$a = 1 \Rightarrow c = -2 \Rightarrow b = -\frac{5}{2}$

$Q : x - 2y - \frac{5}{2}z + d = 0$

$B \in Q \Rightarrow 1 - 2 - \frac{5}{2} + d = 0$

$d = \frac{7}{2}$

$Q : x - 2y - \frac{5}{2}z + \frac{7}{2} = 0$

$p : x - 2y + 3z - 5 = 0 \qquad \frac{15}{70}$

$Q : x + y + z + 1 = 0$

1* $\vec{n}_p(1,-2,3)$

$\vec{n}_Q(1,1,1)$

الناظمين غير مرتبطين خطياً لأن مركباتها غير متناسبة أي p و Q متقاطعان

2* لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من d إذا وفقط إذا

$x - 2y = 5 - 3z \quad ...(1)$

$x + y = -z - 1 \quad ...(2)$

بالطرح نجد

$-3y = 6 - 2z$

$y = \frac{2}{3}z - 2$

نعوض في (1) فنجد

$x = 2y + 5 - 3z$

$= 2\left(\frac{2}{3}z - 2\right) + 5 - 3z$

$= \frac{4}{3}z - 4 + 5 - 3z$

$= -\frac{5}{3}z + 1$

إذاً d مجموعة النقاط M عندما تتحول z في $\mathbb{R}$

$z = 0 \Rightarrow A(1, -2, 0)$

$z = 1 \Rightarrow B\left(\frac{-2}{3}, \frac{-4}{3}, 1\right)$

$\overrightarrow{AB}\left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$

$\overrightarrow{AB}$ هو شعاع توجيه للمستقيم d_1

4*

بما أن R عمودي على P و Q عموديين على فصلهما المشترك إذاً يقبل شعاعاً ناظمه

$\overrightarrow{AB}\left(-\frac{5}{2}, \frac{2}{3}, 1\right)$

$R: -\frac{5}{3}x + \frac{2}{3}y + z + d = 0$

$A \in R \Rightarrow -\frac{10}{3} + \frac{10}{3} - 2 + d = 0$

$d = 2$

$R: -\frac{5}{3}x + \frac{2}{3}y + z + 2 = 0$

$\frac{16}{70}$

$A(2,1,3)\ B(1,0,-1)$

$C(4,0,0)\ D(0,4,0)$

$E(1,-1,1)$

1* $\overrightarrow{CD}(-4, 4, 0)$

$\overrightarrow{CE}(-3, -1, 1)$

$\frac{4}{-3} \neq -4$

المركبات المتقابلة غير متناسبة إذاً $\overrightarrow{CD}$

و $\overrightarrow{CE}$ غير مرتبطة خطياً أي لا تقعان على استقامة واحدة

2*

$\overrightarrow{AB}(-1, -1, 4)$

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

$4 - 4 + 0 = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CE} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CE} = 0$

$3 + 1 - 4 = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CE}$

$\Rightarrow (AB) \perp (CED)$

$\frac{17}{70}$

$A(2,4,3)\ B(4,-2,3)$

$C(1,-1,1)\ D(3,3,-3)$

1* $\overrightarrow{AB}(2, -6, 0)$

$\overrightarrow{BC}(-3, 1, -2)$

الأشعة غير مرتبطة خطياً لعدم تناسب المركبات المتقابلة

$-\frac{2}{3} \neq -6$

فالنقاط لا تقع على استقامة واحدة

أي أنها تشكل شعاعي توجيه للمستوي ABC

2* نفرض

$\vec{n}(a, b, c)$

$\vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$2a - 6b = 0 \quad \ldots(1)$

$a = 3b$

$\vec{n} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$-3a + b - 2c = 0 \quad \ldots(2)$

