



وزارة التربية والتعليم  
Ministry of Education

المملكة العربية السعودية

# الرياضيات

## للفصل الثالث المتوسط

مصادر المعلم للأنشطة الصفية  
الفصل العاشر: الإحصاء والاحتمال

Glencoe Mathematics © 2010  
**CHAPTER RESOURCE MASTERS**  
Algebra 1

الرياضيات - الصف الثالث المتوسط  
**مصادر المعلم للأنشطة الصفية**  
أعدت النسخة العربية: شركة العبيكان للتعليم

[www.obeikaneducation.com](http://www.obeikaneducation.com)



English Edition Copyright © the McGraw-Hill Companies, Inc.  
All rights reserved.

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with  
The McGraw-Hill Companies, Inc. © 2008.



حقوق الطبع الإنجليزية محفوظة لشركة ماجروهل ©.

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار  
وفقاً لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل © ٢٠٠٨م / ١٤٢٩هـ.

لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو نقله في أي شكل أو واسطة، سواء أكانت إلكترونية أو ميكانيكية، بما في ذلك التصوير بالنسخ «فوتوكوبي»، أو التسجيل، أو التخزين  
و الاسترجاع، دون إذن خطي من الناشر.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

### عزيزي المعلم / عزيزتي المعلمة

يسرنا أن نقدم هذه المجموعة من التدريبات المساندة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب. حيث نطمح أن يساعدك التنوع في هذه التدريبات على الوصول إلى جميع الطلاب في الصف، مهما تباينت مستوياتهم التحصيلية.

وقد تم تخصيص صفحتين لتدريبات إعادة التعليم و صفحة واحدة لكل من التدريبات الأخرى لكل درس من دروس كتاب الطالب. حيث يمكنك أن تكلف الطلاب حلّ صفحة التدريبات المقابلة لكل درس حسب مستوى كلّ منهم؛ سواء داخل الصف أم في المنزل. وليست هذه التدريبات بديلاً عن كتاب التمارين، ولكنها مساندة ومكملة له. وهذه التدريبات هي:

### تدريبات إعادة التعليم

تركز هذه التدريبات على محتوى الدروس في كتاب الطالب، وتقدمه بأسلوب تدريسي ومعالجة يختلفان عن كتابي الطالب والتمارين. وهي موجهة إلى الطلاب ذوي المستوى دون المتوسط.

### تدريبات حلّ المسألة

تأتي هذه التدريبات انطلاقاً من اهتمام هذه المناهج بحلّ المسألة، حيث تم تخصيصها لتقديم تدريبات إضافية على حلّ المسألة ترتبط بكل درس من دروس كتاب الطالب. وهي موجهة إلى جميع الطلاب على اختلاف مستوياتهم التحصيلية.

### التدريبات الإثرائية

تساعد هذه التدريبات الإثرائية على التوسع في مفاهيم الدرس، كما تؤدي إلى توسيع مدارك الطلاب حول تعلم الرياضيات بشكل عام. وهذه التدريبات موجهة إلى الطلاب ذوي المستوى ضمن المتوسط وفوق المتوسط.

المقدمة .....	٤
<b>الدرس ١٠-١ تصميم دراسة مسحية</b>	
تدريبات إعادة التعليم .....	٦
تدريبات حل المسألة .....	٨
التدريبات الإثرائية .....	٩
<b>الدرس ١٠-٤ التباديل والتوافيق</b>	
تدريبات إعادة التعليم .....	١٨
تدريبات حل المسألة .....	٢٠
التدريبات الإثرائية .....	٢١
<b>الدرس ١٠-٥ احتمالات الحوادث المركبة</b>	
تدريبات إعادة التعليم .....	٢٢
تدريبات حل المسألة .....	٢٤
التدريبات الإثرائية .....	٢٥
<b>الدرس ١٠-٢ تحليل نتائج الدراسة المسحية</b>	
تدريبات إعادة التعليم .....	١٠
تدريبات حل المسألة .....	١٢
التدريبات الإثرائية .....	١٣
<b>الدرس ١٠-٣ إحصائيات العينة ومعالم المجتمع</b>	
تدريبات إعادة التعليم .....	١٤
تدريبات حل المسألة .....	١٦
التدريبات الإثرائية .....	١٧

## تدريبات إعادة التعليم

### تصميم دراسة مسحية

**العينة المتحيزة:** العينة المتحيزة هي العينة التي تعطي طريقة اختيارها تفضيلاً لمجموعة معينة على مجموعة أخرى. وتكون العينة غير متحيزة إذا كان لكل فرد منها الاحتمال نفسه في الاختيار. ومن أمثلة العينات المتحيزة العينات الملائمة وهي التي تشمل أفراد المجتمع الذين يسهل الوصول إليهم. وتعدّ العينة التطوعية نوعاً آخر من العينات المتحيزة، وتشمل الأفراد الذين يرغبون في الانضمام إلى العينة.

مثال

**مدرسة:** أراد مدير مدرسة ثانوية أن يعرف إذا كان الطلاب راضين عن طريقة متابعة الدوام في المدرسة، فقرر أن يسأل الطلاب الموجودين في قاعة المطالعة في الحصة الثالثة إن كانوا راضين عن هذه الطريقة، علماً بأن أقل من ربع طلاب المدرسة يذهبون إلى قاعة المطالعة.

(أ) حدّد العينة والمجتمع الذي اختيرت منه.

تشمل العينة الطلاب الموجودين في قاعة المطالعة في الحصة الثالثة. والمجتمع هو طلاب المدرسة جميعهم.

(ب) صنّف هذه العينة إلى ملائمة أو تطوعية.

هذه عينة ملائمة، حيث يسهل اختيار طلاب في قاعة المطالعة خلال حصة معينة في اليوم.

### تمارين

حدّد العينة والمجتمع الذي اختيرت منه في كلٍّ مما يأتي، ثم صنّف العينة إلى ملائمة أو تطوعية:

(١) **مدرسة:** أرادت إدارة مدرسة ثانوية أن تقيّم فعاليات يوم النشاط المدرسي، فسألت كل طالب في الصف الثالث الثانوي في لجنة الأنشطة إن كان راضياً عن فعاليات يوم النشاط.

(٢) **صناعات:** أراد مدير مصنع للألبسة أن يتأكد من ضبط الجودة لمنتجات المصنع، فقرر اختيار كل رابع قطعة يفحصها المراقب س، علماً بأنه يوجد في المصنع ١٠ مراقبين.

(٣) **مدرسة:** أرسل المرشد الطلابي في مدرسة ثانوية استبانة لطلاب الصف الثالث الثانوي يسألهم عن خططهم للدراسة الجامعية، ولاحظ أنّ بعض الطلاب لا يخططون للالتحاق بالجامعات، وقد أعاد ٤٠٪ من طلاب الصف الثالث الثانوي الاستبانة معبأة.

(٤) **تجارة:** طلب من مجموعة تعمل في مجال التسويق أن تجمع بيانات حول فعالية الإعلانات الخاصة بالأدوات المنزلية في كافة مناطق المملكة. فقررت المجموعة أن تنفذ دراساتها في المحال التجارية الكبرى، فسأل الباحث كل من يمر من جانبه في محلّ تجاري عن رغبته في المشاركة في دراسة حول الأدوات المنزلية.

## تدريبات إعادة التعليم

### تصميم دراسة مسحية

(تمة)

**أساليب المعاينة:** افترض أنك تريد أن تجري دراسة حول المحطات الإذاعية المفضلة لطلاب مدرستك. ففي هذه الحالة يكون طلاب المدرسة كافة المجتمع الذي تريد أن تجري الدراسة عليه. والعينة جزء من مجموعة أكبر تُختار لتمثل المجموعة كاملة. أما المسح الشامل فيشمل كل أفراد المجتمع، وتُختار العينة العشوائية من المجتمع بحيث تكون ممثلة للمجتمع بكامله.

العينة العشوائية البسيطة	العينة التي لها فرصة الاختيار نفسها كأى عينة أخرى من المجتمع.
العينة العشوائية الطبقيّة	يقسم المجتمع إلى فئات متماثلة غير متداخلة، ثم تُختار عينة من كل واحدة من هذه الفئات.
العينة العشوائية المنتظمة	العينة التي يُختار أفرادها وفقاً لزمّن معيّن أو فترة زمنية محددة.

**مثال ٢ جوائز:** أُعطي كل مشارك في أحد المؤتمرات بطاقة تحمل رقماً، واختير خمسة وعشرون رقماً عشوائياً وقُدمت جائزة لحاملها. (أ) حدّد العينة والمجتمع الذي اختيرت منه. تتكوّن العينة من المشاركين الخمسة والعشرين الذين اختيروا للحصول على جوائز. ويتكوّن المجتمع من المشاركين في المؤتمر جميعهم. (ب) صنّف العينة إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة. هذه العينة بسيطة؛ لأنه اختير أفرادها عشوائياً، ولأن لكل مشترك في المؤتمر الفرصة نفسها في أن يكون من بين الفائزين بالجوائز.

**مثال ١ مدرسة:** اختير عشوائياً عشرة طلاب من كل صف في مدرسة ثانوية ليشكلوا لجنة استشارية مع مدير المدرسة. (أ) حدّد العينة والمجتمع الذي اختيرت منه. العينة ٣ مجموعات في كل منها ١٠ طلاب من الصفوف الأول والثاني والثالث الثانوي. والمجتمع هو طلاب المدرسة جميعهم. (ب) صنّف العينة إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة. هذه عينة طبقية، حيث قُسم الطلاب إلى فئات قبل الاختيار العشوائي.

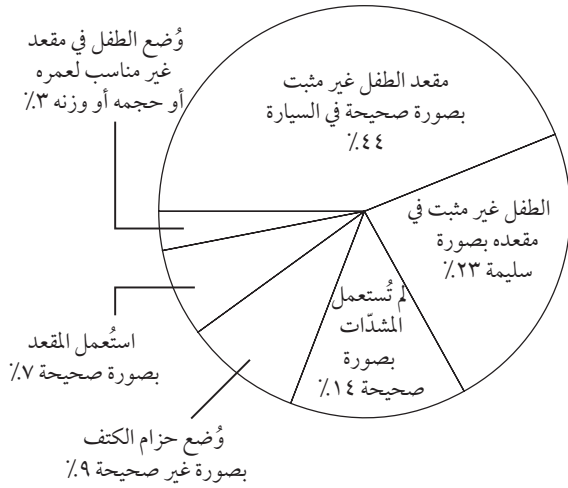
### تمارين

- حدّد فيما يأتي العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، ثم صنّف العينة إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة:
- (١) **مدرسة:** صف فيه ٢٥ طالباً. أُعطي كل واحد منهم في بداية العام رقماً. ويختار المعلم بصورة دورية ٤ أرقام عشوائياً ليعرض هؤلاء الطلاب واجباتهم على جهاز العرض فوق الرأس.
  - (٢) **حدائق:** قسّم بستاني قطعة أرض إلى أجزاء، مساحة كل منها ٢٥ متراً مربعاً، ثم أخذ عينتين من التراب من كل جزء، وفحص كل عينة لمعرفة المعادن التي تحتويها.
  - (٣) **مدرسة:** اختير مئة طالب في وقت الاستراحة للمشاركة في دراسة مسحية. يخرج طلاب المدرسة جميعهم للاستراحة في الوقت نفسه.
  - (٤) **تسوق:** سُئل كل عاشر شخص يخرج من بقالة عن رغبته في المشاركة في دراسة تتعلق بالمجتمع المحلي.

## تدريبات حل المسألة تصميم دراسة مسحية

(٥) **سلامة الأطفال:** فحصت مؤسسة للسلامة العامة مقاعد الأطفال المستعملة في السيارات في إحدى المناطق، لكل من رغب في إجراء هذا الفحص المجاني. وقد وجدت أن ٧٪ فقط من ١٠٠٠ مقعد استُعملت استعمالاً صحيحاً. يبين التمثيل بالقطاعات الدائرية أدناه النسب المئوية التقريبية لنتائج فحص سلامة المقعد:

### نتائج فحص مقاعد الأطفال



(أ) اكتب عبارة تصف أسلوب المعاينة.

(ب) هل من المناسب القول أن ٢٣٪ من الأطفال الذين أُجري فحص المقاعد في منطقتهم، لم يُتَبَّنوا في مقاعدهم بصورة سليمة؟ اشرح إجابتك.

حدّد في الأسئلة ١ - ٤ العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، ثم يبيّن إذا كانت العينة متحيزة أم غير متحيزة. وإن لم تكن متحيزة فصنّفها إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة. وإن كانت متحيزة فصنّفها إلى ملائمة أو تطوعية، وفسّر إجابتك.

(١) **مدرسة:** يختار معلّم أربعة طلاب كل يوم لتوزيع كراسة الواجبات على جميع طلاب الصف. فهو يكتب أسماء طلاب الصف وعددهم ١٨ على قصاصات من الورق، ويضعها في كأس، ويخلطها جيداً، ثم يسحب أربعة منها لتحديد أسماء الطلاب الأربعة الذين سيوزعون الكراسات على زملائهم.

(٢) **انتخابات مدرسية:** افترض أنّ طالبات إحدى المدارس الثانوية اخترن رئيسة للجنة الاجتماعية في المدرسة من خلال الاقتراع. وللحصول على نتائج مبكرة؛ وقفت إحدى طالبات اللجنة الإعلامية عند مدخل قاعة الاقتراع، وسألت أكبر عدد ممكن من الطالبات عن الطالبة التي انتخبها.

(٣) **أمراض:** تستعمل مؤسسة صحية شبكة لتأسر طيوراً قرب محمية طبيعية. وتفحص الطيور التي تسقط في هذه الشباك للكشف عن وجود فيروس أنفلوانزا الطيور.

(٤) **تربة:** يفحص مهندسو التربة في موقع لإنشاء مشروع إسكان، وذلك بتقسيم الموقع إلى ١٢ منطقة مستطيلة، وملء كأس من تربة كل منطقة لفحصها، للكشف عن وجود مواد كيميائية ضارة.

## التدريبات الإثرائية

### الشعار أو الكتابة

١٠-١

هناك تحيز في ظهور الشعار أو الكتابة إثر سقوط قطعة نقود معدنية عند وضعها متزنة على حافتها على طاولة وهز الطاولة قليلاً، ويعتمد ذلك على طريقة صنع بعض القطع النقدية. ثبتت عدة قطع نقود من فئة عشرة هللات المسكوكة في السنة نفسها، على حوافها على طاولة، ثم هز الطاولة بلطف بحيث تسقط قطع النقود على أوجهها على الطاولة.

(١) ما النسبة المئوية لقطع النقود التي تتوقع ظهور الشعار في كل منها؟

(٢) ما النسبة المئوية لقطع النقود التي ظهر الشعار في كل منها فعلاً؟

(٣) هل كانت النتائج مماثلة لنتائج المحاولة السابقة؟

(٤) كَوّن تخميناً حول السبب الذي يجعل النسبة المئوية الفعلية لظهور أحد الوجهين مختلفة عن النسبة المئوية المتوقعة.

تُشَطَّبُ قطع النقود قليلاً عند صناعتها، بحيث يكون ظهور الشعار عند سقوطها أكثر احتمالاً. ويبدو أن هناك فروقات بحسب سنة الصنع. أعد هذه التجربة مع قطع نقدية مصنوعة في سنوات مختلفة.

(٥) هل كانت النتائج مماثلة تقريباً لنتائج السابقة؟ اشرح الأسباب.

وبسبب هذا التحيز، فإن استعمال تجربة رمي قطعة النقود على الأرض أو الطاولة لتحديد الفائز طريقة غير عادلة، حيث إن ظهور الشعار أكثر احتمالاً.

(٦) كيف يمكنك أن تعدّل في تجربة رمي قطعة النقود بحيث يكون احتمال ظهور الشعار مساوياً لاحتمال ظهور الكتابة؟

أعد هذه التجربة مع قطع نقود من فئات أخرى لترى إن كان هناك تحيز في صناعة هذه القطع.

(٧) اشرح ما يحدث عند إجراء هذه التجربة مع قطع نقود من الفئات: ٥٠ هللة، ٢٥ هللة، ٥ هللات.

## تدريبات إعادة التعليم

### تحليل نتائج الدراسة المسحية

**تلخيص نتائج الدراسة المسحية:** لا بد من تلخيص بيانات الدراسة المسحية كي تكون أكثر فائدة. ويمكنك تلخيص بيانات الدراسة المسحية باستعمال مقاييس النزعة المركزية: المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال.

النوع	الوصف	متى يفضل استعماله
المتوسط الحسابي	مجموع البيانات مقسومًا على عددها.	عندما لا توجد قيم متطرفة في مجموعات البيانات.
الوسيط	العدد الأوسط أو متوسط العددين الأوسطين في البيانات المرتبة.	عندما توجد قيم متطرفة في مجموعات البيانات ولكن لا توجد فجوات كبيرة في وسط البيانات.
المنوال	العدد أو الأعداد الأكثر تكرارًا في مجموعات البيانات.	عندما يوجد أعداد متكررة في مجموعة البيانات.

**مثال** أيّ مقاييس النزعة المركزية (إن وُجدت) هو الأنسب لتمثيل البيانات في كلِّ مما يأتي؟ برر إجابتك، ثم احسب قيمة ذلك المقياس:

(أ) مطاعم: عدد الأشخاص الذين يطلبون الحساء على الغداء في كل يوم في أحد المطاعم على مدار ٦ أيام هو: ٢٦، ٢٥، ٣٠، ٣٢، ٢٧، ٢٨.

رتّب الأعداد تصاعدياً: ٢٥، ٢٦، ٢٧، ٢٨، ٣٠، ٣٢. لا توجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات، ولا توجد قيم متكررة. لذا فإن المتوسط الحسابي هنا هو مقياس النزعة المركزية الأنسب، لتمثيل هذه المجموعة من البيانات.

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{٢٥ + ٢٦ + ٢٧ + ٢٨ + ٣٠ + ٣٢}{٦} = ٢٨$$

المتوسط الحسابي لهذه البيانات هو ٢٨

(ب) كرة قدم: رصد فريق كرة قدم عدد الأهداف التي سجّلها في كل مباراة لعبها، فكانت: ٢، ٣، ٢، ١، ١، ٢، ٣، ٣، ٣، ٣، ٤، ٣، ١، ٣، ٤.

رتّب الأعداد تصاعدياً: ١، ١، ٢، ٢، ٣، ٣، ٣، ٣، ٣، ٤، ٤. تتكوّن مجموعة البيانات من أربع مجموعات من الأعداد المكررة. لذا فإن المنوال هو الأنسب لتمثيل هذه المجموعة من البيانات. ومنوال هذه البيانات هو ٣ لأنه الأكثر تكراراً.

### تمارين

أيّ مقاييس النزعة المركزية (إن وُجدت) هو الأنسب لتمثيل البيانات في كلِّ مما يأتي؟ برر إجابتك، ثم احسب قيمة ذلك المقياس:

(١) قطع معيبة: عدد الوحدات المعيبة في الإنتاج اليومي لمصنع أثاث على مدار أسبوع هي: ٧، ١٢، ٩، ٨، ١٠، ١٤، ٨

(٢) اختبارات علوم: رصد معلم درجات طلاب الفصل في اختبار العلوم الأخير، فكانت: ٩٤، ٨٨، ٨٨، ٩٤، ٩٤، ٨٤، ٩٤، ٨٨، ٨٤، ٩٤.

(٣) مواليد: رصد مستشفى ولادة أوزان المواليد بالكيلوجرامات في أحد الأيام، فكانت: ١، ٤، ٨، ٣، ٠، ٣، ٦، ٣، ٥، ٣، ٠، ٤، ٨، ١

(٤) وسائل نقل: أجرت صحيفة دراسة عن طريق الهاتف لمعرفة وسيلة النقل التي يستعملها الناس للوصول إلى أعمالهم يومياً: الحافلة: ٢٢؛ سيارة الأجرة: ١٧؛ سيارة الشركة: ١٨؛ السير على الأقدام: ١٥؛ السيارة الخاصة: ٢٢٤

**تقويم نتائج الدراسات المسحية:** بعد تنفيذ الدراسة المسحية يتم تلخيص البيانات، ويُعدّ تقرير حول نتائج الدراسة واستنتاجاتها. ومع ذلك فقد يؤدي التحيز إلى أخطاء أحياناً في البيانات فضلاً عن أخطاء في طريقة تفسيرها وفي التقرير المكتوب عنها؛ لذا يجب أن تكون قادراً على الحكم على مصداقية هذه التقارير من خلال التحقق من أن العينة عشوائية وكبيرة وممثّلة للمجتمع تمثيلاً جيداً، وأن مصدر البيانات موثوق به. كما يجب فحص الأشكال والرسوم المرافقة للتقرير، للكشف عن أي نتائج مضللة.

مثال

**ألعاب رياضية:** إذا أُعطيتَ الجزء المجاور من تقرير لدراسة مسحية،

النتائج	
الاختيار	الاستجابة
كرة القدم	٪٤٠
كرة اليد	٪٢٠
كرة الطائرة	٪١٠
كرة السلة	٪٣٠

فحدّد صحّة كلّ من المعلومات والاستنتاج لهذا التقرير.

السؤال: ما اللعبة الرياضية التي تفضّلها؟

العينة: ١٠٠ شخص اختيروا عشوائياً.

الاستنتاج: كرة القدم هي اللعبة الأكثر شعبية في السعودية .

يقول التقرير إنّ الأشخاص يُختارون عشوائياً. ولكن ليس هناك دليل على أن العينة تمثل المجتمع، كما أن حجم العينة صغير جداً، ولا يمكن التوصل منه إلى استنتاج لعموم المجتمع.

**تمارين**

حدّد صحّة كلّ من المعلومات والاستنتاج لتقرير كلّ دراسة مسحية فيما يأتي:

(١) **مناهج مدرسية:** أجرى مركز للدراسات استطلاعاً عبر الهاتف شمل ٥٠٠ من أولياء الأمور الذين اختيروا عشوائياً في إحدى المدن.

السؤال: هل تؤيد تعليم اللغة الإنجليزية للطلاب من الصف الأول الابتدائي؟

النتائج: مؤيد: ٥٨٪، معارض ٣٦٪، غير متأكد: ٦٪.

الاستنتاج: أولياء أمور الطلاب في المجتمع يؤيدون بدء تعليم اللغة الإنجليزية للطلاب من الصف الأول الابتدائي.

(٢) **استطلاع آراء:** طلب رئيس مجلس إدارة شركة مساهمة عامة إلى مركز دراسات أن يستطلع عشوائياً آراء ٤٠٠ من المساهمين.

السؤال: هل أنت راض عن أداء رئيس مجلس الإدارة؟

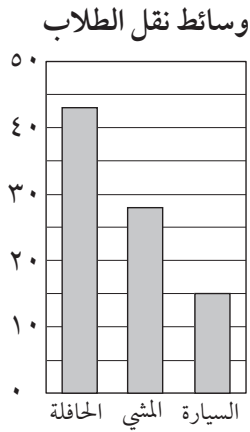
النتائج: نعم: ٤٤٪؛ لا: ٣٢٪؛ غير متأكد: ٢٤٪.

الاستنتاج: سوف يعاد انتخاب هذا الرئيس لسنة ثانية.

## تدريبات حل المسألة

## تحليل نتائج الدراسة المسحية

(٤) **وسائط نقل:** أجرت إدارة التعليم في إحدى المناطق استطلاعاً شمل ٨٦ طالباً عن الطريقة التي يصل بها الطلاب إلى مدارسهم. السؤال: ما واسطة النقل التي استعملتها للذهاب إلى المدرسة هذا اليوم؟ الاستنتاج: يستقل معظم الطلاب الحافلة للذهاب إلى المدرسة كل يوم.



(أ) حدّد صحّة المعلومات.

(ب) حدّد صحّة الاستنتاج.

(ج) اكتب استنتاجاً صحيحاً من عندك، مستعملاً البيانات لتؤيد إجابتك.

(١) **فواتير:** يسجّل ربّ أسرة المبالغ التي يدفعها شهرياً لفواتير الماء والكهرباء والهاتف. وقد بلغت قيمة هذه الفواتير للأشهر الستة الأولى من أحد الأعوام على النحو الآتي: ٧٦٨ ريالاً، ٧٦٨ ريالاً، ٨٢٢ ريالاً، ٧٦٨ ريالاً، ٧٦٨ ريالاً، ٨٢٢ ريالاً. أيّ مقاييس النزعة المركزية (إن وُجدت) هو الأنسب لتمثيل هذه البيانات؟ برّر إجابتك، ثم احسب ذلك المقياس.

(٢) **أسعار البنزين:** افترض أنّ إحدى الصحف أجرت دراسة شملت ١٥٣٤ شخصاً اختيروا عشوائياً من أنحاء المملكة، وطُرح عليهم السؤال الآتي: هل ستقلّ استعمالك لسيارتك إذا ارتفعت أسعار البنزين؟ وقد أجاب ٦٧٪ من الأشخاص الذين يقل دخلهم السنوي عن ٥٠٠٠٠ ريال أنه سوف يقلّ استعمالهم لسياراتهم، في حين أجاب ٣٠٪ بأنهم لن يقللوا استعمالهم لسياراتهم. وبناء على هذه النتائج خلصت الصحيفة إلى استنتاج أنّ أفراد المجتمع مستعدون لترشيد استعمال سياراتهم إذا ارتفعت أسعار البنزين. حدّد صحّة كلّ من المعلومات والاستنتاج لتقرير الدراسة.

(٣) **رياضة:** رصد عدّاء المسافات التي ركضها كل يوم على مدار أسبوع، استعداداً للمشاركة في منافسة دولية، فكانت: ٩ كلم، ٨ كلم، ٦ كلم، ٥ كلم، ١١ كلم، ٧ كلم، ١٠ كلم. أيّ مقاييس النزعة المركزية (إن وُجدت) هو الأنسب لتمثيل هذه البيانات؟ برّر إجابتك، ثم احسب ذلك المقياس.

## التدريبات الإثرائية

### هامش الخطأ

٢-١٠

من المهم عند إجراء دراسة مسحية أن تعرف مدى دقة البيانات التي تجمعها. ستتعرف فيما يأتي على دقة الدراسة المسحية بحساب هامش الخطأ أو الحد الأقصى لعدم التأكد في نتائج الدراسة. يجب تحديد مستوى الثقة أولاً عند حساب هامش الخطأ. يبين مستوى الثقة مدى صحة النسب المئوية المعطاة في الدراسة المسحية، على افتراض أن الأخطاء الموجودة هي أخطاء إحصائية فقط (أي أنه لا يوجد تحيز). تستعمل معظم الدراسات المسحية مستوى الثقة ٩٥٪، بمعنى أنه من المؤكد بنسبة ٩٥٪ أن تكون النسبة الصحيحة أكبر من النسبة المعطاة في الدراسة المسحية، أو أقل بمقدار لا يزيد على هامش الخطأ.

$$\begin{aligned} \frac{1,29}{\sqrt{n}} &= (\text{عند مستوى الثقة } 90\%) \\ \frac{0,98}{\sqrt{n}} &= (\text{عند مستوى الثقة } 95\%) \\ \frac{0,82}{\sqrt{n}} &= (\text{عند مستوى الثقة } 99\%) \end{aligned}$$

ن = عدد أفراد العينة

تفترض الحسابات السابقة أن عدد أفراد العينة ن أصغر من عدد أفراد المجتمع بدلالة إحصائية.

**مثال** **استطلاع آراء:** أظهرت دراسة مسحية لاستطلاع آراء ٣٠٠ من التجار المسجلين في إحدى المدن أن رئيس الغرفة التجارية الحالي متقدم على منافسه في انتخابات رئاسة الغرفة التجارية بفارق ٥٢٪ إلى ٤٨٪. أوجد هامش الخطأ في هذا الاستطلاع عند مستوى الثقة ٩٥٪.

$$\begin{aligned} \frac{0,98}{\sqrt{n}} &= (\text{عند مستوى الثقة } 95\%) \\ \frac{0,98}{\sqrt{300}} &\approx 0,057 \end{aligned}$$

صيغة هامش الخطأ عند مستوى الثقة ٩٥٪

ن = ٣٠٠

بسط

هامش الخطأ في هذه الدراسة عند مستوى الثقة ٩٥٪ هو ٥,٧٠٥٧ أو ٥,٧±٪، وهذا يعني أنه من المرجح بنسبة ٩٥٪ أن يكون التأييد لرئيس الغرفة التجارية الحالي بين ٤٦,٣٪ و ٥٧,٧٪.

(١) **تذاكر:** أظهرت دراسة مسحية شملت ٦٠٠ من الشباب أن ٦٥٪ من أفراد العينة يعارضون زيادة أسعار تذاكر دخول حديقة الحيوانات. أوجد هامش الخطأ لهذه الدراسة عند مستوى الثقة ٩٠٪.

(٢) **إجازات:** أظهرت دراسة مسحية شملت ١١٠٠ شخص أن ٣٤٪ من أفراد العينة يخططون للسياحة الداخلية في هذا الصيف. أوجد هامش الخطأ لهذه الدراسة عند مستوى الثقة ٩٩٪.

(٣) **تعليم:** أظهرت دراسة مسحية شملت ٧٦٥ طالباً في الصف الثالث الثانوي في إحدى المناطق التعليمية أن ٤٧٪ من أفراد العينة يخططون لمتابعة الدراسة الجامعية.

(أ) أوجد هامش الخطأ لهذه الدراسة عند مستوى الثقة ٩٥٪.

(ب) اكتب المدى الذي تقع ضمنه نسبة الطلاب الذين يخططون لمتابعة الدراسة الجامعية في تلك المنطقة عند مستوى الثقة ٩٥٪ بصورة متباينة.

(٤) ما العدد التقريبي للأشخاص الذين يجب أن تشملهم الدراسة حتى يكون هامش الخطأ  $\pm 1\%$  عند مستوى الثقة ٩٥٪

## تدريبات إعادة التعليم

### إحصائيات العينة ومعالم المجتمع

**إحصائيات العينة ومعالم المجتمع:** الإحصائي مقياس يصف إحدى خصائص العينة. والمعلمة مقياس يصف إحدى خصائص المجتمع. وتتغير قيمة الإحصائي عادة من عينة إلى أخرى، إلا أن معلمة المجتمع تبقى ثابتة لأنها تمثل المجتمع كاملاً.

مثال

عين العينة والمجتمع في كلٍّ من المواقف الآتية، ثم صف إحصائي العينة ومعلمة المجتمع:

- (أ) اختيرت عينة عشوائية مكونة من ٥٠ متسوقاً في سوق تجاري، ثم حُسب الوسيط للمبالغ التي أنفقها أفراد العينة في ذلك السوق.
- العينة: المجموعة المكونة من ٥٠ متسوقاً.  
المجتمع: جميع المتسوقين الموجودين في السوق التجاري.  
إحصائي العينة: وسيط المبالغ التي أنفقها أفراد العينة في السوق التجاري.  
معلمة المجتمع: وسيط المبالغ التي أنفقها جميع المتسوقين الموجودين في السوق التجاري.
- (ب) تُؤخذ أريكة من خط الإنتاج كل ٢٠ دقيقة في مصنع لإنتاج الأثاث، وتُفحص للكشف عن العيوب، ثم يُحسب المتوسط الحسابي لعدد الأرائك المعيبة في الإنتاج اليومي للمصنع.
- العينة: الأرائك التي تُفحص للكشف عن العيوب.  
المجتمع: جميع الأرائك التي ينتجها المصنع.  
إحصائي العينة: المتوسط الحسابي لعدد الأرائك المعيبة في العينة.  
معلمة المجتمع: المتوسط الحسابي لعدد الأرائك المعيبة من إنتاج المصنع كاملاً.

### تمارين

- عين العينة والمجتمع في كلٍّ من المواقف الآتية، ثم صف إحصائي العينة ومعلمة المجتمع:
- (١) **طقس:** جهزت دائرة الأرصاد الجوية عشر محطات رصد لقياس كميات الأمطار الساقطة في مواقع مختلفة في إحدى المناطق، ثم حُسب الوسيط لكميات الأمطار السنوية في هذه المواقع.
- (٢) **علم النبات:** اختار عالم ٢٠ شجرة عشوائياً في غابة، ثم حسب المتوسط الحسابي لارتفاعات هذه الأشجار العشرين.
- (٣) **بحوث:** أجرى باحث امتحاناً في الرياضيات لطلاب الصف الثالث المتوسط في ٢٥ مدرسة في منطقة الرياض، ثم حسب المتوسط الحسابي لعدد الناجحين في هذا الامتحان في المدارس الخمسة والعشرين.

(تمة)

**التحليل الإحصائي:** الانحراف المتوسط هو متوسط القيم المطلقة للفرق بين كل قيمة والمتوسط الحسابي لمجموعة البيانات. والانحراف المعياري هو القيمة التي تُحسب لتدل على مدى تباعد قيم مجموعة البيانات عن متوسطها الحسابي. أمّا تباين مجموعة من البيانات فهو مربع الانحراف المعياري لتلك البيانات.

مثال

**توظيف:** رصد الموظفون في أحد مكاتب الاستيراد والتصدير عدد ساعات العمل التي يعملونها على مدار ٥ أسابيع، فكانت: ٥٩، ٤٠، ٤٤، ٤٨، ٤٤.

(أ) أوجد الانحراف المتوسط.

**الخطوة ١:** أوجد المتوسط الحسابي. المتوسط الحسابي لهذه البيانات يساوي ٤٧.

**الخطوة ٢:** أوجد مجموع القيم المطلقة للفرق بين كل قيمة والمتوسط الحسابي.

$$26 = 12 + 7 + 3 + 1 + 3 = |47 - 59| + |47 - 40| + |47 - 44| + |47 - 48| + |47 - 44|$$

**الخطوة ٣:** اقسّم المجموع على عدد القيم  $26 \div 5 = 5,2$  إذن الانحراف المتوسط يساوي ٥,٢.

(ب) أوجد التباين والانحراف المعياري.

**الخطوة ١:** لإيجاد التباين؛ أوجد مربع الفرق بين كل قيمة والمتوسط الحسابي، ثم اجمع هذه المربعات، واقسم المجموع على عدد القيم.

$$E = \frac{(47-59)^2 + (47-40)^2 + (47-44)^2 + (47-48)^2 + (47-44)^2}{5} = \frac{212}{5}$$

**الخطوة ٢:** الانحراف المعياري يساوي الجذر التربيعي للتباين.

$$E = \frac{212}{5}$$

التباين  
أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين

$$\sqrt{\frac{212}{5}} = \sqrt{E}$$

استعمل الآلة الحاسبة

$$E \approx 6,51$$

التباين  $\frac{212}{5}$ ، والانحراف المعياري ٦,٥١ تقريبًا.

**تمارين**

أوجد المتوسط الحسابي والانحراف المتوسط والتباين والانحراف المعياري لكلٍّ من مجموعتي البيانات الآتيتين:

$$(2) \quad 16, 22, 17, 17, 13$$

$$(1) \quad 5, 9, 4, 2$$

## تدريبات حل المسألة

## إحصائيات العينة ومعالم المجتمع

(١) **العمرة:** يخطط صالح لأداء العمرة. وقد اختار ٥ شركات عشوائياً من الشركات التي تنقل المعتمرين براً، حيث استفسر منها عن تكلفة رحلة العمرة، ثم حسب الوسيط للأسعار التي حددتها هذه الشركات الخمس. أ) عيّن العينة والمجتمع في هذا الموقف.

(ب) صف إحصائي العينة ومعلمة المجتمع.

(٤) **اكتشف الخطأ:** يدرس ماجد وسلطان استعداداً لامتحان الإحصاء. يقول ماجد إن التباين لمجموعة من البيانات يكون دائماً أكبر من الانحراف المعياري لها، ولكن سلطان لا يوافق على ذلك، ويقول إن الانحراف المعياري لمجموعة من البيانات قد يكون أكبر من تباين هذه المجموعة. فأيهما على صواب؟ اشرح إجابتك.

(٥) **مراكز لياقة:** اختار أحد مراكز اللياقة ٨ أشخاص عشوائياً من بين المشتركين الدائمين، لمعرفة نوع الأجهزة التي يتعين عليه شراؤها في المستقبل، وسجّل عدد الدقائق التي يقضيها كل منهم على جهاز الجري، فكانت: ٣٠، ٤٥، ٢٠، ٦٠، ٣٠، ٣٠، ١٥. ثم حسب المتوسط الحسابي لهذه الأزمنة.

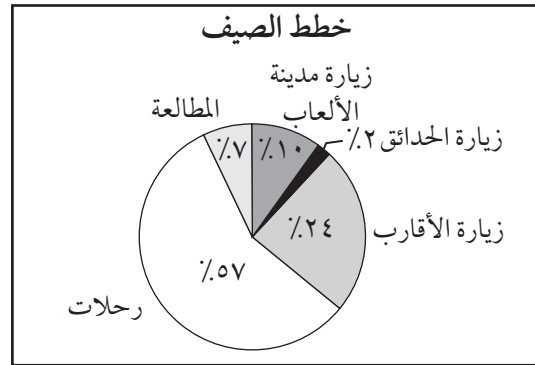
(أ) عيّن العينة والمجتمع في هذا الموقف، ثم صف إحصائي العينة ومعلمة المجتمع.

(ب) أوجد إحصائي العينة الوارد في الفرع (أ).

(ج) أوجد الانحراف المتوسط لهذه البيانات.

(د) أوجد التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

(٢) **إجازة صيفية:** أُجريت دراسة مسحية شملت طلاب الصف الثالث المتوسط في إحدى المدارس حول خططهم في الإجازة الصيفية، ومُثلت النتائج بالقطاعات الدائرية الآتية:



أوجد الانحراف المتوسط لنتائج هذه الدراسة.

(٣) **كرة قدم:** رصد فريق كرة قدم عدد الأهداف التي سجلها في كل مباراة لعبها، فكانت: ٢، ٤، ٥، ٣، ٧. أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

## التدريبات الإثرائية

## الخطأ المعياري وحدود فترات الثقة

لقد تعلمت الانحراف المعياري الذي يقيس بصورة أساسية مدى تباعد قيم مجموعة البيانات عن متوسطها الحسابي. كما يوجد مقياس أساسي آخر في الإحصاء وهو الخطأ المعياري للمتوسط الحسابي، ويصف مدى عدم التأكد من تمثيل المتوسط الحسابي للعينة للمتوسط الحسابي للمجتمع. ويُعطى بالمعادلة الآتية:

$$x_m = \frac{c}{\sqrt{n}}, \text{ حيث } c \text{ الانحراف المعياري، } n \text{ عدد أفراد العينة.}$$

وتشير معادلة الخطأ المعياري إلى أنه كلما كان حجم العينة أكبر، كان الخطأ المعياري أصغر. ويُعطى الخطأ المعياري غالبًا بصورة نسبتين مئويتين تُسميان حدّي فترة الثقة.

$$\text{حدًا فترة الثقة عند المستوى } 95\% \text{ هما: } \overline{س} \pm 96, 1 \text{ } x_m$$

$$\text{حدًا فترة الثقة عند المستوى } 99\% \text{ هما: } \overline{س} \pm 58, 2 \text{ } x_m$$

الانحراف المعياري لأوزان حبات التفاح في إحدى المزارع يساوي ٠,٨ أونصة. والمتوسط الحسابي

مثال

لأوزان حبات التفاح في عينة من ٢٥ تفاحة يساوي ٥,٢ أونصة. أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي عند المستوى ٩٩٪. أولاً، أوجد الخطأ المعياري.

$$x_m = \frac{c}{\sqrt{n}} = \frac{0,8}{\sqrt{25}} = 0,16$$

ثم استعمل معادلة فترة الثقة السابقة.

$$\text{حدًا فترة الثقة عند المستوى } 99\% \text{ هما: } \overline{س} \pm 58, 2 \text{ } x_m$$

$$= 5,2 \pm 58,2(0,16) = 5,2 \pm 9,312$$

لذا فترة الثقة عند المستوى ٩٩٪ تكون من ٤,٧٨٧٢ إلى ٥,٦١٢٨ أونصة. وهذا يعني أننا متأكدون بنسبة ٩٩٪ من أن المتوسط الحسابي للمجتمع يقع في هذه الفترة.

أوجد الخطأ المعياري للمتوسط الحسابي لكلٍّ من مجموعات البيانات الآتية:

$$(١) 306, 313, 301, 293, 326, 315 \quad (٢) 50, 43, 0, 27, 0, 64, 0, 62, 0, 60, 0$$

(٣) **جبنة:** يحفظ أحد المتاجر عبوات الجبن الطازجة في صناديق مبرّدة، وأوزان ٩ من هذه العبوات (بالأونصات) هي:

$$15, 19, 14, 16, 12, 17, 16, 12, 14$$

(أ) أوجد الخطأ المعياري للمتوسط الحسابي لمجموعة البيانات.

(ب) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي عند المستوى ٩٥٪.

(٤) **حضانة أطفال:** الانحراف المعياري لأعمار الأطفال في إحدى الحضانات يساوي ٢,١ سنة، والمتوسط الحسابي لأعمار

عينة مكوّنة من ٩ أطفال في هذه الحضانة يساوي ٤,٧ سنوات.

(أ) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي عند مستوى الثقة ٩٥٪.

(ب) ما عدد الأطفال الذين يجب أن تشملهم العينة حتى نكون متأكدين بنسبة ٩٥٪ من أن الخطأ في تقدير المتوسط هو

$$\pm 0,5 \text{ سنة؟}$$

٤-١٠

## تدريبات إعادة التعليم

### التباديل والتوافيق

**التباديل:** عندما تُنظَّم العناصر بحيث يكون ترتيبها مهمًّا، وتُكتب جميع الترتيب الممكنة لهذه العناصر، يُسمَّى كلُّ من هذه الترتيب تباديلًا. على سبيل المثال الترتيب أ ب لاختيار أ و ب يختلف عن الترتيب ب أ للاختيار نفسه.

التباديل	${}_r P_n = \frac{n!}{(n-r)!}$
----------	--------------------------------

مثال ١ أوجد قيمة  ${}_6 P_2$ 

$$\begin{aligned} {}_6 P_2 &= \frac{6!}{(6-2)!} \\ &= \frac{6!}{4!} \\ &= \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \\ &= 30 = 5 \times 6 \end{aligned}$$

قانون التباديل  
 $n = 6, r = 2$   
 بسط  
 تعريف مضروب العدد  
 بسط

يوجد ٣٠ طريقة لاختيار عنصرين مع الترتيب من بين ٦ عناصر.

**مثال ٢** كلمة المرور: يطلب برنامج حاسوبي معيّن من المستخدم إدخال كلمة مرور مكوّنة من ٥ أرقام مختلفة تُختار

من بين الأرقام ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩.

(أ) ما عدد كلمات المرور الممكنة؟

(ب) ما احتمال أن يكون الرقمان الأول والثاني فرديين، والأرقام الأخرى أي ٣ أرقام من الأرقام المتبقية؟

ح (الرقمان الأول والثاني فرديان) =  $\frac{\text{عدد عناصر الحادثة}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}}$

بما أنّه يوجد أربعة أرقام فردية فإنّ عدد طرائق اختيار الرقم الأول هو ٤، وعدد طرائق اختيار الرقم الثاني هو ٣، ويبقى ٥ اختيارات للرقم الثالث، و ٤ للرابع، و ٣ للخامس.

وبذلك يكون عدد عناصر الحادثة هو

$$4 \times 3 \times 5 \times 4 \times 3 = 720$$

$$\text{الاحتمال} = \frac{720}{2520} \approx 28,6\%$$

$$\begin{aligned} {}_9 P_5 &= \frac{9!}{(9-5)!} \\ &= \frac{9!}{4!} \\ &= \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \\ &= 2520 = 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = \end{aligned}$$

توجد ٢٥٢٠ طريقة لاختيار كلمة المرور.

### تمارين

أوجد قيمة كلِّ مما يأتي:

(١)  ${}_7 P_7$

(٢)  ${}_7 P_{12}$

(٣)  $[{}_9 P_9] \times [{}_7 P_{16}]$

(٤) **نادٍ ثقافي:** يتكون نادٍ ثقافي في إحدى المدارس من ١٠ أعضاء، منهم ٦ من الصف الثالث المتوسط و ٤ من الصف الثاني المتوسط. ويُراد اختيار رئيس للنادي ونائب للرئيس وأمين للسر وأمين للصندوق من بين أعضائه.

(أ) ما عدد طرائق اختيار هؤلاء الطلاب الأربعة؟

(ب) ما احتمال أن يكون هؤلاء الطلاب الأربعة من الصف الثالث المتوسط؟

## تدريبات إعادة التعليم

### التباديل والتوافيق

(تتمة)

**التوافيق:** يُسمّى عدد طرائق التشكيل الممكنة لمجموعة عناصر ليس لترتيبها أهمية بالتوافيق. على سبيل المثال أ ب و ب أ يمثلان الاختيار نفسه في التوافيق عند اختيار الحرفين أ و ب.

${}^n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$	التوافيق
--------------------------------	----------

**مثال** يتكوّن ناد ثقافي من ١٠ أعضاء، منهم ٦ طلاب من الصف الثالث المتوسط، و ٤ طلاب من الصف الثاني المتوسط. ويُراد اختيار لجنة من ٤ طلاب من أعضائه.

(أ) بكم طريقة يمكن اختيار أعضاء اللجنة؟

$$\begin{aligned} {}^n P_r &= \frac{n!}{(n-r)!} \\ {}^{10} P_4 &= \frac{10!}{(10-4)!} \\ &= \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} \\ &= 210 \end{aligned}$$

قانون التوافيق  
ن = ١٠، ر = ٤  
تعريف مضروب العدد  
بسط

أي أنّ هناك ٢١٠ طرائق ممكنة لاختيار أعضاء اللجنة الأربعة عندما لا يكون الترتيب مهماً.