$\frac{18}{70}$

$\Omega(2,-1,3)$

$A(-1,0,1)$

1* $\Omega A = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$

2* $M(x,y,z)$

$\overrightarrow{\Omega M}(x-2, y+1, z-3)$

$\Omega M^2 = (x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2$

3* نصف القطر

$r = \Omega A = \sqrt{14}$

$\Rightarrow M \in S$

$\Omega M = r$ في حال

$S: (x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2 = 14$

$\frac{19}{70}$

1* $A(1,1,1)$ $\Omega(0,0,1)$

$\Omega A = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2} = r$

$x^2+y^2+(z-1)^2 = 2$

2* $A(1,-2,3)$ $\Omega(0,5,-1)$

$\Omega A = \sqrt{1+49+16} = \sqrt{66}$

$x^2+(y-5)^2+(z+1)^2 = 66$

$\frac{20}{77}$

1* $\Omega(1,2,3)$

$r=2$

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 = 4$

2* $\Omega(0,5,1)$

$r=\sqrt{3}$

$x^2+(y-5)^2+(z-1)^2 = 3$

$\frac{21}{70}$

1* $x^2+y^2+z^2-2x+6y-2=0$

$x^2-2x+1-1+y^2+6y+9-9+z^2-2=0$

$(x-1)^2+(y+3)^2+z^2 = 12$

$-9b+b-2c=0$

$-8b-2c=0$

$c=-4b$

$b=2 \Rightarrow c=-8 \Rightarrow a=6$

$\vec{n}(6,2,-8)$

$P: 6x+2y+8z+d=0$

$A \in P \Rightarrow 12+8-24+d=0$

$\Rightarrow d=4$

$P: 6x+2y+8z+4=0$

$D(3,3,-3)$

$D'(a,b,c)$

$\vec{n}(6,2,8)$

$\overrightarrow{DD'} = t\vec{n}$

$$\begin{pmatrix} a-3 \\ b-3 \\ c+3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$a-3=6t \Rightarrow a=6t+3$

$b-3=2t \Rightarrow b=2t+3$

$c+3=-8t \Rightarrow c=-8t-3$

$D'(6t+3, 2t+3, -8t-3)$

$D' \in P: 6a+2b-8c+4=0$

$6(6t+3)+2(2t+3)-8(-8t-3)+4=0$

$36t+18+4t+6+64t+24+4=0$

$104t+52=0$

$t=-\frac{1}{2}$

$D'(0,2,1)$

$\frac{23}{71}$

$A(2,1,2)\quad B(-2,0,2)$

1*

$\vec{MA}\,(2-x,\,1-y,\,2-z)$

$\vec{MB}\,(-2-x,\,-y,\,2-z)$

$\vec{MA}\cdot\vec{MB}=0$

$\begin{pmatrix}2-x\\1-y\\2-z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2-x\\-y\\2-z\end{pmatrix}=0$

$(2-x)(-2-x)+(1-y)(-y)+(2-z)(2-z)=0$

$-4-2x+2x+x^2-y+y^2+4-2z-2z+z^2=0$

$x^2+y^2-y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+z^2-4z+4-4=0$

$x^2+(y-\frac{1}{2})^2+(z-2)^2-\frac{1}{4}-4=0$

$x^2+(y-\frac{1}{2})^2+(z-2)^2-\frac{17}{4}=0$

$x^2+(y-\frac{1}{2})^2+(z-2)^2=\frac{17}{4}$

2* المجموعة E هي معادلة كرة مركزها $O(0,\frac{1}{2},2)$ ونصف قطرها $r=\frac{\sqrt{17}}{2}$

$\frac{24}{71}$

$r=\frac{1}{2}AB$

I منتصف $[AB]$

1* $\vec{MA}\cdot\vec{MB}=MI^2-r^2$

$\vec{MA}\cdot\vec{MB}=(\vec{MI}+\vec{IA})(\vec{MI}+\vec{IB})$

$=MI^2+\vec{MI}\cdot\vec{IB}+\vec{IA}\cdot\vec{MI}+\vec{IA}\cdot\vec{IB}$

$=MI^2+\vec{IB}\cdot\vec{MI}-\vec{IB}\,\vec{MI}-\vec{IB}\,\vec{IB}$

$=MI^2-(IB)^2$

5.

مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ تمثل كرة مركزها $(1,-3,0)$

2* $x^2+y^2+z^2-10x+2z+26=0$

$x^2-10x+25-25+y^2+z^2+2z+1-1+26=0$

$(x-5)^2+y^2+(z+1)^2=0$

M تمثل نقطة وحيدة هي $\Omega(5,0,-1)$

3* $x^2+y^2+z^2+x+y+z=0$

$x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+y^2+y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+z^2+z+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$

$(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2+(z+\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}$

M تمثل كرة مركزها $\Omega(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ ونصف قطرها $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4* $x^2+y^2+z^2-4x+5=0$

$x^2-4x+4-4+y^2+z^2+5=0$

$(x-2)^2+y^2+z^2+1=0$

$(x-2)^2+y^2+z^2=-1$

مجموعة خالية

$\frac{22}{71}$

$A(2,-2,2)$

$P: x+2y+3z=5$

$r=\text{dist}(A,P)=\frac{|2-4+6-5|}{\sqrt{1+4+9}}$

$=\frac{1}{\sqrt{14}}$

$(x-2)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=\frac{1}{14}$

$-5=0$

$x^2+y^2+z^2+\frac{2}{3}x+\frac{10}{3}y+\frac{10z}{3}+\frac{5}{3}=0$

$x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+y^2+\frac{10}{3}y+\frac{25}{9}$

$-\frac{25}{9}+z^2+\frac{10}{3}z+\frac{25}{9}-\frac{25}{9}$

$+\frac{5}{3}=0$

$(x+\frac{1}{3})^2+(y+\frac{5}{3})^2+(z+\frac{5}{3})^2$

$=\frac{36}{9}$

2*

تمثل كرة مركزها

$\Omega(-\frac{1}{3},-\frac{5}{3},-\frac{5}{3})$

$r=2$

3* $MA=MB$

$MA^2=MB^2$

$(1-x)^2+(1-y)^2+(1-z)^2=x^2+(-1-y)^2+(-1-z)^2$

$1-2x+x^2+1-2y+y^2+1-2z+z^2=x^2+1-2y+y^2+1-2z+z^2$

$1-2x+1-2y+1-2z-1-2-1-2z=0$

$-2x-4y-4z+1=0$

وهي تمثل معادلة مستوي محوري القطعة المستقيمة $[AB]$

MI^2-r^2

2* $\vec{MA}\cdot\vec{MB}=0$

$\Rightarrow MI^2-r^2=0$

$\Rightarrow MI^2=r^2$

$(x-x_I)^2+(y-y_I)^2+(z-z_I)^2=r^2$

تمثل مجموعة النقاط في الفراغ تبعد عن I مقداراً ثابتاً r فهي ترسم كرة مركزها I ونصف قطرها r ومنه $r=\frac{1}{2}AB$ أي AB قطر فيها

$\frac{25}{71}$

$A(1,1,1)$ $B(0,-1,-1)$

1* $M(x,y,z)$

$MA=2MB$

$MA^2=2MB^2$

$(1-x)^2+(1-y)^2+(1-z)^2=4[(x^2)+(-1-y)^2+(-1-z)^2]$

$1-2x+x^2+1-2y+y^2+1-2z+z^2=4(x^2+1+2y+y^2+1+2z+z^2)$

$1-2x+x^2+1-2y+y^2+1-2z+z^2=4x^2+4+8y+4y^2+4+8z+4z^2$

$1-2x+x^2+1-2y+y^2+1-2z+z^2-4x^2-4-8y-4y^2-4-8z-4z^2=0$

$3-2x+x^2-2y+y^2-2z+z^2-8-4x^2-8y-4y^2-8z-4z^2=0$

$-3x^2-3y^2-3z^2-2x-10y-10z$

$\frac{26}{71}$

$AM = k\,BM$

$\times 1$

$\vec{BA}\cdot\vec{MI} = \frac{1}{2}(\vec{MA}-\vec{MB})(\vec{MA}+\vec{MB})$

$= \frac{MA^2 - MB^2}{2}$

$\vec{MA}+\vec{MB} = \vec{MI}+\vec{IA}+\vec{MI}+\vec{IB}$

$= 2\vec{MI}+\vec{IA}+\vec{IB}$

لكن $\vec{IA}+\vec{IB} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{MI} = \frac{1}{2}(\vec{MA}+\vec{MB})$ ---- (1)