(ب) إذا اختير أعضاء اللجنة عشوائياً، فما احتمال أن يكون اثنان من أعضاء اللجنة من الصف الثاني المتوسط؟

يمكنك اختيار عضوين من الصف الثاني المتوسط بطرائق عددها  ${}^6 P_2 = \frac{6!}{(6-2)!} = 15$  ويمكنك اختيار عضوين من الصف الثالث المتوسط بطرائق عددها  ${}^4 P_2 = \frac{4!}{(4-2)!} = 6$  وبحسب مبدأ العد الأساسي يمكن اختيار أعضاء اللجنة التي تتألف من طالبين من الصف الثاني المتوسط وطالبين من الصف الثالث المتوسط بطرائق عددها  $6 \times 15 = 90$  طريقة.

$$\begin{aligned} \text{ح (طالبان من الثاني المتوسط وطالبان من الثالث المتوسط)} &= \frac{\text{عدد عناصر الحادثة}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}} \\ &= \frac{90}{210} \approx 42,9\% \end{aligned}$$

**تمارين**

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

$$(1) {}^3 P_3 \quad (2) {}^{12} P_2 \quad (3) {}^9 P_9$$

(٤) **لجان:** بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مكوّنة من عضوين من بين أعضاء ناد اجتماعي عددهم ٩؟

(٥) **نادي الكتاب:** يقدم نادٍ للكتاب لكل عضو كتاباً في كل شهر لمدة سنة، ويُختار الكتاب من بين ٢٤ كتاباً، منها ١٠ كتب علمية و ١٤ كتاباً أدبياً.

(أ) بكم طريقة يمكن أن يختار الأعضاء ١٢ كتاباً؟

(أ) ما احتمال اختيار ٥ كتب علمية و ٧ كتب أدبية؟

## تدريبات حل المسألة

## التباديل والتوافيق

- (١) أعمال منزلية: تتكون إحدى الأسر من الأب، والأم، و ٤ أبناء وبنات. إذا كان شخصان من أفراد الأسرة يتعاونان على رفع الأطباق بعد تناول طعام الغداء، فبكم طريقة يمكن اختيار هذين الشخصين؟
- (٢) خدمة عامة: يختار الحاسوب في إحدى البلديات لجنة مكونة من ١٢ شخصاً اختياراً عشوائياً من قائمة تتضمن أسماء ٢٠ شخصية، لحضور جلسة المجلس البلدي. ما عدد طرائق اختيار أعضاء اللجنة؟
- (٣) رياضة: قرّر فريق كرة قدم أن يختار قائدين للفريق كل أسبوع بحيث تتاح لعدد أكبر من اللاعبين فرصة قيادة الفريق. في كل أسبوع يكتب كل واحد من أعضاء الفريق الأحد عشر اسمه على قصاصة من الورق، وتوضع القصاصات في إناء وتخلط جيداً، ثم يسحب قائدا الفريق قصاصتين من الإناء لتحديد قائدي الفريق للأسبوع المقبل. ما عدد طرائق اختيار قائدي الفريق؟
- (٤) ألغاز: يتكوّن لغز في إحدى الصحف من سلسلة من الأحرف التي يمكن إعادة ترتيبها لتكوين كلمة معينة. يحاول وليد أن يكوّن لغزاً مماثلاً لمشروع يقدمه للمدرسة، ويريد أن يخلط أحرف الكلمة (مستويان) في لغزه. بكم طريقة يمكن ترتيب حروف هذه الكلمة بحيث يكون الحرف (ي) هو الحرف الأول؟
- (٥) سباق خيل: تسابق ٢٢ متسابقاً في إحدى سباقات الخيل.  
أ) بكم طريقة يمكن أن تنهي الخيول السباق؟  
ب) بكم طريقة يمكن تحديد الخيول الفائزة بالمراكز الأولى والثاني والثالث؟  
ج) إذا كان لكل واحد من جميع هذه الخيول الفرصة نفسها في الفوز في السباق، وكان ٣ منها إنثاء، فما احتمال أن تفوز هذه الإناث الثلاث بالمراكز الثلاثة الأولى في السباق؟

## التدريبات الإثرائية

### صفقة البيتزا

٤-١٠

قدّم إعلان تجاري متلفز صفقة بيتزا، حيث يستطيع الزبون اختيار طبقين من البيتزا يحتوي كل منهما ٥ إضافات على الأكثر تُختار من بين ١١ إضافة. ويدّعي صبي يظهر في الإعلان أنّه توجد<sup>٢</sup>(١٠٢٤) أو<sup>١</sup>١٠٤٨٥٧٦ طريقة يستطيع أن يختار بها الزبون طبقين من البيتزا. هل ما يقوله هذا الصبي صحيح؟

لا	نعم	الإضافات
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	شريحة لحم
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	نقانق
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	طماطم
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	زيتون أخضر
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	زيتون أسود
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	فطر
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	جبنة صفراء
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	فلفل
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	بصل
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	أناناس
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	مرتديلا

### صفقة البيتزا!!!

يمكن أن تختار ولفترة محدودة فقط طبقين من البيتزا مع ٥ إضافات على الأكثر

لكل منهما بـ ١٤,٩٩ ريالاً فقط!!

(١) افترض أنّ الزبون يستطيع أن يختار العدد الذي يرغب فيه من الإضافات لغاية ١١ إضافة، فأوجد عدد طرائق تجهيز أطباق البيتزا، مستعملاً مبدأ العدّ. (إرشاد: تخيّل أنّ الزبون سيختار "نعم" أو "لا" لكل إضافة).

(٢) أوجد عدد طرائق تجهيز طبق البيتزا الواحد الذي يحتوي ٥ إضافات على الأكثر، مستعملاً التوافق.

(٣) بكم طريقة يمكن تجهيز الطبقين إذا كانا متماثلين؟

(٤) بكم طريقة يمكن تجهيز الطبقين إذا كانا مختلفين؟ (إرشاد: استعمل عدد الطرائق الممكنة لتجهيز الطبق الواحد من السؤال ٢، ثم أوجد عدد طرائق اختيار اثنتين منها). هل تستعمل التوافق أم التباديل؟

(٥) اجمع نتيجتي السؤالين ٣ و ٤ لتحديد العدد الكلي لطرائق تجهيز طبقين من البيتزا مع ٥ إضافات على الأكثر لكل منهما.

(٦) يدّعي الصبي في الإعلان أنّه توجد أمام الزبون<sup>٢</sup>(١٠٢٤) طريقة تجهيز، فما قيمة<sup>١</sup>(١٠٢٤)؟ وما وجه المقارنة بين الناتج الفعلي في السؤال ٥ والقيمة التي أوردها الصبي في الإعلان؟

## تدريبات إعادة التعليم

### احتمالات الحوادث المركبة

**الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة:** تتكوّن الحادثة المركبة من حادثين بسيطتين أو أكثر. والحوادث إمّا أن تكون مستقلة أو غير مستقلة.

احتمال حادثين مستقلتين	نتيجة إحدى الحادثين لا تؤثر في نتيجة الأخرى.	ح (أ و ب) = ح (أ) × ح (ب)	مثال: ظهور الرقم ٦ على مكعب أرقام في الرمية الأولى، ثم ظهور الرقم ٥ في الرمية الثانية.
احتمال حادثين غير مستقلتين	نتيجة إحدى الحادثين تؤثر في نتيجة الأخرى.	ح (أ و ب) = ح (أ) × ح (ب بعد أ)	مثال: اختيار كرة حمراء من كيس، ثم اختيار كرة زرقاء دون إرجاع.

**مثال ٢** يحتوي كيس على ٣ كرات حمراء وكرتين خضراوين و ٤ كرات زرقاء. اختيرت منه كرتان عشوائياً دون إرجاع. أوجد احتمال أن تكون الكرتان زرقاوين.

الحادثتان غير مستقلتين؛  
لذا: ح (أ و ب) = ح (أ) × ح (ب بعد أ)  
الكرة الأولى: ح (زرقاء) =  $\frac{4}{9}$   
الكرة الثانية: ح (زرقاء) =  $\frac{3}{8}$   
ح (زرقاء وزرقاء) =  $\frac{3}{8} \times \frac{4}{9} = \frac{12}{72} = \frac{1}{6}$   
احتمال سحب كرتين زرقاوين دون إرجاع يساوي  $\frac{1}{6}$ .

**مثال ١** أوجد احتمال ظهور الرقم ٦ في الرمية الأولى وظهور ٥ في الرمية الثانية عند إلقاء مكعب أرقام مرتين.

الحادثتان مستقلتان؛ لذا: ح (أ و ب) = ح (أ) × ح (ب)  
في الرمية الأولى: ح (ظهور ٦) =  $\frac{1}{6}$   
في الرمية الثانية: ح (ظهور ٥) =  $\frac{1}{6}$   
ح (٦ و ٥) = ح (٦) × ح (٥)  
 $\frac{1}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$   
احتمال ظهور ٦ ثم ٥ عند إلقاء المكعب مرتين يساوي  $\frac{1}{36}$ .

### تمارين

يحتوي كيس على ٣ كرات حمراء و ٤ كرات زرقاء و ٦ كرات صفراء. اختيرت منه كرات واحدة تلو الأخرى عشوائياً من دون إرجاع. أوجد كلا من الاحتمالات الآتية:

(١) ح (صفراء ثم صفراء) (٢) ح (حمراء ثم صفراء) (٣) ح (زرقاء ثم حمراء ثم صفراء)

(٤) يوجد في صندوق بطاقتان حمراوان و بطاقتان بيضاوان. إذا اختيرت من الصندوق بطاقتان عشوائياً من دون إرجاع، فما احتمال أن تكون الأولى حمراء والثانية بيضاء؟

(٥) إذا أُلقيت قطعنا نقد معدنيتان في بركة ماء، فما احتمال ظهور الشعار على القطعتين؟

(٦) إذا أُلقي مكعب أرقام وقطعة نقد معدنية، فما احتمال ظهور ٢ وكتابة؟

## تدريبات إعادة التعليم

(تمة)

## احتمالات الحوادث المركبة

**الحوادث المتنافية والحوادث غير المتنافية:** تُسمى الحادثان اللتان لا يمكن وقوعهما معًا حادثين متنافيتين. وتُسمى الحادثان اللتان يمكن وقوعهما معًا حادثين غير متنافيتين.

احتمال الحوادث المتنافية	ح (أ أو ب) = ح (أ) + ح (ب)	ح (ظهور ٢ أو ٣ على مكعب أرقام) = ح (٢) + ح (٣) = $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$
احتمال الحوادث غير المتنافية	ح (أ أو ب) = ح (أ) + ح (ب) - ح (أ و ب)	ح (ظهور عدد زوجي أو عدد أولي على مكعب أرقام) = $\frac{5}{6} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} =$

**مثال** توجد ٤ بطاقات خضراء و ٤ بطاقات زرقاء في صندوق يحتوي على ٥٢ بطاقة. فإذا اختيرت بطاقة من الصندوق عشوائيًا، فما احتمال أن تكون خضراء أو زرقاء؟

الحادثان متنافيتان؛ لذا: ح (أ أو ب) = ح (أ) + ح (ب)

$$\text{ح (أ) = ح (بطاقة خضراء) = } \frac{4}{52} = \frac{1}{13}, \text{ ح (ب) = ح (بطاقة زرقاء) = } \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$\text{ح (خضراء أو زرقاء) = } \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13}$$

لذا احتمال اختيار بطاقة خضراء أو زرقاء يساوي  $\frac{2}{13}$ .

## تمارين

اختيرت كرة واحدة عشوائيًا من كيس يحتوي على كرتين حمراوين و ٥ كرات زرقاء و ٧ كرات صفراء. أوجد كلاً من الاحتمالات الآتية:

(١) ح (صفراء أو حمراء) (٢) ح (حمراء أو ليست صفراء) (٣) ح (زرقاء أو حمراء أو صفراء)

يحتوي صندوق على ٥ بطاقات حمراء و ١٠ بطاقات زرقاء و ١٥ بطاقة صفراء و ١٥ بطاقة خضراء. فإذا اختيرت بطاقة من الصندوق عشوائيًا، فأوجد كلاً من الاحتمالات الآتية:

(٤) ح (حمراء أو زرقاء) (٥) ح (بطاقة من أيٍّ من هذه الألوان الأربعة)

(٦) ح (زرقاء أو صفراء) (٧) ح (زرقاء أو خضراء)

(٨) ح (صفراء أو خضراء) (٩) ح (حمراء أو خضراء)

(١٠) من بين ١٥ طالبًا في الصف الثاني المتوسط (أ) يوجد ١٢ طالبًا عمر كلٍّ منهم ١٤ سنة، ومن بين ١٧ طالبًا في الصف الثاني المتوسط (ب) هناك ١٤ طالبًا عمر كلٍّ منهم ١٤ سنة، اختير أحد الطلاب من هذين الفصلين عشوائيًا، ما احتمال أن يكون من الصف الثاني المتوسط (أ) أو عمره ١٤ سنة؟

## تدريبات حل المسألة

## احتمالات الحوادث المركبة

- (١) **تاريخ ميلاد:** سأل سهيل صديقه أحمد عن تاريخ ميلاده. ما احتمال أن يكون تاريخ ميلاد أحمد مطابقاً لتاريخ ميلاد سهيل أو قبله بيوم واحد أو بعده بيوم واحد؟ (افتراض السنة ٣٦٥ يوماً وأن جميع أيام السنة متساوية الاحتمال).
- (٢) **رياضة:** تتكوّن مباراة إحدى الألعاب الرياضية بين الفريقين أ، ب من ٧ جولات، ويفوز في المباراة الفريق الذي يكسب ٤ جولات منها. إذا كان لكل فريق الفرصة نفسها في الفوز في كل جولة، فما احتمال أن تنتهي المباراة بفوز الفريق ب في أول ٤ جولات؟
- (٣) **تجارة:** يوجد في شركة لصناعة مواد التغليف ٦ موظفين مسؤولين عن تسويق وبيع منتجات الشركة، وهم ٣ فنيين و ٣ إداريين. أراد مدير الشركة أن يرسل ٤ من هؤلاء الموظفين لحضور مؤتمر حول صناعة التغليف، على أن يكون اختيارهم عادلاً، فقرر كتابة أسماء الموظفين الستة على قصاصات ورق ووضعها في وعاء، ثم اختيار ٤ قصاصات عشوائياً. ما احتمال أن تتكوّن اللجنة التي ستحضر المؤتمر من ٣ إداريين وفني واحد؟
- (٤) **كرات:** يوجد في كيس ١٠ كرات حمراء و ٦ خضراء و ٤ سوداء. إذا اختار كل واحد من ٣ أشخاص كرة واحدة من الكيس عشوائياً دون إرجاع، فما احتمال الحصول على ثلاث كرات حمراء؟
- (٥) **أسهم:** اشترى عصام ١٠٠ سهم من أسهم إحدى شركات صناعة الأدوية. وتسعى هذه الشركة للحصول على اعتماد أحد الأدوية من الجهة المسؤولة. احتمال اعتماد هذا الدواء يساوي ٥٠٪ بناءً على تقارير خبراء الأدوية. وفي حال اعتماده فإنّ احتمال أن يصبح سعر سهم الشركة مثليّ سعره الأصلي يساوي ٨٥٪ بناءً على تقارير خبراء سوق الأسهم.
- (أ) ما احتمال أن تحصل الشركة على اعتماد للدواء وأن يصبح سعر سهمها مثليّ سعره الأصلي؟
- (ب) ما احتمال أن تحصل الشركة على اعتماد للدواء وألا يصبح سعر سهمها مثليّ سعره الأصلي؟
- (ج) هل هاتان الحادثنان مستقلتان أم غير مستقلتين؟

## التدريبات الإثرائية

### تاريخ ميلاد

١٠-٥

طُلب من متسابق في أحد برامج المسابقات التلفزيونية أن يختار عشوائيًا عددًا كافيًا من الأشخاص للحضور إلى الغرفة، بحيث تكون احتمالية ميلاد أحدهم (على الأقل) في نفس اليوم والشهر الذي ولد فيه المتسابق أكبر من ٥٠٪. ولأهمية عامل الزمن في المسابقة، فإن المتسابق لا يريد أن يختار عددًا من الأشخاص أكثر من العدد الضروري. ما عدد الأشخاص الذين يجب على المتسابق أن يحضرهم إلى الغرفة؟

(١) تخمّن عدد الأشخاص الذين يجب على المتسابق أن يحضرهم إلى الغرفة.

(٢) إذا كان احتمال أن يكون لكل شخص في الغرفة تاريخ ميلاد مختلف هو أصغر من ٥٠٪ فإن احتمال أن يشترك اثنان منهم في تاريخ الميلاد هو أكبر من ٥٠٪. اشرح سبب ذلك.

(٣) لاحظ النمط الآتي:

إذا كان في الغرفة شخصان فإن احتمال أن يكون تاريخا ميلادهما مختلفين يساوي:

$$\frac{364}{365} \times \frac{364}{365} \approx 99,7\%$$

وإذا كان في الغرفة ٣ أشخاص فإن احتمال أن تكون تواريخ ميلادهم مختلفة يساوي:

$$\frac{363}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{364}{365} \approx 99,2\%$$

وإذا كان في الغرفة ٤ أشخاص فإن احتمال أن تكون تواريخ ميلادهم مختلفة يساوي:

$$\frac{362}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{364}{365} \approx 98,4\%$$

استمرّ في توسعة هذا النمط إلى أن تحصل على احتمال أصغر من ٥٠٪. ما عدد الأشخاص الذين يجب على المتسابق أن يحضرهم إلى الغرفة للحصول على احتمال أصغر من ٥٠٪؟

(٤) وبناءً عليه، فما عدد الأشخاص الذين يجب على المتسابق أن يحضرهم إلى الغرفة ليكون احتمال اشتراك اثنين منهم في تاريخ الميلاد نفسه أكبر من ٥٠٪؟ قارن هذا العدد بتخمينك في السؤال ١.

(٥) استعمل الطريقة السابقة لتحديد عدد الأشخاص الذين يجب على المتسابق أن يحضرهم إلى الغرفة ليكون احتمال اشتراك اثنين منهم في تاريخ الميلاد نفسه (دون تحديد للشهر) أكبر من ٥٠٪؟

# ملحق الإجابات

التاريخ

الاسم

(تنفيذ)

## ١-١٠ تدريبات إعادة التعليم

تصميم دراسة مسجعية

أساليب المعايمة: افرض أنك تريد ان تجري دراسة حول المحطات الزاوية المفتوحة لطلاب مدرستك، ففي هذه الحالة يكون طلاب المدرسة كافة المجتمع الذي تريد ان تجري الدراسة عليه، والمدينة جزء من مجموعة أكبر تختار لتمثل المجموعة كإقامة. أما المسح الشامل فيمثل كل أفراد المجتمع، ويختار المدينة المشمولة من المجتمع بحيث تكون ممثلة للمجتمع كإقامة.

المدينة العمومية البسيطة	المدينة التي لها فرصة الاختيار نفسها كأي مدينة أخرى من المجتمع.
المدينة المشوئية التطبيقية	يقسم المجتمع إلى فئات متماثلة غير متماثلة، ثم تختار عينة من كل واحدة من هذه الفئات.
المدينة العمومية المنظمة	المدينة التي يختار أفرادها وفقاً لمرس معين أو فترة زمنية محددة.

مثال ٢

١) حدد المدينة والمجتمع الذي اختيرت منه مدير المدرسة.

٢) حدد المدينة والمجتمع الذي اختيرت منه مدير المدرسة.

٣) اذكر المدينة والمجتمع الذي اختيرت منه مدير المدرسة.

٤) اذكر المدينة والمجتمع الذي اختيرت منه مدير المدرسة.

مثال ١

١) حدد المدينة والمجتمع الذي اختيرت منه مدير المدرسة.

٢) حدد المدينة والمجتمع الذي اختيرت منه مدير المدرسة.

٣) حدد المدينة والمجتمع الذي اختيرت منه مدير المدرسة.

٤) حدد المدينة والمجتمع الذي اختيرت منه مدير المدرسة.

١) حدد المدينة والمجتمع الذي اختيرت منه مدير المدرسة.

٢) حدد المدينة والمجتمع الذي اختيرت منه مدير المدرسة.

٣) حدد المدينة والمجتمع الذي اختيرت منه مدير المدرسة.

٤) حدد المدينة والمجتمع الذي اختيرت منه مدير المدرسة.

الفصل ١٠ الاحصاء والاحتمال

٧

التاريخ

الاسم

## ١-١٠ تدريبات إعادة التعليم

تصميم دراسة مسجعية

المدينة المتشجرة: المدينة المتشجرة هي المدينة التي تعطي طريقة اختيارها تفضيلاً لمجموعة معينة على مجموعة أخرى، وتكون العينة غير متشجرة إذا كان لكل فرد منها احتمال نفسه في الاختيار.

ومن أمثلة العينات المتشجرة العينات الملائمة وهي التي تشمل أفراد المجتمع الذين يسهل الوصول إليهم. وتعد المدينة المتشجرة نوعاً آخر من العينات المتشجرة، وتشمل الأفراد الذين يرغون في الانضمام إلى المدينة.

مثال

١) حدد المدينة والمجتمع الذي اختيرت منه مدير المدرسة.

٢) حدد المدينة والمجتمع الذي اختيرت منه مدير المدرسة.

٣) حدد المدينة والمجتمع الذي اختيرت منه مدير المدرسة.

٤) حدد المدينة والمجتمع الذي اختيرت منه مدير المدرسة.

٥) حدد المدينة والمجتمع الذي اختيرت منه مدير المدرسة.

٦) حدد المدينة والمجتمع الذي اختيرت منه مدير المدرسة.

٧) حدد المدينة والمجتمع الذي اختيرت منه مدير المدرسة.

٨) حدد المدينة والمجتمع الذي اختيرت منه مدير المدرسة.

٩) حدد المدينة والمجتمع الذي اختيرت منه مدير المدرسة.

الفصل ١٠ الاحصاء والاحتمال

٦

## ١-١٥ التدرجات الإثرائية الشعار أو الكتابة

هناك تحيز في ظهور الشعار أو الكتابة إثر سقوط قطعة تقود معدنية عند وضعها مبرزة على طاولة وحر الطارئة قليلاً ويعتمد ذلك على طريقة صنع بعض القطع النقدية. تبيّن عند قطع تقود من فئة صشرة المسكوكة في السنة نفسها، على حواشيها على طاولة، ثم حر الطارئة بانطفئ بحيث تستقط قطع التقود على أوجها على الطاولة.

١) ما النسبة المئوية لقطع التقود التي تتوقع ظهور الشعار في كل منها؟

اجابة ممكنة: ٥٠٪

٢) ما النسبة المئوية لقطع التقود التي ظهر الشعار في كل منها فعلاً؟

الغفر: اجابات الطلاب: ونحن نبيّن ان تكون نسبة الشعار اكر من نسبة الكتابة اعد التجربة مرة اخرى.

٣) هل كانت النتائج عاتلة للنتائج المحاراة السابقة؟

الغفر: اجابات الطلاب: بئني ان تكون متشابهة.

٤) كون تحيزيًا حول السبب الذي يجعل النسبة المئوية النهائية لظهور أحد الزوجين مختلفة عن النسبة المئوية المرفوعة.

اجابة ممكنة: وزن احد الزوجه اكر: الاغلبية الوجوده على القفظة.

تُشكّل قطع التقود قليلاً عند صنعها، بحيث يكون ظهور الشعار عند سقوطها أكثر احتمالاً ويبدو أن هناك فروقات بحسب سنة الصنع. أعد هذه التجربة مع قطع نقدية مصنوعة في سنوات مختلفة.

٥) هل كانت النتائج عاتلة تقريباً للنتائج السابقة؟ شرح الأسباب.

الغفر: اجابات الطلاب:

وسبب هذا التحيز: فإن استعمال تقود رخي قطعة التقود على الأرض أو الطاولة لتحديد الفائز طريقة غير عادلة، بحيث إن ظهور الشعار أكثر احتمالاً.

٦) كيف يمكنك أن تتأكد من تجربة رخي قطعة التقود بحيث يكون احتمال ظهور الشعار مساوياً لاحتمال ظهور الكتابة؟

اجابة ممكنة: اسبك القفظة قبل سقوطها على الأرض؛ ايجاد قفظة تقود متوازنة.

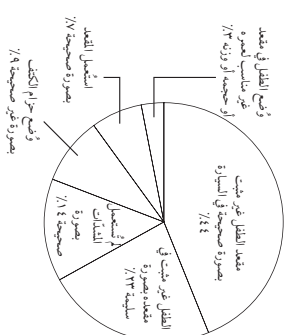
أعد هذه التجربة مع قطع تقود من فئات أخرى لترى إن كان هناك تحيز في صناعة هذه القطع.

٧) اشرح ما وجدت عند إجراء هذه التجربة مع قطع تقود من الفئات: ٥٠ هائلة، ٢٥ هائلة، ٥ هائلة.

الغفر: اجابات الطلاب:

## ١-١٥ تدرجات حل المسألة تصميم دراسة مسحية

٥) سلامة الأطفال: فحصت مؤسسة السلامة العامة مقاعد الأطفال المستعملة في السيارات في إحدى المناطق، لكل من رغبت في إجراء هذا الفحص المجاني. وقد وجدت أن ٢٧٪ فقط من ١٠٠٠٠ مقعد استعملت استعمالاً صحيحاً. بين التجميل بالقطاعات الدائرية أدناه السبب المبرر القريب لنتائج فحص سلامة المقعد:



نتائج فحص مقاعد الأطفال

رُغم القليل في مقعد أو حزمة أو زود ٢٣٪

مقعد المثلث غير مثبت ٤٤٪

مقعد غير مثبت في مقعد السيارة ٢٣٪

مقعد غير مثبت في مقعد السيارة ١٣٪

مقعد غير مثبت في مقعد السيارة ٧٪

مقعد غير مثبت في مقعد السيارة ٧٪

مقعد غير مثبت في مقعد السيارة ٧٪

١) اكتب عبارة تصف أبرز العائبة.

العائبة متغيرة: حيث انها تطوئية.

ب) هل من المناسب القول أن ٢٣٪ من الأطفال الذين أُخري فحص المقاعد في ممتلكاتهم، لم يُتَجرأ في مقاعدهم بصورة سليمة؟ اشرح اجابك.

لا: لم تكن العائبة متوازنة؛ الا لا يمكن فهم نتائجها عن الجميع. فلا توجد معلومات عن طريقة استعمال المقاعد في السيارات التي لم تُفحص.

حدّثي الأسئلة ١ - ٤ الجيدة والجميع الذي اجريت منه، لم يكن إذا كانت الجيدة متغيرة أم غير متغيرة. وإن لم تكن متغيرة فصفها إلى بسيطة أو متوسطة أو متقدمة. وإن كانت متغيرة فصفها إلى ملائمة أو نظيفة، وشر اجابك.

١) مدرسة: يجتاز معلّم أربعة طلاب كل يوم لتوزيع كراسة الواجبات على جميع طلاب الصف. فهو يكتب أسماء طلاب الصف وعددهم ١٨ على قصاصات من الورق، ويضعها في كأس، ويخلطها جيّداً، ثم يسحب أربعة منها لتحديد أسماء الطلاب الأربعة الذين سيوزعون الكراسات على زملائهم.

العائبة: طلاب؛ العائبة: جميع طلاب الصف وعددهم ١٨؛ غير متغيرة؛ عائبة عشوائية بسيطة

٢) انتخابات مدرسية: لنرض أن طالبات إحدى المدارس الثانوية الحرة رئيسة اللجنة الاجتماعية في المدرسة من خلال الاقتراع، ولالحصول على نتائج بيكر ٥٥؛ ووقت إحدى طالبات اللجنة الاعلامية عند مدخل قاعة الاقتراع، وسألت أكبر عدد ممكن من الطالبات عن الطالبات التي انتخبها.

العائبة: الطالبات الوثاني ساتن عضو اللجنة الاعلامية؛ العائبة: طالبات المدرسة الثانوية؛ غير متغيرة؛ عائبة ملائمة

٣) أمراض: تستعمل مؤسسة صحية شبكة لتأسر طورا قرب محمية طبيعية. وتفحص الطيور التي تسقط في هذه الشراك للكشف عن وجود فيروس أنفلونزا الطيور.

العائبة: الطيور التي تسقط في الشبكة العائبة: كل الطيور في المنطقة؛ متغيرة؛ عائبة ملائمة

٤) تجربة: يفحص مهنايسو التربة في موقع إنشاء مشروع إسكان، وذلك بتقسيم الموقع إلى ١٢ منطقة مستطيلة، ولمل كأس من تربة كل منطقة لفحصها، للكشف عن وجود مواد كيميائية ضارة.

العائبة: ١٢ كانا من تواب مناطق الموقع. العائبة: كل التربة في الموقع؛ غير متغيرة؛ ملائمة



## ٢-١٠ التدريبات الإثرائية هامش الخطأ

من المهم عند إجراء دراسة مسحية أن تعرف مدى دقة البيانات التي تحميها. ستعرف فيما يأتي على دقة الدراسة المسحية بحساب هامش الخطأ أو الحد الأقصى لعدم الدقة. يجب تحديد مستوى الثقة أولاً عند حساب هامش الخطأ. يبين مستوى الثقة مدى صحة النسب المئوية المعطاة في الدراسة المسحية، على افتراض أن الأخطاء الموجودة هي أخطاء إحصائية فقط (أي أنه لا يوجد تحيز). تستعمل معظم الدراسات المسحية مستوى الثقة ٩٥٪، بمعنى أنه من التأكيد ٩٥٪ أن تكون النسبة الصحيحة أكبر من النسبة المعطاة في الدراسة المسحية، أو أقل منها بمقدار لا يزيد على هامش الخطأ.

هامش الخطأ (عند مستوى الثقة ٩٠٪)	$\frac{1}{n} \times 29 = \frac{1}{27} \times 29$
هامش الخطأ (عند مستوى الثقة ٩٥٪)	$\frac{2}{n} \times 98 = \frac{2}{27} \times 98$
هامش الخطأ (عند مستوى الثقة ٩٩٪)	$\frac{3}{n} \times 87 = \frac{3}{27} \times 87$
n = عدد أفراد العينة	

تتعرض الحسبات السابقة أن عدد أفراد العينة ن أصغر من عدد أفراد المجتمع بدلالة إحصائية.

مثال

رئيس الفرقة التجارية الحالي يقدم على منافسه في انتخابات رئاسة الفرقة التجارية بقرار ٥٢٪ إلى ٤٨٪. أوجد هامش الخطأ في هذا الاستطلاع عند مستوى الثقة ٩٥٪.

$$\begin{aligned} \text{هامش الخطأ (عند مستوى الثقة ٩٥٪)} &= \frac{2}{n} \times 98 \\ \text{صيغة هامش الخطأ عند مستوى الثقة ٩٥٪} &= \frac{2}{n} \times 98 \\ n &= 300 \\ \text{يطبق} &= 300 \times 0,07 \approx 21 \end{aligned}$$

هامش الخطأ في هذه الدراسة عند مستوى الثقة ٩٥٪ هو ٥٧،٠٠٧، أو ٥،٧٧٪ وهذا يعني أنه من المرجح نسبة ٩٥٪ أن يكون التأييد لرئيس الفرقة التجارية الحالي بين ٣، ٤٦، ٥٧٪.

(١) تذكر: أظهرت دراسة مسحية شملت ٣٠٠ من الشباب أن ٦٥٪ من أفراد العينة يعارضون زيادة أسعار تذاكر دخول حديقة الحيوان. أوجد هامش الخطأ لهذه الدراسة عند مستوى الثقة ٩٠٪. ٥٣٪

(٢) اجازات: أظهرت دراسة مسحية شملت ١١٠٠ شخص أن ٣٤٪ من أفراد العينة يخطرون للسياحة الداخلية في هذا الصيف. أوجد هامش الخطأ لهذه الدراسة عند مستوى الثقة ٩٩٪. ٢٥٪

(٣) تعليم: أظهرت دراسة مسحية شملت ٢١٥ طالباً في الصف الثالث الثانوي في إحدى المناطق التعليمية أن ٤٧٪ من أفراد العينة يخطرون لتابعة الدراسة الجامعية.

(١) أوجد هامش الخطأ لهذه الدراسة عند مستوى الثقة ٩٥٪. ٢٥٪

(ب) اكتب للذي الذي تقع ضمنه نسبة الطلاب الذين يخطرون لتابعة الدراسة الجامعية في تلك المنطقة عند مستوى الثقة ٩٥٪ بصورة مئوية. ٤٢،٥٪  $\geq$  من ٥٠،٥٪

(٤) ما العدد التقريبي للأشخاص الذين يجب أن تشملهم الدراسة حتى يكون هامش الخطأ ١٥٪ عند مستوى الثقة ٩٥٪

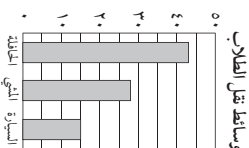
١٣ الفصل ١٠ الإحصاء والاحتمال

## ٢-١٠ تدريبات حل المسألة تحليل نتائج الدراسة المسحية

(٤) وسائط نقل: أجرت إدارة التعليم في إحدى المناطق استطلاعاً شمل ٨٦ طالباً عن الطريقة التي يصل بها الطلاب إلى مدارسهم.

المسؤول: ما واسطة النقل التي استعملتها للذهاب إلى المدرسة هنا اليوم؟

الاستنتاج: يستقل معظم الطلاب الحافلة للذهاب إلى المدرسة كل يوم.



(١) حدد صحة المعلومات.

أ) قد لا يكون حجم العينة كافياً لتمثيل الجميع بصالح.

(ب) حدد صحة الاستنتاج.

يبين التمثيل البياني أن الذين يسبرون على أقدامهم أو يستقلون السيارة أكثر من الذين يستقلون الحافلة. وإضافة إلى ذلك فليس واضحاً إذا كان الطلاب الذين استقروا الحافلة في ذلك اليوم يستقلونها كل يوم.

(ج) اكتب استنتاجاً صحيحاً من عندك مستخدماً البيانات لتزيد إجاباتك.

ستتبع الإجابات.

١٢ الفصل ١٠ الإحصاء والاحتمال

(١) هو تيونر يستعمل ربّاسر المبالغ التي يدفعها شهرياً لتوفير الماء والكهرباء والغاز، وقد بلغت قيمة هذه التوفيرات للأشهر الستة الأولى من أحد الأعوام على النحو الآتي: ٢٦٨ ريالاً، ٢٦٨ ريالاً، ٨٢٢ ريالاً، ٨٢٢ ريالاً، ٢٦٨ ريالاً، ٢٦٨ ريالاً، ٨٢٢ ريالاً.

أي مقاييس التوزع المركزية (إن وجدت) هو الأنسب لتمثيل هذه البيانات؟ برز إجاباتك، ثم احسب ذلك المقاس.

التول: توجد فيه مقورة كبيرة: ٢٦٨ ريالاً.

(٢) أسعار البنزين: افترض أن إحدى الصحف أجرت دراسة شملت ١٥٣٤ شخصاً اجيروا عمواً من أنحاء المملكة، وطُرح عليهم السؤال الآتي: هل ستقل استهلاكك لسيارتك إذا ارتفعت أسعار البنزين؟ وقد أجاب ٦٧٪ من الأشخاص الذين قبل دجلهم السبري عن ٥٠٠٠ ريالاً أنه سوف يقل استهلاكهم لسيارتهم، في حين أجاب ٣٠٪ بأنهم لن يقللوا استهلاكهم لسيارتهم. وبناء على هذه النتائج خلصت الصحيفة إلى استنتاج أن أفراد المجتمع مستعدون لتزويد استهلاك سياراتهم إذا ارتفعت أسعار البنزين. حدد صحة كل من المعلومات والاستنتاج لتفريز الدراسة.

(٣) قد لا تكون المعلومات صحيحة: بين التفرير لا يذكر عدد هؤلاء الذين يقل دخلهم عن ٥٠٠٠٠ ريال من بين المشاركين في الدراسة. فقد يكون حجم العينة صغيراً جداً. وقد لا يكون الاستنتاج صحيحاً أيضاً لعدم وجود بيانات عن الجميع عموماً.

(٤) رياضية: رصد عدد المساءات التي ركضها كل يوم على مدار أسبوع، استمدت الأرقام الآتية في منافسة دولية، وكانت: ٩ كم، ٨ كم، ٧ كم، ١١ كم، ١٠ كم، ٧ كم، ١٠ كم، أي مقاييس التوزع المركزية (إن وجدت) هو الأنسب لتمثيل هذه البيانات؟ برز إجاباتك، ثم احسب ذلك المقاس.

الوسط الحسابي: لا توجد فيه مقورة: ٨ كم

١٣ الفصل ١٠ الإحصاء والاحتمال

التاريخ \_\_\_\_\_

الاسم \_\_\_\_\_

(تنمية)

### ٣-١٠ تدريبات إعادة التعليم إحصائيات العينة ومعالم المجتمع

التحليل الإحصائي، الانحراف المتوسط هو متوسط القيم المتعلّقة بالفرق بين كل قيمة والمتوسط الحسابي لمجموعة البيانات، والانحراف المعياري هو القيمة التي تُحسب لتدل على مدى تباعد قيم مجموعة البيانات عن متوسطها الحسابي، أما تباعد مجموعة من البيانات فهو مقياس الانحراف المعياري لتلك البيانات.

**مثال** توظيفت، رصد الموظفين في أحد مكاتب الاستيراد والتصدير عدد ساعات العمل التي يعملونها على مدار ٥ أسابيع، وكانت: ٤٨، ٤٤، ٤٠، ٤٤، ٥٩.

١) أوجد الانحراف المتوسط.

الخطوة ١: أوجد المتوسط الحسابي، المتوسط الحسابي لهذه البيانات يساوي ٤٧.

الخطوة ٢: أوجد مجموع القيم المطلقة للفرق بين كل قيمة والمتوسط الحسابي.

$$44 - 47 = -3 \quad |44 - 47| = 3 \quad |48 - 47| = 1 \quad |48 - 47| = 1 \quad |59 - 47| = 12$$

الخطوة ٣: اقسّم المجموع على عدد القيم  $21 \div 5 = 4.2$ ، إذن الانحراف المتوسط يساوي ٤.٢.

ب) أوجد التباين والانحراف المعياري.

الخطوة ١: لإيجاد التباين، أوجد مربع الفرق بين كل قيمة والمتوسط الحسابي، ثم اجمع هذه المربعات، واقسم المجموع على عدد القيم.

$$x^2 = \frac{(44-47)^2 + (44-47)^2 + (48-47)^2 + (48-47)^2 + (59-47)^2}{5}$$
$$x^2 = \frac{9 + 9 + 1 + 1 + 144}{5}$$
$$x^2 = \frac{164}{5}$$
$$x^2 = 32.8$$

الخطوة ٢: الانحراف المعياري يساوي الجذر التربيعي للتباين.

$$x = \sqrt{32.8}$$

أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{32.8}$$

التباين  $32.8 \approx x^2$ ، والانحراف المعياري  $5.72 \approx x$ ، تقريبًا.

تعاريف

أوجد المتوسط الحسابي والانحراف المتوسط والتباين والانحراف المعياري لكلٍّ من مجموعتي البيانات الآتيتين:

$$1) \quad 2, 3, 4, 9, 5, 0$$

$$\bar{x} = \frac{2 + 3 + 4 + 9 + 5 + 0}{6} = \frac{23}{6} \approx 3.83$$

$$s^2 = \frac{2^2 + 3^2 + 4^2 + 9^2 + 5^2 + 0^2}{6} - \left(\frac{23}{6}\right)^2 = \frac{59}{6} - \frac{529}{36} = \frac{354 - 529}{36} = \frac{-175}{36}$$

الفصل ١٠ الإحصاء والاحتمال

١٥

التاريخ \_\_\_\_\_

الاسم \_\_\_\_\_

### ٣-١٠ تدريبات إعادة التعليم إحصائيات العينة ومعالم المجتمع

إحصائيات العينة ومعالم المجتمع، الإحصائي مقياس يصف إحدى خصائص العينة، والمتعلّمة مقياس يصف إحدى خصائص المجتمع. وتغير قيمة الإحصائي عادةً من عينة إلى أخرى، إلا أنّ متعلمة المجتمع تبقى ثابتة لأنها تمثل المجتمع ككلًا.

**مثال** عيّنت العينة والمجتمع في كلّ من المواقف الآتية، ثم صنف إحصائي العينة ومتعلّمة المجتمع:

١) اختيرت عينة عشوائية مكونة من ٥٠ مستوفًا في سوق تجاري، ثم حُسب المتوسط للمبالغ التي أنفقت أراء العينة في ذلك السوق.

العينة: المجموعة الكوتة من ٥٠ مستوفًا.

المجتمع: جميع المستوفين الموجودين في السوق التجاري.

إحصائي العينة: وسط المبالغ التي أنفقتها أراء العينة في السوق التجاري.

متعلمة المجتمع: وسط المبالغ التي أنفقتها جميع المستوفين الموجودين في السوق التجاري.

ب) تُؤخذ أربعة من خط الإنتاج كل ٢٠ دقيقة في مصنع لإنتاج الأثاث، وتُنحصر للتكثف من العيوب، ثم يُحسب المتوسط الحسابي لعدد الأثاث المعيبة في الإنتاج اليومي للمصنع.

العينة: الأثاث التي تُفحص للتكثف من العيوب.

المجتمع: جميع الأثاث التي ينتجها المصنع.

إحصائي العينة: المتوسط الحسابي لعدد الأثاث المعيبة في العينة.

متعلمة المجتمع: المتوسط الحسابي لعدد الأثاث المعيبة من إنتاج المصنع ككلًا.

تعاريف

عَيّن العينة والمجتمع في كلّ من المواقف الآتية، ثم صنف إحصائي العينة ومتعلّمة المجتمع:

١) طقس: جوبت دائرة الأرصاد الجوية عشر محطات رصد لقياس كميات الأمطار المساقطة في مواقع مختلفة في إحدى المناطق، ثم حُسب المتوسط لكميات الأمطار السنوية في هذه المواقع.

العينة: ١٠ محطات رصد؛ المجتمع: جميع مواقع المنطقة؛ إحصائي العينة: وسط كميات الأمطار السنوية في محطات الرصد العشرة؛ متعلمة المجتمع: وسط كميات الأمطار السنوية في جميع مواقع المنطقة.

٢) علم النباتات: اختار عالم ٢٠ شجرة عشوائية في غابة، ثم حَسب المتوسط الحسابي لارتفاعات هذه الأشجار العشرين.

العينة: ٢٠ شجرة؛ المجتمع: جميع الأشجار في الغابة؛ إحصائي العينة: ارتفاع الشجرة العينة؛ متعلمة المجتمع: ارتفاع شجرة الغابة.

٣) بصوت: أجرى باحث منحنًا في الرياضيات لطلاب الصف الثالث المتوسط في ٢٥ مدرسة في منطقة الرياض، ثم حَسب المتوسط الحسابي لعدد الناجحين في هذا الامتحان في المدارس الخمسة والمدرسين.

العينة: طلاب الثالث المتوسط في المدارس الخمسة والمدرسين؛ المجتمع: جميع طلاب الثالث المتوسط في منطقة الرياض التعليمية.

إحصائي العينة: متوسط عدد الناجحين في الامتحان في المدارس العينة؛ متعلمة المجتمع: متوسط عدد الناجحين في الامتحان في كافة المدارس التي يوجد فيها الصف الثالث المتوسط في منطقة الرياض.

الفصل ١٠ الإحصاء والاحتمال

١٤

## ٣-١٠ التدرجيات الإثرائية

## الخطا المعياري وحدود فترات الثقة

لقد تعلمت الانحراف المعياري الذي يقاس بصورة أساسية مدى تباعد قيم مجموعة البيانات عن متوسطها الحسابي. كما يوجد مقياس أساسي آخر في الإحصاء وهو الخطا المعياري للمتوسط الحسابي، ويصف مدى عدم التأكد من عدل المتوسط الحسابي للبيانات للمتوسط الحسابي للمجتمع. ويُعطى بالمعادلة الآتية:

$$\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

و يشير معادلة الخطا المعياري إلى أنه كلما كان حجم العينة أكبر، كان الخطا المعياري أصغر. ويُعطى الخطا المعياري غالباً بصورة نسبية مؤشرين: تسجيان حثلي فترة الثقة.

$$\text{حداً فوق الثقة عند المستوى } 95\% \text{ هي: } \bar{x} \pm 1.96 \sigma_x$$

$$\text{حداً فوق الثقة عند المستوى } 99\% \text{ هي: } \bar{x} \pm 2.58 \sigma_x$$

مثال

الانحراف المعياري لأوزان حبات الفلاح في إحدى المزارع يساوي ٠.٨ أونصة. والمتوسط الحسابي لأوزان حبات الفلاح في مزرعة من ٢٥ فلاحاً يساوي ٢٥ أونصة. أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي عند المستوى ٩٩٪.

$$\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.8}{\sqrt{25}} = 0.16$$

ثم استعمل معادلة فترة الثقة السابقة.

$$\text{حداً فوق الثقة عند المستوى } 99\% \text{ هي: } \bar{x} \pm 2.58 \sigma_x$$

$$\text{حداً فوق الثقة عند المستوى } 99\% \text{ هي: } 25 \pm 2.58(0.16) = (24.12, 25.88)$$

لذا فترة الثقة عند المستوى ٩٩٪ تكون من ٢٤.١٢٨ إلى ٢٥.٨٧٢ أونصة. وهذا يعني أننا نؤكد بنسبة ٩٩٪ من أن المتوسط الحسابي للمجتمع يقع في هذه الفترة.