$\vec{BA} = \vec{BM}+\vec{MA}$

$\vec{BA} = \vec{MA}-\vec{MB}$ ---- (2)

بضرب (1) من (2) طرفاً لطرف

$\vec{BA}\cdot\vec{MI} = (\vec{MA}-\vec{MB})\frac{1}{2}(\vec{MA}+\vec{MB})$

$= \frac{1}{2}(\vec{MA}-\vec{MB})\cdot(\vec{MA}+\vec{MB})$

$= \frac{(\vec{MA})^2-(\vec{MB})^2}{2} = \frac{MA^2-MB^2}{2}$

لدكان P المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ أي

$\varepsilon_1 : MA = MB$

$\Rightarrow MA^2 = MB^2$

$MA^2 - MB^2 = 0$

$\Rightarrow \varepsilon_1 : \frac{MA^2-MB^2}{2} = 0$

$\Rightarrow \vec{BA}\cdot\vec{MI} = 0$

$\vec{BA} \perp \vec{MI}$

أي BA هو ناظم لمستوي يمر من (I)

$\times 2$

I مركز الأبعاد المتناسبة لـ

$(A,1)$ (B,k)

J مركز الأبعاد المتناسبة لـ

$(A,1)$ $(B,-k)$

$\vec{MI}\cdot\vec{MJ} = \frac{1}{1-k^2}(\vec{MA}-k\vec{MB})(\vec{MA}+k\vec{MB})$

$= \frac{MA^2 - k^2 MB^2}{1-k^2}$

I مركز الأبعاد المتناسبة لـ

$(A,1)$ (B,k)

$\vec{IA}+k\vec{IB} = \vec{0}$

$\vec{IM}+\vec{MA}+k\vec{IM}+k\vec{MB} = \vec{0}$

$(1+k)\vec{IM}+\vec{MA}+k\vec{MB} = \vec{0}$

$(1+k)\vec{MI} = \vec{MA}+k\vec{MB}$

$\vec{MI} = \frac{1}{1+k}(\vec{MA}+k\vec{MB})$ ---- (1)

J مركز الأبعاد المتناسبة

$(A,1)$ $(B,-k)$

$\vec{JA}-k\vec{JB} = \vec{0}$

$\vec{JM}+\vec{MA}-k\vec{JM}-k\vec{MB} = \vec{0}$

$(1-k)\vec{JM}+\vec{MA}-k\vec{MB} = \vec{0}$

$(1-k)\vec{JM}+\vec{MA}-k\vec{MB} = \vec{0}$

$(1-k)\vec{MJ} = \vec{MA}-k\vec{MB}$

$\vec{MJ} = \frac{1}{1-k}(\vec{MA}-k\vec{MB})$

نضرب (1) بـ (2) طرفاً إلى طرف

$\vec{MI}\cdot\vec{MJ} = \frac{1}{1+k}(\vec{MA}+k\vec{MB})\cdot\frac{1}{1-k}(\vec{MA}-k\vec{MB})$