أوجد الخطا المعياري للمتوسط الحسابي لكل من مجموعات البيانات الآتية:

$$1) \quad 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30$$

$$2) \quad 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100$$

$$3) \quad 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000$$

جينة، يُحفظ أحد الناحج عبرات الجينة الطازجة في صناديق مبردة، وأوزان ٩ من هذه الجينات (بالأونصات) هي:

$$1.4, 1.12, 1.12, 1.12, 1.12, 1.12, 1.12, 1.12, 1.12$$

$$1) \quad \text{أوجد الخطا المعياري للمتوسط الحسابي لهذه الجينات. تقريباً } 0.07$$

$$2) \quad \text{أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي عند المستوى } 95\% \text{ من } 13.61 \text{ تقريباً}$$

٤) **حضانة أطفال:** الانحراف المعياري لأعمار الأطفال في إحدى الحضانات يساوي ١.٢ سنة، والمتوسط الحسابي لأعمار عينة مكونة من ٩ أطفال في هذه الحضنة يساوي ٤ سنوات.

$$1) \quad \text{أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي عند مستوى الثقة } 95\% \text{ من } 6.112 \text{ إلى } 8.184 \text{ تقريباً}$$

ب) ما عدد الأطفال الذين يجب أن تشملهم العينة حتى تكون متأكدين بنسبة ٩٥٪ من أن الخطأ في تقدير المتوسط هو  $\pm 0.05$ ؟ تقريباً ٢٣ أطفال على الأقل

## ٣-١٠ تدريجيات حل المسألة

## إحصائيات العينة ومعلم المجتمع

٤) اختلف الوفاة، يدرس ماجد وسلمان استعداءا لامتحان الإحصاء. يقول ماجد أن التباين لمجموعة من البيانات يكون دائماً أكبر من الانحراف المعياري لها، ولكن سلمان لا يوافق على ذلك، ويقول أن الانحراف المعياري لمجموعة من البيانات قد يكون أكبر من تباين هذه المجموعة. فأبما على صواب؟ اشرح إجابتك.

سلمان:

٥) مركز ثيافة: اختار أحد مراكز البائقة ٨ أشخاص عشوائياً من بين المترشحين الدائمين، لمقابلة الأجراء التي يعين عليه ثم أوزانها للمتقبل، وسجل عدد الأجراء التي يقضيها كل منهم على جهاز الحري، وكانت: ٣٠، ٣٠، ٤٥، ٣٠، ٣٠، ٣٠، ٣٠، ٣٠. ثم حسب المتوسط الحسابي لهذه الأربعة.

٦) عتبت العينة والمجتمع في هذا الموقف، ثم صف إحصائي العينة ومعلمة المجتمع.

٧) العينة: ٨ الطلاب من المترشحين الدائمين في المركز الدائمين يستعملون جهاز الحري، المجتمع: جميع المترشحين الدائمين الذين يستعملون جهاز الحري؛ إحصائي العينة: المتوسط الحسابي للأربعة التي يقضيها أفراد العينة على جهاز الحري؛ معلمة المجتمع: المتوسط الحسابي للأربعة التي يقضيها جميع المترشحين الدائمين على جهاز الحري.

٨) أوجد إحصائي العينة والرتبة في الشرح (١).

٩) أوجد الأجزاء الوسطى لهذه البيانات.

١٠) أوجد التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

١١) أوجد التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

١٢) أوجد التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

١٣) أوجد التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

١٤) أوجد التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

١٥) أوجد التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

١٦) أوجد التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

١٧) أوجد التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

١٨) أوجد التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

١٩) أوجد التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

٢٠) أوجد التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.



أوجد الانحراف المتوسط لتتابع هذه الدراسة.

١٦.٤

١٧.٤

١٨.٤

١٩.٤

٢٠.٤

٢١.٤

٢٢.٤

٢٣.٤

٢٤.٤

٢٥.٤

٢٦.٤

٢٧.٤

التاريخ \_\_\_\_\_

الاسم \_\_\_\_\_

(تنهية)

## ٤-١٠ تدريبات إعادة التعليم الابتدائي والتوافقي

التفويهُ: يُسمَّى عدد طرق التشكيل الممكنة لمجموعة عناصر لثلاثية أهمية بالترتيب. على سبيل المثال أ ب و أ ب  
يتشكّلان الاختيار نفسه في التوافقي عند اختيار الطرفين أ و ب.

$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \text{ق}^r$	التوافقي
------------------------------------	----------

مثال: يمكن أن نأخذ تقائين من ١٠ أعضاء، منهم ٦ طلاب من الصف الثالث المتوسط، و ٤ طلاب من الصف

الثاني المتوسط. ونُراد اختيار لجنة من ٤ طلاب من أعضاء.

أ) كم طريقة يمكن اختيار أعضاء اللجنة؟

$$\begin{aligned} \text{ق}^r &= \frac{n!}{r!(n-r)!} & \text{نظرون التوافقي} \\ \text{ق}^4 &= \frac{10!}{4!(10-4)!} & \text{ق}^4 = 210 \\ &= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} & \text{تعريف مضروب العدد} \\ &= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} & \text{يبسط} \\ &= 210 \end{aligned}$$

أي أن هناك ٢١٠ طرق يمكن اختيار أعضاء اللجنة الأربعة عندما لا يكون الترتيب مهمًا.

ب) إذا اخترنا أعضاء اللجنة عضوياً، فما احتمال أن يكون اثنان من أعضاء اللجنة من الصف الثاني المتوسط؟

$$\begin{aligned} \text{يمكنك اختيار عضوين من الصف الثاني المتوسط بطرق عددها} \text{ق}^2 &= \frac{14!}{2!(14-2)!} \\ \text{ويمكنك اختيار عضوين من الصف الثالث المتوسط بطرق عددها} \text{ق}^2 &= \frac{14!}{2!(14-2)!} \\ \text{وبحسب مبدأ العد الأساسي يمكن اختيار أعضاء اللجنة التي تتألف من طالبين من الصف الثاني المتوسط وطالبين من} \\ \text{الصف الثالث المتوسط بطرق عددها} 2 \times 14 \times 14 & \text{ أي } 980 \text{ طريقة.} \\ \text{ح (طالبان من الثاني المتوسط وطالبان من الثالث المتوسط)} &= \frac{\text{عدد عناصر الحادثة}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}} \\ &= \frac{980}{210} \approx 4.67\% \end{aligned}$$

تساويين  
أوجد قيمة كل ما يأتي:

- ١ ق<sup>٧</sup>، ٢ ق<sup>١٢</sup>، ٣ ق<sup>٣</sup>، ٤ ق<sup>١</sup>
- ١ ق<sup>٧</sup>، ٢ ق<sup>١٢</sup>، ٣ ق<sup>٣</sup>، ٤ ق<sup>١</sup>
- ١ ق<sup>٧</sup>، ٢ ق<sup>١٢</sup>، ٣ ق<sup>٣</sup>، ٤ ق<sup>١</sup>
- ١ ق<sup>٧</sup>، ٢ ق<sup>١٢</sup>، ٣ ق<sup>٣</sup>، ٤ ق<sup>١</sup>

الفصل ١٠ الاحصاء والاحتمال

التاريخ \_\_\_\_\_

الاسم \_\_\_\_\_

## ٤-١٠ تدريبات إعادة التعليم الابتدائي والتوافقي

التفويهُ: عندما نُفكّم العناصر بحيث يكون ترتيبها مهمًا، ونكتب جميع الترتيبات الممكنة لهذه العناصر، يُسمّى كلٌّ من هذه الترتيبات تبادلاً. على سبيل المثال الترتيب أ ب لا اختيار أ ب يختلف عن الترتيب ب ا للاختيار نفسه.

$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \text{ق}^r$	التباديل
------------------------------------	----------

مثال ١: أوجد قيمة ل<sup>٣</sup>.

$$\begin{aligned} \text{ق}^r &= \frac{n!}{r!(n-r)!} & \text{نظرون التباديل} \\ \text{ق}^3 &= \frac{11!}{3!(11-3)!} & \text{ق}^3 = 990 \\ &= \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} & \text{تعريف مضروب العدد} \\ &= \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} & \text{يبسط} \\ &= 990 \end{aligned}$$

يوجد ٩٩٠ طريقة لاختيار عضوين مع الترتيب من بين ١١ عناصر.

ب) ما عدد كلمات المرور الممكنة؟

$$\begin{aligned} \text{ب) ما احتمال أن يكون الرقم الأول والثاني فرديين والأرقام} \\ \text{الأخرى أي ٣ أرقام من الأرقام المتبقية؟} \\ \text{ح (الرقمان الأول والثاني فرديين)} &= \frac{\text{عدد عناصر الحادثة}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}} \\ &= \frac{4 \times 4 \times 10 \times 10}{10 \times 10 \times 10 \times 10} \\ &= \frac{16}{1000} = 1.6\% \end{aligned}$$

تساويين  
أوجد قيمة كل ما يأتي:

- ١ ق<sup>٧</sup>، ٢ ق<sup>١٢</sup>، ٣ ق<sup>٣</sup>، ٤ ق<sup>١</sup>
- ١ ق<sup>٧</sup>، ٢ ق<sup>١٢</sup>، ٣ ق<sup>٣</sup>، ٤ ق<sup>١</sup>
- ١ ق<sup>٧</sup>، ٢ ق<sup>١٢</sup>، ٣ ق<sup>٣</sup>، ٤ ق<sup>١</sup>
- ١ ق<sup>٧</sup>، ٢ ق<sup>١٢</sup>، ٣ ق<sup>٣</sup>، ٤ ق<sup>١</sup>

الفصل ١٠ الاحصاء والاحتمال



(تنمية)

## ٥-١٠ تدريبات إعادة التعليم

## احتمالات الحوادث المركبة

الحوادث المستقلة والحوادث غير المتنافية: تُسمى الحادثان اللذان لا يمكن وقوعهما معاً حادثين متنافيين، وتُسمى الحادثان اللذان يمكن وقوعهما معاً حادثين غير متنافيين.

احتمال الحوادث المتنافية	ح (أ و ب) = ح (أ) + ح (ب)	احتمال الحوادث غير المتنافية	ح (أ و ب) = ح (أ) + ح (ب) - ح (أ و ب)
	ح (ظهور ٢ أو ٣) على مكعب أرقام) = ح (٢) + ح (٣) = $\frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$		ح (ظهور عدد زوجي أو عدد أولي على مكعب أرقام) ح (٢) + ح (٣) + ح (٤) + ح (٥) = $\frac{2}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

مثال

توجد ٤ بطاقات خضراء و ٤ بطاقات زرقاء في صندوق يحتوي على ٥٢ بطاقة. إذا اخترت بطاقة

من الصندوق عشوائياً، فما احتمال أن يكون خضراء أو زرقاء؟

الحادثان متنافيان، لذا: ح (أ و ب) = ح (أ) + ح (ب)

$$\text{ح (أ)} = \text{ح (بطاقة خضراء)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \quad \text{ح (ب)} = \text{ح (بطاقة زرقاء)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$\text{ح (خضراء أو زرقاء)} = \frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$$

لذا احتمال اختيار بطاقة خضراء أو زرقاء يساوي  $\frac{2}{13}$ .

تقارنين

اخترت كرة واحدة عشوائياً من كيس يحتوي على كرتين خراون و ٥ كرات زرقاء و ٧ كرات صفراء. أوجد كلاً من الاحتمالات الآتية:

١) ح (صفراء أو خراء)  $\frac{9}{12}$  ح (٢) ح (خراء أو ليست صفراء)  $\frac{1}{3}$  ح (زرقاء أو خراء أو صفراء)  $\frac{1}{3}$

يُخبر صندوق على ٥ بطاقات خراء و ١٠ بطاقات زرقاء و ١٥ بطاقة خضراء، فإذا اخترت بطاقة من الصندوق عشوائياً، فأوجد كلاً من الاحتمالات الآتية:

٤) ح (خراء أو زرقاء)  $\frac{1}{3}$  ح (٥) ح (بطاقة من أي من هذه الألوان الأربعة)  $\frac{1}{3}$

$$\text{ح (زرقاء أو صفراء)} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \quad \text{ح (٧) ح (زرقاء أو خضراء)} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$\text{ح (٩) ح (خراء أو خضراء)} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

١٠) من بين ١٥ طاباً في الصف الثاني المتوسط (١) يوجد ١٢ طاباً عمر كل منهم ١٤ سنة، ومن بين ١٧ طاباً في الصف الثاني المتوسط (ب) هناك ٤ طاباً عمر كل منهم ١٤ سنة، اختر أحد الطلاب من هذين الصنفين عشوائياً، ما احتمال أن يكون من الصف الثاني المتوسط (أ) أو عمره ١٤ سنة؟  $\frac{14}{23}$

٥-١٠

## تدريبات إعادة التعليم

## احتمالات الحوادث المركبة

الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة: تتكون الحادثة المركبة من حادثين مستقلين أو أكثر. والحوادث إما أن تكون مستقلة أو غير مستقلة.

احتمال حادثين مستقلين	ح (أ و ب) = ح (أ) × ح (ب)	نتيجة إحدى الحادثين لا تؤثر في نتيجة الأخرى.	احتمال حادثين غير مستقلين	ح (أ و ب) = ح (أ) × ح (ب بعد أ)	نتيجة إحدى الحادثتين تؤثر في نتيجة الأخرى.
	مثال: ظهور الرقم ٢ على مكعب أرقام في الرمية الأولى، ثم ظهور الرقم ٥ في الرمية الثانية.			مثال: اختيار كرة زرقاء دون إرجاع، ثم اختيار كرة زرقاء دون إرجاع.	

مثال ١

أوجد احتمال ظهور الرقم ٢ في الرمية الأولى وظهور ٥ في الرمية الثانية عند إلقاء مكعب أرقام مرتين.

و كرتين خضراون و ٤ كرات زرقاء، اخترت منه كرتان عشوائياً دون إرجاع، أوجد احتمال أن يكون الحادثان غير مستقلين؛

لذا: ح (أ و ب) = ح (أ) × ح (ب بعد أ)

$$\text{ح (الكرة الأولى: ٤) ح (الكرة الثانية: ٤)} = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

$$\text{ح (الكرة الأولى: ٤) ح (الكرة الثانية: ٤)} = \frac{4}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

احتمال سحب كرتين زرقاوين دون إرجاع يساوي  $\frac{2}{15}$ .

احتمال سحب كرتين زرقاوين دون إرجاع يساوي  $\frac{2}{15}$ .

تقارنين

يُخبر كس على ٣ كرات خراء و ٤ كرات زرقاء و ٦ كرات صفراء، اخترت منه كرات واحدة تلو الأخرى عشوائياً من دون إرجاع، أوجد كلاً من الاحتمالات الآتية:

١) ح (صفراء ثم صفراء) ح (٢) ح (خراء ثم صفراء) ح (٣) ح (زرقاء ثم خراء ثم صفراء)

$$\text{ح (٥) ح (صفراء ثم صفراء)} = \frac{6}{18} \times \frac{5}{17} = \frac{30}{306} = \frac{5}{51}$$

$$\text{ح (٢) ح (خراء ثم صفراء)} = \frac{3}{18} \times \frac{2}{17} = \frac{6}{306} = \frac{1}{51}$$

٤) يوجد في صندوق بطاقتان خراوان و بطاقتان بيضاء، وإذا اخترت من الصندوق بطاقتان عشوائياً من دون إرجاع، فما احتمال أن تكون الأولى خراء والثانية بيضاء؟  $\frac{1}{6}$

٥) إذا أُلقيت قطعتا نقد معدنيان في بركة ماء، في احتمال ظهور الشعار على القطعتين  $\frac{1}{4}$  وكتابة ٢ وكتابة ٣  $\frac{1}{3}$  إذا ألقي مكعب أرقام وقطعة نقد معدنية، فما احتمال ظهور ٢ وكتابة ٣  $\frac{1}{3}$

التاريخ \_\_\_\_\_

الاسم \_\_\_\_\_

## 5-10 التدريبات الإثرائية تاريخ ميلاد

طلب من متسابق في أحد برامج المسابقات التلقائية أن يجاز عموداً عادداً كارتياً من الأشخاص المحظور أن يعرفه، بحيث تكون احتيائية ميلاد أعدمى (على الأقل) في نفس اليوم والشهر الذي ولد فيه المتسابق أكثر من 50٪. ولأهمية عامل الزمن في المسابقة، فإن المتسابق لا يريد أن يجاز عدداً من الأشخاص أكثر من العدد العشري، ما عدده الأشخاص الذين يجب على المتسابق أن يجزهم إلى العرقة؟

١) حتى عدد الأشخاص الذين يجب على المتسابق أن يجزهم إلى العرقة.  
ستنتج الإجابات: احد التقييمات الشاملة ١٨٧ تقيماً.

٢) إذا كان احتمال أن يكون لكل شخص في العرقة تاريخ ميلاد مختلف هو أصغر من 50٪، فإن احتمال أن يتشارك اثنين منهم في تاريخ الميلاد هو أكبر من 50٪. المرشح سبب ذلك.

إجابة صحيحة، لأنه إذا كان احتمال العادة أصغر من 50٪، فإن احتمال العادة التامة يساوي 1 - (أصغر من 50٪). وهذا سيكون أكبر من 50٪.

٣) لاحظ النمط الآتي:

إذا كان في العرقة شخصان فإن احتمال أن يكون تاريخ ميلادها مختلفين يساوي:

$$\frac{314}{315} \times \frac{314}{315} \approx \frac{1}{99,7}$$

وإذا كان في العرقة 3 أشخاص فإن احتمال أن تكون تواريخ ميلادهم مختلفة يساوي:

$$\frac{313}{315} \times \frac{313}{315} \times \frac{313}{315} \approx \frac{1}{99,2}$$

وإذا كان في العرقة 4 أشخاص فإن احتمال أن تكون تواريخ ميلادهم مختلفة يساوي:

$$\frac{312}{315} \times \frac{312}{315} \times \frac{312}{315} \times \frac{312}{315} \approx \frac{1}{98,4}$$

استمر في توسعة هذا النمط إلى أن تحصل على احتمال أصغر من 50٪. ما عدد الأشخاص الذين يجب على المتسابق أن يجزهم إلى العرقة للحصول على احتمال أصغر من 50٪؟

٢٢ تقديماً

٤) وبناء عليه، في عدد الأشخاص الذين يجب على المتسابق أن يجزهم إلى العرقة ليكون احتمال التشارك اثنين منهم في تاريخ الميلاد نفسه أكبر من 50٪ فإن هذا العدد بتخصيك في السؤال ١.

٢٢ تقديماً؛ الجواب: العالمان.

٥) استعمل الطريقة السابقة لتحديد عدد الأشخاص الذين يجب على المتسابق أن يجزهم إلى العرقة ليكون احتمال التشارك اثنين منهم في تاريخ الميلاد نفسه دون تحديد للجمهور) أكبر من 50٪؟

٧ أشخاص

الاجزاء والاحتمال الفصل ١٠

٢٥

التاريخ \_\_\_\_\_

الاسم \_\_\_\_\_

## 5-10 تدريبات حل المسألة احتمالات الحوادث المركبة

١) تاريخ ميلاد، سال سبيل صديقاً أحد عن تاريخ ميلاده. ٤) كرات، يوجد في كيس ١٠ كرات حمراء و ٦ خضراء و ٤ سوداء. إذا اختار كل واحد من ٣ أشخاص كرة واحدة من الكيس عشوائياً دون إرجاع، فما احتمال الحصول على ثلاث كرات حمراء؟

١٠١٥، تقريباً أو 10,٥٪ تقريباً

٥) أسهم، اشترى عصام 1٠٠٠ سهم من أسهم إحدى شركات صناعة الأدوية. وتسمى هذه الشركة للمحصول على اعتماد أحد الأدوية من الجهة للوزارة. احتمال اعتماد هذا الدواء يساوي 50٪. بناءً على تقارير خبراء الأدوية. وفي حال اعتماده فإن احتمال أن يصبح سعر سهم الشركة يتغير سعة الأصل يساوي 80٪/ بناءً على تقارير خبراء سوق الأسهم.

١) ما احتمال أن تحصل الشركة على اعتماد للدواء وأن يصبح سعر سهمها يتغير سعة الأصل؟

0,4٢٥ أو 42,٥٪

ب) ما احتمال أن تحصل الشركة على اعتماد للدواء وأن يصبح سعر سهمها يتغير سعة الأصل؟

0,٠٧٥ أو 7,٥٪

ج) هل جانا الحادستان مستقلان أم غير مستقلين؟ غير مستقلين؛ لأن احتمال أن يصبح سعر سهم الشركة يتغير سعة الأصل يعتمد على احتمال حصول الشركة على اعتماد للدواء.

٢) رياضة، تتكون مباراة إحدى الألعاب الرياضية بين الفريقين أ ب من ٧ جولات، ويفوز في المباراة الفريق الذي يكسب 4 جولات منها. إذا كان لكل فريق الفرصة نفسها للفوز في كل جولة، فما احتمال أن تنتهي المباراة بفوز الفريق ب في أول 4 جولات؟

0,٠٨٢ أو 8,٢٪ تقريباً

٣) تجارة، يوجد في شركة لصناعة مواد التنظيف ٦ موظفين مسؤولين عن سويق وبيع منتجات الشركة، وهم ٣ فنيين و ٣ إداريين. أراد مدير الشركة أن يرسل 4 من هؤلاء الموظفين حضور مؤتمر حول صناعة التنظيف، على أن يكون اختيارهم عادلاً. فقرر كتابة أسماء الموظفين الستة على قصاصات ورق ووضعها في وعاء، ثم اختيار 4 قصاصات عشوائياً. ما احتمال أن تتكون اللجنة التي ستحضر المؤتمر من ٣ إداريين و ١ فني واحد؟

0,٠٢ أو 2,٠٪

٢٤

الاجزاء والاحتمال الفصل ١٠



وزارة التربية والتعليم  
Ministry of Education

المملكة العربية السعودية

# الرياضيات

## للفصل الثالث المتوسط

مصادر المعلم للأنشطة الصفية  
الفصل السادس: كثيرات الحدود

العبيكان  
Obekon

Mc  
Graw  
Hill  
Education

يوزع مجاناً ولا يباع

١٤٣٤ هـ - ٢٠١٣ م

Glencoe Mathematics © 2010  
**CHAPTER RESOURCE MASTERS**  
Algebra 1

الرياضيات - الصف الثالث المتوسط  
**مصادر المعلم للأنشطة الصفية**  
أعدت النسخة العربية: شركة العبيكان للتعليم

[www.obeikaneducation.com](http://www.obeikaneducation.com)



English Edition Copyright © the McGraw-Hill Companies, Inc.  
All rights reserved.

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with  
The McGraw-Hill Companies, Inc. © 2008.



حقوق الطبع الإنجليزية محفوظة لشركة ماجروهل ©.

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار  
وفقاً لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل © ٢٠٠٨م / ١٤٢٩هـ.

لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو نقله في أي شكل أو واسطة، سواء أكانت إلكترونية أو ميكانيكية، بما في ذلك التصوير بالنسخ «فوتوكوبي»، أو التسجيل، أو التخزين  
و الاسترجاع، دون إذن خطي من الناشر.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الحمد لله والصلاة والسلام على رسول الله وعلى آله وصحبه أجمعين.

### عزيزي المعلم / عزيزتي المعلمة

يسرنا أن نقدم هذه المجموعة من التدريبات المساندة، والتي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب، حيث نطمح أن يساعدك التنوع في هذه التدريبات على الوصول إلى جميع الطلاب في الصف، مهما تباينت مستوياتهم.

وقد تم تخصيص صفحة في كل تدريب منها لتغطي درسًا من دروس كتاب الطالب، حيث يمكنك أن تطلب إلى الطلاب حل صفحة التدريبات المقابلة لكل درس بحسب مستوى كل منهم؛ سواءً داخل الصف أم في المنزل. وليست هذه التدريبات بديلًا عن كتاب التمارين، ولكنها مساندة ومكملة له.

وتشمل هذه التدريبات الأنواع التالية:

### تدريبات إعادة التعليم

تركز هذه التدريبات على محتوى الدروس في كتاب الطالب، وتقدمه بأسلوب تدريسي ومعالجة يختلفان عن كتابي الطالب والتمارين، وهي موجهة إلى الطلاب ذوي المستوى دون المتوسط.

### تدريبات حل المسألة

تأتي هذه التدريبات انطلاقًا من اهتمام هذه المناهج بحل المسألة، حيث تم تخصيصها لتقديم تدريبات إضافية على حل المسألة، ترتبط بكل درس من دروس كتاب الطالب، وهي موجهة إلى جميع الطلاب على اختلاف مستوياتهم.

### التدريبات الإثرائية

تساعد هذه التدريبات الإثرائية على التوسع في مفاهيم الدرس، كما تؤدي إلى توسيع مدارك الطلاب حول تعلم الرياضيات بشكل عام، وهذه التدريبات موجهة إلى الطلاب ذوي المستوى فوق المتوسط.

### ملحق الإجابات:

يتضمن هذا المصدر في آخره ملحقًا بالإجابات، حيث تظهر باللون الأسود الغامق على صفحات مصغرة.

	المقدمة .....	٤
	<b>الدرس ١-٦ ضرب وحيدات الحد</b>	
	تدريبات إعادة التعليم .....	٦
	تدريبات حل المسألة .....	٨
	التدريبات الإثرائية .....	٩
	<b>الدرس ٥-٦ ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود</b>	
٢٢	تدريبات إعادة التعليم .....	
٢٤	تدريبات حل المسألة .....	
٢٥	التدريبات الإثرائية .....	
	<b>الدرس ٢-٦ قسمة وحيدات الحد</b>	
	تدريبات إعادة التعليم .....	١٠
	تدريبات حل المسألة .....	١٢
	التدريبات الإثرائية .....	١٣
	<b>الدرس ٦-٦ ضرب كثيرات الحدود</b>	
٢٦	تدريبات إعادة التعليم .....	
٢٨	تدريبات حل المسألة .....	
٢٩	التدريبات الإثرائية .....	
	<b>الدرس ٣-٦ كثيرات الحدود</b>	
	تدريبات إعادة التعليم .....	١٤
	تدريبات حل المسألة .....	١٦
	التدريبات الإثرائية .....	١٧
	<b>الدرس ٧-٦ حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود</b>	
٣٠	تدريبات إعادة التعليم .....	
٣٢	تدريبات حل المسألة .....	
٣٣	التدريبات الإثرائية .....	
	<b>الدرس ٤-٦ جمع كثيرات الحدود وطرحها</b>	
	تدريبات إعادة التعليم .....	١٨
	تدريبات حل المسألة .....	٢٠
	التدريبات الإثرائية .....	٢١

## ١-٦ تدريبات إعادة التعليم

### ضرب وحيدات الحد

١-٦

**وحيدات الحد:** تكون وحيدة الحد عددًا، أو متغيرًا، أو حاصل ضرب عدد في متغير واحد أو أكثر، بأسس صحيحة غير سالبة. وتتكوّن من حد واحد فقط. العبارة التي على الصورة  $س^n$  والتي تعبّر عن نتيجة ضرب  $س$  في نفسها  $n$  مرّة تُسمّى قوّة. ولضرب قوتين لهما الأساس نفسه، اجمع أسّيهما.

ضرب القوى	لأيّ عدد $أ$ ، وأيّ عددين صحيحين $م$ ، $ن$ ، فإنّ $أ^م \times أ^n = أ^{م+n}$
-----------	--

مثال ٢

$$\begin{aligned} \text{بسط } (-4^3 \text{ ب}) (3^2 \text{ أ ب}^3) &= (-4^3 \times 3^2) (أ \times ب \times ب \times ب) \\ &= -12 \times 3^2 (أ \times ب^3) \\ &= -12 \times 9 (أ \times ب^3) \\ &= -108 \text{ أ ب}^3 \end{aligned}$$

حاصل الضرب هو  $-108 \text{ أ ب}^3$

مثال ١

$$\begin{aligned} \text{بسط } (5^2 \text{ س}^3) (3^1 \text{ س}^5) &= (5^2 \times 3^1) (س^3 \times س^5) \\ &= 25 \times 3 (س^3 \times س^5) \\ &= 75 (س^3 \times س^5) \\ &= 75 س^8 \end{aligned}$$

حاصل الضرب هو  $75 س^8$

## تمارين

بسط كلّ عبارة ممّا يأتي:

- (١)  $ص (ص^5)$
- (٢)  $ن^2 \times ن^7$
- (٣)  $(-7س^2) (س^4)$
- (٤)  $س (س^2) (س^4)$
- (٥)  $م \times م^5$
- (٦)  $(-س^3) (-س^4)$
- (٧)  $(2^4) (18)$
- (٨)  $(ر س) (ر ن^3) (ن^2)$
- (٩)  $(س^2 ص) (4 س ص^3)$
- (١٠)  $\frac{1}{3} (2^3 \text{ أ ب}) (6 \text{ ب}^3)$
- (١١)  $(-4س^3) (5س^7)$
- (١٢)  $(-3 \text{ ج}^2 \text{ ك}^4) (2 \text{ ج ك}^6)$
- (١٣)  $(5 \text{ أ ب}^3 \text{ ج}^2) (3 \text{ أ ب}^1 \text{ ج}^5)$
- (١٤)  $(-5س ص) (4س^2) (ص^4)$
- (١٥)  $(10س^3ص ع^2) (-2س ص ع^5)$

## تدريبات إعادة التعليم

### ضرب وحيدات الحد

(تتمة)

تبسيط العبارات: تُسمّى العبارة على صورة  $(س^٢)^٢$  قوة القوة، وتمثّل حاصل الضرب الذي تحصل عليه عند استعمال س كعامل ن مرة. لايجاد قوة القوة، اضرب الأسس.

قوة القوة	لأيّ عدد حقيقي أ، وأيّ عددين صحيحين م، ن، فإنّ $(س^٢)^٢ = س^{٢٢}$
قوة حاصل الضرب	لأيّ عددين حقيقيين أ، ب، وأيّ عدد صحيح ن، فإنّ $(س^٢)^٢ = س^{٢٢}$

يمكنك دمج الخصائص واستعمالها في تبسيط عبارات تتضمن وحيدات الحد.

مثال بسّط  $(٢-أب)^٢(٢-أب)^٣$

$$\begin{aligned} \text{قوة القوة} & \quad (٢-أب)^٢(٢-أب)^٣ = (٢-أب)^٥ \\ \text{قوة حاصل الضرب} & \quad (٢-أب)^٣(٢-أب)^٣ = (٢-أب)^٦ \\ \text{جمع المعاملات والمتغيرات} & \quad (٢-أب)^٣(٢-أب)^٣ = (٢-أب)^٦ \\ \text{ضرب القوى} & \quad (٢-أب)^٣(٢-أب)^٣ = (٢-أب)^٦ \\ \text{قوة القوة} & \quad ٨-أب^١١ = ٨-أب^١١ \\ \text{حاصل الضرب هو} & \quad ٨-أب^١١ \end{aligned}$$

### تمارين

بسّط كل عبارة مما يأتي:

- (١)  $(ص^٥)^٢$
- (٢)  $(٧^٤)^٢$
- (٣)  $(س^٢)^٥(س^٣)$
- (٤)  $٣-(أب^٤)^٣$
- (٥)  $(٣-أب^٤)^٣$
- (٦)  $(٤س^٢ب)^٣$
- (٧)  $(٢٤)^٢(ب^٣)$
- (٨)  $(٤س)^٢(ب^٣)$
- (٩)  $(س^٢ص^٤)^٥$
- (١٠)  $(٢-أب^٢)^٢(ب^٣)^٢$
- (١١)  $(٤سص)^٣(٢-س)^٢$
- (١٢)  $(٣-ج٣ك)^٢(٢-ج٢ك)^٣$
- (١٣)  $(٢٥أب)^٣(١/٥أبف)^٢$
- (١٤)  $(٢سص)^٢(٣-س٣ص)^٢(٤ص^٤)$
- (١٥)  $(٢س٣ص٢ع)^٣(س٢ع)^٤$
- (١٦)  $(٢-٢ن٦ص^٥)^٢(٢نص)^٣(١٧-٣ن)^٤(٣-٣ن)^٤$
- (١٨)  $٣-(٢س)^٤(٤س٥ص)^٢$

## تدريبات حل المسألة

## ضرب وحيدات الحد

(٤) **رياضة:** يُعطى حجم الكرة بالصيغة  $H = \frac{4}{3}\pi r^3$ ، حيث  $r$  طول نصف قطر الكرة. أوجد حجم الهواء في ثلاث كرات سلة مختلفة على نحو الجدول الآتي:  
استعمل  $\pi = 3.14$ ، وقرب إجابتك إلى أقرب عدد كلي.

الحجم (بوصة <sup>٣</sup> )	طول نصف القطر (بوصة)	الكرة
	٤	للأطفال
	٤, ٥	للنساء
	٤, ٨	للرجال

(٥) **كهرباء:** يستعمل مهندس كهربائي الصيغة  $Q = \frac{1}{R}I^2t$ ، حيث  $Q$  القدرة الكهربائية بالواط،  $I$  شدة التيار بالأمبير،  $R$  المقاومة بالأوم.

(أ) أوجد قدرة دائرة كهربائية لمنزل، إذا كانت شدة التيار ٢٠ أمبير، والمقاومة ٥ أوم.

(ب) إذا نقصت شدة التيار بمقدار النصف، فماذا يحدث للقدرة الكهربائية؟

(١) **الاجاذبية:** أسقطت بيضة من قمة مبنى، وكانت سرعتها بعد  $n$  ثانية تساوي  $16n$  قدمًا لكل ثانية. فإذا كانت المسافة المقطوعة بعد  $n$  ثانية تساوي حاصل ضرب السرعة في الزمن، فاكتب عبارة في أبسط صورة للمسافة التي تقطعها البيضة بعد  $n$  ثانية.

(٢) **هندسة مدنية:** يخطط مهندس لتطوير ممر مشاة مستعملًا مقاطع مستطيلة عرضها ثابت ويساوي ٣ أقدام وطولها متغير. افترض أن طول كل مقطع  $s$ ، ثم عبّر عن مساحة ٤ مقاطع على صورة وحيدة حد.



(٣) **احتمال:** إذا أُلقيت قطعة نقود ٣ مرات، فستحصل على ٣٢ ناتجًا ممكنًا كما في الجدول الآتي:

النواتج الممكنة	
ش ش ش	ك ك ك
ش ك ك	ك ش ش
ش ك ش	ك ك ش
ش ش ك	ك ش ك

ثم إذا أُلقيت قطعة النقد مرتين زيادة على ٣ مرّات، فستحصل على  $2^3 \times 2^2$  ناتجًا ممكنًا. ما عدد النواتج الممكنة التي ستحصل عليها إذا أُلقيت قطعة النقد ٤ مرّات زيادة على ٥ مرّات؟ اكتب الإجابة على الصورة  $s \cdot t$ .

## التدريبات الإثرائية

### نظام العد الثنائي

١-٦

تخزن الحواسيب الإلكترونية الرقمية المعلومات على صورة أعداد. وبما أن الدوائر الكهربائية للحاسب توجد بوحدة من حالتين فقط، مفتوحة أو مغلقة، فإن الأعداد المخزنة تتكون من رقمين فقط هما صفر أو ١، والأعداد المكتوبة باستعمال صفر أو ١ فقط تسمى الأعداد الثنائية.

لإيجاد القيمة بالنظام العشري للعدد الثنائي، استعمل أرقام العدد لكتابته بالصيغة التحليلية على صورة قوى للعدد ٢. وفيما يأتي مثال على كيفية إيجاد القيمة العشرية للعدد  $(1001101)_2$ . (يشير الرقم ٢ إلى أن العدد المعطى بالنظام الثنائي).

$$1001101_2 = 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 =$$

$$64 \times 1 + 32 \times 0 + 16 \times 0 + 8 \times 1 + 4 \times 1 + 2 \times 0 + 1 \times 1 =$$

$$64 + 0 + 0 + 8 + 4 + 0 + 1 =$$

$$77 =$$

ولتحويل عدد من النظام العشري إلى النظام الثنائي يمكن اتباع طريقة القسمة على ٢ بالتسلسل إلى أن يكون ناتج القسمة صفر، وتسجل باقي القسمة في كل مرة، فيكون العدد الثنائي هو بواقي القسمة مرتبة من اليمين إلى اليسار من الأول إلى الآخر. ويوضح ذلك المثال الآتي:

مثال اكتب العدد ٧٥ بالنظام الثنائي.

مثال

الباقى

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 75} \\ \underline{2} \phantom{0} \\ 5 \phantom{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 37} \\ \underline{2} \phantom{0} \\ 17 \phantom{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 18} \\ \underline{2} \phantom{0} \\ 9 \phantom{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 9} \\ \underline{2} \phantom{0} \\ 5 \phantom{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 4} \\ \underline{2} \phantom{0} \\ 2 \phantom{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 2} \\ \underline{2} \phantom{0} \\ 0 \phantom{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 1} \\ \underline{2} \phantom{0} \\ 1 \phantom{0} \end{array}$$

$$\text{إذن } 75 = (1001101)_2$$

تمارين

أوجد القيمة بالنظام العشري لكل عدد ثنائي فيما يأتي:

$$(1) (1111)_2 \quad (2) (10000)_2 \quad (3) (11000011)_2 \quad (4) (10111001)_2$$

اكتب كل عدد بالنظام العشري على صورة عدد ثنائي فيما يأتي:

$$(5) 8 \quad (6) 11 \quad (7) 29 \quad (8) 117$$

## ٢-٦ تدريبات إعادة التعليم

### قسمة وحيدات الحد

قسمة وحيدات الحد: عند قسمة قوتين لهما الأساس نفسه، اطرح الأسين.

قسمة القوى	لأي عدد $a \neq 0$ ، وأي عددين صحيحين $m, n$ ، فإن $a^m - a^n = a^n$
قوى القسمة	لأي عددين حقيقيين $a, b \neq 0$ ، وأي عدد صحيح $m$ ، فإن $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

مثال ٢ بسط  $\left(\frac{2^3 a^2 b^3}{3^2 b^3}\right)$ ، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا.

قوى القسمة  $\frac{2^3 (2^3 a^2 b^3)}{3^2 (2^3 b^3)} = \frac{2^6 a^2 b^3}{3^2 (2^3 b^3)}$

قوة حاصل الضرب  $\frac{2^6 (2^3 a^2 b^3)}{3^2 (2^3 b^3)} = \frac{2^9 a^2 b^3}{3^2 (2^3 b^3)}$

قوة القوة  $\frac{2^9 a^2 b^3}{3^2 (2^3 b^3)} = \frac{2^6 a^2 b^0}{3^2 b^0} = \frac{2^6 a^2}{3^2}$

قسمة القوى  $\frac{2^6 a^2}{3^2}$  الناتج هو  $\frac{2^6 a^2}{3^2}$

مثال ١ بسط  $\frac{a^7 b^2}{2^2 a b}$ ، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا.

جمع القوى ذات الأساس نفسه  $\left(\frac{a^7}{2^2}\right) \left(\frac{b^2}{a b}\right) = \frac{a^6 b}{2^2}$

قسمة القوى  $\frac{a^6 b}{2^2} = \frac{a^6 b}{4}$

بسط  $\frac{a^6 b}{4}$

الناتج هو  $\frac{a^6 b}{4}$

### تمارين

بسّط كل عبارة مما يأتي، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا:

- (١)  $\frac{5^0}{5^0}$
- (٢)  $\frac{6^m}{4^m}$
- (٣)  $\frac{b^4 h}{b^2 h}$
- (٤)  $\frac{a^2}{a}$
- (٥)  $\frac{3^2 s^2 v}{2^2 s^2 v}$
- (٦)  $\frac{2^7 v^2 - 1^4 v^0}{1^4 v^0}$
- (٧)  $\frac{3^2 s^2 v^2}{3^2 s^2 v^2}$
- (٨)  $\frac{2^2 a^2 b}{a}$
- (٩)  $\frac{3^2 (4^4 r^4)}{3^2 (2^2 r^2)}$
- (١٠)  $\frac{4^3 (2^3 r^0)}{3^3 (2^3 r^0)}$
- (١١)  $\frac{4^3 (3^2 n^3)}{3^3 (2^2 n^2)}$
- (١٢)  $\frac{2^7 n^7}{2^3 n^3}$

## تدريبات إعادة التعليم

## قسمة وحيدات الحد

(تتمة)

**الأسس السالبة:** أي عدد غير صفر مرفوع للقوة صفر يساوي ١. فمثلاً  $(-٥, ٠) = ١$ . أي عدد غير صفر مرفوع لقوة سالبة يساوي مقلوب العدد مرفوع للقوة الموجبة؛ فمثلاً  $٣^{-٦} = \frac{١}{٣^٦}$ . يمكن استعمال هاتين الخاصيتين لتبسيط عبارات تحتوي أسسًا سالبة.

خاصية الأس الصفري	لأي عدد حقيقي أ لا يساوي الصفر، فإن $١ = أ^٠$
خاصية الأس السالبة	لأي عدد حقيقي أ لا يساوي الصفر، ولأي عدد صحيح ن، فإن $أ^{-ن} = \frac{١}{أ^n}$

أبسط صورة للعبرة التي تحتوي أسسًا سالبة يتعين أن تحتوي أسسًا موجبة فقط.

مثال

بسط  $\frac{٤أ^{-٣}ب^٦}{١٦أ^٢ب^٦ج^{-٥}}$ ، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا.

$$\text{بسط القوى للأساس نفسه} \quad \left(\frac{٤}{١٦}\right) \left(\frac{ب^٦}{ب^٦}\right) \left(\frac{أ^{-٣}}{ج^{-٥}}\right) = \frac{٤أ^{-٣}ب^٦}{١٦أ^٢ب^٦ج^{-٥}}$$

$$\text{اقسم القوى، خاصية الأس السالبة} \quad \frac{١}{٤} (أ^{-٣})(ب^٦)(ج^٥) =$$

$$\text{بسط} \quad \frac{١}{٤} (أ^{-٣})(ب^٦)(ج^٥) =$$

$$\text{خاصيتا الأس السالبة، والأس الصفري} \quad \frac{١}{٤} \left(\frac{١}{أ^٣}\right) (١) (ج^٥) =$$

$$\text{بسط} \quad \frac{ج^٥}{٤أ^٣} =$$

تمارين

بسط كل عبارة مما يأتي، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا:

$$(١) \frac{٢٢}{٣-٢} \quad (٢) \frac{م}{٤-م} \quad (٣) \frac{ب^{-٨}}{٣} \quad (٤) \frac{ب^{-٤}}{ب^{-٥}}$$

$$(٥) \frac{(-س^{-١}ص) \cdot (-٤ص^{-١})}{٢ص} \quad (٦) \frac{٢(٣ب^٢)}{٢(أب)} \quad (٧) \frac{٤ص}{٢-ص} \quad (٨) \frac{٢(٦-أب)}{٤(ب^٢)}$$

$$(٩) \frac{٣رت^٢ و^{-٤}}{ر^{-١}ت و^٢} \quad (١٠) \frac{م^{-٣}ت^{-٥}}{٣(م^٢ت^{-١})} \quad (١١) \left(\frac{٢م٤ن}{١-٨ل}\right) \quad (١٢) \frac{٢(٢م٢ن-٢)}{٤م^{-٦}ن^{-٤}}$$

## تدريبات حل المسألة

### قسمة وحيدات الحد

- (١) **كيمياء:** طول قطر نواة ذرة  $^{10}\text{-}^{13}\text{سم}$ ، وطول قطر نواة ذرة أخرى مختلفة  $^{10}\text{-}^{11}\text{سم}$ . بكم مرة يكون طول قطر النواة الثانية أكبر من طول قطر الأولى؟

- (٢) **فضاء:** يبعد القمر عن الأرض  $٢٥٤$  كيلو متر تقريبًا. وترتفع قمة بركان أولمبس مونز عن سطح كوكب المريخ  $٢٥$  كم. كم بركانًا من أولمبس مونز مصطفة فوق بعضها تملأ المسافة بين سطح الأرض وسطح القمر؟

- (٣) **بريد الكتروني:** يتكوّن البريد الإلكتروني غير المرغوب فيه من رسائل متشابهة ترسل إلى ألوّف مستعملي البريد الإلكتروني. يستعمل الناس برمجية مضادة لهذا البريد للتخلص من هذه الرسائل عادة. افترض أن إحدى هذه البرمجيات تخلصت من  $٢١٠$  من الرسائل التي تلقاها أحد الأشخاص في العام الماضي والبالغ عددها  $٤١٠$ . ما الكسر الذي يمثّل بريد الرسائل الذي تخلصت منه هذه البرمجية؟ اكتب إجابتك على صورة وحيدة حد.

- (٤) **القياس المتري:** افترض أن طول حشرة عثّ الغبار  $١٠\text{-}^٣$  ملمتر، وطول يرقة إحدى الفراشات  $١٠$  سم. كم مرة تكون يرقة هذه الفراشة أطول من حشرة عثّ الغبار؟

التحويلات التقريبية لسعة الذاكرة الحاسوبية
٨ بت = ١ بايت
$٣١٠$ بايت = ١ كيلو بايت
$٣١٠$ كيلو بايت = ١ ميغابايت (ميغا)
$٣١٠$ ميغابايت = ١ جيجابايت (جيجا)
$٣١٠$ جيجابايت = ١ تيرابايت
$٣١٠$ تيرابايت = ١ بيتابايت

- (أ) كم مرة تكون سعة القرص الصلب للحاسب الشخصي عام  $٢٠١٠$  أكبر من سعة القرص الصلب للحاسب الشخصي عام  $١٩٩٥$ ؟

- (ب) نحن سعة القرص الصلب للحاسب الشخصي عام  $٢٠٢٥$ ، إذا استمر المعدل نفسه في زيادة السعة.

- (ج) ما الكسر الذي يمثّله كيلو بايت واحد من الذاكرة الحاسوبية من تيرابايت واحد؟

## التدريبات الإثرائية

### أنماط القوى

٢-٦

أكمل ما يأتي بكتابة قيم القوى في كل نمط، مستعملاً آلتك الحاسبة إذا تطلّب ذلك:

_____ = ١٠٢	_____ = ١٠٥	_____ = ١٠٤ (ج)
_____ = ٩٢	_____ = ٩٥	_____ = ٩٤
_____ = ٨٢	_____ = ٨٥	_____ = ٨٤
_____ = ٧٢	_____ = ٧٥	_____ = ٧٤
_____ = ٦٢	_____ = ٦٥	_____ = ٦٤
_____ = ٥٢	_____ = ٥٥	_____ = ٥٤
_____ = ٤٢	_____ = ٤٥	_____ = ٤٤
_____ = ٣٢	_____ = ٣٥	_____ = ٣٤
_____ = ٢٢	_____ = ٢٥	_____ = ٢٤
_____ = ١٢	_____ = ١٥	_____ = ١٤

تفحص الأنماط في أ، ب، ج أعلاه، ثم أجب عن الأسئلة الآتية:

(١) صف نمط الأسس من أعلى العمود إلى الأسفل.

(٢) صف نمط القوى من أعلى العمود إلى الأسفل.

(٣) ماذا تتوقع أن تكون قيمة القوى الآتية؟

٠٤

٠٥

٠٢

(٤) بالرجوع إلى السؤال ٣، اكتب قاعدة، ثم اختبرها على أنماط مستعملاً الأساسات ٢٢، ٢٥، ٢٤.

تفحص النمط أدناه، ثم أجب عن الأسئلة الآتية:

٠ = ٣٠ ، ٠ = ٢٠ ، ٠ = ١٠ ، ٠ = ١٠ ؟ ١-٠ غير معرّف ٢-٠ غير معرّف ٣-٠ غير معرّف

(٥) لماذا كلٌّ من ١-٠، ٢-٠، ٣-٠ غير معرّف؟

(٦) بناءً على هذا النمط، هل تستطيع تحديد إذا كان ٠ معرّفًا؟

(٧) الرمز ٠ غير محدد، أي أنه ليس له قيمة وحيدة. لذا فهو غير موجود على صورة عدد حقيقي وحيد. لماذا ٠ لا يساوي ١؟

## تدريبات إعادة التعليم

### كثيرات الحدود

**درجة كثيرة الحدود:** كثيرة الحدود هي وحيدة حد أو مجموع وحيدات حد. ثنائية الحد هي مجموع وحيدتي حد في أبسط شكل. وثلاثية الحدود هي مجموع ثلاث وحيدات حد في أبسط شكل. أما كثيرات الحدود التي تحتوي على حدود تزيد على ثلاثة، فليس لها اسم خاص. درجة وحيدة الحد هي مجموع أسس كل متغيراتها. درجة كثيرة الحدود هي أكبر درجة لأي حد من حدودها، وهي درجة وحيدة الحد ذات أكبر درجة.

مثال

حدّد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإذا كانت كذلك، فصنّفها إلى: وحيدة حد، أو ثنائية

حد، أو ثلاثية حدود:

العبارة	هل هي كثيرة حدود؟	وحيدة حد/ ثنائية حد/ ثلاثية حدود	درجة كثيرة الحدود
$3x^3 - 7x + 5$	نعم؛ $3x^3 - 7x + 5 = (x^3 - 7x + 5)$ وهذا مجموع وحيدتي حد.	ثنائية حد	٣
$25 -$	نعم؛ $25$ عدد حقيقي	وحيدة حد	صفر
$7x^3 + 3x^2 - 4$	لا؛ $3x^2 = \frac{3}{x}$ ، وهذه ليست وحيدة حد.	_____	_____
$9x^3 + 4x^2 + 3x + 2$	نعم؛ تبسيط العبارة: $9x^3 + 4x^2 + 3x + 2$ ، وهي مجموع ثلاث وحيدات حد.	ثلاثية حدود	٣

### تمارين

حدّد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإذا كانت كذلك، فصنّفها إلى: وحيدة حد، أو ثنائية حد، أو ثلاثية حدود:

$$(1) \quad 36 \quad (2) \quad 5 + \frac{3}{x^2} \quad (3) \quad 3x^2 - 7x + 5$$

$$(4) \quad 8x^2 - 7x + 2 \quad (5) \quad \frac{1}{x^2} + 5x - 8 \quad (6) \quad 6x^2 + 3x^2$$

أوجد درجة كل كثيرة حدود فيما يأتي:

$$(7) \quad 4x^2 + 3x \quad (8) \quad -2x^2 + 3x - 5$$

$$(9) \quad 15x \quad (10) \quad 5 + 2x$$

$$(11) \quad 22 \quad (12) \quad 18x^2 + 4x - 10x \quad (13) \quad 10x^3 - 2x^2 - 3x - 10$$

$$(14) \quad 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 \quad (15) \quad 2x^2 + 3x^4 + 7x^2 - 7x^3 \quad (16) \quad 9x^2 + 3x^4$$

$$(17) \quad 8x^2 + 3x - 6 \quad (18) \quad 4x^4 - 8x^2 + 2x^2 \quad (19) \quad 4x^2 - 1$$

$$(20) \quad 9x^2 + 3x - 5 \quad (21) \quad 7x^2 + 6x - 7$$

## تدريبات إعادة التعليم

### كثيرات الحدود

(تتمة)

كثيرات الحدود بالصورة القياسية: عندما تكتب الحدود ذات المتغير الواحد في كثيرة الحدود بالترتيب من أكبرها درجة إلى أصغرها، فإنك تحصل على الصورة القياسية لكثيرات الحدود.

مثال

اكتب  $-٤س^٢ + ٩س^٤ - ٢س$  بالصورة القياسية، وحدد المعامل الرئيس فيها.

الخطوة ١: أوجد درجة كل حد

كثيرة الحدود:  $-٤س^٢ + ٩س^٤ - ٢س$

↓      ↓      ↓

١      ٤      ٢

الدرجة:

الخطوة ٢: اكتب حدود كثيرة الحدود بترتيب تنازلي لدرجاتها:  $٩س^٤ - ٤س^٢ - ٢س$ ، فيكون المعامل الرئيس هو ٩.

### تمارين

اكتب كل كثيرة حدود فيما يأتي بالصورة القياسية، وحدد المعامل الرئيس فيها:

(١)  $٥س + ٢س^٢ + ٦$       (٢)  $٦س + ٩ - ٤س^٢$       (٣)  $٤س + ٣س^٢ + ٢س^٣$

(٤)  $٢س^٣ - ٣س + ٣س^٧$       (٥)  $٢س + ٢س^٢ - ٥$       (٦)  $٢٠س - ١٠س^٢ + ٥س^٣$

(٧)  $٣س + ٣س^٠ - ٢س^٢$       (٨)  $٤س + ٤س^٣ - ٧س^٠ + ١$       (٩)  $٣س^٦ - ٣س^٠ + ٢س^٨$

(١٠)  $٢س^٧ - ٣س^٧$       (١١)  $٣س + ٥س^٤ - ٢س^٢ - ٢س$       (١٢)  $٢س^٤ + ٣س - ٤س^٠ + ٣$

(١٣)  $٢س - ٢$       (١٤)  $٥س^٤ - ١٢س - ٣س^٦$       (١٥)  $٩س^٩ - ٩ + ٣س^٣ - ٦س^٦$

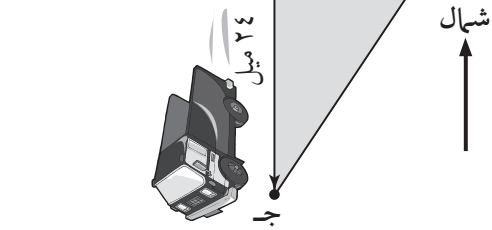
## تدريبات حل المسألة

### كثيرات الحدود

٣-٦

- (١) أعداد أولية: تحاول عاتكة وضع قائمة بأكبر عدد ممكن من الأعداد الأولية في مسألة تحدّ لطالبات فصلها في مبحث الرياضيات. وقد جدت أنه يمكنها استعمال كثيرة الحدود  $n^2 - n + 41$  للحصول على بعض الأعداد الأولية وليس جميعها. فما درجة كثيرة الحدود التي استعملتها عاتكة؟

- (٤) هندسة معمارية: ينتج من رسم منحنى دالة كثيرة الحدود  $v = -s^2 + 3s$  شكل قوس داخل مكتبة تاريخية، حيث  $s$  المسافة الأفقية بالأمتار من قاعدة القوس،  $v$  ارتفاع القوس. ما ارتفاع القوس عندما  $s=0$ ؟



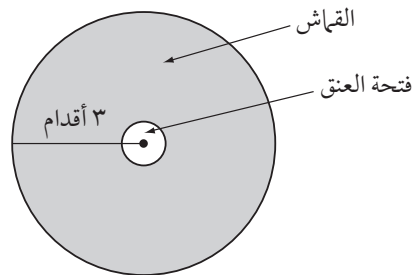
- (٥) قيادة مركبات: غادرت شاحنة وسيارة موقع تقاطع شارعين، فالتجهت الشاحنة جنوباً، والتجهت السيارة شرقاً. عندما قطعت الشاحنة ٢٤ ميلاً، أصبحت المسافة بينها وبين السيارة تزيد ٤ أميال على ٣ أمثال المسافة التي قطعها السيارة شرقاً.

- (أ) افترض أن الشاحنة توقفت عند نقطة ج، وتوقفت السيارة عند النقطة ب. اكتب كثيرة حدود بالصورة القياسية تعبر عن مجموع المسافات التي قطعها الشاحنة والسيارة.

- (ب) اكتب كثيرة حدود في أبسط صورة للتعبير عن محيط المثلث أ ب ج.

- (٢) حديقة ألعاب: تتقاضى إدارة حديقة ألعاب ٢٥ ريالاً بدل دخول للشخص الواحد، و ١٥ ريالاً إضافية عن كلّ لعبة يستعملها. اكتب كثيرة حدود للتعبير عن المجموع الكلي للمبلغ الذي تتقاضاه إدارة الحديقة عن شخص استعمل  $s$  ألعاب. ما درجة كثيرة الحدود هذه؟

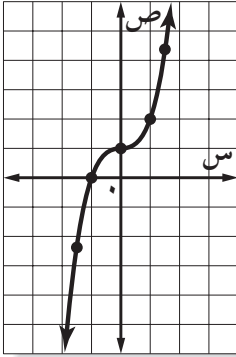
- (٣) أزياء: تخطط أم جهاد أغطية نسائية للكنتين لرصد ربيع بيعها لأعمال خيرية، ويمثّل الشكل أدناه تصميم الغطاء. فإذا كان طول نصف قطر فتحة العنق ٦ بوصات، فما مساحة الغطاء بالأقدام المربعة؟



## التدريبات الإثرائية

### دوال كثيرات الحدود

٣-٦



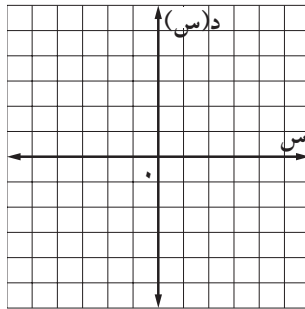
ص	س
$2\frac{3}{8}$	$1\frac{1}{2}$
٠	١-
١	٠
٢	١
$4\frac{3}{8}$	$1\frac{1}{4}$

افترض أن المعادلة الخطية  $-3س + ص = ٤$  قد حُلَّت  
بالنسبة للمتغير ص. المعادلة المكافئة هي  
 $ص = 3س + ٤$ ، حيث ص دالة في س،  
أو  $د(س) = 3س + ٤$  لاحظ أن الطرف الأيسر من  
المعادلة هو ثنائية حد من الدرجة ١

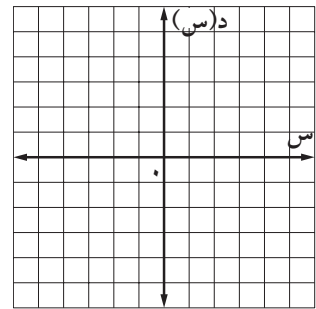
كثيرات الحدود ذات الدرجات الأكبر في س قد تكوّن دوال  
أيضاً. فمثلاً  $ص(س) = 3س + ١$ ، دالة كثيرة حدود من  
الدرجة ٣. يمكنك تمثيل هذه الدالة بيانياً مستعملاً جدول  
أزواج مرتبة، على نحو ما هو مبين يساراً.

كوّن جدولاً لقيم س، و ص = د(س) لكل من دوال كثيرة الحدود الآتية، ثم مثل منحنى كل دالة بيانياً على ورقة الرسم  
البياني:

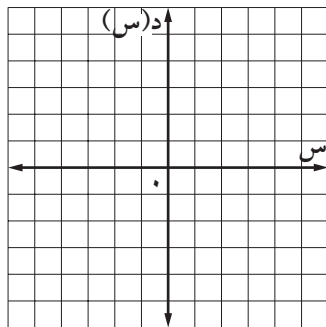
$$(٢) \text{ د(س) = } ٥ - ٢س$$



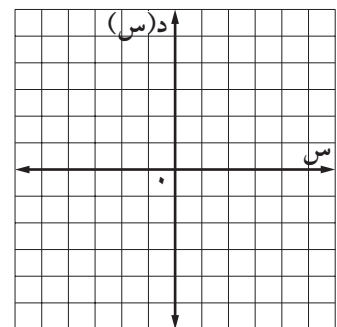
$$(١) \text{ د(س) = } ١ - س$$



$$(٤) \text{ د(س) = } ٣س$$



$$(٣) \text{ د(س) = } ٢س + ٤ - س$$



## ٤-٦

## تدريبات إعادة التعليم

### جمع كثيرات الحدود وطرحها

**جمع كثيرات الحدود:** يتم جمع كثيرتي حدود بجمع الحدود المتشابهة. ويمكنك تجميع الحدود المتشابهة مستعملًا الطريقة الأفقية أو الرأسية. الحدود المتشابهة هي وحيدات حدٍ إمّا أن تكون متماثلة أو تختلف فقط بمعاملاتها، مثل  $3b$ ،  $-5b$  أو  $2a^2$ ،  $8a^2$ .

أوجد ناتج

مثال ١

$(3s^2 + 5s + 2) + (s^2 + 2s + 2)$  بالطريقة الرأسية.

$3s^2 + 5s + 2$  رتب الحدود المتشابهة عمودياً واجمع

$(+2s^2 + s + 2)$

$5s^2 + 6s + 5$

المجموع هو  $5s^2 + 6s + 5$

أوجد ناتج

مثال ١

$(3s - 4s^2 + 2)$  بالطريقة الأفقية.

$(2s^2 + s - 8) + (3s - 4s^2 + 2)$

$=[(2s^2 - 4s^2) + (s + 3s) + (-8 + 2)]$  جمع الحدود المتشابهة

اجمع الحدود المتشابهة

$= -2s^2 + 4s - 6$

المجموع هو  $-2s^2 + 4s - 6$

## تمارين

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي:

$$(2) \quad (6s + 9) + (4s^2 - 7)$$

$$(1) \quad (5 - 4a) + (3 + 6a)$$

$$(3) \quad (6s^2 + 2s + 6s) + (4s - s) + (s^2 + 2s - s)$$

$$(6) \quad (2s^2 + 5s + 4s^2) + (-s - 2s^2 + 6s)$$

$$(5) \quad (3b^2 - 2b + 3) + (b^2 - 7b + 7)$$

$$(8) \quad (4s^2 - s + 4) + (5s + 2s^2 + 2)$$

$$(7) \quad (5b + 2k) + (2b^2 - 8k + 1)$$

$$(10) \quad (2s^2 + 2s + s^2) + (s^2 - s - 2s^2)$$

$$(9) \quad (6s^2 + 3s) + (s^2 - 4s - 3)$$

$$(12) \quad (6s^2 + 4s + 2s) + (2s - 10s + 2s^2)$$

$$(11) \quad (2a - 4b - c) + (-2a - b - 4c)$$

$$(14) \quad (2s^2 - 6) + (5s^2 + 2) + (-7s^2)$$

$$(13) \quad (2b - 5) + (3b + 6r) + (r - b)$$

$$(16) \quad (8s^2 + 4s + 3s^2 + 2s) + (6s^2 - s + 4s)$$

$$(15) \quad (3c^2 + 5c) + (2c + 2c) + (4 - c)$$

طرح كثيرات الحدود: يمكنك طرح كثيرة الحدود بإضافة نظيرها الجمعي. ولايجاد النظير الجمعي لكثيرة حدود، اكتب معكوس كل حد من حدودها.

أوجد ناتج  $(3س^2 + 2س - 6) - (2س^2 + 3س + 2)$

مثال

الطريقة الأفقية:

استعمل النظائر الجمعية لإعادة الكتابة على صورة جمع، ثم جمع الحدود المتشابهة.

$$(3س^2 + 2س - 6) - (2س^2 + 3س + 2) = [(3س^2 - 2س^2) + (2س - 3س) + (-6 - 2)] =$$

$$= [(3س^2 - 2س^2) + (-س) + (-8)] = [س^2 - س - 8] = س^2 - س - 8$$

الناتج هو  $س^2 - س - 8$

تمارين

أوجد ناتج كل مما يأتي:

(١)  $(1س^2 + 5س - 1) - (3س^2 - 5س + 1)$

(٢)  $(2س^2 + 9س - 5) - (3س^2 - 2س + 5)$

(٣)  $(9س^2 + 5س - 2س) - (2س^2 - 6س + 2س)$

(٤)  $(2س^2 + 5س - 2س) - (2س^2 + 5س - 2س)$

(٥)  $(6س^2 + 4س + 5) - (2س^2 + 5س + 1)$

(٦)  $(6س^2 + 5س - 2س) - (2س^2 + 5س - 2س)$

(٧)  $(8س - 5) - (6س^2 + 3س - 2س)$

(٨)  $(8س^2 - 4س - 3) - (2س^2 - 5س + 2س)$

(٩)  $(3س^2 - 2س) - (3س^2 + 5س - 1)$

(١٠)  $(4س^2 + 6س + 5س) - (2س^2 + 5س - 2س)$

(١١)  $(2س - 6س - 4س) - (7س - 5س - 4س)$

(١٢)  $(9س^2 + 5س) - (2س^2 - 5س - 8س)$

(١٣)  $(2س - 8س) - (3س + 5س)$

(١٤)  $(2س^2 - 8س) - (2س^2 - 6س)$

(١٥)  $(6س^2 + 4س + 2س) - (4س^2 + 6س)$

(١٦)  $(7س^2 - 2س + 4س) - (6س^2 - 5س + 1س)$

الطريقة الرأسية:

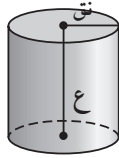
رتب الحدود المتشابهة عمودياً، واطرح بإضافة النظير الجمعي.

$3س^2 + 2س - 6$	أضف النظير الجمعي
$(-3س^2 - 2س + 3)$	للمطروح
$3س^2 + 2س + 3س^2$	جمع الحدود المتشابهة
$3س^2 - 2س - 3$	اجمع الحدود
$9س^2 - 2س$	المتشابهة ورتب
$9س^2 - 2س$	الناتج هو $9س^2 - 2س$

## تدريبات حل المسألة

## جمع كثيرات الحدود وطرحها

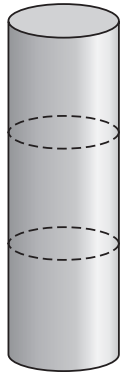
(٥) **صناعة:** تحتوي أسطوانتان دائريتان قائمتان معدنيتان متماثلتان على زيت معدني، ويُراد تغطيتهما بإداة عازلة مقاومة للنار. ولتحديد كمية المادة العازلة التي يتعين شراؤها، يتعين إيجاد المساحة السطحية للأسطوانتين. والمساحة السطحية لكل أسطوانة تساوي (المساحة الجانبية مع مساحة القاعدتين)، ومعطاة بالصيغة الآتية:

$$م = ٢ ط نق ع + ٢ ط نق ٢$$


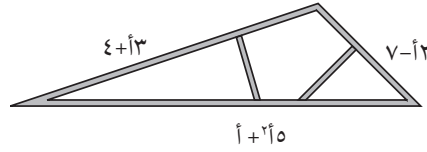
(أ) اكتب كثيرة حدود للتعبير عن المساحة السطحية للأسطوانتين معًا.

(ب) أوجد المساحة السطحية للأسطوانتين إذا كان ارتفاع كلٍّ منهما ٢ م، وطول نصف قطر قاعدة كلٍّ منهما ٥ م، مفترضًا  $ط = ٣,١٤$ .

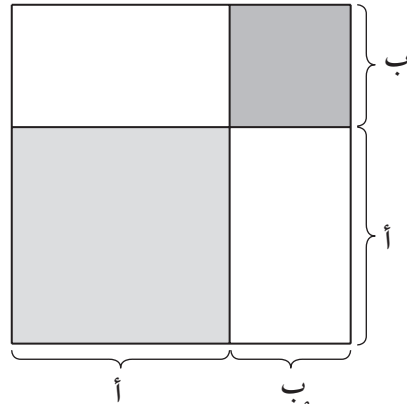
(ج) إذا كانت تغطية الأسطوانات بالمادة العازلة المقاومة للنار تتم على الأسطوانات مرتبة فوق بعضها رأسيًا في مجموعات ثلاثية كما في الشكل أدناه. إذا كان ارتفاع كلٍّ أسطوانة ع، وطول نصف قطر قاعدتها نق، فاكتب كثيرة حدود للتعبير عن المساحة السطحية لكل مجموعة.



(١) **بناء:** أوجد أبسط عبارة لمحيط دعامة السقف المثثة في الشكل أدناه:



(٢) **هندسة:** اكتب كثيرة حدود تمثل مساحة المربع الكبير في الشكل أدناه:



(٣) **ألعاب نارية:** أُطلق سهمان إلى أعلى في الهواء. ارتفاع كلٍّ سهم بالأقدام بعد ثمانية من إطلاقه مُعطى بمعادلة كثيرة حدود، على النحو المبين أدناه. اكتب معادلة تمثل المسافة الرأسية التي قطعها السهم أ زيادة على التي قطعها السهم ب.

$$\text{السهم أ: } ١٦ - ٢٢٢٢ + ٢٢٢٢$$

$$\text{السهم ب: } ١٦ - ٨٤ + ٢٢٢٢$$

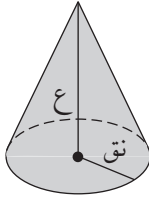
(٤) **مغلفات:** تنتج شركة تجهيزات مكتبية، مغلفات وثائق بأحجام مختلفة، طول كلٍّ منها يزيد ٤ سم على مثلي عرضه دائمًا. اكتب عبارة كثيرة حدود لإيجاد محيط أي من هذه المغلفات.

## ٤-٦

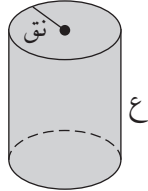
## التدريبات الإثرائية

## حساب المساحة وحساب الحجم لأشكال مرتبطة بالدائرة

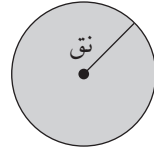
حجم المخروط الدائري القائم  
 $\frac{1}{3} \text{ ط نق } \text{ع}$



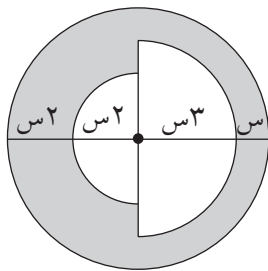
حجم الأسطوانة الدائرية القائمة  
 $\text{ح} = \text{ط نق} \text{ع}$



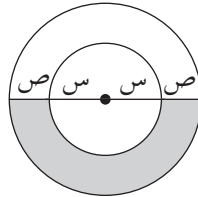
مساحة الدائرة  
 $\text{م} = \text{ط نق}^2$



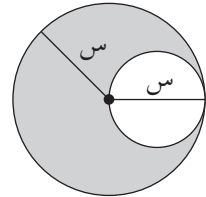
اكتب عبارة جبرية تمثل مساحة المنطقة المظللة فيما يأتي: (تذكر أنّ طول قطر الدائرة =  $2 \times$  طول نصف قطرها)



(٣)

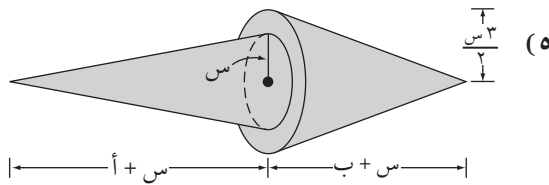


(٢)

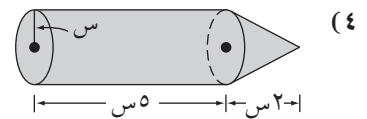


(١)

اكتب عبارة جبرية تمثل الحجم الكلي لكل مجسم فيما يأتي:

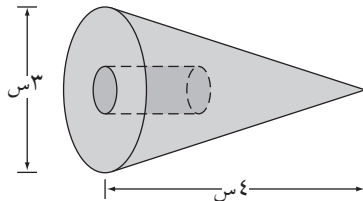


(٥)

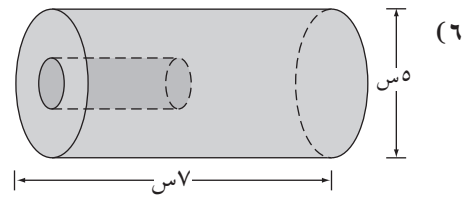


(٤)

يحتوي كلّ مجسم فيما يأتي على ثقب أسطواني طول نصف قطره بوصتان، وارتفاعه ٥ بوصات. أوجد كلّ حجم:



(٧)



(٦)



## تدريبات إعادة التعليم

## ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود

(تتمة)

حل معادلات تتضمن كثيرة حدود: تحتوي العديد من المعادلات على كثيرات حدود يتعين جمعها، أو طرحها، أو ضربها قبل حل المعادلة، وتستطيع استعمال خاصية التوزيع للحل.

حلّ المعادلة:  $٤(ن - ٢) + ٥ = ٦(ن - ٣) + ١٩$ 

مثال

المعادلة الأصلية	$٤(ن - ٢) + ٥ = ٦(ن - ٣) + ١٩$
خاصية التوزيع	$٤ن - ٨ + ٥ = ٦ن - ١٨ + ١٩$
اجمع الحدود المتشابهة	$٤ن - ٣ = ٦ن - ١٣$
أضف ٦ إلى كلا الطرفين	$٣٧ = ٨ - ١٥$
أضف ٨ إلى كلا الطرفين	$٤٥ = ١٥$
اقسم كلا الطرفين على ٥	$٣ = ن$

الحل هو ٣

## تمارين

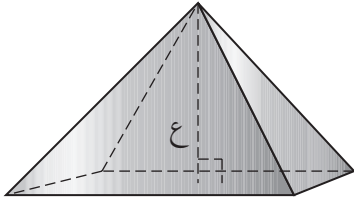
حلّ كلّاً من المعادلات الآتية:

- (١)  $٢(أ - ٣) = ٣(أ - ٦) + ١٢$
- (٢)  $٣(س + ٥) - ٦ = ١٨$
- (٣)  $٣س(س - ٥) - ٣س = ٣٠ -$
- (٤)  $٦(س + ٢) = ٢(٣س + ١٢)$
- (٥)  $٤(١ + ل) - ١٢ = ٢(ل + ٨)$
- (٦)  $٢(٦س + ٤) + ٢ = ٤(س - ٤)$
- (٧)  $٢(٤ص - ٣) - ٨ص + ٦ = ٤(ص - ٢)$
- (٨)  $س(س + ٢) - س(س - ٦) = ١٠س - ١٢$
- (٩)  $٣(س - ٢) + ٣س = ٥س - ١١$
- (١٠)  $٢(٤س + ٣) + ٢ = ٤(س + ١)$
- (١١)  $٣(٢هـ - ٦) - (٢هـ + ١) = ٩$
- (١٢)  $٣(ص + ٥) - (٤ص - ٨) = ٢ص + ١٠$
- (١٣)  $٣(٢أ - ٦) - (٣أ - ١) = ٤أ - ٢$
- (١٤)  $٥(٢س - ١) - (١٠س - ٦) = (س + ٢)$
- (١٥)  $٣(س + ٢) + (س + ١) = ٥(س - ٣)$
- (١٦)  $٤(٣ل + ٢) - (ل + ٨) = ٢(ل + ٨)$

## تدريبات حل المسألة

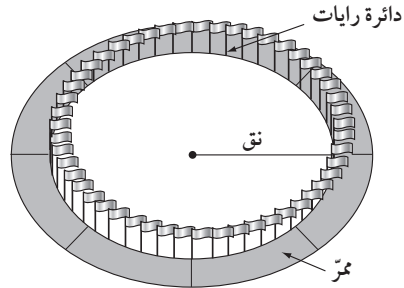
## ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود

- (١) **نظرية الأعداد:** يعطى مجموع أول  $n$  من الأعداد الكليّة بالعلاقة  $\frac{1}{2}(n^2 + n)$ . أوجد مفكوك العبارة بالضرب، ثم أوجد مجموع أول ١٢ عدد كليّ.
- (٢) **إدخار:** حصل خالد من والده على ٧٠٠ ريال ليبدأ به ادخاره، ثم بدأ والده يعطيه ٤٠ ريالاً شهريّاً. وبعد ٤ أشهر من ذلك بدأت أمه تعطيه ٥٠ ريالاً شهريّاً. وكان خالد يضيف هذه المبالغ إلى ادخاره. اكتب عبارة في أبسط صورة للمبلغ الكلي الذي ادخره خالد بعد  $m$  شهر، حيث  $m \leq 4$
- (٣) **ساحات:** يبيّن الشكل أدناه دائرة من خمسين راية تحيط موقِعًا سياحيّاً. إذا أنشئ ممر عرضه ٤ م حول دائرة الرايات، وكان المحيط الخارجي للممرّ يساوي ١,١ مرّة من محيط دائرة الرايات، فاكتب معادلة بدلالة  $r$  تعبّر عن العلاقة بين المحيط الخارجي للممرّ ومحيط دائرة الرايات، ثم حلها، وأوجد طول نصف قطر دائرة الرايات. تذكّر أن صيغة محيط الدائرة هي  $2\pi r$ .
- (٤) **سوق:** ذهبت صفية إلى سوق الخضار، واشترت باذنجان وبطاطا بمبلغ ٤٦ ريالاً. فإذا كان ثمن كيلوجرام الباذنجان ٥,٣ ريال، وثمان كيلوجرام البطاطا ٥,٢ ريال، وكان عدد كيلوجرامات البطاطا يزيد ٤ على عدد كيلوجرامات الباذنجان، فاكتب معادلة، ثم حلها لتجد عدد الكيلوجرامات التي اشترتها صفية من كلّ نوع.
- (٥) **هندسة:** بُنيّت بعض المعالم التذكارية على شكل أهرامات قائمة قاعدتها مستطيلة، ويمكنك إيجاد حجم كلّ هرم  $H$  بضرب ثلث مساحة قاعدته  $C$  في ارتفاعه  $h$ .  
مساحة القاعدة المستطيلة لأحد المعالم التذكارية معطاة بالمعادلة  $C = 4s^2 - 12$



- (أ) اكتب معادلة كثيرة حدود للتعبير عن حجم الهرم  $H$ ، إذا كان ارتفاعه ٥ أمتار.

- (ب) أوجد حجم الهرم عندما  $s = 12$  م

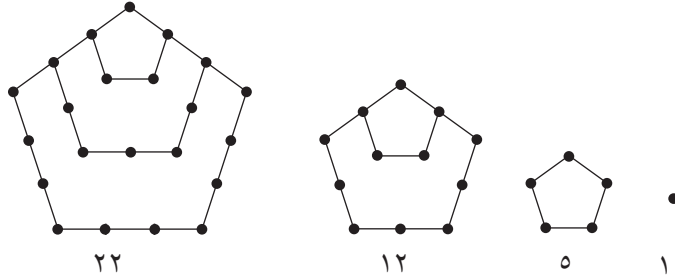


## التدريبات الإثرائية

### أعداد تشكيلية

٥-٦

تسمى الأعداد أدناه أعدادًا خماسية. وهي أعداد النقاط أو الأقراص التي يمكنك ترتيبها على صورة أشكال خماسية.



(١) أوجد ناتج  $\frac{1}{3}n$  (١-٣-١).

(٢) أوجد الناتج في سؤال ١ لقيم  $n$  من ١ إلى ٤

(٣) ماذا تلاحظ؟

(٤) أوجد الأعداد الخماسية الستة التالية.

(٥) أوجد ناتج  $\frac{1}{3}n$  ( $n + 1$ ).

(٦) أوجد الناتج في سؤال ٥ لقيم  $n$  من ١ إلى ٥، ثم ارسم على ورقة منفصلة أشكالاً توضح من خلالها لماذا تُسمى هذه الأعداد أعداداً مثلثية.

(٧) أوجد ناتج  $n(2-1)$ .

(٨) أوجد الناتج في سؤال ٧ لقيم  $n$  من ١ إلى ٥، ثم ارسم هذه الأعداد السداسية.

(٩) أوجد أول ٥ أعداد مربعة، ثم اكتب صيغة العبارة العامة لأي عدد مربع.

الأعداد التي استكشفتها أعلاه هي أعداد تشكيلية في المستوى؛ لأنه يمكنك ترتيبها لعمل أشكال هندسية. يمكنك استكشاف أعداد تشكيلية لمجسمات أيضًا.

(١٠) إذا رتبنا ١٠ برتقالات على شكل هرم ثلاثي، فستحصل على عدد تشكيلي لمجسم رباعي السطوح. ما عدد الطبقات في الهرم؟ كم برتقالة توجد في الطبقات السفلى؟

(١١) احسب قيمة العبارة  $\frac{1}{4}n^3 + \frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{3}n$  لقيم  $n$  من ١ إلى ٥ لإيجاد أول خمسة أعداد تشكل مجسمات رباعية السطوح.

## ٦-٦ تدريبات إعادة التعليم

### ضرب كثيرات الحدود

**ضرب ثنائيّتي حد:** تُستعمل خاصية التوزيع لضرب ثنائيّتي حد. ويمكنك ضرب ثنائيّتي حد أفقيّاً أو رأسياً. والطريقة المفيدة لتتبع الحدود في الضرب هي استعمال طريقة التوزيع بالترتيب، المبيّنة في مثال ٢.

**مثال ٢** أوجد ناتج ضرب  $(س - ٢)(س + ٥)$  مستعملاً طريقة التوزيع بالترتيب.

$$(س - ٢)(س + ٥)$$

نتائج ضرب	نتائج ضرب	نتائج ضرب	نتائج ضرب
الحددين الأخيرين	الحددين الأوسطين	الحددين في الطرفين	الحددين الأولين

$$= (س)(س) + (س)(٥) + (س-٢)(س) + (س-٢)(٥)$$

$$= س^٢ + ٥س - ٢س - ١٠$$

$$= س^٢ + ٣س - ١٠$$

ناتج الضرب هو  $س^٢ + ٣س - ١٠$

**مثال ١** أوجد ناتج ضرب  $(س + ٣)(س - ٤)$

$$(س + ٣)(س - ٤)$$

الطريقة الأفقية:

$$(س + ٣)(س - ٤)$$

$$= س(س - ٤) + ٣(س - ٤)$$

$$= س^٢ - ٤س + ٣س - ١٢$$

$$= س^٢ - س - ١٢$$

الطريقة الرأسية:

$$\begin{array}{r} س + ٣ \\ \times س - ٤ \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} س + ٣ \\ \times س - ٤ \\ \hline س^٢ + ٣س \\ - ٤س - ١٢ \\ \hline س^٢ - س - ١٢ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} س + ٣ \\ \times س - ٤ \\ \hline س^٢ + ٣س \\ - ٤س - ١٢ \\ \hline س^٢ - س - ١٢ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} س + ٣ \\ \times س - ٤ \\ \hline س^٢ + ٣س \\ - ٤س - ١٢ \\ \hline س^٢ - س - ١٢ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} س + ٣ \\ \times س - ٤ \\ \hline س^٢ + ٣س \\ - ٤س - ١٢ \\ \hline س^٢ - س - ١٢ \end{array}$$

ناتج الضرب هو  $س^٢ - س - ١٢$

### تمارين

أوجد ناتج الضرب في كلِّ ممّا يأتي:

(١)  $(س + ٢)(س + ٣)$  (٢)  $(س - ٤)(س + ١)$  (٣)  $(س - ٦)(س - ٢)$

(٤)  $(س - ٤)(س + ٢)$  (٥)  $(س + ٥)(س + ٢)$  (٦)  $(س - ١)(س + ٥)$

(٧)  $(س - ٣)(س - ٤)$  (٨)  $(س - ٨)(س + ٢)$  (٩)  $(س + ٤)(س - ١)$

(١٠)  $(س + ٣)(س + ٣)$  (١١)  $(س - ٨)(س - ٣)$  (١٢)  $(س + ٤)(س - ٦)$

(١٣)  $(س - ٥)(س - ٣)$  (١٤)  $(س - ٢)(س - ٥)$  (١٥)  $(س - ٨)(س + ٥)$

(١٦)  $(س - ٢)(س + ٥)$  (١٧)  $(س - ٣)(س - ٥)$  (١٨)  $(س - ٧)(س + ٤)$

## تدريبات إعادة التعليم

### ضرب كثيرات الحدود

(تتمة)

ضرب كثيرات الحدود: يمكنك استعمال خاصية التوزيع لإيجاد ناتج ضرب أي كثيرتي حدود.

مثال أوجد ناتج ضرب  $(2 + 3س)(2س^2 - 4ص + 5)$

$$(2 + 3س)(2س^2 - 4ص + 5)$$

$$3س(2س^2 - 4ص + 5) + 2(2س^2 - 4ص + 5)$$

$$6س^3 - 12س^2ص + 15س + 4س^2 - 8ص + 10$$

$$6س^3 - 8س^2ص + 7س + 10$$

$$10 + 7س + 8س^2 - 8س^2ص + 6س^3$$

تمارين

أوجد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي:

$$(2) (3 + س)(2س^2 + س - 3)$$

$$(1) (2 + س)(2س^2 - 1 + س)$$

$$(4) (3 - ل)(ل^2 - 4ل + 2)$$

$$(3) (2س - 1)(س^2 + 2)$$

$$(6) (2ت + 1)(10ت^2 - 2ت - 4)$$

$$(5) (2 + ك)(ك^2 + ك - 4)$$

$$(8) (2س - 8)(س^3 + 2س^2 - 1)$$

$$(7) (3ن - 4)(4ن^2 + 5ن - 4)$$

$$(10) (3س - 4)(س^3 + 3س^2 + 3)$$

$$(9) (4 + أ)(أ^2 - 8أ + 3)$$

$$(12) (2ت^2 + 1 - 4ت)(3 - ت)$$

$$(11) (2ن^2 + 1 - 2ن)(2 + ن)$$

$$(14) (3ب^2 - 2ب + 1)(2ب^2 - 3ب - 4)$$

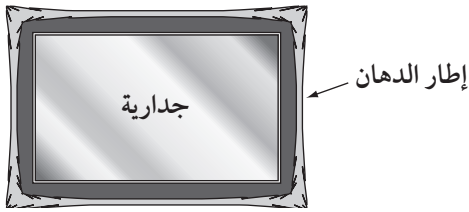
$$(13) (3ص + 5 - 2ص^2)(2ص^2 + 7ص - 4)$$

## تدريبات حل المسألة

### ضرب كثيرات الحدود

(٤) **متعة الرياضيات:** فكّر في عدد كلي مثل  $s$ ، واطرح منه  $٢$ ، واكتب ناتج الطرح. أضف إلى العدد الأصلي  $٢$ ، واكتب ناتج الجمع. أوجد حاصل ضرب ناتج الطرح في ناتج الجمع اللذين كتبتهما. اشرح مربع العدد الأصلي من حاصل الضرب. الناتج هو  $-٤$  دائماً. بيّن خطوات التوصل إلى العدد المطلوب مستعملاً كثيرات الحدود، ثم أوجده.

(٥) **فن:** يخطط المتحف الذي يعمل فيه سلطان لعمل جدارية حائط مستعملاً لوحة فنية. أراد سلطان أن يرسم إطاراً من الدهان حول هذه الجدارية. يزيد طول الجدارية  $٥$  أقدام على عرضها، وسيكون عرض الإطار قدمين على جميع جوانب الجدارية. فإذا كان لديه من الدهان ما يكفي لتغطية  $١٠٠$  قدم مربعاً من الحائط، فما أكبر بُعدين ممكنين للجدارية؟



(أ) اكتب عبارة تمثل مساحة الجدارية.

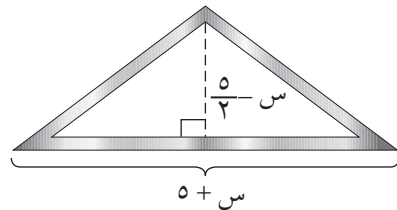
(ب) اكتب عبارة تمثل مساحة الإطار.

(ج) اكتب معادلة لإيجاد أكبر بُعدين ممكنين للجدارية، ثم حلّها.

(١) **مسرح:** يوجد في أحد المسارح قاعة لجلوس المشاهدين، فيها  $٣$  جـ +  $٨$  صفوف، وفي كل صف  $٤$  جـ -  $١$  مقعد. اكتب عبارة تمثل العدد الكلي للمقاعد.

(٢) **حرف يدوية:** افترض أنّ لحافاً مصنوعاً من قطع مربعة، طوله  $٥$  س بوصة، ونسبة طوله إلى عرضه  $٥$  إلى  $٤$ . يمكن تكبير اللحاف قليلاً بإضافة حاشية إلى جميع جوانبه، تتكوّن من مربعات طولها بوصة واحدة. اكتب عبارة كثيرة حدود تمثل مساحة اللحاف الأكبر.

(٣) **فن العمارة:** يمثّل الشكل أدناه نافذة مثلثة الشكل في جدار بناء. فإذا كان طول قاعدة المثلث  $s$  +  $٥$  بوصة، وارتفاعه  $s$  -  $\frac{٥}{٢}$  بوصة، فاكتب عبارة كثيرة حدود تمثل مساحة الجزء من جدار البناء الذي تحتله هذه النافذة.





## تدريبات إعادة التعليم

### حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود

مربع مجموع حدين ومربع الفرق بينهما : بعض أزواج ثنائيات الحد لها ناتج ضرب يتبع قاعدة معيَّنة، إحداها قاعدة مربع مجموع حدين، والثانية قاعدة مربع الفرق بين حدين.

مربع مجموع حدين	$(أ + ب)^2 = (أ + ب)(أ + ب) = أ^2 + ٢أب + ب^2$
مربع الفرق بين حدين	$(أ - ب)^2 = (أ - ب)(أ - ب) = أ^2 - ٢أب + ب^2$

أوجد ناتج  $(٩ - ع٢)(٩ - ع٢)$

مثال ٢

استعمل قاعدة مربع الفرق بين حدين؛  $أ = ع٢$ ،  $ب = ٩$

$$(٩ - ع٢)(٩ - ع٢) = (٩ - ع٢)^2 = (٩)^2 - ٢(ع٢)(٩) + (ع٢)^2$$

$$= ٨١ + ع٣٦ - ٢ع٤$$

ناتج الضرب هو  $٨١ + ع٣٦ - ٢ع٤$

أوجد ناتج  $(٤ + أ٣)(٤ + أ٣)$

مثال ١

استعمل قاعدة مربع مجموع حدين؛  $أ = أ٣$ ،  $ب = ٤$

$$(٤ + أ٣)(٤ + أ٣) = (٤ + أ٣)^2 = (٤)^2 + ٢(أ٣)(٤) + (أ٣)^2$$

$$= ١٦ + أ٢٤ + ١٩$$

ناتج الضرب هو  $١٦ + أ٢٤ + ١٩$

تمارين

أوجد ناتج كلِّ مما يأتي:

(٣)  $(٤س - ٥)$

(٢)  $(٤ + ٣ل)$

(١)  $(٦ - س)$

(٦)  $(٥ + م)$

(٥)  $(٣ + ٢هـ)$

(٤)  $(١ - ٢س)$

(٩)  $(٥ص - س)$

(٨)  $(٣ - ل)$

(٧)  $(٣ + أ)$

(١٢)  $(٢ب - أ٣)$

(١١)  $(٨ + س)$

(١٠)  $(٤ + ٨ص)$

(١٥)  $(٢م - ٢)$

(١٤)  $(١ + ٢س)$

(١٣)  $(٨ - ٢س)$

(١٨)  $(٣ + \frac{١}{٤}س)$

(١٧)  $(٢هـ - ٢ك)$

(١٦)  $(١ - ٣س)$

(٢١)  $(٢ - \frac{٢}{٣}س)$

(٢٠)  $(٢ر + ٤ل)$

(١٩)  $(٤ص - ٢س)$

## تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

## حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود

ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما؛ توجد قاعدة أيضًا لإيجاد ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما  $(أ + ب)(أ - ب)$ ، وهي مربع ناقص مربع ب.

ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما	$(أ + ب)(أ - ب) = أ^2 - ب^2$
-------------------------------------	------------------------------

مثال

أوجد ناتج  $(٥س + ٣ص)(٥س - ٣ص)$ .

$$(أ + ب)(أ - ب) = أ^2 - ب^2$$

ناتج ضرب المجموع في الفرق

$$(٥س + ٣ص)(٥س - ٣ص) = (٥س)^2 - (٣ص)^2$$

$$أ = ٥س، ب = ٣ص$$

بسّط

$$= ٢٥س^2 - ٩ص^2$$

ناتج الضرب هو  $٢٥س^2 - ٩ص^2$ 

تمارين

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي:

$$(١) (٤ - س)(٤ + س) \quad (٢) (٢ + ل)(٢ - ل) \quad (٣) (٥ - س٤)(٥ + س٤)$$

$$(٤) (١ - ٢س)(١ + ٢س) \quad (٥) (٧ + هـ)(٧ - هـ) \quad (٦) (٥ - م)(٥ + م)$$

$$(٧) (٣ - د٢)(٣ + د٢) \quad (٨) (٣ - ك٥)(٣ + ك٥) \quad (٩) (س - ص)(س + ص)$$

$$(١٠) (ص - ٤س)(ص + ٤س) \quad (١١) (٨ + س٤)(٨ - س٤) \quad (١٢) (٣ - أ٢)(٣ + أ٢)$$

$$(١٣) (٨ - ص٣)(٨ + ص٣) \quad (١٤) (١ - ٢س)(١ + ٢س) \quad (١٥) (٥ - ٢م)(٥ + ٢م)$$

$$(١٦) (٢ - ٣س)(٢ + ٣س) \quad (١٧) (٢هـ - ٢ك)(٢هـ + ٢ك) \quad (١٨) (٢ + ١س)(٢ - ١س)$$

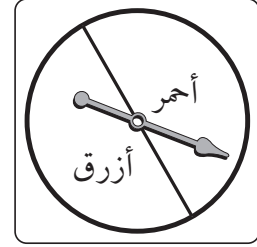
$$(١٩) (٣ص - ٢ص٢)(٣ص + ٢ص٢) \quad (٢٠) (٢ل - ٥ر)(٢ل + ٥ر) \quad (٢١) (٢ص - ٤س)(٢ص + ٤س)$$

## تدريبات حل المسألة

## حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود

- (١) **احتمال**: القرص الدوار أدناه مُقسّم إلى قسمين متساويين. إذا أدّرت المؤشر مرتين متتاليتين، فإنّ النتائج الممكنة مبيّنة في الجدول أدناه.