$= \frac{1}{1-k^2}(\vec{MA}+k\vec{MB})\cdot(\vec{MA}-k\vec{MB})$

$= \frac{MA^2-k^2MB^2}{1-k^2}$

$\Sigma_k : AM = kBM$

نربع الطرفين

$MA^2 = k^2 MB^2$

$MA^2 - k^2 MB^2 = 0$

نقسم على $1-k^2$ حيث $k\neq 1$

$\frac{MA^2-k^2MB^2}{1-k^2} = 0$

$\vec{MI}\cdot\vec{MJ} = 0$

نفرض N منتصف $[IJ]$

$(\vec{MN}+\vec{NI})\cdot(\vec{MN}+\vec{NJ}) = 0$

$MN^2+\vec{MN}\cdot\vec{NJ}+\vec{NI}\cdot\vec{MN}+\vec{NI}\cdot\vec{NJ}=0$

$MN^2+\vec{NJ}\cdot\vec{MN}+\vec{NI}\cdot\vec{MN}+\vec{NI}\cdot\vec{NJ}=0$

$\vec{NI} = -\vec{NJ}$

$MN^2+\vec{NJ}\cdot\vec{MN}-\vec{NJ}\cdot\vec{MN}-NJ^2=0$

$MN^2-NJ^2=0 \Rightarrow MN^2=NJ^2$

أي هي سطح كرة مركزها N و

قطر فيها $[IJ]$

$A(4,0,-3)$ $B(2,2,2)$ $\frac{27}{71}$

$C(3,-3,-1)$ $D(0,0,3)$

*1 M منتصف $[AB]$

$M(3,1,-\frac{1}{2})$

$\vec{AB}(-2,2,5)$

شعاع ناظم المستوى المحوري P_1

$-2(x-3)+2(y-1)+5(z+\frac{1}{2})=0$

$-2x+6+2y-2+5z+\frac{5}{2}=0$

$-2x+2y+5z+4+\frac{5}{2}=0$

$-2x+2y+5z+\frac{8}{2}+\frac{5}{2}=0$

$P_1 : -2x+2y+5z+\frac{13}{2}=0$

*2

$M(x,y,z)\in P_2$

إذا وفقط إذا كان $MB^2=MC^2$

$(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=(x-3)^2$
$+(y+3)^2+(z+1)^2$

$x^2-4x+4+y^2-4y+4+z^2-4z$
$+4=x^2-6x+9+y^2+6y+9$
$+z^2+2z+1$

$-4x+12-4y-4z+6x-9-6y$
$-9-2z-1=0$

$P_2 : 2x-10y-6z-7=0$

*3

$M(x,y,z)\in P_3$

إذا وفقط إذا

$MC^2=MD^2$

$(3-x)^2+(-3-y)^2+(-1-z)^2=x^2$
$+y^2+(-3-z)^2$

$9-6x+x^2+9+6y+y^2+1+2z$
$+z^2=x^2+y^2+9+6z+z^2$

$19-6x+6y+2z-9-6z=0$

$P_3 : 6x+6y-4z+10=0$

*4 إذا تقاطع P_1 و P_2 و P_3

في نقطة Ω فهي تحقق

$\Omega A=\Omega B=\Omega C=\Omega D$

أي Ω مركز الكرة المارة بالنقاط

A, B, C, D

م:0934636166
دير الزور القصور جانب مدرسة حسان العطرة
المدرس : محمد فوزي الجراد

*5

$-2x+2y+5z=\frac{13}{2}$ ...(1)

$2x-10y-6z=7$ ...(2)

$-6x+6y-4z=-10$ ...(3)

من ① و ③ نجد

$x-y=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}z=\frac{13}{4}+\frac{5}{2}z$

$\Rightarrow z=-\frac{1}{2}$

$x-y=2$

$x=y+2$

نعوض x و z في (2)

$\Rightarrow 2(y+2)-10y+3=7$

$2y+4-10y+3=7$

$-8y+7=7$

$\Rightarrow y=0$

$\Rightarrow x=2$

$\Omega(2,0,-\frac{1}{2})$

*6

$r=\Omega C$

$r=\sqrt{1+9+\frac{9}{4}}$

$=\sqrt{\frac{4}{4}+\frac{36}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{41}{4}}$

$=\frac{\sqrt{41}}{2}$

*7

$(x-2)^2+y^2+(z+\frac{1}{2})^2=\frac{41}{4}$