أحمر	أحمر
أحمر	أحمر
أزرق	أحمر
أزرق	أزرق



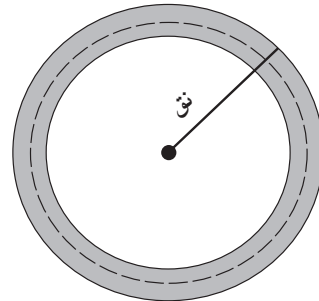
ما احتمال الحصول على أزرق وأحمر عند تدوير المؤشر مرتين؟

- (٢) **الاجاذبية**: ارتفاع قطعة نقود معدنية بعد ن ثانية من إسقاطها في بئر، مُعطى بعبارة ناتج الضرب:

$$(10 - n)(10 + n)$$

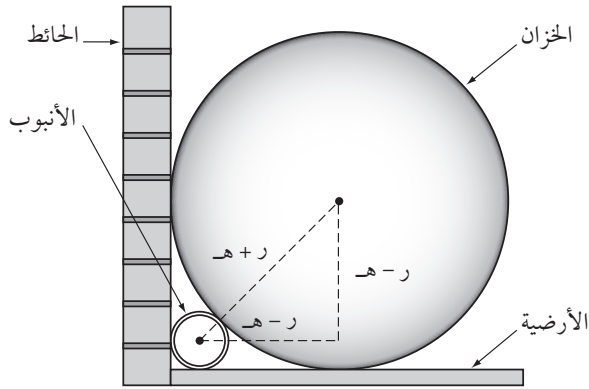
أوجد مفكوك هذه العبارة، ثم بسّطه. ما الحالة الخاصة التي يمثلها هذا الناتج؟

- (٣) **تخطيط الطرق**: يمثّل الشكل أدناه طريقاً دائرياً تحده دائرتان لهما المركز نفسه. إذا كان طول نصف قطر الدائرة الصغرى ينقص ١٠ أمتار عن طول نصف قطر الدائرة الكبرى، فاكتب معادلة كثيرة حدود تمثل مساحة الطريق.



- (٤) **أعمال**: وجدت إحدى الشركات أنّ ربحها منذ عام ٢٠٠٥م وحتى العام الحالي يمكن التعبير عنه بالدالة:  $ص = ٢٤ن^٢ + ٤٤ن + ١٢١$ ؛ حيث ص الربح، ن عدد الأعوام منذ عام ٢٠٠٥. ما الحالة الخاصة التي تمثّلها كثيرة الحدود هذه؟ فسّر إجابتك.

- (٥) **تخزين**: وُضع خزان أسطواني بجانب حائط، وأُخفي أنبوب أسطواني صغير في الزاوية خلف الخزان كما هو مبين في المنظر الجانبي أدناه، حيث طول نصف قطر الخزان ربوصة، وطول نصف قطر الأنبوب هـ بوصة.



- (أ) اكتب معادلة للعلاقة بين طولي نصفي القطرين، مستعملاً نظرية فيثاغورس. بسّط معادلتك بحيث يكون أحد طرفي المعادلة صفراً.

- (ب) إذا كان طول نصف قطر الخزان ٢٠ بوصة، فاكتب معادلة كثيرة حدود يمكنك عند حلّها أن تجد طول نصف قطر الأنبوب.

## التدريبات الإثرائية

## مكعب مجموع حدين، ومكعب الفرق بينهما

تذكر قواعد إيجاد حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود:

$$(أ + ب)^2 = أ^2 + ٢أب + ب^2 \quad (أ) \quad \text{ثلاثية حدود؛ مربع كامل:}$$

$$(أ - ب)^2 = أ^2 - ٢أب + ب^2$$

$$(أ + ب)(أ - ب) = أ^2 - ب^2 \quad \text{الفرق بين مربعين:}$$

توجد قاعدة لإيجاد مكعب مجموع حدين  $(أ + ب)^3$  أيضًا.

$$(١) \quad \text{أوجد ناتج } (أ + ب)(أ + ب)(أ + ب).$$

$$(٢) \quad \text{أوجد ناتج } (س + ٢)^3 \text{ مستعملًا القاعدة في سؤال ١.}$$

$$(٣) \quad \text{بناءً على إجابتك عن سؤال ١، تخنّ قاعدة لإيجاد ناتج مكعب الفرق بين حدين } (أ - ب)^3.$$

$$(٤) \quad \text{أوجد ناتج } (أ - ب)(أ - ب)(أ - ب)، \text{ ثم قارنه بإجابتك عن السؤال ٣}$$

$$(٥) \quad \text{أوجد ناتج } (س - ٤)^3 \text{ مستعملًا القاعدة في سؤال ٤.}$$

أوجد ناتج كلِّ مما يأتي:

$$(٧) \quad (س - ١٠)^3$$

$$(٦) \quad (س + ٦)^3$$

$$(٩) \quad (٢س - ص)^3$$

$$(٨) \quad (٣س - ص)^3$$

$$(١١) \quad (٢ + ٥س)^3$$

$$(١٠) \quad (٤س + ٣ص)^3$$

# ملحق الإجابات

التاريخ

الاسم

(تنمية)

## ١-٦ تدريبات إعادة التعليم ضرب وحيدات الحد

تبسيط العبارات: سُئيت العبارة على صورة (س) قوة القوة، وتمثل حاصل الضرب الذي تحصل عليه عند استعمال س كامل ن مرة. لإيجاد قوة القوة، اضرب الأسس.

قوة القوة	لأي عدد حقيقي أ، وأي عددين صحيحين م، ن، فإن (أ) <sup>م</sup> × (أ) <sup>ن</sup> = (أ) <sup>م+ن</sup>
قوة حاصل الضرب	لأي عددين حقيقيين أ، ب، وأي عدد صحيح ن، فإن (أب) <sup>ن</sup> = أ <sup>ن</sup> × ب <sup>ن</sup>

يمكنك دمج الخصائص واستعمالها في تبسيط عبارات تتضمن وحيدات الحد.

مثال ١: تبسط (٣أ<sup>٢</sup> × ٢أ<sup>٣</sup>)<sup>٤</sup>

$$= (٢١٦)٤ = (٢٣)٤ = (٢٤)٤ = (٢٤)٤ = (٢٤)٤$$

قوة القوة  
قوة حاصل الضرب  
جمع المثلثات والتغيرات  
ضرب القوى  
قوة القوة  
حاصل الضرب هو ١٢٨ = ٢<sup>٦</sup> × ٨

تمارين

بسط كل عبارة مما يأتي:

- (١) ص<sup>٤</sup> × ص<sup>٥</sup> × ص<sup>٦</sup>
- (٢) (٤س)<sup>٢</sup> × (٥س)<sup>٣</sup>
- (٣) (٤س<sup>٣</sup>)<sup>٢</sup> × (٥س<sup>٣</sup>)<sup>٣</sup>
- (٤) (٣س<sup>٣</sup>)<sup>٢</sup> × (٤س<sup>٣</sup>)<sup>٣</sup>
- (٥) (٣س<sup>٣</sup>)<sup>٢</sup> × (٤س<sup>٣</sup>)<sup>٣</sup>
- (٦) (٤س<sup>٣</sup>)<sup>٢</sup> × (٥س<sup>٣</sup>)<sup>٣</sup>
- (٧) (٤س<sup>٣</sup>)<sup>٢</sup> × (٥س<sup>٣</sup>)<sup>٣</sup>
- (٨) (٤س<sup>٣</sup>)<sup>٢</sup> × (٥س<sup>٣</sup>)<sup>٣</sup>
- (٩) (٤س<sup>٣</sup>)<sup>٢</sup> × (٥س<sup>٣</sup>)<sup>٣</sup>
- (١٠) (٤س<sup>٣</sup>)<sup>٢</sup> × (٥س<sup>٣</sup>)<sup>٣</sup>
- (١١) (٤س<sup>٣</sup>)<sup>٢</sup> × (٥س<sup>٣</sup>)<sup>٣</sup>
- (١٢) (٤س<sup>٣</sup>)<sup>٢</sup> × (٥س<sup>٣</sup>)<sup>٣</sup>
- (١٣) (٤س<sup>٣</sup>)<sup>٢</sup> × (٥س<sup>٣</sup>)<sup>٣</sup>
- (١٤) (٤س<sup>٣</sup>)<sup>٢</sup> × (٥س<sup>٣</sup>)<sup>٣</sup>
- (١٥) (٤س<sup>٣</sup>)<sup>٢</sup> × (٥س<sup>٣</sup>)<sup>٣</sup>
- (١٦) (٤س<sup>٣</sup>)<sup>٢</sup> × (٥س<sup>٣</sup>)<sup>٣</sup>
- (١٧) (٤س<sup>٣</sup>)<sup>٢</sup> × (٥س<sup>٣</sup>)<sup>٣</sup>
- (١٨) (٤س<sup>٣</sup>)<sup>٢</sup> × (٥س<sup>٣</sup>)<sup>٣</sup>

الصفحة ١ من ١ التمارين التوسط

٧

الفصل ١: كثيرات الحدود

التاريخ

الاسم

## ١-٦ تدريبات إعادة التعليم ضرب وحيدات الحد

وحيدات الحد: تكون وحدة الحد عدداً أو متغيراً، أو حاصل ضرب عدد في متغير واحد أو أكثر، بأسس صحيحة غير سالبة. وتتكون من حد واحد فقط.

العبارة التي على الصورة س<sup>٢</sup> والتي تعبر عن نتيجة ضرب س في نفسها ن مرة تُسمى قوة، والضرب فوق ن لها الأساس نفسه، اجمع أسسها.

ضرب القوى	لأي عدد أ، وأي عددين صحيحين م، ن، فإن (أ) <sup>م</sup> × (أ) <sup>ن</sup> = (أ) <sup>م+ن</sup>
-----------	--

مثال ٢: تبسط (٣أ<sup>٤</sup> × ٤أ<sup>٣</sup>)<sup>٥</sup>

$$= (١٢٠٠٠)٥ = (١٢٠٠٠)٥ = (١٢٠٠٠)٥$$

ضرب القوى  
تبسط  
حاصل الضرب هو ١٥ = ٣ × ٥

تمارين

بسط كل عبارة مما يأتي:

- (١) ص<sup>٤</sup> × ص<sup>٥</sup> × ص<sup>٦</sup>
- (٢) (٤س)<sup>٢</sup> × (٥س)<sup>٣</sup>
- (٣) (٤س<sup>٣</sup>)<sup>٢</sup> × (٥س<sup>٣</sup>)<sup>٣</sup>
- (٤) (٣س<sup>٣</sup>)<sup>٢</sup> × (٤س<sup>٣</sup>)<sup>٣</sup>
- (٥) (٣س<sup>٣</sup>)<sup>٢</sup> × (٤س<sup>٣</sup>)<sup>٣</sup>
- (٦) (٤س<sup>٣</sup>)<sup>٢</sup> × (٥س<sup>٣</sup>)<sup>٣</sup>
- (٧) (٤س<sup>٣</sup>)<sup>٢</sup> × (٥س<sup>٣</sup>)<sup>٣</sup>
- (٨) (٤س<sup>٣</sup>)<sup>٢</sup> × (٥س<sup>٣</sup>)<sup>٣</sup>
- (٩) (٤س<sup>٣</sup>)<sup>٢</sup> × (٥س<sup>٣</sup>)<sup>٣</sup>
- (١٠) (٤س<sup>٣</sup>)<sup>٢</sup> × (٥س<sup>٣</sup>)<sup>٣</sup>
- (١١) (٤س<sup>٣</sup>)<sup>٢</sup> × (٥س<sup>٣</sup>)<sup>٣</sup>
- (١٢) (٤س<sup>٣</sup>)<sup>٢</sup> × (٥س<sup>٣</sup>)<sup>٣</sup>
- (١٣) (٤س<sup>٣</sup>)<sup>٢</sup> × (٥س<sup>٣</sup>)<sup>٣</sup>
- (١٤) (٤س<sup>٣</sup>)<sup>٢</sup> × (٥س<sup>٣</sup>)<sup>٣</sup>
- (١٥) (٤س<sup>٣</sup>)<sup>٢</sup> × (٥س<sup>٣</sup>)<sup>٣</sup>
- (١٦) (٤س<sup>٣</sup>)<sup>٢</sup> × (٥س<sup>٣</sup>)<sup>٣</sup>
- (١٧) (٤س<sup>٣</sup>)<sup>٢</sup> × (٥س<sup>٣</sup>)<sup>٣</sup>
- (١٨) (٤س<sup>٣</sup>)<sup>٢</sup> × (٥س<sup>٣</sup>)<sup>٣</sup>

الصفحة ١ من ١ التمارين التوسط

٦

الفصل ١: كثيرات الحدود

التاريخ

الاسم

## ١-٦ التدرجات الإثرائية نظام العدد الثنائي

تُجرّن الطراسيب الإلكترونية الرقمية المعلومات على صورة أعداد. وبما أن الدوائر الكهربائية للحاسب توجد بواسطة من حائزين فقط، فمفترضة أو معاكسة، فإن الأعداد المخرجة تتكون من رقمين فقط هما صفر أو ١، والأعداد الكبرية باستعمال صفر أو ١ فقط تسمى الأعداد الثنائية.

لايجاد القيمة بالنظام العشري للعدد الثنائي، استعمل أرقام العدد لكتابه بالصيغة التحليلية على صورة قوى للعدد ٢. وفيما يأتي مثال على كيفية إيجاد القيمة العشرية للعدد  $(1001010)_2$ ، (يشير الرقم ٢ إلى أن العدد المعطى بالنظام الثنائي).

$$\begin{aligned} (1001010)_2 &= 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \\ &= 1 \times 64 + 0 \times 32 + 0 \times 16 + 1 \times 8 + 0 \times 4 + 1 \times 2 + 0 \times 1 \\ &= 64 + 0 + 0 + 8 + 0 + 2 + 0 = 74 \end{aligned}$$

ولتحول عدد من النظام العشري إلى النظام الثنائي يمكن اتباع طريقة القسمة على ٢ بالتسلسل إلى أن يكون ناتج القسمة صفر، وتسجل باقي القسمة في كل مرة، ويجوز أن العدد الثنائي هو باقي القسمة مرتبة من اليمين إلى اليسار من الأول إلى الآخر، ويوضح ذلك المثال الآتي:

مثال: اكتب العدد ٧٥ بالنظام الثنائي.

الباقي	
١	$\frac{75}{2}$
١	$\frac{37}{2}$
٠	$\frac{18}{2}$
١	$\frac{9}{2}$
٠	$\frac{4}{2}$
٠	$\frac{2}{2}$
١	$\frac{1}{2}$
إذن $(75)_{10} = (1001011)_2$	

تجارتين

أوجد القيمة بالنظام العشري لكل عدد ثنائي فيما يأتي:

- (١)  $(11111)_2$ ، (٢)  $(10000)_2$ ، (٣)  $(110000011)_2$ ، (٤)  $(101000101)_2$ ، (٥)  $(10000)_2$ ، (٦)  $(1110101)_2$ ، (٧)  $(101101)_2$ ، (٨)  $(111010101)_2$

الانصاف : الثالث المتوسط

الفصل ٦ : كبريات الحدود

التاريخ

الاسم

## ١-٦ تدريبات حل المسألة ضرب وحيديات الحد

٢٢ رقيقة، يُعطى حجم الكرة بالصيغة  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  حيث  $r$  طول نصف قطر الكرة، أوجد حجم الكرة في ثلاث كرات سلة مختلفة على نحو الجدول الآتي:

الكرة	طول نصف القطر (بوصة)	الحجم (بوصة <sup>٣</sup> )
للأطفال	٤	٢١٨
للبنساء	٤,٥	٧٨٢
للرجال	٤,٨	٤٦٢

(٤) رقيقة، يُعطى حجم الكرة بالصيغة  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  حيث  $r$  طول نصف قطر الكرة، أوجد حجم الكرة في ثلاث كرات سلة مختلفة على نحو الجدول الآتي:

(٢) هندسة مدنية: يخطط مهندسين لتطوير عمارة مستعملة مقاطع مستطيلة عرضها ثابت وسماوي ٣ أقدام وطولها متغير. افترض أن طول كل مقطع من، ثم عزز عن مساحة ٤ متابع على صورة وحيدة حد.

١٢  
س  
٣ أقدام

(٣) احتمال: إذا أُلقيت قطعة نقود ٣ مرات، فستحصل على ٣ نتائج محتملة في الجدول الآتي:

النواتج الممكنة
ش ش ش
ك ك ك
ش ك ش
ك ش ك
ش ك ش
ك ش ك
ش ش ك
ك ك ش

ثم إذا أُلقيت قطعة النقود مرتين زيادة على ٣ مرات، فستحصل على  $2 \times 2 \times 2$  نتائج محتملة، ما عدد النواتج الممكنة التي ستحصل عليها إذا أُلقيت قطعة النقود ٤ مرات زيادة على ٥ مرات؟ اكتب الإجابة على الصورة  $٣^٢$ .

الانصاف : الثالث المتوسط

الفصل ٦ : كبريات الحدود





التاريخ

الاسم

(تنهية)

## ٣-٦ تدريبات إعادة التعليم كثيرات الحدود

كثيرات الحدود بالصورة القياسية، عندما تكتب الحدود ذات المتغير الواحد في كثيرة الحدود بالترتيب من أكبرها درجة إلى أصغرها، فإنك تحصل على الصورة القياسية لكثيرات الحدود.

مثال  
اكتب  $4x^3 + 9x^2 - 2x$  بالصورة القياسية، وحدد العامل الرئيس فيها.

الخطوة ١: أوجد درجة كل حد

كثيرة الحدود:  $4x^3 + 9x^2 - 2x$

↓ ↓ ↓

٣ ٢ ١

الدرجة:

الخطوة ٢: اكتب حدود كثيرة الحدود بترتيب تنازلي للدرجات:  $4x^3 - 2x^2 + 9x$  ويكون العامل الرئيس هو ٩.

تمارين

اكتب كل كثيرة حدود فيما يأتي بالصورة القياسية، وحدد العامل الرئيس فيها:

(١)  $5x^5 + 2x^2 + 6x^3 - 9 + 4x^2$  (٢)  $3x^2 - 9 + 2x^3 + 2x + 1$

(٣)  $2x^3 + 3x^2 + 5x + 2x + 1$  (٤)  $4x^2 - 9 + 2x + 1$

(٥)  $2x^3 + 3x^2 + 5x + 2x + 1$  (٦)  $2x^3 - 10 + 2x^2 + 5$

(٧)  $2x^3 - 10 + 2x^2 + 5$  (٨)  $2x^3 - 10 + 2x^2 + 5$

(٩)  $2x^3 - 10 + 2x^2 + 5$  (١٠)  $2x^3 - 10 + 2x^2 + 5$

(١١)  $2x^3 - 10 + 2x^2 + 5$  (١٢)  $2x^3 - 10 + 2x^2 + 5$

(١٣)  $2x^3 - 10 + 2x^2 + 5$  (١٤)  $2x^3 - 10 + 2x^2 + 5$

(١٥)  $2x^3 - 10 + 2x^2 + 5$  (١٦)  $2x^3 - 10 + 2x^2 + 5$

(١٧)  $2x^3 - 10 + 2x^2 + 5$  (١٨)  $2x^3 - 10 + 2x^2 + 5$

(١٩)  $2x^3 - 10 + 2x^2 + 5$  (٢٠)  $2x^3 - 10 + 2x^2 + 5$

(٢١)  $2x^3 - 10 + 2x^2 + 5$  (٢٢)  $2x^3 - 10 + 2x^2 + 5$

(٢٣)  $2x^3 - 10 + 2x^2 + 5$  (٢٤)  $2x^3 - 10 + 2x^2 + 5$

(٢٥)  $2x^3 - 10 + 2x^2 + 5$  (٢٦)  $2x^3 - 10 + 2x^2 + 5$

(٢٧)  $2x^3 - 10 + 2x^2 + 5$  (٢٨)  $2x^3 - 10 + 2x^2 + 5$

(٢٩)  $2x^3 - 10 + 2x^2 + 5$  (٣٠)  $2x^3 - 10 + 2x^2 + 5$

الفصل ٦: كثيرات الحدود

١٥

المصفحة: اثنان المتوسط

التاريخ

الاسم

## ٣-٦ تدريبات إعادة التعليم كثيرات الحدود

درجة كثيرة الحدود، كثيرة الحدود هي وجموع وحدات حد أو مجموع وحدات حد. ثنائية الحد هي مجموع وحدتي حد في أبسط شكل. وثلاثية الحدود هي مجموع ثلاث وحدات حد في أبسط شكل. أما كثيرات الحدود التي تحتوي على حدود تزيد عن ثلاثة، فليس لها اسم خاص. درجة وجموع الحد هي مجموع أسس كل متغيراتها. درجة كثيرة الحدود هي أكبر درجة لأي حد من حدودها، وهي درجة وجموع الحد ذات أكبر درجة.

مثال

حدد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإذا كانت كذلك، فمستقيما إلى: وجموع حد، أو ثنائية حد، أو ثلاثية حدود:

العبارة	هل هي كثيرة حدود؟	وحدية حد / ثنائية حد / ثلاثية حدود	درجة كثيرة الحدود
$3x^2 - 7x + 5$	نعم	ثنائية حد	٢
$2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$	نعم	ثلاثية حدود	٣
$2x^2 - 3x + 4$	نعم	ثنائية حد	٢
$2x^2 - 3x + 4$	نعم	ثنائية حد	٢
$2x^2 - 3x + 4$	نعم	ثنائية حد	٢
$2x^2 - 3x + 4$	نعم	ثنائية حد	٢
$2x^2 - 3x + 4$	نعم	ثنائية حد	٢
$2x^2 - 3x + 4$	نعم	ثنائية حد	٢
$2x^2 - 3x + 4$	نعم	ثنائية حد	٢
$2x^2 - 3x + 4$	نعم	ثنائية حد	٢

تمارين

حدد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإذا كانت كذلك، فمستقيما إلى: وجموع حد، أو ثنائية حد، أو ثلاثية حدود:

(١)  $3x^2 - 7x + 5$  (٢)  $2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$  (٣)  $2x^2 - 3x + 4$  (٤)  $2x^2 - 3x + 4$

(٥)  $2x^2 - 3x + 4$  (٦)  $2x^2 - 3x + 4$  (٧)  $2x^2 - 3x + 4$  (٨)  $2x^2 - 3x + 4$

(٩)  $2x^2 - 3x + 4$  (١٠)  $2x^2 - 3x + 4$  (١١)  $2x^2 - 3x + 4$  (١٢)  $2x^2 - 3x + 4$

(١٣)  $2x^2 - 3x + 4$  (١٤)  $2x^2 - 3x + 4$  (١٥)  $2x^2 - 3x + 4$  (١٦)  $2x^2 - 3x + 4$

(١٧)  $2x^2 - 3x + 4$  (١٨)  $2x^2 - 3x + 4$  (١٩)  $2x^2 - 3x + 4$  (٢٠)  $2x^2 - 3x + 4$

(٢١)  $2x^2 - 3x + 4$  (٢٢)  $2x^2 - 3x + 4$  (٢٣)  $2x^2 - 3x + 4$  (٢٤)  $2x^2 - 3x + 4$

(٢٥)  $2x^2 - 3x + 4$  (٢٦)  $2x^2 - 3x + 4$  (٢٧)  $2x^2 - 3x + 4$  (٢٨)  $2x^2 - 3x + 4$

(٢٩)  $2x^2 - 3x + 4$  (٣٠)  $2x^2 - 3x + 4$  (٣١)  $2x^2 - 3x + 4$  (٣٢)  $2x^2 - 3x + 4$

الفصل ٦: كثيرات الحدود

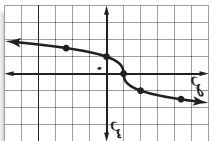
١٤

المصفحة: اثنان المتوسط

### ٣-٦ التدرجات الإثرائية

#### دوال كثيرات الحدود

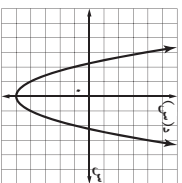
ص	س
$\frac{2}{3}$	$1 - \frac{1}{3}$
٠	$1 -$
١	٠
٢	١
$\frac{4}{3}$	$1 + \frac{1}{3}$



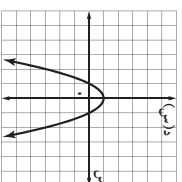
افترض أن المعادلة الخطية:  $3س + ص = 4$  قد حُلَّت بالنسبة للمتغير ص. المعادلة الكائفة هي  $ص = 3س + 4$ ، حيث ص دالة في س، أو  $د(س) = 3س + 4$  لاحظ أن الطرف الأيسر من المعادلة هو ثنائية حد من الدرجة ١

كثيرات الحدود ذات الدرجات الأكبر في س قد تكون دوال أيضًا. فمثلًا  $ص(س) = 3س + ١$  دالة كثيرة حدود من الدرجة ٣. يمكنك تمثيل هذه الدالة بيانيًا مستعملًا جدول أرواح مرتبة، على نحو ما هو مبين سيأتي.

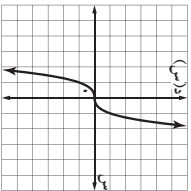
(٢)  $د(س) = 3س - ٥$



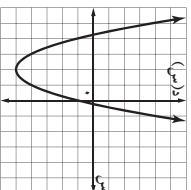
(١)  $د(س) = 3س - ١$



(٤)  $د(س) = 3س^٣$



(٣)  $د(س) = 3س^٣ + ٤س - ١$

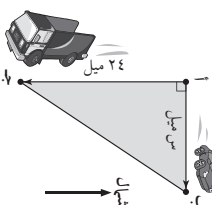


### ٣-٦ تدريبات حل المسألة

#### كثيرات الحدود

(٤) هندسة معيارية: ينتج من رسم منحني دالة كثيرة الحدود  $ص = 3س^٢ + ٣س - ١$  شكل قوس داخل مكعبة تاريخية، حيث س المسافة الأفقية بالأمتار من قاعدة القوس، ص ارتفاع القوس. ما ارتفاع القوس عندما  $ص = ٢٠$ ؟

(٥) قيادة مركبات: غادرت شاحنة وسيارة موقع تقاطع شارعين، واتجهت الشاحنة جنوبًا واتجهت السيارة شرقًا. عندما قطعت الشاحنة ٢٤ ميلًا، أصبحت المسافة بينها وبين السيارة تزيد ٤ أميال. هل أمكان المسافة التي قطعها السيارة شرقًا.



(أ) افترض أن الشاحنة توقفت عند نقطة جـه وتوقفت السيارة عند النقطة ب. اكتب كثيرة حدود بالمسافة القياسية تعبر عن مجموع المسافات التي قطعها الشاحنة والسيارة.

س + ٢٤

(ب) اكتب كثيرة حدود في أبسط صورة للتعبير عن محيط المثلث أ ب جـ.

٤س + ٧٨ + ٢٤ ميلًا

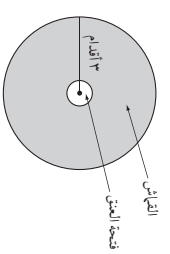
(١) أعداد أولية: تخارون عاتكة وضع قائمة بأكبر عدد يمكن من الأعداد الأولية في مسألة عملاً لطايات فصلها في بحيث الرياضيات، وقد وجدت أنه يمكنها استعمال كثيرة الحدود  $٢ - ن + ٤١$  للحصول على بعض الأعداد الأولية وليس جميعها. فما درجة كثيرة الحدود التي استعمالها عاتكة؟

(٢) حديقة ألعاب: تتقاضي إدارة حديقة ألعاب ٢٥ ريالاً بدل دخول للشخص الواحد، و ١٥ ريالاً إضافيًا من كل لعبة يستعملها. اكتب كثيرة حدود للتعبير عن المجموع الكلي للمبلغ الذي تتقاضاه إدارة الحديقة عن شخص استعمل س ألعاب، ما درجة كثيرة الحدود هذه؟

١٥س + ١٢٥

(٣) أزياء: يحيطام جهاد أغطية نسائية للكفتين لـ صدرين. يبيعها لأحبال تجارية، ويمثل الشكل أدناه تصميم الغطاء. فإذا كان طول نصف قطر فتحة العنق ٢ بوصات، فما مساحة الغطاء بالأقدام المربعة؟

٣٧,٥ قدمًا مربعة



## تنمية

تدريبات إعادة التعليم  
جمع كثيرات الحدود وطرحها

طرح كثيرات الحدود: يمكنك طرح كثيرة الحدود بإضافة نظيرها الجمعي، ولايجاد النظير الجمعي لكثيرة حدود، اكتب معكسر كل حد من الحدود.

$$\text{مثال ١} \quad \text{أوجد ناتج } (3x^2 + 2x - 1) - (x^2 + 3x + 2)$$

الطريقة الأتية:

استعمل النظائر الجمعية لإعادة الكتابة على صورة جمع، ثم خذ الحدود المشابهة.

$$(3x^2 + 2x - 1) - (x^2 + 3x + 2) = (3x^2 + 2x - 1) + (-x^2 - 3x - 2)$$

انضم النظير الجمعي

$$3x^2 + 2x - 1 - x^2 - 3x - 2$$

$$3x^2 + 2x + 3x^2 - 3x - 2$$

$$6x^2 - x - 2$$

$$9x^2 - 2x - 2$$

$$\text{الناتج هو } 9x^2 - 2x - 2$$

انضم النظير الجمعي

تعاودين

أوجد ناتج كل مما يلي:

$$(1) \quad (5x^2 - 3x + 1) + (2x^2 - 4x + 5)$$

$$(2) \quad (3x^2 + 2x - 1) - (x^2 + 3x + 2)$$

$$(3) \quad (4x^2 - 3x + 1) + (-x^2 - 2x + 5)$$

$$(4) \quad (5x^2 - 3x + 1) - (2x^2 - 4x + 5)$$

$$(5) \quad (3x^2 + 2x - 1) - (x^2 + 3x + 2)$$

$$(6) \quad (4x^2 - 3x + 1) + (-x^2 - 2x + 5)$$

$$(7) \quad (5x^2 - 3x + 1) - (2x^2 - 4x + 5)$$

$$(8) \quad (3x^2 + 2x - 1) - (x^2 + 3x + 2)$$

$$(9) \quad (4x^2 - 3x + 1) + (-x^2 - 2x + 5)$$

$$(10) \quad (5x^2 - 3x + 1) - (2x^2 - 4x + 5)$$

$$(11) \quad (3x^2 + 2x - 1) - (x^2 + 3x + 2)$$

$$(12) \quad (4x^2 - 3x + 1) + (-x^2 - 2x + 5)$$

$$(13) \quad (5x^2 - 3x + 1) - (2x^2 - 4x + 5)$$

$$(14) \quad (3x^2 + 2x - 1) - (x^2 + 3x + 2)$$

$$(15) \quad (4x^2 - 3x + 1) + (-x^2 - 2x + 5)$$

$$(16) \quad (5x^2 - 3x + 1) - (2x^2 - 4x + 5)$$

$$(17) \quad (3x^2 + 2x - 1) - (x^2 + 3x + 2)$$

$$(18) \quad (4x^2 - 3x + 1) + (-x^2 - 2x + 5)$$

$$(19) \quad (5x^2 - 3x + 1) - (2x^2 - 4x + 5)$$

$$(20) \quad (3x^2 + 2x - 1) - (x^2 + 3x + 2)$$

$$(21) \quad (4x^2 - 3x + 1) + (-x^2 - 2x + 5)$$

$$(22) \quad (5x^2 - 3x + 1) - (2x^2 - 4x + 5)$$

$$(23) \quad (3x^2 + 2x - 1) - (x^2 + 3x + 2)$$

$$(24) \quad (4x^2 - 3x + 1) + (-x^2 - 2x + 5)$$

## تنمية

تدريبات إعادة التعليم  
جمع كثيرات الحدود وطرحها

جمع كثيرات الحدود: يتم جمع كثيرتي حدود بجمع الحدود المشابهة، ويمكنك تجميع الحدود المشابهة مستعملًا الطريقة الأتية أو الرأسية. الحدود المشابهة هي وحيدات حدًا أو أكثر متشابهة أو تختلف فقط بعلاماتها، مثل  $3x^2$ ،  $-5x^2$  أو  $2x^2$ ،  $8x^2$ .

$$\text{مثال ١} \quad \text{أوجد ناتج } (5x^2 + 3x + 2) + (3x^2 + 2x + 1)$$

بالطريقة الرأسية.

$$5x^2 + 3x + 2 \quad + \quad 3x^2 + 2x + 1$$

$$8x^2 + 5x + 3$$

$$11x^2 + 7x + 3$$

$$14x^2 + 9x + 4$$

$$17x^2 + 11x + 5$$

$$20x^2 + 13x + 6$$

$$23x^2 + 15x + 7$$

$$26x^2 + 17x + 8$$

$$29x^2 + 19x + 9$$

$$32x^2 + 21x + 10$$

$$35x^2 + 23x + 11$$

$$38x^2 + 25x + 12$$

$$41x^2 + 27x + 13$$

$$44x^2 + 29x + 14$$

$$47x^2 + 31x + 15$$

$$50x^2 + 33x + 16$$

$$53x^2 + 35x + 17$$

$$56x^2 + 37x + 18$$

$$59x^2 + 39x + 19$$

$$62x^2 + 41x + 20$$

$$65x^2 + 43x + 21$$

$$68x^2 + 45x + 22$$

$$71x^2 + 47x + 23$$

$$74x^2 + 49x + 24$$

$$77x^2 + 51x + 25$$

$$80x^2 + 53x + 26$$

$$83x^2 + 55x + 27$$

$$86x^2 + 57x + 28$$

$$89x^2 + 59x + 29$$

$$92x^2 + 61x + 30$$

$$95x^2 + 63x + 31$$

$$98x^2 + 65x + 32$$

$$101x^2 + 67x + 33$$

$$104x^2 + 69x + 34$$

$$107x^2 + 71x + 35$$

## تنمية

تدريبات إعادة التعليم  
جمع كثيرات الحدود وطرحها

جمع كثيرات الحدود: يتم جمع كثيرتي حدود بجمع الحدود المشابهة، ويمكنك تجميع الحدود المشابهة مستعملًا الطريقة الأتية أو الرأسية. الحدود المشابهة هي وحيدات حدًا أو أكثر متشابهة أو تختلف فقط بعلاماتها، مثل  $3x^2$ ،  $-5x^2$  أو  $2x^2$ ،  $8x^2$ .

$$\text{مثال ١} \quad \text{أوجد ناتج } (5x^2 + 3x + 2) + (3x^2 + 2x + 1)$$

بالطريقة الرأسية.

$$5x^2 + 3x + 2 \quad + \quad 3x^2 + 2x + 1$$

$$8x^2 + 5x + 3$$

$$11x^2 + 7x + 3$$

$$14x^2 + 9x + 4$$

$$17x^2 + 11x + 5$$

$$20x^2 + 13x + 6$$

$$23x^2 + 15x + 7$$

$$26x^2 + 17x + 8$$

$$29x^2 + 19x + 9$$

$$32x^2 + 21x + 10$$

$$35x^2 + 23x + 11$$

$$38x^2 + 25x + 12$$

$$41x^2 + 27x + 13$$

$$44x^2 + 29x + 14$$

$$47x^2 + 31x + 15$$

$$50x^2 + 33x + 16$$

$$53x^2 + 35x + 17$$

$$56x^2 + 37x + 18$$

$$59x^2 + 39x + 19$$

$$62x^2 + 41x + 20$$

$$65x^2 + 43x + 21$$

$$68x^2 + 45x + 22$$

$$71x^2 + 47x + 23$$

$$74x^2 + 49x + 24$$

$$77x^2 + 51x + 25$$

$$80x^2 + 53x + 26$$

$$83x^2 + 55x + 27$$

$$86x^2 + 57x + 28$$

$$89x^2 + 59x + 29$$

$$92x^2 + 61x + 30$$

$$95x^2 + 63x + 31$$

$$98x^2 + 65x + 32$$

$$101x^2 + 67x + 33$$

$$104x^2 + 69x + 34$$

$$107x^2 + 71x + 35$$

التاريخ \_\_\_\_\_

الاسم \_\_\_\_\_

## ٤-٦ التدرجات الإثر الأية

حساب المساحة وحساب الحجم لأشكال مرتبطة بالدائرة

حجم الخروط الدائري القائم

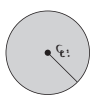
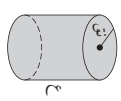
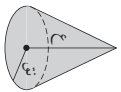
$$\frac{1}{3} \pi r^2 h$$

حجم الأسطوانة الدائرية القائمة

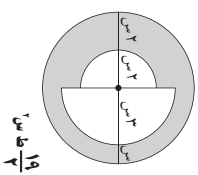
$$\pi r^2 h$$

مساحة الدائرة

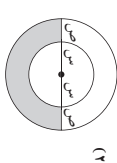
$$\pi r^2$$



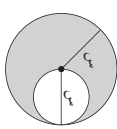
اكتب عبارة جبرية تمثل مساحة المنطقة المظللة فيما يأتي: (تذكر أن طول قطر الدائرة =  $2r$  طول نصف قطرها)



(١)



(٢)

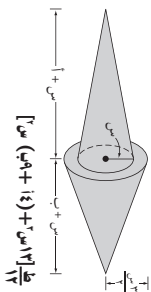


(٣)

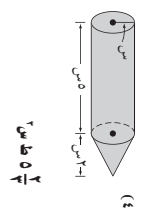
$$\frac{19}{4} \pi r^2$$

$$\pi r^2 - \pi (2r)^2 = -3\pi r^2$$

اكتب عبارة جبرية تمثل الحجم الكلي لجسم فيما يأتي:

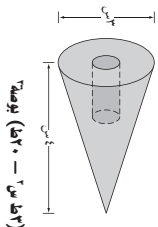


(٤)

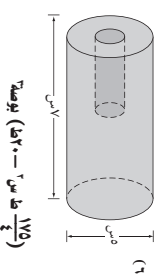


(٥)

اجري كل جسم فيما يأتي على تيب أسطوان طول نصف قطره وارتفاعه ه بوصات، أوجد كل حجم:



(٦)



(٧)

الفصل ٦، كثيرات الحدود

٢١

المصف: انتانت التوسط

التاريخ \_\_\_\_\_

الاسم \_\_\_\_\_

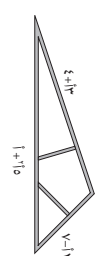
## ٤-٦ تدريبات حل المسألة

جمع كثيرات الحدود وطرحها

١) بناءً، أوجد أسط عبارة لمحيط دعامة السقف المثالية

في الشكل أدناه:

$$2 - 1x + 10$$



٢) هنتسه، اكتب كثيرة حدود تمثل مساحة المربع الكبير

في الشكل أدناه:

$$2x^2 + 12x + 10$$



١) اكتب كثيرة حدود للتعبير عن المساحة السطحية للأسطوانتين معاً.

$$4\pi r^2 + 4\pi r^2 h$$

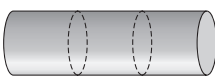
ب) أوجد المساحة السطحية للأسطوانتين إذا كان ارتفاع كل منهما ٢ م، وطول نصف قطر قاعدة كل منهما ٠.٥ م، مقترفاً  $\pi = 3.14$ .

$$215.97$$

ج) إذا كانت تغطية الأسطوانات بالمادة العازلة

القائمة للارتفاع  $h$  على الأسطوانات مرتبة فوق بعضها رأسيًا في مجموعات ثلاثية كما في الشكل أدناه، إذا كان ارتفاع كل أسطوانة  $h$ ، وطول نصف قطر قاعدتها  $h$ ، فاكتب كثيرة حدود نصف المساحة السطحية لكل مجموعة.

$$6\pi h^2 + 4\pi h^2$$



٢٠

المصف: انتانت التوسط

١) مغلفات، تنتج شركة تجهيزات مكتبية، مغلفات وثائق بأحجام مختلفة، طول كل منها يزيد ٤ سم على عرضها دائرة. اكتب عبارة كثيرة حدود لإيجاد محيط أي من هذه المغلفات.  $8 + 5x^2$

(تنمية)

## 5-6 تدريبات إعادة التعليم

ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود

حل معادلات تتضمن كثيرة حدود: تحوذي العديد من المعادلات على كثيرات حدود ويتبين جميعها، أو ضربها قبل حل المعادلة، ونستطيع استعمال خاصية التوزيع للحل.

$$4(2-n) + (2-n)^2 = 5n + (2-n) \quad \text{مثال}$$

$$19 + (2-n)^2 = 5n + (2-n) \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$19 + 8 - 4n + n^2 = 5n + 2 - n \quad \text{خاصية التوزيع}$$

$$27 = 4n - n^2 \quad \text{اجمع الحدود المتشابهة}$$

$$0 = n^2 - 4n + 27 \quad \text{أضف 2n إلى كلا الطرفين}$$

$$0 = (n-3)(n-9) \quad \text{أضف 8 إلى كلا الطرفين}$$

$$n = 3 \quad \text{انقسم كلا الطرفين على 9}$$

الحل هو 3

تقاربتين

حل كلٍّ من المعادلات الآتية:

$$1) \quad 2(2-3)^2 = 3(2+1) - 3 \quad 2) \quad 3(2-5) = 2(3-1) + 4$$

$$3) \quad 2(3-5) = 2(3+1) - 4 \quad 4) \quad 2(3+1) = 2(3-5) + 18$$

$$5) \quad 4(1+2) - (1+2) = 11 - (1+2) \quad 6) \quad 2(2+3) = 2(2+4) - (4-2)$$

$$7) \quad 2(2-3) - (3-2) = 8 - (2-2) \quad 8) \quad 1(2-2) = 2(2-2) + 10$$

$$9) \quad 3(2-1) = 3(2+1) - 11 \quad 10) \quad 2(2+3) = 2(2+3) - (1+2)$$

$$11) \quad 3(2-1) - (2-1) = 4 + (1+2) \quad 12) \quad 3(2+3) = (2+3) - 10$$

$$13) \quad 3(2-1) - (2-1) = 5(2-1) - (1-2) \quad 14) \quad 2(2+3) = (2+3) - 10$$

$$15) \quad 3(2+1) + (2+1) = 5(2-1) - (2-1) \quad 16) \quad 2(2+3) = 2(2+3) - (2+1)$$

انضم إلى 6، كثيرات الحدود

23

انضم إلى 6، كثيرات الحدود

## 5-6 تدريبات إعادة التعليم

ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود

ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود: يمكنك استعمال خاصية التوزيع لإيجاد ناتج ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود. يمكنك الضرب أولاً أو رأسياً. قد يتكرر ناتج الضرب من حدود متشابهة أحياناً، يمكنك تبسيط الناتج بتجميع الحدود المتشابهة.

$$2(4x^2 + 5x) - (2x^2 + 3x) = 5x + 6x^2 \quad \text{مثال 1}$$

$$8x^2 + 10x - 2x^2 - 3x = 5x + 6x^2 \quad \text{تبسط}$$

$$6x^2 + 7x = 6x^2 + 7x \quad \text{الطريقة الأفقية:}$$

$$= 6x^2 + 7x \quad \text{الطريقة الرأسية:}$$

$$= 6x^2 + 7x \quad \text{الطريقة الرأسية:}$$

$$= 6x^2 + 7x \quad \text{الطريقة الرأسية:}$$

$$= 6x^2 + 7x \quad \text{الطريقة الرأسية:}$$

$$= 6x^2 + 7x \quad \text{الطريقة الرأسية:}$$

$$= 6x^2 + 7x \quad \text{الطريقة الرأسية:}$$

$$= 6x^2 + 7x \quad \text{الطريقة الرأسية:}$$

$$= 6x^2 + 7x \quad \text{الطريقة الرأسية:}$$

$$= 6x^2 + 7x \quad \text{الطريقة الرأسية:}$$

$$= 6x^2 + 7x \quad \text{الطريقة الرأسية:}$$

$$= 6x^2 + 7x \quad \text{الطريقة الرأسية:}$$

$$= 6x^2 + 7x \quad \text{الطريقة الرأسية:}$$

$$= 6x^2 + 7x \quad \text{الطريقة الرأسية:}$$

$$= 6x^2 + 7x \quad \text{الطريقة الرأسية:}$$

$$= 6x^2 + 7x \quad \text{الطريقة الرأسية:}$$

$$= 6x^2 + 7x \quad \text{الطريقة الرأسية:}$$

$$= 6x^2 + 7x \quad \text{الطريقة الرأسية:}$$

$$= 6x^2 + 7x \quad \text{الطريقة الرأسية:}$$

$$= 6x^2 + 7x \quad \text{الطريقة الرأسية:}$$

$$= 6x^2 + 7x \quad \text{الطريقة الرأسية:}$$

$$= 6x^2 + 7x \quad \text{الطريقة الرأسية:}$$

$$= 6x^2 + 7x \quad \text{الطريقة الرأسية:}$$

$$= 6x^2 + 7x \quad \text{الطريقة الرأسية:}$$

$$= 6x^2 + 7x \quad \text{الطريقة الرأسية:}$$

$$= 6x^2 + 7x \quad \text{الطريقة الرأسية:}$$

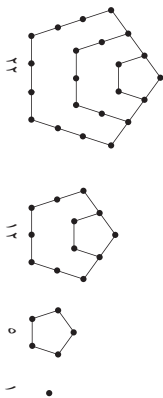
انضم إلى 6، كثيرات الحدود

23

انضم إلى 6، كثيرات الحدود

## 5-6 التدرجات الإثرائية أعداد تشكيفية

تسمى الأعداد أدناه أعداداً خامسة، وهي أعداد النقاط أو الأوز التي يمكنك ترتيبها على صورة أشكال خامسة.



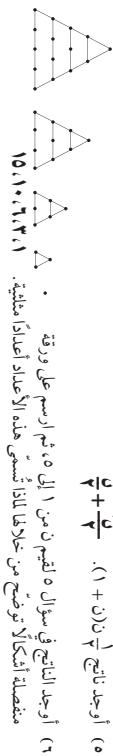
$$(1) \text{ أوجد ناتج } \frac{1}{2}n(n+1) \text{ لـ } n=10.$$

$$(2) \text{ أوجد الناتج في سؤال 1 لقيم } n \text{ من } 1 \text{ إلى } 4.$$

$$(3) \text{ ماذا تلا حظ؟ اشرح الناتج في أول أربعة أعداد خامسة}$$

$$(4) \text{ أوجد الأعداد الخمسة الستة التالية. } 145, 117, 92, 70, 51, 35$$

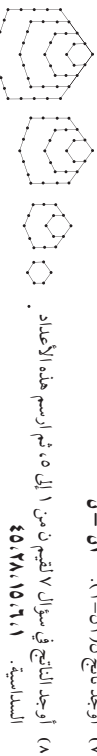
$$(5) \text{ أوجد ناتج } \frac{1}{2}n(n+1) \text{ لـ } n=10.$$



$$(1) \text{ أوجد الناتج في سؤال 5 لقيم } n \text{ من } 1 \text{ إلى } 5، \text{ ثم ارسم على ورقة } n \text{ نقطة}$$

$$(2) \text{ متصلة الأشكال أو وضع من خلالها إذا تسمى هذه الأعداد أعداداً مربعة. } 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100$$

$$(3) \text{ أوجد ناتج } n(n-1) \text{ لـ } n=10.$$



$$(4) \text{ أوجد الناتج في سؤال 7 لقيم } n \text{ من } 1 \text{ إلى } 5، \text{ ثم ارسم هذه الأعداد}$$

$$(5) \text{ المسلسلة. } 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100$$

(6) أوجد أول 5 أعداد مربعة، ثم اكتب صيغة العمارة العامة لأي عدد مربع.  $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100$

الأعداد التي استكشفتها أعلاه هي أعداد تشكيفية في المستوى، لأنه يمكنك ترتيبها لعمل أشكال هندسية. يمكنك استكشاف أعداد تشكيفية لاجسام أيضاً.

(7) إذا زُيِّت 10 برتقالات على شكل هرم ثلاثي، فستحصل على عدد تشكيلي لجسم رباعي السطح. ما عدد الطبقات في الهرم؟ كم برتقالة توجد في الطبقات السفلى؟ **طبقات: 3**

(8) احسب قيمة العمارة  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$  لـ  $n=10$  لإيجاد أول خمسة أعداد تشكيلي جسميات رباعية السطح.  $1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000$

## 5-6 تدريبات حل المسألة ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود

(1) نظرية الأعداد: بعض مجموع أول  $n$  من الأعداد  $1$   $2$   $3$   $4$   $5$   $6$   $7$   $8$   $9$   $10$   $11$   $12$   $13$   $14$   $15$   $16$   $17$   $18$   $19$   $20$   $21$   $22$   $23$   $24$   $25$   $26$   $27$   $28$   $29$   $30$   $31$   $32$   $33$   $34$   $35$   $36$   $37$   $38$   $39$   $40$   $41$   $42$   $43$   $44$   $45$   $46$   $47$   $48$   $49$   $50$   $51$   $52$   $53$   $54$   $55$   $56$   $57$   $58$   $59$   $60$   $61$   $62$   $63$   $64$   $65$   $66$   $67$   $68$   $69$   $70$   $71$   $72$   $73$   $74$   $75$   $76$   $77$   $78$   $79$   $80$   $81$   $82$   $83$   $84$   $85$   $86$   $87$   $88$   $89$   $90$   $91$   $92$   $93$   $94$   $95$   $96$   $97$   $98$   $99$   $100$

$$\frac{1}{2}n(n+1) = 78$$

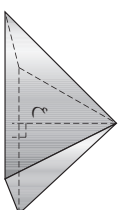
سوق: ذهبت صفيحة إلى سوق الخضار، واشترت بانديجان وبطاطا بمبلغ ٤٦ ريالاً. فإذا كان ثمن كل جرام البانديجان ٣ ريال، وكان عدد كيلوجرامات البطاطا ٥ ريال، وكان عدد كيلوجرامات البانديجان، فكتب مزيداً ٤ على عدد كيلوجرامات البانديجان، فكتب معادله، ثم حلها لتجد عدد الكيلوجرامات التي اشترتها صفيحة من كل نوع.

$$41 = (3x) + (4y) \text{ لـ } x=1, y=10$$

١٠ بطاطا

(2) هندسة: أثبت بعض المعلم التكرارية على شكل أهرامات قائمة قاعدتها مستطيلة، ويمكنك إيجاد حجم كل هرم ح بحسب ثلث قاعدتها مسطحة، وقاعدته  $h$  في ارتفاعه  $h$ .

مساحة القاعدة المستطيلة  $l \times w$  المعلم التكرارية معادلة بالعمارة  $l \times w \times h = 12$



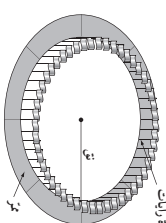
(3) اكتب معادلة كثيرة حدود للتعبير عن حجم الهرم ح، إذا كان ارتفاعه  $h$  أمتار.

$$V = \frac{1}{3}lwh = 20$$

(ب) أوجد حجم الهرم عندما  $h=12$  م

$$V=144$$

$$11(2x^2) = (4x^2 + 4) \text{ لـ } x=1$$



(4) ساحات: بين الشكل أدناه دائرة من خمسين زاوية محيطه  $2\pi$  مترًا مساحيًا. إذا أنشئ عمود  $h$  م حول دائرة الريبات، وكان المحيط الخارجي للمسم  $1$  م،  $1$  م مرة من محيط دائرة الريبات، فكتب معادلة بدلالة  $h$  تبين العلاقة بين المحيط الخارجي للمسم ومحيط دائرة الريبات، ثم حلها، وأوجد طول نصف قطر دائرة الريبات. تذكر أن صيغة محيط الدائرة هي  $2\pi r$ .

(تنمية)

## ٦-٦ تدريبات إعادة التعليم

### ضرب كثيرات الحدود

ضرب كثيرات الحدود المحدود: يمكنك استعمال خاصية التوزيع لإيجاد ناتج ضرب أي كثيرتي حدود.

$$(٥ + ٣س)(٢ + ٤س - ٤ص) = ١٠ + ١٢س + ٢٠س٢ - ٢٠ص - ١٢صس - ٤٠صص$$

مثال

$$(٥ + ٣س)(٢ + ٤س - ٤ص) = ١٠ + ١٢س + ٢٠س٢ - ٢٠ص - ١٢صس - ٤٠صص$$

$$١٠ + ١٢س + ٢٠س٢ - ٢٠ص - ١٢صس - ٤٠صص$$

$$١٠ + ١٢س + ٢٠س٢ - ٢٠ص - ١٢صس - ٤٠صص$$

$$١٠ + ١٢س + ٢٠س٢ - ٢٠ص - ١٢صس - ٤٠صص$$

تعاريف

أوجد ناتج الضرب في كل ما يأتي:

$$(١) (٣س + ٢)(٢س - ٤ص + ١) = ٦س٢ - ٤صس + ٣س - ٨ص + ٢$$

$$(٢) (٣س + ٢)(٢س + ٤ص - ١) = ٦س٢ + ٤صس - ٣س - ٨ص + ٢$$

$$(٣) (٣س - ٢)(٢س + ٤ص - ١) = ٦س٢ + ٤صس - ٣س - ٨ص + ٢$$

$$(٤) (٣س - ٢)(٢س + ٤ص - ١) = ٦س٢ + ٤صس - ٣س - ٨ص + ٢$$

$$(٥) (٣س - ٢)(٢س + ٤ص - ١) = ٦س٢ + ٤صس - ٣س - ٨ص + ٢$$

$$(٦) (٣س - ٢)(٢س + ٤ص - ١) = ٦س٢ + ٤صس - ٣س - ٨ص + ٢$$

$$(٧) (٣س - ٢)(٢س + ٤ص - ١) = ٦س٢ + ٤صس - ٣س - ٨ص + ٢$$

$$(٨) (٣س - ٢)(٢س + ٤ص - ١) = ٦س٢ + ٤صس - ٣س - ٨ص + ٢$$

$$(٩) (٣س - ٢)(٢س + ٤ص - ١) = ٦س٢ + ٤صس - ٣س - ٨ص + ٢$$

$$(١٠) (٣س - ٢)(٢س + ٤ص - ١) = ٦س٢ + ٤صس - ٣س - ٨ص + ٢$$

$$(١١) (٣س - ٢)(٢س + ٤ص - ١) = ٦س٢ + ٤صس - ٣س - ٨ص + ٢$$

الانصاف : انتاج التلخيص

٢٧

## ٦-٦ تدريبات إعادة التعليم

### ضرب كثيرات الحدود

ضرب ثنائيي حدود: يستعمل خاصية التوزيع لضرب ثنائيي حدود، ويمكنك ضرب ثنائيي حدود أفقياً أو رأسياً، والطريقة المفيدة لبيع الحدود في الضرب هي استعمال طريقة التوزيع بالترتيب المبتدئة في مثال ٣.

$$(٥ + ٣س)(٢ + ٤س - ٤ص) = ١٠ + ١٢س + ٢٠س٢ - ٢٠ص - ١٢صس - ٤٠صص$$

مثال

$$(٥ + ٣س)(٢ + ٤س - ٤ص) = ١٠ + ١٢س + ٢٠س٢ - ٢٠ص - ١٢صس - ٤٠صص$$

$$١٠ + ١٢س + ٢٠س٢ - ٢٠ص - ١٢صس - ٤٠صص$$

$$١٠ + ١٢س + ٢٠س٢ - ٢٠ص - ١٢صس - ٤٠صص$$

$$١٠ + ١٢س + ٢٠س٢ - ٢٠ص - ١٢صس - ٤٠صص$$

تعاريف

أوجد ناتج الضرب في كل ما يأتي:

$$(١) (٣س + ٢)(٢س - ٤ص + ١) = ٦س٢ - ٤صس + ٣س - ٨ص + ٢$$

$$(٢) (٣س + ٢)(٢س + ٤ص - ١) = ٦س٢ + ٤صس - ٣س - ٨ص + ٢$$

$$(٣) (٣س - ٢)(٢س + ٤ص - ١) = ٦س٢ + ٤صس - ٣س - ٨ص + ٢$$

$$(٤) (٣س - ٢)(٢س + ٤ص - ١) = ٦س٢ + ٤صس - ٣س - ٨ص + ٢$$

$$(٥) (٣س - ٢)(٢س + ٤ص - ١) = ٦س٢ + ٤صس - ٣س - ٨ص + ٢$$

$$(٦) (٣س - ٢)(٢س + ٤ص - ١) = ٦س٢ + ٤صس - ٣س - ٨ص + ٢$$

$$(٧) (٣س - ٢)(٢س + ٤ص - ١) = ٦س٢ + ٤صس - ٣س - ٨ص + ٢$$

$$(٨) (٣س - ٢)(٢س + ٤ص - ١) = ٦س٢ + ٤صس - ٣س - ٨ص + ٢$$

$$(٩) (٣س - ٢)(٢س + ٤ص - ١) = ٦س٢ + ٤صس - ٣س - ٨ص + ٢$$

$$(١٠) (٣س - ٢)(٢س + ٤ص - ١) = ٦س٢ + ٤صس - ٣س - ٨ص + ٢$$

$$(١١) (٣س - ٢)(٢س + ٤ص - ١) = ٦س٢ + ٤صس - ٣س - ٨ص + ٢$$

الانصاف : انتاج التلخيص

٢٦

## ٦-٦ التدرجات الإثرائية

### مطلبت بإسكان

يسمى ترتيب الأعداد كما في الشكل الجاوه، "مطلبت بإسكان".  
وقد نُشر هذا المثلث أول مرة عام ١٦٦٥، ولكنه كان  
مسروقاً قبل ذلك بمئات السنين قبله.

١	١	١	١	١
١	٢	١		
١	٣	٣	١	
١	٤	٦	٤	١

١) احسب كل عدد في المثلث بجمع عددين، ما العددين اللذان يُجمعا للحصول على ٦ في الصف الخامس؟  
٣٣

٢) صف كيف تحصل على الصف السادس في مثلت بإسكان.

أول عدد ١ وآخر عدد ١٠، احسب باقي ١ + ٤ + ٤ + ٦ + ٦ + ٦ + ٤ + ١، لإيجاد الأعداد الأخرى.

٣) اكتب أعداد المثلث في الصفوف من ٦ إلى ١٠.

١	٥	١٠	١٥	٢٠	٢٥	٣٠	٣٥	٤٠	٤٥	٥٠
١	٦	١٥	٢٥	٣٥	٤٥	٥٦	٦٦	٧٦	٨٦	٩٦
١	٧	٢١	٣٥	٤٩	٦٣	٧٦	٩٠	١٠٤	١١٨	١٣٢
١	٨	٢٨	٥٦	٩٤	١٣٢	١٧٠	٢٠٨	٢٤٦	٢٨٤	٣٢٢
١	٩	٣٦	٨٤	١٣٦	١٩٦	٢٦٤	٣٣٢	٤٠٠	٤٦٨	٥٣٦

اضرب لإيجاد المفكوك في كل ما يأتي:

٤)  $(١ + ب) (٢ + ب + ١)$

٥)  $(١ + ب) (٢ + ب + ١) (٣ + ب + ٢ + ١)$

٦)  $(١ + ب) (٢ + ب + ١) (٣ + ب + ٢ + ١) (٤ + ب + ٣ + ٢ + ١)$

والآن قارن معاملات نواتج الضرب في الأسئلة ٤-٦ مع مثلت بإسكان.

٧) أوجد العلاقة بين مفكوك  $(١ + ب) (٢ + ب + ١)$  ومثلت بإسكان.

مميزات حدود المفكوك موجودة في الصفوف ١٠ من مثلت بإسكان.

٨) اكتب مفكوك  $(١ + ب) (٢ + ب + ١)$  مستخدماً مثلت بإسكان.

$١ + ١٢ب + ١٥ب^٢ + ١٠ب^٣ + ٦ب^٤ + ٢ب^٥$

٢٩

## ٦-٦ تدرجات حل المسألة

### ضرب كثيرات الحدود

١) مسح، يوجد في أحد المساح قاعة، يلموس المشاهدين، فيها ٣٠ رجل + ٨ صفوف، وفي كل صف ٤ - ١ مقعد.  
اكتب عبارة تمثل العدد الكلي للمقاعد.

$١٢٠ + ٢٩٠ = ٤١٠$

٢) اكتب ناتج الضرب، أوجد حاصل ضرب ناتج الطرح في ناتج الضرب اللتين كتبتهما. اشرح مربع العدد الأصلي من حاصل الضرب. الناتج هو ٤ - ٤، دائماً، بين خطوات التوصل إلى العدد المطلوب مستخدماً كثيرات الحدود ثم أوجد.

$(٢-س)(٢+س) = ٤-س^٢$

$٢س - ٢س^٢ + ٢س + ٤ = ٤-س^٢$

$٤-س^٢ = ٤-س^٢$

٣) هن، يحفظ المتحف الذي يعمل فيه سلطان لعمل جدارية حافظ مستخدماً لوحة قديمة، أراد سلطان أن يرسم إطاراً من الدهان حول هذه الجدارية. يريد طول الجدارية ٥ أقدام على عرضها، وسيكون عرض الإطار قديماً على جميع جوانب الجدارية. فإذا كان لديه من الدهان ما يكفي لتغطية ١٠٠ قدم مربعة من المناطق، فما أكبر بُعدين يمكن للجدارية؟

$٢٠ + ١٨س + ٤$

٤) اكتب عبارة تمثل مساحة الجدارية.



١)  $(س + س) (س + س)$

٢)  $(س + س) (س + س) - (س + س) (س + س)$

٣)  $(س + س) (س + س) - (س + س) (س + س)$

٤) اكتب عبارة تمثل مساحة الإطار.

٥) اكتب معادلة أكبر بُعدين يمكن للجدارية، ثم حلها.

$٨ أقدام ١٢ × ١٢ قدمًا$

$٨ أقدام ١٢ × ١٢ قدمًا$

٢٨

التاريخ

الاسم

(تنمية)

### ٧-٦ تدريبات إعادة التعليم

حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود

نتائج ضرب مجموع حددين في الفرق بينهما؛ توجد قاعدة أيضًا لإيجاد ناتج ضرب مجموع حددين في الفرق بينهما  $(ا + ب)(ا - ب) = ا^2 - ب^2$ ، وهي مربع أ ناقص مربع ب.

ناتج ضرب مجموع حددين في الفرق بينهما	$(ا + ب)(ا - ب) = ا^2 - ب^2$
--------------------------------------	------------------------------

مثال أوجد ناتج  $(هس + اوس)(هس - اوس)$ .

نتج ضرب المجموع في الفرق

$$(هس + اوس)(هس - اوس) = هس^2 - اوس^2 = 1$$

نتج الضرب هو  $هس^2 - اوس^2$

تعمارين

أوجد ناتج كل مما يأتي:

- |                           |                           |                           |                         |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------|-------------------------|
| $(٣) (٤س - ٥) (٤س + ٥)$   | $(٢) (٧ - ٧)(٢ - ٧)$      | $(١) (س - ٤)(س + ٤)$      | $(٤) (١ - ٢س)(١ + ٢س)$  |
| $٢٥ - ٢٥١٦$               | $٧ - ٧$                   | $١٦ - ١٦$                 | $١ - ٤س^٢$              |
| $(١) (٥ + م)(٥ - م)$      | $(٥) (٧ + هـ)(٧ - هـ)$    | $(٨) (٢ - ٣)(٢ + ٣)$      | $(٧) (٣ - ٤)(٣ + ٤)$    |
| $٢٥ - م^٢$                | $٤٩ - هـ^٢$               | $٩ - ٩$                   | $١٠ - ١٦$               |
| $(٩) (س - ص)(س + ص)$      | $(٨) (٣ + ٥)(٣ - ٥)$      | $(١١) (س + ٤)(س - ٤)$     | $(١٠) (ص - ٤)(ص + ٤)$   |
| $ص^٢ - ٩س^٢$              | $٩ - ٢٥$                  | $١٤ - ١٤$                 | $ص^٢ - ١٦$              |
| $(١٢) (٣ب - ١٣)(٣ب + ١٣)$ | $(١١) (٤س + ٨)(٤س - ٨)$   | $(١٤) (١ - ٢س)(١ + ٢س)$   | $(١٣) (٨ - ٣ص)(٨ + ٣ص)$ |
| $١٦٩ - ١٦٩$               | $١٦٤ - ١٦٤$               | $١ - ٤س^٢$                | $٦٤ - ١٦٩$              |
| $(١٥) (٣م - ٥)(٥ + ٣م)$   | $(١٤) (س + ١)(س - ١)$     | $(١٧) (٢ + ٣س)(٢ - ٣س)$   | $(١٦) (٨ - ٣ص)(٨ + ٣ص)$ |
| $١٥ - ٩م$                 | $١ - ١$                   | $٤ - ٤$                   | $٦٤ - ١٦٩$              |
| $(١٨) (٢ج + س)(٢ج - س)$   | $(١٧) (هـ - ٣ك)(٣ك + هـ)$ | $(١١) (٤س + ١١)(٤س - ١١)$ | $(١١) (٢ - ٣س)(٢ + ٣س)$ |
| $٤ - ٤س$                  | $١١ - ١١$                 | $١٤٤ - ١٢١$               | $٤ - ٤$                 |
| $(١٩) (٣س - ٢ص)(٣س + ٢ص)$ | $(٢٠) (٧ - ٥)(٧ + ٥)$     | $(٢١) (٢س - ٤ص)(٢س + ٤ص)$ | $(٢٠) (٢ - ٣س)(٢ + ٣س)$ |
| $٩س^٢ - ٤ص^٢$             | $٧٥ - ٢٥$                 | $٤س^٢ - ١٦ص^٢$            | $٤ - ٤$                 |

الفصل ٦، كثيرات الحدود

٣١

الصفحة: الثالث المتوسط

التاريخ

الاسم

### ٧-٦ تدريبات إعادة التعليم

حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود

مربع مجموع حددين ومربع الفرق بينهما؛ بعض أنواع ثنائيات الحد لها ناتج ضرب يتبع قاعدة معينة؛ إحداهما قاعدة مربع مجموع حددين، والثانية قاعدة مربع الفرق بين حددين.

مربع مجموع حددين	$(ا + ب)^2 = ا^2 + ٢اب + ب^2$
مربع الفرق بين حددين	$(ا - ب)^2 = ا^2 - ٢اب + ب^2$

مثال ١ أوجد ناتج  $(٤ + ١٣)(٤ + ١٣)$

$$(٤ + ١٣)(٤ + ١٣) = ٤ + ١٠٤ + ١٠٤ + ١٦٩ = ٣٢١$$

استعمل قاعدة مربع مجموع حددين؛  $ا = ٤$ ،  $ب = ١٣$

نتج الضرب هو  $٣٢١$

تعمارين

أوجد ناتج كل مما يأتي:

- |                           |                           |                           |                         |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------|-------------------------|
| $(٣) (٤س - ٥) (٤س + ٥)$   | $(٢) (٣٣ + ٤)(٣٣ - ٤)$    | $(١) (س - ٢)(س + ٢)$      | $(٤) (١ - ٢س)(١ + ٢س)$  |
| $٢٥ - ٢٥١٦$               | $١٦٩ + ٣٦٤$               | $١٦ - ١٦$                 | $١ - ٤س^٢$              |
| $(١) (٥ + م)(٥ - م)$      | $(٥) (٣٣ + ٤)(٣٣ - ٤)$    | $(٨) (٣ - ٤)(٣ + ٤)$      | $(٧) (٣ + ٤)(٣ - ٤)$    |
| $٢٥ - م^٢$                | $٣٦٤ + ١٦٩$               | $٩ - ١٦$                  | $١٠ - ١٦$               |
| $(٩) (س - ص)(س + ص)$      | $(١١) (٤س + ٨)(٤س - ٨)$   | $(١٤) (١ - ٢س)(١ + ٢س)$   | $(١٣) (٨ - ٣ص)(٨ + ٣ص)$ |
| $ص^٢ - ٩س^٢$              | $١٦٤ - ١٦٤$               | $١ - ٤س^٢$                | $٦٤ - ١٦٩$              |
| $(١٢) (٣ب - ١٣)(٣ب + ١٣)$ | $(١١) (٤س + ١١)(٤س - ١١)$ | $(١٤) (٢س - ٤ص)(٢س + ٤ص)$ | $(١٣) (٢ - ٣س)(٢ + ٣س)$ |
| $١٦٩ - ١٦٩$               | $١٤٤ - ١٢١$               | $٤س^٢ - ١٦ص^٢$            | $٤ - ٤$                 |
| $(١٥) (٣م - ٥)(٥ + ٣م)$   | $(١٤) (س + ١)(س - ١)$     | $(١٧) (٢ + ٣س)(٢ - ٣س)$   | $(١٦) (٨ - ٣ص)(٨ + ٣ص)$ |
| $١٥ - ٩م$                 | $١ - ١$                   | $٤ - ٤$                   | $٦٤ - ١٦٩$              |
| $(١٨) (٢ج + س)(٢ج - س)$   | $(١٧) (هـ - ٣ك)(٣ك + هـ)$ | $(٢١) (٢س - ٤ص)(٢س + ٤ص)$ | $(٢٠) (٢ - ٣س)(٢ + ٣س)$ |
| $٤ - ٤س$                  | $١١ - ١١$                 | $٤س^٢ - ١٦ص^٢$            | $٤ - ٤$                 |

الفصل ٦، كثيرات الحدود

٣٠

الصفحة: الثالث المتوسط

## ٧-٦ التدرّيات الإثرائية

مكعب مجموع حدين، ومكعب الفرق بينهما

تذكر قواعد إيجاد حالات ضرب كثيرات الحدود:

(أ) ثلاثية حدود: مربع كامل:

$$(أ-ب)^2 = أ^2 - ٢أب + ب^2$$

$$(أ+ب)^2 = أ^2 + ٢أب + ب^2$$

الفرق بين مربعين:

توجد قاعدة لإيجاد مكعب مجموع حدين (أ+ب)<sup>٣</sup> أيضًا:

$$(أ+ب)^3 = أ^3 + ٣أ^٢ب + ٣أب^٢ + ب^3$$

$$أ^٣ - ب^٣ = (أ-ب)(أ^٢ + أب + ب^٢)$$

$$أ^٣ + ب^٣ = (أ+ب)(أ^٢ - أب + ب^٢)$$

$$أ^٣ - ٢أب + ب^٣ = (أ-ب)(أ^٢ + أب + ب^٢)$$

$$أ^٣ + ٢أب + ب^٣ = (أ+ب)(أ^٢ - أب + ب^٢)$$

$$أ^٣ - ٢أب + ب^٣ = (أ-ب)(أ^٢ + أب + ب^٢)$$

$$أ^٣ + ٢أب + ب^٣ = (أ+ب)(أ^٢ - أب + ب^٢)$$

$$أ^٣ - ٢أب + ب^٣ = (أ-ب)(أ^٢ + أب + ب^٢)$$

$$أ^٣ + ٢أب + ب^٣ = (أ+ب)(أ^٢ - أب + ب^٢)$$

$$أ^٣ - ٢أب + ب^٣ = (أ-ب)(أ^٢ + أب + ب^٢)$$

$$أ^٣ + ٢أب + ب^٣ = (أ+ب)(أ^٢ - أب + ب^٢)$$

$$أ^٣ - ٢أب + ب^٣ = (أ-ب)(أ^٢ + أب + ب^٢)$$

$$أ^٣ + ٢أب + ب^٣ = (أ+ب)(أ^٢ - أب + ب^٢)$$

$$أ^٣ - ٢أب + ب^٣ = (أ-ب)(أ^٢ + أب + ب^٢)$$

$$أ^٣ + ٢أب + ب^٣ = (أ+ب)(أ^٢ - أب + ب^٢)$$

$$أ^٣ - ٢أب + ب^٣ = (أ-ب)(أ^٢ + أب + ب^٢)$$

$$أ^٣ + ٢أب + ب^٣ = (أ+ب)(أ^٢ - أب + ب^٢)$$

$$أ^٣ - ٢أب + ب^٣ = (أ-ب)(أ^٢ + أب + ب^٢)$$

$$أ^٣ + ٢أب + ب^٣ = (أ+ب)(أ^٢ - أب + ب^٢)$$

$$أ^٣ - ٢أب + ب^٣ = (أ-ب)(أ^٢ + أب + ب^٢)$$

$$أ^٣ + ٢أب + ب^٣ = (أ+ب)(أ^٢ - أب + ب^٢)$$

$$أ^٣ - ٢أب + ب^٣ = (أ-ب)(أ^٢ + أب + ب^٢)$$

$$أ^٣ + ٢أب + ب^٣ = (أ+ب)(أ^٢ - أب + ب^٢)$$

$$أ^٣ - ٢أب + ب^٣ = (أ-ب)(أ^٢ + أب + ب^٢)$$

## ٧-٦ تدريبات حل المسألة

حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود

(٤) أمثال: وجدت إحدى الشركات أن ربحها منذ عام

٢٠٠٥م وحتى العام الحالي يمكن التعبير عنه بالمعادلة:

$$ص = ٥٤٤ + ١٢١١٠٤٤ + ٢٠٠٥٠٠٥$$

الأعوام منذ عام ٢٠٠٥. ما الحالة الخاصة التي تقابلها

كثيرة الحدود هذه؟ فتر إجابتك.

مربع مجموع حدين، ويمكن كتابته على الصورة

$$(أ+ب)^٢ = أ^٢ + ٢أب + ب^٢$$

تخمين: وضّح جوانب أسطواني بجانب حائطه وأخفي

أثير أسطواني صغير في الزاوية خلف الحزان كما هو

مبين في المنظر الجانبي أدناه، حيث طول نصف قطر الحزان

ر بوصة، وطول نصف قطر الأثير ه بوصة.

٥) تخمين: وضّح جوانب أسطواني بجانب حائطه وأخفي

أثير أسطواني صغير في الزاوية خلف الحزان كما هو

مبين في المنظر الجانبي أدناه، حيث طول نصف قطر الحزان

ر بوصة، وطول نصف قطر الأثير ه بوصة.

٦) تخمين: وضّح جوانب أسطواني بجانب حائطه وأخفي

أثير أسطواني صغير في الزاوية خلف الحزان كما هو

مبين في المنظر الجانبي أدناه، حيث طول نصف قطر الحزان

ر بوصة، وطول نصف قطر الأثير ه بوصة.

٧) تخمين: وضّح جوانب أسطواني بجانب حائطه وأخفي

أثير أسطواني صغير في الزاوية خلف الحزان كما هو

مبين في المنظر الجانبي أدناه، حيث طول نصف قطر الحزان

ر بوصة، وطول نصف قطر الأثير ه بوصة.

٨) تخمين: وضّح جوانب أسطواني بجانب حائطه وأخفي

أثير أسطواني صغير في الزاوية خلف الحزان كما هو

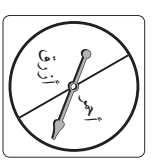
مبين في المنظر الجانبي أدناه، حيث طول نصف قطر الحزان

ر بوصة، وطول نصف قطر الأثير ه بوصة.

٩) تخمين: وضّح جوانب أسطواني بجانب حائطه وأخفي

أثير أسطواني صغير في الزاوية خلف الحزان كما هو

أزرق	أحمر
أحمر	أزرق
أزرق	أحمر
أحمر	أزرق



١) احتمال: القرص الدوار أدناه ينقسم إلى قسمين متساويين.

إذا أدرك المؤشر مرتين متتاليتين، فإن الناتج الممكنة مبنية

في الجدول أدناه.

٢) احتمال الحصول على أزرق وأحمر عند تدوير المؤشر

مرتين؟ ٥٠٪

٣) الجدولية: ارتفاع قطعة قهوة معديته بعد ن ثانية من

إسقاطها في بئر، يعطى بجارة ناتج الضرب:

$$(١٠ - ٥٤ + ١٠)٥٤$$

أوجد مفكوك هذه الجارة، ثم بيّنه. ما الحالة الخاصة

التي يمثلها هذا الناتج؟

١٠٠ - ١٢١

ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما

٤) تخطيط الطرق: يمثل الشكل أدناه طريقًا دائريًا لخمسة

دورات في المركز نفسه. إذا كان طول نصف قطر الدائرة

الصغرى يقص ١٠ أمتار عن طول نصف قطر الدائرة

الكبرى، فاكتمل معادلة كثيرة حدود تمثل مساحة الطريق.

٥) ١٢٠ ه - ١٠٠ ط

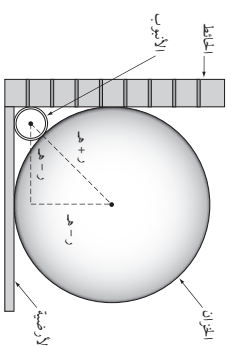
٦) ١٢٠ ه - ٤٠٠ ط

٧) ١٢٠ ه - ٤٠٠ ط

٨) ١٢٠ ه - ٤٠٠ ط

٩) ١٢٠ ه - ٤٠٠ ط

١٠) ١٢٠ ه - ٤٠٠ ط



١) اكتمل معادلة المعادلة بين طرفي نصف القطرين،

مستعملًا نظرية فيثاغورس. بيّنه معادلتك

بجيت يكون أحد طرفي المعادلة صفرًا.

٢) ١٢٠ ه - ٤٠٠ ط

٣) إذا كان طول نصف قطر الحزان ٢٠ بوصة، فاكتب

معادلة كثيرة حدود يمكنك من خلالها أن تجد طول

نصف قطر الأثير.

٤) ١٢٠ ه - ٤٠٠ ط

٥) ١٢٠ ه - ٤٠٠ ط

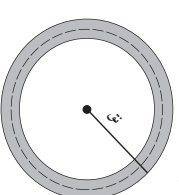
٦) ١٢٠ ه - ٤٠٠ ط

٧) ١٢٠ ه - ٤٠٠ ط

٨) ١٢٠ ه - ٤٠٠ ط

٩) ١٢٠ ه - ٤٠٠ ط

١٠) ١٢٠ ه - ٤٠٠ ط



الصفحة: الثالث المتوسط



وزارة التربية والتعليم  
Ministry of Education

المملكة العربية السعودية

# الرياضيات

## للف الثالث المتوسط

مصادر المعلم للأنشطة الصفية  
الفصل السابع: التحليل و المعادلات التربيعية

العبيكان  
Obekon

Mc  
Graw  
Hill  
Education

يوزع مجاناً ولا يباع

١٤٣٤ هـ - ٢٠١٣ م

Glencoe Mathematics © 2010  
**CHAPTER RESOURCE MASTERS**  
Algebra 1

الرياضيات - الصف الثالث المتوسط  
**مصادر المعلم للأنشطة الصفية**  
أعدت النسخة العربية: شركة العبيكان للتعليم

[www.obeikaneducation.com](http://www.obeikaneducation.com)



English Edition Copyright © the McGraw-Hill Companies, Inc.  
All rights reserved.

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with  
The McGraw-Hill Companies, Inc. © 2008.



حقوق الطبع الإنجليزية محفوظة لشركة ماجروهل ©.

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار  
وفقاً لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل © ٢٠٠٨م / ١٤٢٩هـ.

لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو نقله في أي شكل أو واسطة، سواء أكانت إلكترونية أو ميكانيكية، بما في ذلك التصوير بالنسخ «فوتوكوبي»، أو التسجيل، أو التخزين  
و الاسترجاع، دون إذن خطي من الناشر.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

### عزيزي المعلم / عزيزتي المعلمة

يسرنا أن نقدم هذه المجموعة من التدريبات المساندة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب. حيث نطمح أن يساعدك التنوع في هذه التدريبات على الوصول إلى جميع الطلاب في الصف، مهما تباينت مستوياتهم التحصيلية.

وقد تم تخصيص صفحتين لتدريبات إعادة التعليم و صفحة واحدة لكل من التدريبات الأخرى لكل درس من دروس كتاب الطالب. حيث يمكنك أن تكلف الطلاب حلّ صفحة التدريبات المقابلة لكل درس بحسب مستوى كلٍّ منهم؛ سواء داخل الصف أم في المنزل. وليست هذه التدريبات بديلاً عن كتاب التمارين، ولكنها مساندة ومكملة له. وهذه التدريبات هي:

### تدريبات إعادة التعليم

تركز هذه التدريبات على محتوى الدروس في كتاب الطالب، وتقدّمه بأسلوب تدريسي ومعالجة يختلفان عن كتابي الطالب والتمارين. وهي موجّهة إلى الطلاب ذوي المستوى دون المتوسط.

### تدريبات حلّ المسألة

تأتي هذه التدريبات انطلاقاً من اهتمام هذه المناهج بحلّ المسألة، حيث تم تخصيصها لتقديم تدريبات إضافية على حلّ المسألة ترتبط بكل درس من دروس كتاب الطالب. وهي موجّهة إلى جميع الطلاب على اختلاف مستوياتهم التحصيلية.

### التدريبات الإثرائية

تساعد هذه التدريبات الإثرائية على التوسّع في مفاهيم الدرس، كما تؤدي إلى توسيع مدارك الطلاب حول تعلم الرياضيات بشكل عام. وهذه التدريبات موجّهة إلى الطلاب ذوي المستوى ضمن المتوسط وفوق المتوسط.

# الفهرس

المقدمة .....	٤
الدرس ١-٧ تحليل وحيدات الحد	
تدريبات إعادة التعليم .....	٦
تدريبات حل المسألة .....	٨
التدريبات الإثرائية .....	٩
الدرس ٢-٧ استعمال خاصية التوزيع	
تدريبات إعادة التعليم .....	١٠
تدريبات حل المسألة .....	١٢
التدريبات الإثرائية .....	١٣
الدرس ٣-٧ المعادلات التربيعية: $س^٢ + بس + ج = ٠$	
تدريبات إعادة التعليم .....	١٤
تدريبات حل المسألة .....	١٦
التدريبات الإثرائية .....	١٧
الدرس ٤-٧ المعادلات التربيعية: $أس^٢ + بس + ج = ٠$	
تدريبات إعادة التعليم .....	١٨
تدريبات حل المسألة .....	٢٠
التدريبات الإثرائية .....	٢١
الدرس ٥-٧ المعادلات التربيعية: الفرق بين مربعين	
تدريبات إعادة التعليم .....	٢٢
تدريبات حل المسألة .....	٢٤
التدريبات الإثرائية .....	٢٥
الدرس ٦-٧ المعادلات التربيعية: المربعات الكاملة	
تدريبات إعادة التعليم .....	٢٦
تدريبات حل المسألة .....	٢٨
التدريبات الإثرائية .....	٢٩

## ١-٧ تدريبات إعادة التعليم

### تحليل وحيدات الحد

تحليل وحيدات الحد: تكون وحيدة الحد بالصيغة التحليلية إذا عبّر عنها بحاصل ضرب أعداد أولية ومتغيرات بأس ١.

حلّل كلّ وحيدة حد فيما يأتي تحليلًا تامًّا:

مثال

(أ)  $3^4 2^3$

$$3^4 2^3 = 3^4 \times 2^3 = 3^4 \times 2 \times 2 \times 2 = 3^4 \times 2^3$$

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

لذا فإنّ التحليل إلى العوامل لوحيدة الحد  $3^4 2^3$  هو:  $3^4 \times 2^3$

(ب)  $4^0 3^2 5^3$

$$4^0 3^2 5^3 = 1 \times 3^2 \times 5^3 = 3^2 \times 5^3 = 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 = 3^2 \times 5^3$$

لذا فإنّ التحليل إلى العوامل لوحيدة الحد  $4^0 3^2 5^3$  هو:  $3^2 \times 5^3$

تمارين

حلّل كلّ وحيدة حد فيما يأتي تحليلًا تامًّا:

(٣)  $3^4 2^3$

(٢)  $1^8 2^3$

(١)  $3^2 5^3$

(٦)  $8^2$

(٥)  $9^3 2^4$

(٤)  $1^8 3^2$

(٩)  $4^2 3^3$

(٨)  $1^4 3^2 5^3$

(٧)  $6^3 2^3$

(١٢)  $4^7 3^2 5^3$

(١١)  $6^2 5^3 2^4$

(١٠)  $1^7$

(١٥)  $4^1$

(١٤)  $1^3 8^2$

(١٣)  $1^2 3^4$



## تدريبات حل المسألة

### تحليل وحيدات الحد

(٤) **علماء الرياضيات:** أوجد عالم الرياضيات والفلك الإغريقي إيراتوثينس طريقة لفصل الأعداد الأولية عن الأعداد المؤلفة، عُرفت بـ "غربال إيراتوثينس"، وخطواتها كما يأتي:

اكتب الأعداد من ١ إلى ٥٠
بما أن العدد ١ ليس أوليًا أو مؤلفًا، فاحذفه.
ضع دائرة حول العدد ٢، واحذف كل عدد يقبل القسمة عليه.
ضع دائرة حول العدد الأولي التالي غير المحذوف وهو ٣، واحذف جميع مضاعفاته، ثم ضع دائرة حول العدد الأولي التالي غير المحذوف وهو ٥، واحذف جميع مضاعفاته،... وهكذا.

أوجد أول ١١ عددًا أوليًا مستعملًا "غربال إيراتوثينس".

(٥) **ترميم وصيانة:** يريد سلطان إعادة تبيط أرضية قاعة اجتماعات مستطيلة الشكل بعدها ١٨ قدمًا، ١٦ قدمًا ببلاطات مربعة كاملة. ودون وجود فراغات بينها.

(أ) إذا كانت لدى شركة البلاط مقاسات مختلفة من البلاط، فما أكبر بلاطة مربعة يمكن أن يستعملها سلطان لتجديد تبيط أرضية القاعة؟

(ب) إذا أراد سلطان تجديد تبيط باحة بعدها ٢٤ قدمًا، ١٨ قدمًا، فما أكبر بلاطة مربعة يمكن أن يستعملها سلطان لتجديد تبيط أرضية الباحة؟

(١) **ألعاب رياضية:** يلعب طلاب الصف الثالث المتوسط لعبة "تخمين وحيدة الحد". يعرض أحد الطلاب عوامل وحيدة الحد المخفية، ويحاول طلاب الصف تخمينها. عندما وصل دور التخمين إلى عادل وجد أن وحيدة الحد المخفية هي  $١٠٥$  ص  $٢$  ص  $٢$ . فأَيُّ البطاقات الآتية يتعين على عادل عرضها كي يجعل فريقه يخمن وحيدة الحد الصحيحة؟

س	س	ص	ص	ع	ع
---	---	---	---	---	---

٣	٥	٧	١١	١٣	١٧	١٩
---	---	---	----	----	----	----

(٢) **زينة حفلة:** تحتوي الرزمة الواحدة من بالونات الأطفال على ١٨ بالونًا، والرزمة الواحدة من قبعات الأطفال على ٨ قبعات. تريد هند الحصول على العدد نفسه من البالونات والقبعات لحفلة أطفال، فما أقل عدد من رزم البالونات ورزم القبعات يجب عليها أن تشتري؟

(٣) **تغليظ:** ترغب إحدى شركات إنتاج أحبار الطابعات في تصميم صناديق من الكرتون المقوى؛ لحفظ علب الحبر التي تنتجها. أوجد أطوال أصغر بُعدين ممكنين لقاعدة مربعة الشكل للصندوق الكرتوني، إذا كان طول علبة الحبر الواحدة ٧ سم، وعرضها ٣ سم.

١-٧

## التدريبات الإثرائية

## إيجاد (ق. م. أ) باستعمال خوارزمية إقليدس

قد يستغرق إيجاد العامل المشترك الأكبر لعددتين كبيرين باستعمال التحليل إلى العوامل الأولية زمناً طويلاً. يمكنك استعمال طريقة بديلة في هذه الحالة، وهي خوارزمية إقليدس، كما في المثال الآتي:

مثال

أوجد (ق. م. أ) للعددتين ٥٣٢، ٢٠٩

اقسم العدد الأكبر ٥٣٢ على العدد الأصغر ٢٠٩،

فيكون الباقي الأخير غير الصفري هو (ق. م. أ)

$\begin{array}{r} 5 \\ 19 \overline{) 95} \\ \underline{95} \\ 00 \end{array}$	<p>كرر العملية السابقة بقسمة المقسوم عليه على الباقي حتى يصبح الباقي صفراً</p>	$\begin{array}{r} 1 \\ 95 \overline{) 114} \\ \underline{95} \\ 19 \end{array}$	<p>اقسم المقسوم عليه في الخطوة السابقة على الباقي</p>	$\begin{array}{r} 2 \\ 209 \overline{) 532} \\ \underline{418} \\ 114 \end{array}$
--	--	---	---	--

إذن القاسم المشترك الأكبر للعددتين ٥٣٢، ٢٠٩ هو الباقي غير الصفري الأخير (١٩).

إذا كان (ق. م. أ) لعددتين هو ١، فإن العددين أوليان فيما بينهما.

أوجد (ق. م. أ) لكل مجموعة من أعداد أو وحيدات الحد كما يأتي مستعملًا خوارزمية إقليدس:

(٢) ١٠٦؛ ١٨٠٢

(١) ٥٧٨؛ ١٨٧

(٤) ١٨٤٩؛ ٢١٥

(٣) ٩٤٣؛ ١٦١

(٦) ٥٩٦٣؛ ٣٤٨٤

(٥) ٣٤٩٨؛ ١٣٢٥

(٨) ٤٨٤؛ ٤٥٣

(٧) ٤٢٥٧؛ ٣٣٥٨٣

(١٠) ٨٥١؛ ٤٠٧؛ ٥١٨

(٩) ٥٨٩؛ ٢٠٩؛ ٩٥

(١٢) ١٨٩٣؛ ٧٥٢؛ ٣

(١١) ١١٧؛ ١٦١٥؛ ٢؛ ٣

(١٤) ٣٦٠؛ ٣٢٨؛ ٧؛ ٥؛ ٣؛ ٣؛ ٣

(١٣) ٩٧٩؛ ٢؛ ٤٩٥؛ ٣؛ ١٥٤؛ ٣؛ ٣

## تدريبات إعادة التعليم

### استعمال خاصية التوزيع

استعمال خاصية التوزيع في التحليل: استعملت خاصية التوزيع في الفصل السابق لضرب وحيدة حد في كثيرة حدود. ويمكنك الاستفادة من ذلك عكسياً للتعبير عن كثيرة الحدود في صورة حاصل ضرب عاملين: وحيدة الحد وكثيرة حدود. قارن بين العمودين في الجدول الآتي:

التحليل	الضرب
$3 + 3 = 3(1 + 1)$	$3(1 + 1) = 3 + 3$
$س - س = س(1 - 1)$	$س(1 - 1) = س - س$
$12س + 6ص = 6(2س + 1ص)$ $6ص + 12س = 6(2س + 1ص)$	$6(2س + 1ص) = 12س + 6ص$ $6(2س + 1ص) = 12س + 6ص$

حلل  $6أس + 3أص + 2بس + بص$

مثال ٢

بتجميع الحدود.

$$\begin{aligned}
 & 6أس + 3أص + 2بس + بص \\
 &= (6أس + 3أص) + (2بس + بص) \\
 &= 3أ(2س + 1ص) + ب(2س + 1ص) \\
 &= (3أ + ب)(2س + 1ص)
 \end{aligned}$$

تحقق باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب.

$$\begin{aligned}
 & (3أ + ب)(2س + 1ص) \\
 &= 3أ(2س) + 3أ(1ص) + ب(2س) + ب(1ص) \\
 &= 6أس + 3أص + 2بس + بص
 \end{aligned}$$

استعمل خاصية التوزيع لتحليل

مثال ١

$$\begin{aligned}
 & 12م + 80م \\
 & \text{أوجد (ق. م. أ.) لـ } 12م, 80م. \\
 & 12م = 2 \times 2 \times 3 \times م \\
 & 80م = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times م \\
 & \text{(ق. م. أ.) } = 2 \times 2 \times م = 4م \\
 & \text{اكتب كل حد في صورة حاصل ضرب (ق. م. أ.) في باقي العوامل.} \\
 & 12م + 80م = 4م(3) + 4م(20) \\
 &= 4م(3 + 20) \\
 &= 4م(23)
 \end{aligned}$$

تمارين

حلل كلاً من كثيرات الحدود الآتية:

(٣)  $ك٤ - ١٨ك٣ + ٢٢ك٢$

(٢)  $٣٠ل٢ + ٢ل - ٦ل$

(١)  $٢٤س + ٤٨ص$

(٦)  $٤٥ر٣ - ١٥ر٢$

(٥)  $٤م + ٦ل - ٨م$

(٤)  $٩س٢ - ٣س$

(٩)  $٧أب + ٢٨أب٢ + ٧أب$

(٨)  $١٤ص٣ - ٢٨ص٢ + ١٤ص$

(٧)  $١٤ت٣ - ٤٢ت٢ - ٩ت٤$

(١٢)  $٣م٣ + ٤م + ٣ل + ٣ل٢$

(١١)  $٦ص٢ - ٤ص + ٣ص - ٢$

(١٠)  $٢س + ٢س + ٢س + ٢$

(١٥)  $سأ + صأ + س + ص$

(١٣)  $١٢أس + ٣س + ٤أص + ٤ص$  (١٤)  $١٢أ٢ - ٨أ - ٢$

## تدريبات إعادة التعليم

### استعمال خاصية التوزيع

(تتمة)

حلّ المعادلات بالتحليل؛ يمكنك استعمال الخاصية الآتية مع التحليل لحلّ معادلات معيّنة:

خاصية الضرب الصفري	لأي عددين حقيقيين أ، ب، إذا كان أب = صفر، فإنّ أ = ٠، أو ب = ٠، أو كليهما يساوي صفرًا.
--------------------	--

مثال

حلّ المعادلة  $٩س^٢ + س = ٠$ ، وتحقق من صحة الحلّ.

اكتب المعادلة في صورة أب = ٠

المعادلة الأصلية

$$٩س^٢ + س = ٠$$

حلّ بإخراج (ق.م.أ)

$$س(٩س + ١) = ٠$$

خاصية الضرب الصفري

$$س = ٠ \text{ أو } ٩س + ١ = ٠$$

حلّ كل معادلة

$$س = ٠ \text{ أو } س = -\frac{١}{٩}$$

الجزران هما ٠،  $-\frac{١}{٩}$ 

تحقق؛ عوض عن س بكلّ من ٠،  $-\frac{١}{٩}$  في المعادلة الأصلية.

$$٩س^٢ + س = ٠$$

$$٩س^٢ + س = ٠$$

$$٠ \stackrel{?}{=} \left(-\frac{١}{٩}\right) + \left(-\frac{١}{٩}\right) ٩$$

$$٠ \stackrel{?}{=} (٠) + (٠) ٩$$

$$٠ \stackrel{?}{=} -\frac{١}{٩} - \frac{١}{٩}$$

$$٠ = ٠$$

$$٠ = ٠$$

تمارين

حلّ كلّاً من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحلّ:

$$(٣) \quad ٠ = (٢ + ر)(٣ - ر)$$

$$(٢) \quad ٠ = ٣(٤ - م)$$

$$(١) \quad ٠ = (٣ + س)س$$

$$(٦) \quad ٢٥ = ٢ت$$

$$(٥) \quad ٠ = (٣ - م)(٨ + م٤)$$

$$(٤) \quad ٠ = (١ - س)س٣$$

$$(٩) \quad ٢٨ = ٢ص$$

$$(٨) \quad ٠ = ١٥ - ٥ل$$

$$(٧) \quad ٠ = (٢ + ج - ٢)(٧ - ج)$$

$$(١٢) \quad ١٢ = ٨ص$$

$$(١١) \quad ٠ = (٧ + أ) (٣ + أ٤)$$

$$(١٠) \quad ١٢س = ٦س^٢$$

$$(١٥) \quad ٤م = ٢م٤$$

$$(١٤) \quad ٠ = (٣ + ص)(٤ - ص٦)$$

$$(١٣) \quad ٢س = ٢س$$

$$(١٨) \quad ٠ = (٤ + أ١٢)(١ - أ٣)$$

$$(١٧) \quad ١٢ = ٣أ$$

$$(١٦) \quad ١٢س = ٣س^٢$$

## تدريبات حل المسألة

### استعمال خاصية التوزيع

- (١) **فيزياء:** يُقال: إنَّ العالم جاليليو أسقط أجسامًا مختلفة الأوزان من برج بيزا المائل. عندما كان يعمل على تطوير معادلته للسقوط الحر للأجسام، والعلاقة التي اكتشفها بين مسافة سقوط الجسم (ف) بعد زمن قدره (ن) ثانية، وصيغتها هي  $ف = ١٦ن^٢$  (مع إهمال مقاومة الهواء)، والتي يمكن إيجادها في المعادلة  $ص = ٤ن - ١٦ن^٢$ ، حيث ص ارتفاع جسم مقذوف من سطح الأرض إلى أعلى بالأقدام بعد ن ثانية، ومعدل تغير سرعته  $٣٢$  قدمًا/ثانية. حلّ هذه المعادلة عندما  $ص = ٠$ .

- (٤) **قفزة رأسية:** يُقاس ارتفاع قفزتك الرأسية بطرح طولك وأنت واقف، من أعلى ارتفاع يمكنك أن تصل إليه، وذلك عندما تقفز دون جري. يصل الارتفاع النموذجي للقفزة الرأسية للاعبين المحترفين إلى  $٣٤$  بوصة. فإذا قفز لاعب محترف قفزة رأسية، وكانت معادلة ارتفاعه ع بوصة بعد ن ثانية هي:
- $ع = ١٦٢ن - ١٩٢ن^٢$ ، فحلّ المعادلة عندما  $ع = ٠$ ، مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة، ثم فسرها.

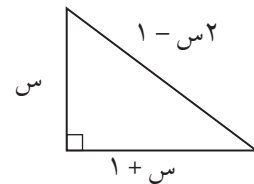
- (٢) **بركة سباحة:** بركة سباحة مستطيلة الشكل إذا كانت مساحتها (م)، حيث  $م = ١٢س - س^٢$ ، س عرض البركة. اكتب عبارة تمثل طول البركة.

- ألعاب القوى:** يتدرّب باسم على رمي القرص. وقد رمى القرص إلى أعلى بسرعة ابتدائية قدرها  $٧$ ،  $١٣$  مترًا/ثانية، استخدم المعادلة:  $ف = ٧ - ١٣ن + ٤ن^٢$ . حيث ف تعبّر عن ارتفاع القرص عن سطح الأرض بعد ن ثانية من رمي القرص. (أجب عن السؤالين ٥، ٦):

- (٣) **إنشاءات:** قامت شركة بناء بإنشاء سقف على شكل مثلث لغرفة على سطح بناية. مثلّ المكاول السطح بالأبعاد الميينة أدناه (بالأمتار). أوجد أطوال أضلاع المثلث مستعملًا نظرية فيثاغورس.

- (٥) ما الزمن الذي يستغرقه القرص حتى يسقط على الأرض؟

- (٦) إذا وصل القرص إلى أقصى ارتفاع له عند النقطة الواقعة بين صعوده وهبوطه، فما أقصى ارتفاع له؟



## التدريبات الإثرائية

### التركيبات الخطية

يمكنك كتابة (ق. م. أ) لعددتين في صورة تركيب خطي لهما. فالتركيب الخطي للعددتين أ، ب هو عبارة على صورة أس + ب ص، حيث س، ص عددان صحيحان.

مثال

اكتب القاسم المشترك الأكبر للعددتين ٥٢، ٣٦ على صورة تركيب خطي.

أولاً: أوجد (ق. م. أ) للعددتين مستعملاً خوارزمية إقليدس.

اقسم العدد الأكبر ٥٢ على العدد الأصغر ٣٦، ثم اقسّم المقسوم عليه على الباقي في كل مرة حتى يصبح الباقي صفرًا. فيكون الباقي الأخير غير الصفري ٤ هو (ق. م. أ) للعددتين ٥٢، ٣٦. وبيان ذلك أدناه:

$$\begin{array}{r} 4 \\ 4 \overline{) 16} \\ \underline{16} \\ 00 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ 16 \overline{) 36} \\ \underline{32} \\ 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ 36 \overline{) 52} \\ \underline{36} \\ 16 \end{array}$$

في هذه الحالة، ٤ هو القاسم المشترك الأكبر للعددتين ٥٢، ٣٦

لكتابة ٤ في صورة تركيب خطي للعددتين ٥٢، ٣٦، فإنه يتعين كتابته كما يأتي:

$$4 = 36 + 52 \text{ ص، حيث س، ص عددان صحيحان.}$$

أوجد هذين العددين الصحيحين مستعملاً المحاولة والخطأ.

$$\text{العددان الصحيحان هما: س = ٣، ص = ٢}$$

لذا فالتركيب الخطي للقاسم المشترك الأكبر للعددتين ٥٢، ٣٦ هو:

$$4 = (2)52 + (3)36$$

اكتب القاسم المشترك الأكبر لكل عددين فيما يأتي في صورة تركيب خطي:

(٢) ٢٨، ٢١

(١) ٦٤، ١٦

(٤) ٣٦، ١٥

(٣) ١٨، ٣

(٦) ٤٢، ١٨

(٥) ٨، ٦

٣-٧

## تدريبات إعادة التعليم

المعادلات التربيعية:  $س^٢ + ب س + ج = ٠$ 

تحليل  $س^٢ + ب س + ج$ : لتحليل ثلاثية الحدود في الصورة  $س^٢ + ب س + ج$ ، أوجد عددين صحيحين م، ن بحيث يكون مجموعهما يساوي معامل الحد الأوسط (ب)، وناتج ضربهما الحد الثابت (ج).

تحليل  $س^٢ + ب س + ج$  |  $س^٢ + ب س + ج = (س + م)(س + ن)$ ، حيث  $م + ن = ب$ ،  $م ن = ج$

مثال ٢ حلّل  $س^٢ + ٦س - ١٦$ .

في ثلاثية الحدود هذه  $ب = ٦$ ،  $ج = -١٦$ .  
وهذا يعني أنّ م + ن موجب، م ن سالب.  
كوّن قائمة عوامل العدد  $-١٦$ ، بحيث يكون أحد العاملين موجبا في كلّ حالة.

مجموع العاملين	عوامل $-١٦$
$١٥-$	$١٦، ١-$
$١٥$	$١٦، ١-$
$٦-$	$٨، ٢-$
$٦$	$٨، ٢-$

من الجدول أعلاه تكون م =  $٢-$ ، ن =  $٨$   
 $س^٢ + ٦س - ١٦ = (س - ٢)(س + ٨)$

مثال ١ حلّل كلّ كثيرة حدود ممّا يأتي:

(أ)  $س^٢ + ٧س + ١٠$

ب =  $٧$ ، ج =  $١٠$  في ثلاثية الحدود هذه.

مجموع العوامل	عوامل $١٠$
$١١$	$١٠، ١$
$٧$	$٥، ٢$

بما أنّ  $٧ = ٥ + ٢$ ،  $١٠ = ٥ \times ٢$ ، افترض أنّ م =  $٢$ ، ن =  $٥$ ،

لذا  $س^٢ + ٧س + ١٠ = (س + ٥)(س + ٢)$

(ب)  $س^٢ - ٨س + ٧$

في ثلاثية الحدود هذه ب =  $٨-$ ، ج =  $٧$ .

لاحظ أنّ م + ن سالب، م ن موجب. لذا فإن م، ن كلاهما سالب.

بما أنّ  $٧ = (١-) + (٧-)$ ،  $٨ = (١-)(٧-)$ ،  $٧ = (١-)(٧-)$ ،

$١ = ل$

إذن  $س^٢ - ٨س + ٧ = (س - ٧)(س - ١)$

تمارين

حلّل كلّ كثيرة حدود ممّا يأتي:

- (١)  $س^٢ + ٤س + ٣$  (٢)  $س^٢ + ١٢م + ٣٢$  (٣)  $س^٢ - ٣ر + ٢$
- (٤)  $س^٢ - ٦س - ٦$  (٥)  $س^٢ - ٢٢س + ١٢١$  (٦)  $١٢ - ت٤ - ت٢$
- (٧)  $س^٢ - ١٦ل + ٦٤$  (٨)  $س^٢ - ٩ - ١٠س + س^٢$  (٩)  $س^٢ + ٦س + ٥$
- (١٠)  $٩ - أ٨ + أ^٢$  (١١)  $س^٢ - ٢س - ٣$  (١٢)  $ص^٢ + ١٤ص + ١٣$
- (١٣)  $م^٢ + ٩م + ٢٠$  (١٤)  $٢٤ + أ١٤ - أ^٢$  (١٥)  $١٨ + ١١ص + ص^٢$
- (١٦)  $س^٢ + ٢س + ص$  (١٧)  $س^٢ - ٤أ + ٤ب$  (١٨)  $س^٢ + ٦س - ٧ص$

## تدريبات إعادة التعليم

(تمة)

المعادلات التربيعية:  $س^2 + ب س + ج = ٠$ 

حلّ المعادلات بالتحليل: يمكنك استعمال التحليل وخاصة الضرب الصفري لحل العديد من المعادلات التي في الصورة:  $س^2 + ب س + ج = ٠$

مثال ٢ مقذوفات: أطلق صاروخ إلى أعلى بسرعة ابتدائية ٢٢٨٨ قدمًا في الثانية. كم ثانية يحتاج الصاروخ ليصطدم بالأرض؟

تمثل الصيغة  $ف = ع ن - ١٦ ن^2$  ارتفاع الصاروخ بعد ن ثانية من انطلاقه بسرعة ابتدائية ع قدم في الثانية.

المعادلة الأصلية  $ف = ع ن - ١٦ ن^2$

$$٠ = ٢٢٨٨ ن - ١٦ ن^2 \quad ف = ٠$$

$$٠ = ١٦ ن (١٤٣ - ن) \quad \text{حلّل إلى العوامل}$$

$$١٦ ن = ٠ \quad \text{أو} \quad ١٤٣ - ن = ٠ \quad \text{خاصية الضرب الصفري}$$

$$٠ = ن \quad \text{أو} \quad ن = ١٤٣ \quad \text{حلّ كل معادلة}$$

تمثل القيمة  $ن = ١٤٣$  = صفر لحظة الانطلاق. يعود الصاروخ ليصطدم بالأرض بعد ١٤٣ ثانية، أي أقل بقليل من دقيقتين ونصف بعد الانطلاق.

مثال ١ حلّ المعادلة:  $س^2 + ٦ س + ٧ = ٠$ ، وتحقق من صحة الحل:

$$س^2 + ٦ س + ٧ = ٠ \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$س^2 + ٦ س + ٧ = ٠ \quad \text{اطرح ٧ من كلا الطرفين لجعل أحد الطرفين يساوي صفرًا}$$

$$س(س + ٧) + ١(س + ٧) = ٠ \quad \text{حلّل إلى العوامل}$$

$$س(س + ٧) + ١(س + ٧) = ٠ \quad \text{خاصية الضرب الصفري}$$

$$س = ٧ - ١ \quad \text{حلّ كل معادلة}$$

مجموعة الحل  $\{١, ٧-\}$ .

تحقق: بما أنّ  $١ + ٦ = ٧$ ،  $٧(٧) + ٦(٧) = ٧$ ، فإنّ الحلّ صحيح.

## تمارين

حلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

$$(١) \quad س^2 - ٤ س + ٣ = ٠$$

$$(٢) \quad ص^2 - ٥ ص + ٤ = ٠$$

$$(٣) \quad م^2 + ١٠ م + ٩ = ٠$$

$$(٤) \quad س^2 = س + ٢$$

$$(٥) \quad س^2 - ٤ س = ٥$$

$$(٦) \quad س^2 - ١٢ س + ٣٦ = ٠$$

$$(٧) \quad ن^2 - ٨ = ٨ - ن$$

$$(٨) \quad ل^2 = ١٩ - ل - ١٤$$

$$(٩) \quad -٩ - س + س^2 = ٠$$

$$(١١) \quad ١١ - أ = أ - ١٨$$

$$(١٠) \quad س^2 + ٦ = ٥ س$$

$$(١٢) \quad ص^2 - ٨ ص + ١٥ = ٠$$

$$(١٤) \quad ١٨ - أ = أ - ٧٢$$

$$(١٣) \quad س^2 = ٢٤ - ١٠ س$$

$$(١٥) \quad ب^2 = ١٠ ب - ١٦$$

حلّ كلّاً مما يأتي مستعملًا الصيغة  $ف = ع ن - ١٦ ن^2$ .

(١٦) كرة قدم: قُذفت كرة قدم إلى أعلى بسرعة ابتدائية ٤٨ قدمًا/ الثانية. ما الزمن الذي تحتاج إليه الكرة للعودة إلى الأرض؟

(١٧) ألعاب سهام: قُذف سهم إلى أعلى بسرعة ابتدائية ٣٢ قدمًا/ الثانية. ما الزمن الذي يحتاج إليه السهم للعودة إلى الأرض؟

(١٨) مقذوفات: قُذف صاروخ إلى أعلى بسرعة ابتدائية ١٦٠٠ قدم/ الثانية، متى يكون ارتفاع الصاروخ ١٤٤٠٠ قدم؟

## تدريبات حل المسألة

المعادلات التربيعية: س<sup>٢</sup> + ب س + ج = ٠

- (٤) **فيزياء:** تعتمد درجة غليان الماء على الارتفاع (ع) فوق مستوى سطح البحر.  
المعادلة الآتية تمثل عدد الدرجات الفهرنهايتية (د) تقريباً التي يغلي عندها الماء تحت الدرجة ٢١٢° ف، وعلى الارتفاع (ع) فوق مستوى سطح البحر:  
د = ٥٢٠ + ٢ع  
أوجد درجة غليان الماء التقريبية في موقع على ارتفاع ٥٣٠٠ قدم فوق مستوى سطح البحر.

- (٥) **معالم تذكارية:** يصمّم عاصم معلماً تذكاريّاً على شكل هرم رباعي قائم في متنزه. يتطلب التصميم أن يكون ارتفاع الهرم ٩ أقدام، وعرض قاعدته أصغر من طولها بـ ٥ أقدام، وحجمه ١٥٠ قدمًا مكعبًا. تذكر أنّ صيغة حجم الهرم هي:  
ح =  $\frac{1}{3}$  ق ع، حيث ق مساحة القاعدة، ع الارتفاع.  
أ) اكتب معادلة لإيجاد عرض قاعدة الهرم، ثم حلّها.

ب) فسّر كلّ قيمة لـ س وفق الحالة الراهنة.

- (١) **علب هدايا:** طول علبة هدايا يزيد ٢ سم على عرضها، ومساحة الغطاء الأمامي ١٦٨ سم<sup>٢</sup>. أوجد طول العلبة؟ إنّ أوّل خطوتين لإيجاد طول العلبة (قيمة س) هي الموضحة أدناه. حلّ المعادلة، ثم أوجد طول العلبة.

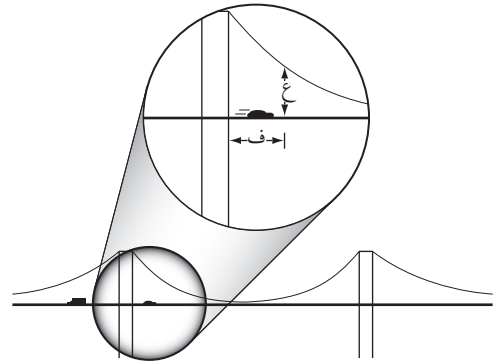
$$\text{الطول} \times \text{العرض} = \text{المساحة}$$

$$\text{س}(\text{س} + ٢) = ١٦٨$$

$$\text{س}^٢ + ٢\text{س} - ١٦٨ = ٠$$

- (٢) **ألعاب رياضية:** يلعب سلطان ونايف لعبة تخمين عدد. أعطى نايف لسلطان التلميح الآتي حول عددين مجهولين: "ناتج ضرب العددين الصحيحين الموجبين المتتاليين اللذين أفكّر بهما يزيد ١١ على مجموعهما." فما العددان؟

- (٣) **هندسة جسور:** يقود سائق سيارته على جسر معلق، مقوّى بحزمة أسلاك مربوطة بين دعامتين في نهايتي الجسر كما في الشكل أدناه. وبما أنّ هذه الحزمة على شكل قطع مكافئ، فيمكن تمثيلها بمعادلة تربيعية. صيغة ارتفاع حزمة الأسلاك ع (بوصة) فوق موقع على الجسر يبعد مسافة ف (ياردة) عن البرج الأول هي:  
ع = ٣٦ - ٢ف + ٣٢٤.



- إذا كان ارتفاع حزمة الأسلاك فوق سائق السيارة في لحظة ما هو ٤٩ بوصة، فما المسافة بينه وبين البرج التي يكون عندها ذلك؟

## التدريبات الإثرائية

### أحجية أعداد أولية

للعدد الأولي فقط عاملان مختلفان هما العدد نفسه والعدد ١. العدد ٦ ليس أوليًا؛ لأن له أكثر من عاملين. ٢، ٣ من عوامل ٦.

العددان ٥، ٧ أوليان. العدد ١ ليس أوليًا.

(١) أوجد ٢٥ عددًا أوليًا، كلٌّ منها أصغر من ١٠٠ مستعينًا بالآلة الحاسبة.

كانت الأعداد الأولية من اهتمامات علماء الرياضيات لعدة قرون، وقد حاولوا إيجاد عبارات للحصول على جميع الأعداد الأولية، أي أعداد أولية فقط. اكتشف العالم (أويلر) عام ١٧٠٠م أنّ ثلاثية الحدود  $s^2 + s + ١$  تنتج أعدادًا أولية لقيم  $s$  من صفر إلى ٣٩.

(٢) أوجد الأعداد الأولية لقيم  $s$  من صفر إلى ٧ مستعملًا صيغة (أويلر).

(٣) بيّن أنّ ثلاثية الحدود  $s^2 + s + ٣١$  لن تعطي أعدادًا أولية لقيم كثيرة لـ  $s$ .

(٤) أوجد أكبر عدد أولي ينتج من صيغة (أويلر).

ينصّ تخمين (جولد باتش) على أنّ كلَّ عدد زوجي غير الصفر، وأكبر من ٢، يمكن كتابته في صورة مجموع عددين أوليين. لم يُثبت أي شخص أنّ هذا التخمين صحيح دائمًا، ولكن لم يجد أي شخص مثالًا مضادًا له.

(٥) بيّن أنّ تخمين (جولد باتش) صحيح لأول ٥ أعداد زوجية أكبر من ٢.

(٦) أعطِ طريقة يستطيع شخص أن يستعملها لإثبات عدم صحة تخمين (جولد باتش).

## ٤-٧

## تدريبات إعادة التعليم

المعادلات التربيعية: أس<sup>٢</sup> + ب س + ج = ٠

**تحليل أس<sup>٢</sup> + ب س + ج:** لتحليل ثلاثية الحدود في الصورة أس<sup>٢</sup> + ب س + ج، أوجد عددين صحيحين م، ن مجموعهما يساوي ب وناتج ضربهما أ ج. ثم اكتب أس<sup>٢</sup> + ب س + ج في الصورة أس<sup>٢</sup> + م س + ن س + ج، ثم حلل بتجميع الحدود وإذا لم يوجد عددان صحيحان وفق هذه المتطلبات، تسمى كثيرة الحدود كثيرة حدود أولية.

مثال ٢

حلل أس<sup>٣</sup> - ٣س - ١٨.

لاحظ أن (ق. م. أ) للحدود أس<sup>٣</sup>، ٣س، ١٨ هو ٣ أولاً، حلل بإخراج (ق. م. أ).

$$أس^٣ - ٣س - ١٨ = ٣(س^٣ - س - ٦)$$

والآن حلل أس<sup>٣</sup> - س - ٦. بما أن أ = ١، أوجد عاملين لـ ٦ - مجموعهما -١.

عوامل ٦ -	مجموع العوامل
٦، ١	٥ -
٦، ١ -	٥
٣، ٢ -	١
٣ -، ٢	١ -

طبّق القاعدة (س + م)(س + ن)، م = ٢، ن = ٣ -

$$أس^٣ - س - ٦ = ٣(س + ٢)(س - ٣)$$

لذا أس<sup>٣</sup> - ٣س - ١٨ = ٣(س + ٢)(س - ٣)

مثال ١

حلل أس<sup>٢</sup> + ١٥س + ١٨

في هذا المثال، أ = ٢، ب = ١٥، ج = ١٨

يتعيّن أن تجد عددين مجموعهما ١٥، وناتج ضربهما

١٨ × ٢ = ٣٦. كوّن قائمة بأزواج من عوامل العدد ٣٦

وابحث عن العاملين اللذين مجموعهما ١٥.

عوامل ٣٦	مجموع العوامل
٣٦، ١	٣٧
١٨، ٢	٢٠
١٢، ٣	١٥

طبّق القاعدة أس<sup>٢</sup> + م س + ن س + ج،

حيث أ = ٢، م = ٣، ن = ١٢، ج = ١٨

$$أس^٢ + ١٥س + ١٨ = أس^٢ + ٣س + ١٢س + ١٨$$

$$= أس(س + ٣) + ١٢(س + ١٨)$$

$$= أس(س + ٣) + ١٢(س + ٣)$$

$$= (س + ٣)(أس + ١٢)$$

$$لذا أس^٢ + ١٥س + ١٨ = (س + ٣)(أس + ١٢)$$

## تمارين

حلل كل كثيرة حدود فيما يأتي، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا باستعمال الأعداد الصحيحة فاكتب أولية:

$$(٣) ١٦ر - ٢ر + ١$$

$$(٢) ٣م - ٨م - ٣$$

$$(١) ٢س - ٣س - ٢$$

$$(٦) ١٨س - ٢٧س - ٥$$

$$(٥) ٨س + ٢س - ٨$$

$$(٤) ٦س + ٥س - ٦$$

$$(٩) ٤ت + ١٩ت - ٢١$$

$$(٨) ١٨ص + ٩ص - ٥$$

$$(٧) ٣ + ٥ + ٢$$

$$(١٢) ٤٨س + ٢٢س - ١٥$$

$$(١١) ٢٨م + ٦٠م - ٢٥$$

$$(١٠) ٨س - ٤س - ٢٤$$

$$(١٥) ٤٨م + ٤٤م - ٤٨$$

$$(١٤) ٤٨س + ٢٦س - ٤٨$$

$$(١٣) ٣ص - ٦ص - ٢٤$$

$$(١٨) ١٨ + ١١ص + ٢ص$$

$$(١٧) ١٨ + ١٤ + ٢$$

$$(١٦) ١٨ + ٧س - ٦س$$

٤-٧

## تدريبات إعادة التعليم

(تمة)

المعادلات التربيعية: أس<sup>٢</sup> + ب س + ج = ٠

حل معادلات بالتحليل: يمكنك استعمال التحليل وخاصة الضرب الصفري لحل معادلات في صورة

$$\text{أس}^2 + \text{ب س} + \text{ج} = ٠$$

مثال حُلّ ١٢ أس<sup>٢</sup> + ٣ أس - ٢ = ٠، وتحقق من صحّة الحلّ.

المعادلة الأصلية

$$١٢ \text{أس}^2 + ٣ \text{أس} - ٢ = ٠$$

أعد كتابة المعادلة بحيث يصبح أحد طرفيها = ٠

$$١٢ \text{أس}^2 + ٣ \text{أس} - ٢ = ٠$$

حلّ

$$٠ = (٣ \text{أس} + ٢)(٤ \text{أس} - ١)$$

خاصية الضرب الصفري

$$٣ \text{أس} + ٢ = ٠ \quad \text{أو} \quad ٤ \text{أس} - ١ = ٠$$

حُلّ كلّ معادلة

$$\text{س} = -\frac{٢}{٣} \quad \text{س} = \frac{١}{٤}$$

مجموعة الحلّ  $\left\{-\frac{٢}{٣}, \frac{١}{٤}\right\}$ تحقق: بما أنّ  $١٢\left(-\frac{٢}{٣}\right)^2 + ٣\left(-\frac{٢}{٣}\right) - ٢ = ٠$  و  $١٢\left(\frac{١}{٤}\right)^2 + ٣\left(\frac{١}{٤}\right) - ٢ = ٠$ ، فالحل صحيح.

## تمارين

حُلّ كلّ معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحّة الحلّ:

$$(٣) \quad ٠ = ٧ - د١٣ - د٢$$

$$(٢) \quad ٠ = ٥ - ن٢ - ن٣$$

$$(١) \quad ٠ = ٣ - س٢ + س٨$$

$$(٦) \quad ٠ = ١٠ - س١١ - س٦$$

$$(٥) \quad ١٠ = س١٣ - س٣$$

$$(٤) \quad ٣ + س = س٢$$

$$(٩) \quad ٠ = ٩ + س١٨ - س٢$$

$$(٨) \quad ٤٠ = س٢١ - س٢$$

$$(٧) \quad ٤٠ - ك٢ = ١١ - ك$$

$$(١٢) \quad ٠ = ٣ - ص٢ - ص١٦$$

$$(١١) \quad ١٨ - أ٦٥ = أ٧$$

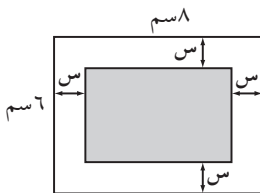
$$(١٠) \quad ١٥ - س١٢ = س٨$$

$$(١٥) \quad ٤٩ - ب١٠ = ب٣ - ب١٨$$

$$(١٤) \quad ١٥ = ٥ + أ١٨ - أ٤$$

$$(١٣) \quad ٧ + س = ٥ + س٢$$

(١٦) مجموع مربعي عددين صحيحين فرديين متتاليين يساوي ٣٤. أوجد هذين العددين.

(١٧) هندسة: حديقة مستطيلة الشكل مساحتها ٣٠٠ م<sup>٢</sup>، إذا كان طولها يزيد ٢٠ م على عرضها، فما بعدها؟(١٨) هندسة: مستطيل مساحته ٢٤ سم<sup>٢</sup>، تم الحصول عليه بقص أشرطة متساوية العرض

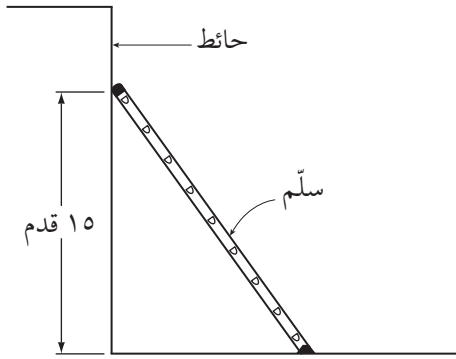
من ورقة مستطيلة. أوجد بُعدي المستطيل الجديد إذا كان بُعدي المستطيل الأصلي ٨ سم،

٦ سم.

## تدريبات حل المسألة

المعادلات التربيعية: أس<sup>٢</sup> + ب س + ج =

(٤) **سلام:** يستند سلم إلى حائط، ويلمس رأس السلم الحائط عند ارتفاع ١٥ قدمًا. فإذا كان طول السلم يزيد قدمًا واحدة على مثلي بُعد قاعدته عن الحائط، فأوجد بُعد قاعدته عن الحائط. (تلميح: حل المسألة مستعملًا نظرية فيثاغورس).



(٥) **مزرعة:** لدى عامر صفيحة معدنية مساحتها ٤٨٠ قدمًا مربعًا، ويريد أن يستعملها في إنشاء خزان أسطواني لحفظ الحبوب ارتفاعه ٥, ١٣ قدمًا. تذكر أن قانون المساحة السطحية للأسطوانة الدائرية القائمة هو:

$$م = ط \text{ نق}^2 + ٢ ط \text{ نق} ع$$

(أ) اكتب معادلة تربيعية (أحد طرفيها صفر)؛ للتعبير عن معطيات المسألة.

(ب) مستعملًا  $ط \approx ٣$  تقريبًا، حل المعادلة بالنسبة إلى نق.

(ج) ما طول نصف قطر الخزان الذي يتعين على عامر أن يستعمله؟

(١) **نقطة التعادل:** تظهر نقطة التعادل في الأعمال التجارية عندما تتساوى الواردات مع التكلفة. قُورنت تكلفة متحف للأطفال (الرواتب، الكهرباء، ...، إلخ) بالواردات من رسوم الدخول إليه، فلو حظ أن صيغة الزمن عند نقطة التعادل هي:  $٢٢ - ٢ - ٢٤ = ٠$  أوجد عدد الساعات التي يتعين على إدارة المتحف أن تفتحه فيها للوصول إلى نقطة التعادل.

(٢) **أعمال نجارة:** يريد نجار إنشاء صندوق للألعاب، ارتفاعه قدمان، وعرضه ينقص ٣ أقدام عن طوله. إذا كان حجم الصندوق ٨٠ قدمًا مكعبًا، فأوجد بُعديه.

(٣) **أثاث:** يريد مدير إحدى المدارس شراء طاولة لغرفة الإدارة. تباع الطاولة في متجر مجاور بأبعاد متنوعة، لكن كل طاولة يزيد طولها مترًا على مثلي عرضها. تسمح ميزانية المدرسة بشراء طاولة مساحة سطحها ٣ م<sup>٢</sup> بالضبط.

$$١ + س٢$$



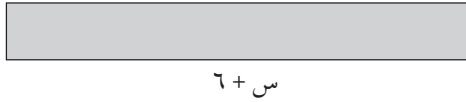
أوجد بُعدَي الطاولة التي يمكن لمدير المدرسة شراؤها.

## التدريبات الإثرائية

## نماذج مساحة لثلاثيات حدود تربيعية

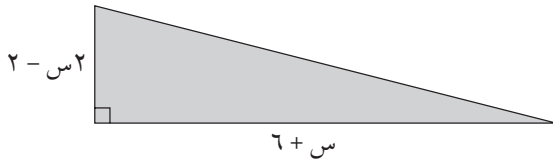
بعد أن تعلّمت تحليل ثلاثية حدود تربيعية، يمكنك استعمال العوامل لرسم نماذج هندسية لثلاثية الحدود.

$$س^2 + 5س - 6 = (س - 1)(س + 6)$$



لرسم نموذج مستطيل، استعمل القيمة ٢ بدلاً من س، ليكون طول الضلع الأصغر ١. مع العلم أن وحدات القياس المستخدمة في الرسم هي السنتيمترات.

إذن مساحة المستطيل تساوي:  $س^2 + 5س - 6$



لرسم نموذج مثلث قائم الزاوية، تذكر أن مساحة المثلث تساوي نصف طول القاعدة ضرب الارتفاع. لذا سيكون طول أحد أضلاع المثلث مثلي طول الضلع الأقصر لنموذج المستطيل.

$$س^2 + 5س - 6 = (س - 1)(س + 6)$$

$$= \frac{1}{3}(س - 2)(س + 6)$$

كذلك فإن مساحة المثلث القائم الزاوية تساوي:  $س^2 + 5س - 6$

حلّل كلّ ثلاثية حدود فيما يأتي، ثم ارسم كلّ نموذج:

$$(1) \quad س^2 + 2س - 3, \text{ استعمل } س = 2$$

ارسم مستطيلاً أبعاده مقيسة بوحدّة السنتيمتر.

$$(2) \quad 3س^2 + 5س - 1, \text{ استعمل } س = 1$$

ارسم مستطيلاً أبعاده مقيسة بوحدّة السنتيمتر.

س - ١

س٣ - ١

س + ٣

س + ٢

(٣)  $س^2 - ٤س + ٣$ ، استعمل  $س = ٤$ . ارسم مثلثين قائمي الزاوية مختلفين، مستعملاً وحدة السنتيمتر.

س٢ - ٦

س - ٣

س - ١

س٢ - ٢

(٤)  $9س^2 - ٢س + ٩$ ، استعمل  $س = ٢$ . ارسم مثلثين قائمي الزاوية مختلفين، مستعملاً وحدة السنتيمتر. استعمل ٥, ٠ سنتيمتر لكل وحدة قياس.

س٣ - ٢

س٣ - ١

## تدريبات إعادة التعليم

## المعادلات التربيعية: الفرق بين مربعين

تحليل الفرق بين مربعين: ثنائية الحد  $أ^2 - ب^2$  تُسمَّى الفرق بين مربعين.  
تبين القاعدة الآتية كيفية تحليل الفرق بين مربعين.

$$\text{الفرق بين مربعين} \quad \text{أ}^2 - \text{ب}^2 = (\text{أ} + \text{ب})(\text{أ} - \text{ب}) = (\text{أ} - \text{ب})(\text{أ} + \text{ب})$$

مثال ١

حلل كل كثيرة حدود مما يأتي:

$$\text{أ) } ٦٤ - ٢$$

$$٦٤ - ٢$$

$$= ٢٨ - ٢$$

$$= (٨ + ن)(٨ - ن)$$

$$\text{ب) } ٢٤م - ٨١ن$$

$$٢٤م - ٨١ن$$

$$= (٢م - ٩ن)$$

$$= (٢م - ٩ن)(٩ن + ٢م)$$

تمارين

حلل كل كثيرة حدود فيما يأتي:

$$\text{١) } ٨١ - ٢س$$

$$\text{٢) } ١٠٠ - ٢م$$

$$\text{٣) } ٢٥ - ٢ن$$

$$\text{٤) } ٣٦س - ١٠٠ص$$

$$\text{٥) } ١٦أ - ٩ب$$

$$\text{٦) } ٢٢٥ب - ٢أ$$

$$\text{٧) } ٧٢ل - ٥٠$$

$$\text{٨) } ٢س - ٢س$$

$$\text{٩) } ٨١ + ٤أ$$

$$\text{١٠) } ٦ - ٥٤أ$$

$$\text{١١) } ٨ص - ٢٠٠$$

$$\text{١٢) } ٤س - ١٠٠س$$

$$\text{١٣) } ٢ص - ٣٢ص$$

$$\text{١٤) } ٨م - ١٢٨م$$

$$\text{١٥) } ٩٨أ - ٣أ$$

$$\text{١٦) } ١٨ص - ٧٢ص$$

$$\text{١٧) } ١٦٩س - ٣س$$

$$\text{١٨) } ٣س + ٦س - ٣س - ٦س$$

حلل كل كثيرة حدود مما يأتي:

مثال ٢

$$\text{أ) } ٧٢ - ٢٥٠$$

$$٧٢ - ٢٥٠$$

$$= ٢(٣٦ - ١٢٥)$$

حلل بإخراج (ق. م. أ)

اكتب في صورة  $أ^2 - ب^2$ 

تحليل الفرق بين مربعين

$$= ٢(٦ - ١٥)(٦ + ١٥)$$

$$\text{ب) } ٤س٤ + ٨س٣ - ٤س٤ - ٨س٣$$

$$٤س٤ + ٨س٣ - ٤س٤ - ٨س٣$$

$$= ٤س(س٣ + ٢س٢ - س٣ - ٢س) = ٤س(س٣ - س٣ + ٢س٢ - ٢س)$$

$$= ٤س[٢س(س٢ + ١) - ٢س(س٢ + ١)] = ٤س[٢س(س٢ + ١) - ٢س(س٢ + ١)]$$

$$= ٤س[٢س(س٢ + ١) - ٢س(س٢ + ١)] = ٤س[٢س(س٢ + ١) - ٢س(س٢ + ١)]$$

$$= ٤س[٢س(س٢ + ١) - ٢س(س٢ + ١)] = ٤س[٢س(س٢ + ١) - ٢س(س٢ + ١)]$$

$$= ٤س(س - ١)(س + ١)(س + ١) = ٤س(س - ١)(س + ١)(س + ١)$$

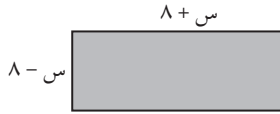


## تدريبات حل المسألة

## المعادلات التربيعية: الفرق بين مربعين

(٤) **منطاد:** تمثل الدالة  $f(x) = -x^2 + 576$  المسافة التي يقطعها جسم بعد سقوطه سقوطاً حُرّاً من السكون من منطاد ارتفاعه ٥٧٦ قدماً فوق سطح الأرض. بعد كم ن ثانية يصطدم الجسم بالأرض؟

(٥) **تصميم:** تريد مريم شراء بساط مستطيل الشكل، مساحته ٨٠ قدماً مربعة. لم تستطع تذكر طول البساط وعرضه، ولكنها تذكرت أنّ طوله يزيد ٨ على عدد معين، وعرضه ينقص ٨ عن العدد نفسه.



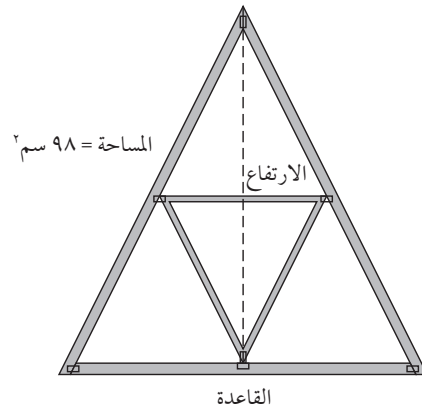
(أ) اكتب معادلة تربيعية باستعمال المعلومات المعطاة.

(ب) ما طول البساط، وما عرضه؟

(١) **أعمال خيرية:** تقوم جمعية خيرية ببيع بطاقات لصالح بناء مشروع خيري للأطفال. العبارة الآتية تساعد على حساب العدد المرجح للأشخاص الذين سيشترون البطاقات:  
٨١ أ - ٣٦ ب  
حلّل هذه العبارة تحليلاً كاملاً.

(٢) **بصريّات:** العاكس الموجود داخل مصباح يدوي على شكل قطع مكافئ معادلته  $v = s^2 - 25$ . أوجد نقاط تقاطع العاكس مع عدسة المصباح، بإيجاد قيم  $s$  عندما  $v = 0$ .

(٣) **هندسة عمارة:** يبيّن الشكل أدناه دعامة على شكل مثلث لسطح شرفة. طول قاعدة الدعامة يساوي ارتفاعها، ومساحة السطح ٩٨ متراً مربعاً.



أوجد ارتفاع الدعامة.

٥-٧

## التدريبات الإثرائية

## تحليل ثلاثيات حدود من الدرجة الرابعة

بعض ثلاثيات الحدود في الصورة أ<sup>٤</sup> + ب<sup>٢</sup>أ<sup>٢</sup> + ب<sup>٤</sup> يمكنك كتابتها في صورة فرق بين مربعين، ثم تحليلها.

مثال

$$\text{حلّ } ٤س٤ - ٣٧س٢ص٢ + ٩ص٩$$

الخطوة ١: أوجد الجذرين التربيعين لكل من الحدّين الأول والأخير.

$$\sqrt{٤س٤} = ٢س٢ \quad \sqrt{٩ص٩} = ٣ص٣$$

الخطوة ٢: أوجد مثلي ناتج ضرب الجذرين التربيعين.

$$٢(٢س٢)(٣ص٣) = ١٢س٢ص٣$$

الخطوة ٣: افصل الحد الأوسط إلى قسمين، بحيث يكون القسم الأول إجابة للخطوة ٢ أو عكسها، والقسم الآخر عكس مربع كامل.

$$٣٧س٢ص٢ - ١٢س٢ص٣ - ٢٥س٢ص٢$$

الخطوة ٤: أعد كتابة ثلاثية الحدود في صورة فرق بين مربعين، ثم حلّ.

$$٤س٤ - ٣٧س٢ص٢ + ٩ص٩ = (٤س٤ - ١٢س٢ص٣ + ٩ص٩) - (٢٥س٢ص٢ - ١٢س٢ص٣ + ٩ص٩)$$

$$= (٢س٢ - ٣ص٣)٢ - (٢٥س٢ص٢ - ١٢س٢ص٣ + ٩ص٩)$$

$$= [(٢س٢ - ٣ص٣) + (٥س٥ - ٣ص٣)] [(٢س٢ - ٣ص٣) - (٥س٥ - ٣ص٣)]$$

$$= (٢س٢ + ٥س٥ - ٣ص٣) (٢س٢ - ٥س٥ - ٣ص٣)$$

$$= (٢س٢ - ٣ص٣) (٥س٥ + ٢س٢) (٣ص٣ - ٥س٥)$$

حلّ كل كثيرة حدود فيما يأتي:

$$(٢) \quad ٤س٤ + ٢س٢ + ١$$

$$(١) \quad ٤س٤ + ٢س٢ص٢ + ١$$

$$(٤) \quad ١٦٦س٤ - ١١٧س٢ + ١$$

$$(٣) \quad ٩س٩ - ١٥س٢ + ١$$

$$(٦) \quad ٩س٩ + ٢٦س٢ب٢ + ٢٥ب٤$$

$$(٥) \quad ٤س٤ - ١٣س٢ + ١$$

$$(٨) \quad ٤س٤ - ٢٩س٢ب٢ + ٢٥ب٤$$

$$(٧) \quad ٤س٤ - ٢١س٢ص٢ + ٩ص٩$$

## تدريبات إعادة التعليم

### المعادلات التربيعية : المربعات الكاملة

تحليل ثلاثية حدود في صورة مربع كامل

ثلاثية حدود في صورة مربع كامل	ثلاثية الحدود في الصورة $أ^٢ + ٢أب + ب^٢$ (أو) $أ^٢ - ٢أب + ب^٢$
-------------------------------	--

يمكنك استعمال القواعد أدناه لتحليل ثلاثية حدود في صورة مربع كامل:

مربع ثنائية حدود	تحليل ثلاثية حدود في صورة مربع كامل
$أ^٢(٤ + أ) + ٢(أ)(٤) + ٢٤ = ١٦ + ٨أ + أ^٢$ $١٦ + ٨أ + أ^٢ = ٢(٤ + أ)^٢$	$أ^٢ + ٨أ + ١٦ = ٢(أ + ٤)^٢ + ٢٤$ $٢(أ + ٤)^٢ = ١٦ + ٨أ + أ^٢$
$٢(٣ - س)^٢ = ٢(س)^٢ - ٢(س)(٣) + ٣$ $٩ + ١٢س - ٢س٤ = ٢(٣ - س)^٢$	$٢س٤ - ١٢س + ٩ = ٢(س٢) - ٢(س٢)(٣) + ٣$ $٢(٣ - س)^٢ = ٩ + ١٢س - ٢س٤$

مثال ١

حدّد إن كانت ثلاثية الحدود

$١٦س٢ - ٢٤س + ٩$  تشكّل مربعًا كاملًا أم لا، وإذا كانت كذلك فحلّلها.

(١) هل الحد الأول مربع كامل؟ نعم،  $١٦س٢ = (٤س)^٢$

(٢) هل الحد الأخير مربع كامل؟ نعم،  $٩ = ٣^٢$

(٣) هل الحد الأوسط  $٢(٤س)(٣)$ ؟

نعم،  $٢٤س = ٢(٤س)(٣)$

بما أنّ الشروط الثلاثة متوفرة، فإنّ العبارة

$١٦س٢ - ٢٤س + ٩$  ثلاثية حدود تشكّل مربعًا كاملًا.

$١٦س٢ - ٢٤س + ٩ = (٤س - ٣)^٢ = ١٦س٢ - ٢(٤س)(٣) + ٩$

$(٤س - ٣)^٢ =$

تمارين

حدّد إن كانت كلّ ثلاثية حدود فيها يأتي تشكّل مربعًا كاملًا أم لا، وإذا كانت كذلك فحلّلها:

(٣)  $٦٤س + ٨ل + ل^٢$

(٢)  $٢٥م + ١٠م + م^٢$

(١)  $٦٤س - ١٦س + ١$

## المعادلات التربيعية: المربعات الكاملة

حل معادلات تتضمن مربعات كاملة: يمكنك استعمال التحليل وخاصة الضرب الصفري لحل معادلات تتضمن عوامل متكررة. يعطي العامل المتكرر حلًا واحدًا فقط للمعادلة. قد تستعمل خاصية الجذر التربيعي أدناه أيضًا لحل معادلات معينة.

خاصية الجذر التربيعي لأي عدد حقيقي  $n < 0$  صفر، إذا كان  $n = 0$ ، فإن  $\sqrt{n} = \pm \sqrt{n}$

مثال حل كلاً من المعادلتين الآتيتين، وتحقق من صحة الحل:

<p>(ب) <math>64 = 2(5 - أ)</math></p> <p>المعادلة الأصلية</p> <p>خاصية الجذر التربيعي</p> <p><math>8 \times 8 = 64</math></p> <p>أضف 5 إلى كلا الطرفين</p> <p><math>8 - 5 = أ - 5</math> أو <math>8 + 5 = أ</math></p> <p>أضف 3 إلى كلا الطرفين</p> <p>الجذرين هما -3، 13، ومجموعة الحل هي <math>\{-3, 13\}</math>.</p> <p>تحقق: بما أن <math>64 = 2(5 - 3)</math>، <math>64 = 2(5 - 13)</math>، فإن الحل صحيح.</p>	<p>(أ) <math>0 = 9 + 6س - 2س^2</math></p> <p>المعادلة الأصلية</p> <p>تحقق إن كانت كثيرة الحدود <math>6س - 2س^2 + 9</math> تمثل مربعًا كاملاً</p> <p>حلل ثلاثية الحدود في صورة مربع كامل، واكتبها كحاصل ضرب عاملين</p> <p>ضع أحد العوامل المتكررة = صفر</p> <p>أضف 3 إلى كلا الطرفين</p> <p>الجذر هو 3، ومجموعة الحل هي <math>\{3\}</math>.</p> <p>تحقق: بما أن <math>0 = 9 + 6(3) - 2(3)^2</math>، فإن الحل صحيح.</p>
---	---

## تمارين

حل كلاً من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل:

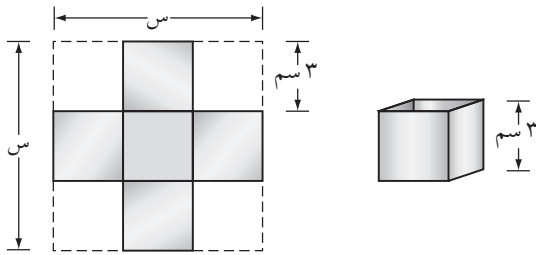
(٣) $0 = 1 + 10د - 2د^2$	(٢) $0 = 4 + 16ن + 2ن^2$	(١) $0 = 4 + 4س + 2س^2$
(٦) $0 = \frac{1}{4} + 2س + 2س^2$	(٥) $0 = 1 + 5د - 2د^2$	(٤) $0 = 25 + 10س + 2س^2$
(٩) $64 = 4 + 4س + 2س^2$	(٨) $49 = 1 + 2ل + 2ل^2$	(٧) $0 = 4 + 20ك + 2ك^2$
(١٢) $0 = 1 + 8ص + 2ص^2$	(١١) $1 = 16 + 8أ + 2أ^2$	(١٠) $25 = 9 + 6س + 2س^2$
(١٥) $49 = 2(7 - م)$	(١٤) $1 = 2(6 + ص)$	(١٣) $49 = 2(3 + س)$
(١٨) $4 = 2(2 - هـ)$	(١٧) $25 = 2(3 + س)$	(١٦) $1 = 2(1 + س)$
(٢١) $0 = 2(2 - م)$	(٢٠) $6 = 2(3 - ص)$	(١٩) $7 = 2(1 + س)$

## تدريبات حل المسألة

## المعادلات التربيعية: المربعات الكاملة

(٤) **هندسة:** تستطيع هالة عمل صندوق بلا غطاء كما في الشكل أدناه، باستعمال قطعة مربعة من الورق المقوى، بقصّ مربعات من عند الزوايا طول ضلع كل منها ٣ سم، ثم طي المربعات الأربعة الجانبية المتبقية إلى أعلى. حجم الصندوق الناتج:

ح  $= 3س^2 - 36س + 108$ ، حيث  $س$  طول ضلع القطعة المربعة الأصلية من الورق المقوى.



(أ) حلّ كثيرة الحدود الواردة في معادلة الحجم.

(ب) ما حجم الصندوق إذا كان طول ضلع القطعة المربعة الأصلية من الورق المقوى ١٤ سم؟

(ج) ما طول ضلع القطعة المربعة الأصلية من الورق المقوى عندما يكون حجم الصندوق ٢٧ سم<sup>٣</sup>؟

(١) **إنشاءات:** تمثّل ثلاثية الحدود  $س^2 - ١٠س + ٢٥$  مساحة مدينة رياضية مربعة الشكل. اكتب عبارة تمثّل محيط المدينة الرياضية بدلالة المتغير  $س$ .

(٢) **مدينة ألعاب:** تريد إدارة مدينة ألعاب تركيب عربة أشخاص تتحرك رأسياً إلى أعلى من مستوى الأرض، بسرعة ابتدائية ٩٦ قدماً / ثانية. فإذا كانت الدالة  $ع = ٩٦ن - ١٦ن^2$  تمثل ارتفاع العربة  $ع$  قدماً بعد  $ن$  ثانية من انطلاقها، فبعد كم ثانية تصل إلى ارتفاع ١٤٤ قدماً؟

(٣) **أعمال:** تختصّ إحدى الشركات الزراعية ببيع وتركيب أنظمة لريّ المزرعات، وتستعمل الدوال الآتية لمتابعة التكلفة الشهرية  $ت$ ، والعائدات  $ع$ ، والربح الشهري  $ر$ ، حيث  $س$  عدد أنظمة الريّ المباعة.

$$ت(س) = ٧س^2 + ٢٠س - ١٢$$

$$ع(س) = ٨س^2 + ١٢س + ٤$$

$$ر(س) = ع(س) - ت(س)$$

أوجد دالة الربح الشهري  $ر$  بدلالة  $س$ ، ثم استعملها لإيجاد نقطة التعادل التي يكون الربح عندها صفراً.

٦-٧

## التدريبات الإثرائية

## تربيع الأعداد: طريقة مختصرة

توجد طريقة مختصرة تساعدك على تربيع عدد موجب مكوّن من رقمين، ورقم أحاده ٥. طوّرت الطريقة باستعمال فكرة أنه يمكن التعبير عن هذا العدد في الصورة  $١٠ب + أ$ ، حيث  $أ = ٥$ .

$$(٥ + ١٠ب + أ)(٥ + ١٠ب + أ) = ٢(٥ + ١٠ب + أ)$$

$$٢٥ + ١٠٠ب + ١٠٠ب + ١٠٠ب =$$

$$٢٥ + ١٠٠ب + ١٠٠ب =$$

$$٢٥ + (١ + ب)١٠٠ = ٢(٥ + ١٠ب + أ)$$

تنص هذه الصيغة لفظياً: على أن ناتج تربيع عدد موجب مكوّن من رقمين، ورقم أحاده ٥، يحتوي على  $ب(١ + ب)$  مئة. كذلك فإن رقم منزلة العشرات هو ٢ ورقم الآحاد هو ٥ دائماً.

مثال استعمال الصيغة  $(٥ + ١٠ب)٢$  لإيجاد  $(٨٥)٢$ .

$$(٨٥)٢ = ٢٥ + (١ + ٨) \times ٨ \times ١٠٠ =$$

$$٢٥ + ٧٢٠٠ =$$

$$٧٢٢٥ =$$

طريقة مختصرة: أولاً، فكّر؛  $٧٢ = ٨ \times ٩$ ، ثم اكتب ٢٥

لذا لتربيع عدد مثل ٨٥، يمكنك كتابة ناتج ضرب رقم العشرات ب في العدد الصحيح الذي يليه مباشرة  $(ب + ١)$ ، ثم كتابة ٢٥.

أوجد كلاً مما يأتي مستعملاً الطريقة المختصرة:

$$(٣) (٣٥)٢$$

$$(٢) (٢٥)٢$$

$$(١) (١٥)٢$$

$$(٦) (٦٥)٢$$

$$(٥) (٥٥)٢$$

$$(٤) (٤٥)٢$$

(٧) ما رقم العشرات في مربع العدد ٩٥؟

(٨) ما آخر رقمين في مربع العدد ٧٥؟

(٩) أيّ عدد مكوّن من ثلاثة أرقام يمكن كتابته في الصورة  $١٠٠أ + ١٠ب + ج$ . ربّع هذه العبارة لتلاحظ أنه إذا كان رقم آحاد عدد مكوّن من ثلاثة أرقام هو ٥، فإن رقمي الآحاد والعشرات في مربع هذا العدد هما ٢، ٥

# ملحق الإجابات



التاريخ \_\_\_\_\_

الاسم \_\_\_\_\_

## ١-٧ التدرجات الإثرائية

إيجاد (ق. م.) باستخدام خوارزمية إقليدس

قد يستغرق إيجاد العامل المشترك الأكبر لعددتين كبيرين باستخدام التحليل إلى العوامل الأولية زمناً طويلاً. يمكنك استعمال طريقة بدئية في هذه الحالة، وهي خوارزمية إقليدس، كما في المثال الآتي:

أوجد (ق. م.) للعددین ٢٠٩، ٥٣٢

افسـم العدد الأكبر ٥٣٢ على العدد الأصغر ٢٠٩

$$\begin{array}{r} 2 \\ 532 \\ \underline{-209} \\ 323 \\ \underline{-209} \\ 114 \\ \underline{-114} \\ 0 \end{array}$$

فكـون الباقي الأكبر غير الصفري هو (ق. م.)

$$\begin{array}{r} 1 \\ 114 \\ \underline{-95} \\ 19 \\ \underline{-19} \\ 0 \end{array}$$

افسـم الباقي الأكبر غير الصفري هو (ق. م.)

$$\begin{array}{r} 1 \\ 114 \\ \underline{-95} \\ 19 \\ \underline{-19} \\ 0 \end{array}$$

افسـم الباقي الأكبر غير الصفري هو (ق. م.)

$$\begin{array}{r} 1 \\ 114 \\ \underline{-95} \\ 19 \\ \underline{-19} \\ 0 \end{array}$$

إذا كان (ق. م.) للعددین هو ١ فإن العددین أوليان فيما بينهما.

أوجد (ق. م.) لكل مجموعة من أعداد أو وحدات الحد التالي مستخدماً خوارزمية إقليدس:

- ١٠٦١؛ ١٨٠٢
- ١٠٦١؛ ١٨٠٢
- ١٧٨٤٩؛ ٢٣١٥
- ٤٣
- ٥٩٦٣؛ ٤٨٤
- ٦٧
- ٤٨٤؛ ٤٥٣
- ١١ (العددان أوليان فيما بينهما)
- ٥٨٩؛ ٢٠٩؛ ٩٥
- ١٩
- ١١٧؛ ١١٧؛ ٤٠٤؛ ١٦٥؛ ٢٤
- ٦٤٧
- ١٣٩٧٩؛ ٢٤٥٤؛ ٢٤٥٤؛ ٢٤٥٤؛ ١٥٤؛ ١٥٤؛ ١١
- ٨

التحليل والتعود التريبيمة

الفصل ٧

٩

التاريخ \_\_\_\_\_

الاسم \_\_\_\_\_

## ١-٧ تدريجات حل المسألة

تحليل وحدات الحد

٤ علماء الرياضيات، أوجد عالم الرياضيات والفلك الإغريقي إراتوستينس طريقة لفصل الأعداد الأولية عن الأعداد المركبة، عُرفت بـ "غربال إراتوستينس" وخطابها كما يأتي:

أحب الأعداد من ١ إلى ٥٠
حذف العدد ١ ليس أولياً أو مربعاً، فاحذفه.
ضع دائرة حول العدد ٢، واحذف كل عدد يقبل القسمة عليه.
ضع دائرة حول العدد الأول التالي غير المحذوف وهو ٣، واحذف جميع مضاعفاته، ثم ضع دائرة حول العدد الأول التالي غير المحذوف وهو ٥، واحذف جميع مضاعفاته، وهكذا.

أوجد أول ١١ عدداً أولياً مستخدماً "غربال إراتوستينس".

٢١، ٢٩، ٣٧، ٤٧، ٥٩، ٧١، ٨٣، ٩٧، ١٠٧، ١٢٧، ١٤٩، ١٧٩، ٢١١، ٢٣٩، ٢٧١، ٣١١، ٣٤٧، ٣٧٩، ٤١٩، ٤٦٧، ٥٢١، ٥٧١، ٦١٧، ٦٦٧، ٧١٩، ٧٧٩، ٨٣٩، ٩٠٧، ٩٧٩، ١٠٤٩، ١١٢٩، ١٢٠٧، ١٢٩٧، ١٣٩٩، ١٤٩٩، ١٦٠٧، ١٦٩٩، ١٨٠٧، ١٩٠٧، ٢٠١٩، ٢١٢٩، ٢٢٤٧، ٢٣٥٩، ٢٤٧٩، ٢٥٩٩، ٢٧١٩، ٢٨٣٩، ٢٩٥٩، ٣٠٧٩، ٣١٩٩، ٣٣١٩، ٣٤٣٩، ٣٥٥٩، ٣٦٧٩، ٣٧٩٩، ٣٩١٩، ٤٠٣٩، ٤١٥٩، ٤٢٧٩، ٤٣٩٩، ٤٥١٩، ٤٦٣٩، ٤٧٥٩، ٤٨٧٩، ٤٩٩٩، ٥١١٩، ٥٢٣٩، ٥٣٥٩، ٥٤٧٩، ٥٥٩٩، ٥٧١٩، ٥٨٣٩، ٥٩٥٩، ٦٠٧٩، ٦١٩٩، ٦٣١٩، ٦٤٣٩، ٦٥٥٩، ٦٦٧٩، ٦٧٩٩، ٦٩١٩، ٧٠٣٩، ٧١٥٩، ٧٢٧٩، ٧٣٩٩، ٧٥١٩، ٧٦٣٩، ٧٧٥٩، ٧٨٧٩، ٧٩٩٩، ٨١١٩، ٨٢٣٩، ٨٣٥٩، ٨٤٧٩، ٨٥٩٩، ٨٧١٩، ٨٨٣٩، ٨٩٥٩، ٩٠٧٩، ٩١٩٩، ٩٣١٩، ٩٤٣٩، ٩٥٥٩، ٩٦٧٩، ٩٧٩٩، ٩٩١٩، ١٠٠٣٩، ١٠١٥٩، ١٠٢٧٩، ١٠٣٩٩، ١٠٤١٩، ١٠٥٣٩، ١٠٦٥٩، ١٠٧٧٩، ١٠٨٩٩، ١١٠١٩، ١١١٣٩، ١١٢٥٩، ١١٣٧٩، ١١٤٩٩، ١١٦١٩، ١١٧٣٩، ١١٨٥٩، ١١٩٧٩، ١٢٠٩٩، ١٢٢١٩، ١٢٣٣٩، ١٢٤٥٩، ١٢٥٧٩، ١٢٦٩٩، ١٢٨١٩، ١٢٩٣٩، ١٣٠٥٩، ١٣١٧٩، ١٣٢٩٩، ١٣٤١٩، ١٣٥٣٩، ١٣٦٥٩، ١٣٧٧٩، ١٣٨٩٩، ١٤٠١٩، ١٤١٣٩، ١٤٢٥٩، ١٤٣٧٩، ١٤٤٩٩، ١٤٦١٩، ١٤٧٣٩، ١٤٨٥٩، ١٤٩٧٩، ١٥٠٩٩، ١٥٢١٩، ١٥٣٣٩، ١٥٤٥٩، ١٥٥٧٩، ١٥٦٩٩، ١٥٨١٩، ١٥٩٣٩، ١٦٠٥٩، ١٦١٧٩، ١٦٢٩٩، ١٦٤١٩، ١٦٥٣٩، ١٦٦٥٩، ١٦٧٧٩، ١٦٨٩٩، ١٦٩١٩، ١٧٠٣٩، ١٧١٥٩، ١٧٢٧٩، ١٧٣٩٩، ١٧٥١٩، ١٧٦٣٩، ١٧٧٥٩، ١٧٨٧٩، ١٧٩٩٩، ١٨١١٩، ١٨٢٣٩، ١٨٣٥٩، ١٨٤٧٩، ١٨٥٩٩، ١٨٦١٩، ١٨٧٣٩، ١٨٨٥٩، ١٨٩٧٩، ١٩٠٩٩، ١٩٢١٩، ١٩٣٣٩، ١٩٤٥٩، ١٩٥٧٩، ١٩٦٩٩، ١٩٨١٩، ١٩٩٣٩، ٢٠٠٥٩، ٢٠١٧٩، ٢٠٢٩٩، ٢٠٤١٩، ٢٠٥٣٩، ٢٠٦٥٩، ٢٠٧٧٩، ٢٠٨٩٩، ٢١٠١٩، ٢١١٣٩، ٢١٢٥٩، ٢١٣٧٩، ٢١٤٩٩، ٢١٦١٩، ٢١٧٣٩، ٢١٨٥٩، ٢١٩٧٩، ٢٢٠٩٩، ٢٢٢١٩، ٢٢٣٣٩، ٢٢٤٥٩، ٢٢٥٧٩، ٢٢٦٩٩، ٢٢٨١٩، ٢٢٩٣٩، ٢٣٠٥٩، ٢٣١٧٩، ٢٣٢٩٩، ٢٣٤١٩، ٢٣٥٣٩، ٢٣٦٥٩، ٢٣٧٧٩، ٢٣٨٩٩، ٢٤٠١٩، ٢٤١٣٩، ٢٤٢٥٩، ٢٤٣٧٩، ٢٤٤٩٩، ٢٤٦١٩، ٢٤٧٣٩، ٢٤٨٥٩، ٢٤٩٧٩، ٢٥٠٩٩، ٢٥٢١٩، ٢٥٣٣٩، ٢٥٤٥٩، ٢٥٥٧٩، ٢٥٦٩٩، ٢٥٨١٩، ٢٥٩٣٩، ٢٦٠٥٩، ٢٦١٧٩، ٢٦٢٩٩، ٢٦٤١٩، ٢٦٥٣٩، ٢٦٦٥٩، ٢٦٧٧٩، ٢٦٨٩٩، ٢٦٩١٩، ٢٧٠٣٩، ٢٧١٥٩، ٢٧٢٧٩، ٢٧٣٩٩، ٢٧٥١٩، ٢٧٦٣٩، ٢٧٧٥٩، ٢٧٨٧٩، ٢٧٩٩٩، ٢٨١١٩، ٢٨٢٣٩، ٢٨٣٥٩، ٢٨٤٧٩، ٢٨٥٩٩، ٢٨٦١٩، ٢٨٧٣٩، ٢٨٨٥٩، ٢٨٩٧٩، ٢٩٠٩٩، ٢٩٢١٩، ٢٩٣٣٩، ٢٩٤٥٩، ٢٩٥٧٩، ٢٩٦٩٩، ٢٩٨١٩، ٢٩٩٣٩، ٣٠٠٥٩، ٣٠١٧٩، ٣٠٢٩٩، ٣٠٤١٩، ٣٠٥٣٩، ٣٠٦٥٩، ٣٠٧٧٩، ٣٠٨٩٩، ٣١٠١٩، ٣١١٣٩، ٣١٢٥٩، ٣١٣٧٩، ٣١٤٩٩، ٣١٦١٩، ٣١٧٣٩، ٣١٨٥٩، ٣١٩٧٩، ٣٢٠٩٩، ٣٢٢١٩، ٣٢٣٣٩، ٣٢٤٥٩، ٣٢٥٧٩، ٣٢٦٩٩، ٣٢٨١٩، ٣٢٩٣٩، ٣٣٠٥٩، ٣٣١٧٩، ٣٣٢٩٩، ٣٣٤١٩، ٣٣٥٣٩، ٣٣٦٥٩، ٣٣٧٧٩، ٣٣٨٩٩، ٣٤٠١٩، ٣٤١٣٩، ٣٤٢٥٩، ٣٤٣٧٩، ٣٤٤٩٩، ٣٤٦١٩، ٣٤٧٣٩، ٣٤٨٥٩، ٣٤٩٧٩، ٣٥٠٩٩، ٣٥٢١٩، ٣٥٣٣٩، ٣٥٤٥٩، ٣٥٥٧٩، ٣٥٦٩٩، ٣٥٨١٩، ٣٥٩٣٩، ٣٦٠٥٩، ٣٦١٧٩، ٣٦٢٩٩، ٣٦٤١٩، ٣٦٥٣٩، ٣٦٦٥٩، ٣٦٧٧٩، ٣٦٨٩٩، ٣٦٩١٩، ٣٧٠٣٩، ٣٧١٥٩، ٣٧٢٧٩، ٣٧٣٩٩، ٣٧٥١٩، ٣٧٦٣٩، ٣٧٧٥٩، ٣٧٨٧٩، ٣٧٩٩٩، ٣٨١١٩، ٣٨٢٣٩، ٣٨٣٥٩، ٣٨٤٧٩، ٣٨٥٩٩، ٣٨٦١٩، ٣٨٧٣٩، ٣٨٨٥٩، ٣٨٩٧٩، ٣٩٠٩٩، ٣٩٢١٩، ٣٩٣٣٩، ٣٩٤٥٩، ٣٩٥٧٩، ٣٩٦٩٩، ٣٩٨١٩، ٣٩٩٣٩، ٤٠٠٥٩، ٤٠١٧٩، ٤٠٢٩٩، ٤٠٤١٩، ٤٠٥٣٩، ٤٠٦٥٩، ٤٠٧٧٩، ٤٠٨٩٩، ٤١٠١٩، ٤١١٣٩، ٤١٢٥٩، ٤١٣٧٩، ٤١٤٩٩، ٤١٦١٩، ٤١٧٣٩، ٤١٨٥٩، ٤١٩٧٩، ٤٢٠٩٩، ٤٢٢١٩، ٤٢٣٣٩، ٤٢٤٥٩، ٤٢٥٧٩، ٤٢٦٩٩، ٤٢٨١٩، ٤٢٩٣٩، ٤٣٠٥٩، ٤٣١٧٩، ٤٣٢٩٩، ٤٣٤١٩، ٤٣٥٣٩، ٤٣٦٥٩، ٤٣٧٧٩، ٤٣٨٩٩، ٤٣٩١٩، ٤٤٠٣٩، ٤٤١٥٩، ٤٤٢٧٩، ٤٤٣٩٩، ٤٤٥١٩، ٤٤٦٣٩، ٤٤٧٥٩، ٤٤٨٧٩، ٤٤٩٩٩، ٤٥٠١٩، ٤٥١٣٩، ٤٥٢٥٩، ٤٥٣٧٩، ٤٥٤٩٩، ٤٥٥٧٩، ٤٥٦٩٩، ٤٥٨١٩، ٤٥٩٣٩، ٤٦٠٥٩، ٤٦١٧٩، ٤٦٢٩٩، ٤٦٤١٩، ٤٦٥٣٩، ٤٦٦٥٩، ٤٦٧٧٩، ٤٦٨٩٩، ٤٦٩١٩، ٤٧٠٣٩، ٤٧١٥٩، ٤٧٢٧٩، ٤٧٣٩٩، ٤٧٥١٩، ٤٧٦٣٩، ٤٧٧٥٩، ٤٧٨٧٩، ٤٧٩٩٩، ٤٨٠١٩، ٤٨١٣٩، ٤٨٢٥٩، ٤٨٣٧٩، ٤٨٤٩٩، ٤٨٥١٩، ٤٨٦٣٩، ٤٨٧٥٩، ٤٨٨٧٩، ٤٨٩٩٩، ٤٩٠١٩، ٤٩١٣٩، ٤٩٢٥٩، ٤٩٣٧٩، ٤٩٤٩٩، ٤٩٥١٩، ٤٩٦٣٩، ٤٩٧٥٩، ٤٩٨٧٩، ٤٩٩٩٩، ٥٠٠١٩، ٥٠١٣٩، ٥٠٢٥٩، ٥٠٣٧٩، ٥٠٤٩٩، ٥٠٥١٩، ٥٠٦٣٩، ٥٠٧٥٩، ٥٠٨٧٩، ٥٠٩٩٩، ٥١٠١٩، ٥١١٣٩، ٥١٢٥٩، ٥١٣٧٩، ٥١٤٩٩، ٥١٥١٩، ٥١٦٣٩، ٥١٧٥٩، ٥١٨٧٩، ٥١٩٩٩، ٥٢٠١٩، ٥٢١٣٩، ٥٢٢٥٩، ٥٢٣٧٩، ٥٢٤٩٩، ٥٢٥١٩، ٥٢٦٣٩، ٥٢٧٥٩، ٥٢٨٧٩، ٥٢٩٩٩، ٥٣٠١٩، ٥٣١٣٩، ٥٣٢٥٩، ٥٣٣٧٩، ٥٣٤٩٩، ٥٣٥١٩، ٥٣٦٣٩، ٥٣٧٥٩، ٥٣٨٧٩، ٥٣٩٩٩، ٥٤٠١٩، ٥٤١٣٩، ٥٤٢٥٩، ٥٤٣٧٩، ٥٤٤٩٩، ٥٤٥١٩، ٥٤٦٣٩، ٥٤٧٥٩، ٥٤٨٧٩، ٥٤٩٩٩، ٥٥٠١٩، ٥٥١٣٩، ٥٥٢٥٩، ٥٥٣٧٩، ٥٥٤٩٩، ٥٥٥١٩، ٥٥٦٣٩، ٥٥٧٥٩، ٥٥٨٧٩، ٥٥٩٩٩، ٥٦٠١٩، ٥٦١٣٩، ٥٦٢٥٩، ٥٦٣٧٩، ٥٦٤٩٩، ٥٦٥١٩، ٥٦٦٣٩، ٥٦٧٥٩، ٥٦٨٧٩، ٥٦٩٩٩، ٥٧٠١٩، ٥٧١٣٩، ٥٧٢٥٩، ٥٧٣٧٩، ٥٧٤٩٩، ٥٧٥١٩، ٥٧٦٣٩، ٥٧٧٥٩، ٥٧٨٧٩، ٥٧٩٩٩، ٥٨٠١٩، ٥٨١٣٩، ٥٨٢٥٩، ٥٨٣٧٩، ٥٨٤٩٩، ٥٨٥١٩، ٥٨٦٣٩، ٥٨٧٥٩، ٥٨٨٧٩، ٥٨٩٩٩، ٥٩٠١٩، ٥٩١٣٩، ٥٩٢٥٩، ٥٩٣٧٩، ٥٩٤٩٩، ٥٩٥١٩، ٥٩٦٣٩، ٥٩٧٥٩، ٥٩٨٧٩، ٥٩٩٩٩، ٦٠٠١٩، ٦٠١٣٩، ٦٠٢٥٩، ٦٠٣٧٩، ٦٠٤٩٩، ٦٠٥١٩، ٦٠٦٣٩، ٦٠٧٥٩، ٦٠٨٧٩، ٦٠٩٩٩، ٦١٠١٩، ٦١١٣٩، ٦١٢٥٩، ٦١٣٧٩، ٦١٤٩٩، ٦١٥١٩، ٦١٦٣٩، ٦١٧٥٩، ٦١٨٧٩، ٦١٩٩٩، ٦٢٠١٩، ٦٢١٣٩، ٦٢٢٥٩، ٦٢٣٧٩، ٦٢٤٩٩، ٦٢٥١٩، ٦٢٦٣٩، ٦٢٧٥٩، ٦٢٨٧٩، ٦٢٩٩٩، ٦٣٠١٩، ٦٣١٣٩، ٦٣٢٥٩، ٦٣٣٧٩، ٦٣٤٩٩، ٦٣٥١٩، ٦٣٦٣٩، ٦٣٧٥٩، ٦٣٨٧٩، ٦٣٩٩٩، ٦٤٠١٩، ٦٤١٣٩، ٦٤٢٥٩، ٦٤٣٧٩، ٦٤٤٩٩، ٦٤٥١٩، ٦٤٦٣٩، ٦٤٧٥٩، ٦٤٨٧٩، ٦٤٩٩٩، ٦٥٠١٩، ٦٥١٣٩، ٦٥٢٥٩، ٦٥٣٧٩، ٦٥٤٩٩، ٦٥٥١٩، ٦٥٦٣٩، ٦٥٧٥٩، ٦٥٨٧٩، ٦٥٩٩٩، ٦٦٠١٩، ٦٦١٣٩، ٦٦٢٥٩، ٦٦٣٧٩، ٦٦٤٩٩، ٦٦٥١٩، ٦٦٦٣٩، ٦٦٧٥٩، ٦٦٨٧٩، ٦٦٩٩٩، ٦٧٠١٩، ٦٧١٣٩، ٦٧٢٥٩، ٦٧٣٧٩، ٦٧٤٩٩، ٦٧٥١٩، ٦٧٦٣٩، ٦٧٧٥٩، ٦٧٨٧٩، ٦٧٩٩٩، ٦٨٠١٩، ٦٨١٣٩، ٦٨٢٥٩، ٦٨٣٧٩، ٦٨٤٩٩، ٦٨٥١٩، ٦٨٦٣٩، ٦٨٧٥٩، ٦٨٨٧٩، ٦٨٩٩٩، ٦٩٠١٩، ٦٩١٣٩، ٦٩٢٥٩، ٦٩٣٧٩، ٦٩٤٩٩، ٦٩٥١٩، ٦٩٦٣٩، ٦٩٧٥٩، ٦٩٨٧٩، ٦٩٩٩٩، ٧٠٠١٩، ٧٠١٣٩، ٧٠٢٥٩، ٧٠٣٧٩، ٧٠٤٩٩، ٧٠٥١٩، ٧٠٦٣٩، ٧٠٧٥٩، ٧٠٨٧٩، ٧٠٩٩٩، ٧١٠١٩، ٧١١٣٩، ٧١٢٥٩، ٧١٣٧٩، ٧١٤٩٩، ٧١٥١٩، ٧١٦٣٩، ٧١٧٥٩، ٧١٨٧٩، ٧١٩٩٩، ٧٢٠١٩، ٧٢١٣٩، ٧٢٢٥٩، ٧٢٣٧٩، ٧٢٤٩٩، ٧٢٥١٩، ٧٢٦٣٩، ٧٢٧٥٩، ٧٢٨٧٩، ٧٢٩٩٩، ٧٣٠١٩، ٧٣١٣٩، ٧٣٢٥٩، ٧٣٣٧٩، ٧٣٤٩٩، ٧٣٥١٩، ٧٣٦٣٩، ٧٣٧٥٩، ٧٣٨٧٩، ٧٣٩٩٩، ٧٤٠١٩، ٧٤١٣٩، ٧٤٢٥٩، ٧٤٣٧٩، ٧٤٤٩٩، ٧٤٥١٩، ٧٤٦٣٩، ٧٤٧٥٩، ٧٤٨٧٩، ٧٤٩٩٩، ٧٥٠١٩، ٧٥١٣٩، ٧٥٢٥٩، ٧٥٣٧٩، ٧٥٤٩٩، ٧٥٥١٩، ٧٥٦٣٩، ٧٥٧٥٩، ٧٥٨٧٩، ٧٥٩٩٩، ٧٦٠١٩، ٧٦١٣٩، ٧٦٢٥٩، ٧٦٣٧٩، ٧٦٤٩٩، ٧٦٥١٩، ٧٦٦٣٩، ٧٦٧٥٩، ٧٦٨٧٩، ٧٦٩٩٩، ٧٧٠١٩، ٧٧١٣٩، ٧٧٢٥٩، ٧٧٣٧٩، ٧٧٤٩٩، ٧٧٥١٩، ٧٧٦٣٩، ٧٧٧٥٩، ٧٧٨٧٩، ٧٧٩٩٩، ٧٨٠١٩، ٧٨١٣٩، ٧٨٢٥٩، ٧٨٣٧٩، ٧٨٤٩٩، ٧٨٥١٩، ٧٨٦٣٩، ٧٨٧٥٩، ٧٨٨٧٩، ٧٨٩٩٩، ٧٩٠١٩، ٧٩١٣٩، ٧٩٢٥٩، ٧٩٣٧٩، ٧٩٤٩٩، ٧٩٥١٩، ٧٩٦٣٩، ٧٩٧٥٩، ٧٩٨٧٩، ٧٩٩٩٩، ٨٠٠١٩، ٨٠١٣٩، ٨٠٢٥٩، ٨٠٣٧٩، ٨٠٤٩٩، ٨٠٥١٩، ٨٠٦٣٩، ٨٠٧٥٩، ٨٠٨٧٩، ٨٠٩٩٩، ٨١٠١٩، ٨١١٣٩، ٨١٢٥٩، ٨١٣٧٩، ٨١٤٩٩، ٨١٥١٩، ٨١٦٣٩، ٨١٧٥٩، ٨١٨٧٩، ٨١٩٩٩، ٨٢٠١٩، ٨٢١٣٩، ٨٢٢٥٩، ٨٢٣٧٩، ٨٢٤٩٩، ٨٢٥١٩، ٨٢٦٣٩، ٨٢٧٥٩، ٨٢٨٧٩، ٨٢٩٩٩، ٨٣٠١٩، ٨٣١٣٩، ٨٣٢٥٩، ٨٣٣٧٩، ٨٣٤٩٩، ٨٣٥١٩، ٨٣٦٣٩، ٨٣٧٥٩، ٨٣٨٧٩، ٨٣٩٩٩، ٨٤٠١٩، ٨٤١٣٩، ٨٤٢٥٩، ٨٤٣٧٩، ٨٤٤٩٩، ٨٤٥١٩، ٨٤٦٣٩، ٨٤٧٥٩، ٨٤٨٧٩، ٨٤٩٩٩، ٨٥٠١٩، ٨٥١٣٩، ٨٥٢٥٩، ٨٥٣٧٩، ٨٥٤٩٩، ٨٥٥١٩، ٨٥٦٣٩، ٨٥٧٥٩، ٨٥٨٧٩، ٨٥٩٩٩، ٨٦٠١٩، ٨٦١٣٩، ٨٦٢٥٩، ٨٦٣٧٩، ٨٦٤٩٩، ٨٦٥١٩، ٨٦٦٣٩، ٨٦٧٥٩، ٨٦٨٧٩، ٨٦٩٩٩، ٨٧٠١٩، ٨٧١٣٩، ٨٧٢٥٩، ٨٧٣٧٩، ٨٧٤٩٩، ٨٧٥١٩، ٨٧٦٣٩، ٨٧٧٥٩، ٨٧٨٧٩، ٨٧٩٩٩، ٨٨٠١٩، ٨٨١٣٩، ٨٨٢٥٩، ٨٨٣٧٩، ٨٨٤٩٩، ٨٨٥١٩، ٨٨٦٣٩، ٨٨٧٥٩، ٨٨٨٧٩، ٨٨٩٩٩، ٨٩٠١٩، ٨٩١٣٩، ٨٩٢٥٩، ٨٩٣٧٩، ٨٩٤٩٩، ٨٩٥١٩، ٨٩٦٣٩، ٨٩٧٥٩، ٨٩٨٧٩، ٨٩٩٩٩، ٩٠٠١٩، ٩٠١٣٩، ٩٠٢٥٩، ٩٠٣٧٩، ٩٠٤٩٩، ٩٠٥١٩، ٩٠٦٣٩، ٩٠٧٥٩، ٩٠٨٧٩، ٩٠٩٩٩، ٩١٠١٩، ٩١١٣٩، ٩١٢٥٩، ٩١٣٧٩، ٩١٤٩٩، ٩١٥١٩، ٩١٦٣٩، ٩١٧٥٩، ٩١٨٧٩، ٩١٩٩٩، ٩٢٠١٩، ٩٢١٣٩، ٩٢٢٥٩، ٩٢٣٧٩، ٩٢٤٩٩، ٩٢٥١٩، ٩٢٦٣٩، ٩٢٧٥٩، ٩٢٨٧٩، ٩٢٩٩٩، ٩٣٠١٩، ٩٣١٣٩، ٩٣٢٥٩، ٩٣٣٧٩، ٩٣٤٩٩، ٩٣٥١٩، ٩٣٦٣٩، ٩٣٧٥٩، ٩٣٨٧٩، ٩٣٩٩٩، ٩٤٠١٩، ٩٤١٣٩، ٩٤٢٥٩، ٩٤٣٧٩، ٩٤٤٩٩، ٩٤٥١٩، ٩٤٦٣٩، ٩٤٧٥٩، ٩٤٨٧٩، ٩٤٩٩٩، ٩٥٠١٩، ٩٥١٣٩، ٩٥٢٥٩، ٩٥٣٧٩، ٩٥٤٩٩، ٩٥٥١٩، ٩٥٦٣٩، ٩٥٧٥٩، ٩٥٨٧٩، ٩٥٩٩

**(تنمية)**

**٢٠٧- تدريبات إعادة التعليم**  
استعمال خاصية التوزيع

حل المعادلات بالتحليل، يمكنك استعمال الخاصية الآتية مع التحليل لحل معادلات معينة:

أي عددين حقيقيين أ، ب، إذا كان أ ب = صفر، فإن أ = ٠، أو ب = ٠، أو كليهما خاصية الضرب الصفرى	يساوي صفرًا.
---	--------------

اكتب المعادلة في صورة أ ب = ٠، وتحقق من صحة الحل.

مثال

المعادلة الأصلية  
حل بالخروج (ق.م.٠)  
خاصية الضرب الصفرى  
حل كل معادلة

تحقق، وعرض عن س بكل من ٠، ١ في المعادلة الأصلية.

$$٩س + ٣ = ٠$$

$$س(٩س + ٣) = ٠$$

$$س = ٠ \text{ أو } ٩س + ٣ = ٠$$

$$س = ٠ \text{ أو } س = -\frac{٣}{٩}$$

$$س = ٠ \text{ أو } س = -\frac{١}{٣}$$

تقاربتين

حل كلًا من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل:

١) س(٣س + ٣) = ٠  
٢) ٣(٣م - ٤) = ٠  
٣) (٣ - ز)(٣ + ز) = ٠  
٤) ٣س(٣س - ١) = ٠  
٥) (٤ + م)(٨ - م) = ٣  
٦) ٥(٣ - ٥) = ٢٥  
٧) (٤ - ج)(٢ + ج - ٧) = ٠  
٨) ٥ل - ١٥ = ٠  
٩) ٤س = ٢٨  
١٠) ١٢س - ١ = ٠  
١١) (٣ + ١٥)(٣ + ١٥) = ٣٦  
١٢) ٨ص + ١٢ = ٠  
١٣) س(٣ - ١) = ٠  
١٤) (٤ - ٤ص)(٤ - ٤ص) = ٠  
١٥) ٢٤م = ٤  
١٦) ١٢(٢ + ١) = ٣٠  
١٧) ٣ - ١ = ١٢  
١٨) (٤ + ١٢)(٤ + ١٢) = ١٦٠  
١٩) ٣س = ١٢  
٢٠) ٤(٤ - ٤) = ٠

**٢٠٧- تدريبات إعادة التعليم**  
استعمال خاصية التوزيع

استعمال خاصية التوزيع في التحليل، استعمات خاصية التوزيع في الفصل السابق لضرب وحدة حد في كثيرة حدود. ويمكنك الأداة من ذلك عكسًا لتبسيط كثيرة الحدود في صورة حاصل ضرب عاملين: وحدة الحد وكثيرة حدود. قارن بين العمودين في الجدول الآتي:

التحليل	الضرب
$١٣ + ١٣ = ٢٦ + ١$	$١٣(١ + ٢) = ١٣ + ٢٦$
س - س = س - س = س(١ - ٤)	س(١ - ٤) = س - س - س = س - ٤س
١٢س ص + ٢س = ٢س(٦ص + ١)	٢س(٦ص + ١) = ١٢س ص + ٢س

مثال ٢

يتضمن الجدود:

١)  $١٣ + ١٣ = ٢٦ + ١$   
٢)  $١٣(١ + ٢) = ١٣ + ٢٦$   
٣)  $١٣س + ١٣ = ١٣(س + ١)$   
٤)  $١٣س(١٣س - ١) = ١٣س - ١٣س$   
٥)  $١٣س(١٣س - ١) = ١٣س - ١٣س$   
٦)  $١٣س(١٣س - ١) = ١٣س - ١٣س$   
٧)  $١٣س(١٣س - ١) = ١٣س - ١٣س$   
٨)  $١٣س(١٣س - ١) = ١٣س - ١٣س$   
٩)  $١٣س(١٣س - ١) = ١٣س - ١٣س$   
١٠)  $١٣س(١٣س - ١) = ١٣س - ١٣س$   
١١)  $١٣س(١٣س - ١) = ١٣س - ١٣س$   
١٢)  $١٣س(١٣س - ١) = ١٣س - ١٣س$   
١٣)  $١٣س(١٣س - ١) = ١٣س - ١٣س$   
١٤)  $١٣س(١٣س - ١) = ١٣س - ١٣س$   
١٥)  $١٣س(١٣س - ١) = ١٣س - ١٣س$   
١٦)  $١٣س(١٣س - ١) = ١٣س - ١٣س$   
١٧)  $١٣س(١٣س - ١) = ١٣س - ١٣س$   
١٨)  $١٣س(١٣س - ١) = ١٣س - ١٣س$   
١٩)  $١٣س(١٣س - ١) = ١٣س - ١٣س$   
٢٠)  $١٣س(١٣س - ١) = ١٣س - ١٣س$

تقاربتين

حل كلًا من كثيرات الحدود الآتية:

١)  $١٣س + ١٣ = ٢٦ + ١$   
٢)  $١٣(١ + ٢) = ١٣ + ٢٦$   
٣)  $١٣س + ١٣ = ١٣(س + ١)$   
٤)  $١٣س(١٣س - ١) = ١٣س - ١٣س$   
٥)  $١٣س(١٣س - ١) = ١٣س - ١٣س$   
٦)  $١٣س(١٣س - ١) = ١٣س - ١٣س$   
٧)  $١٣س(١٣س - ١) = ١٣س - ١٣س$   
٨)  $١٣س(١٣س - ١) = ١٣س - ١٣س$   
٩)  $١٣س(١٣س - ١) = ١٣س - ١٣س$   
١٠)  $١٣س(١٣س - ١) = ١٣س - ١٣س$   
١١)  $١٣س(١٣س - ١) = ١٣س - ١٣س$   
١٢)  $١٣س(١٣س - ١) = ١٣س - ١٣س$   
١٣)  $١٣س(١٣س - ١) = ١٣س - ١٣س$   
١٤)  $١٣س(١٣س - ١) = ١٣س - ١٣س$   
١٥)  $١٣س(١٣س - ١) = ١٣س - ١٣س$   
١٦)  $١٣س(١٣س - ١) = ١٣س - ١٣س$   
١٧)  $١٣س(١٣س - ١) = ١٣س - ١٣س$   
١٨)  $١٣س(١٣س - ١) = ١٣س - ١٣س$   
١٩)  $١٣س(١٣س - ١) = ١٣س - ١٣س$   
٢٠)  $١٣س(١٣س - ١) = ١٣س - ١٣س$

## ٢-٧ التدرجات الإثرائية التركيبات الخطية

يمكنك كتابة (ق. م. أ) العددين في صورة تركيب خطي لها. فالتركيب الخطي للعددين أ ب هو عبارة على صورة أس + ص، حيث س، ص عددان صحيحان.

مثال احب القاسم المشترك الأكبر للعددين ٣١، ٥٢ على صورة تركيب خطي.

أولاً: أوجد (ق. م. أ) للعددين مستعملاً خوارزمية إقليدس.

اقسم العدد الأكبر ٥٢ على العدد الأصغر ٣١، ثم اقسم القسوم عليه على الباقي في كل مرة حتى يصبح الباقي صفراً. يكون الباقي الأخير غير الصفري ٤ هو (ق. م. أ) للعددين ٣١، ٥٢. ويبان ذلك أدناه:

$$\begin{array}{r} 4 \\ 4 \overline{) 31} \\ \underline{12} \phantom{00} \\ 19 \\ 4 \overline{) 19} \\ \underline{8} \phantom{00} \\ 11 \\ 4 \overline{) 11} \\ \underline{8} \phantom{00} \\ 3 \\ 4 \overline{) 3} \\ \underline{3} \phantom{00} \\ 0 \end{array}$$

في هذه الحالة، ٤ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين ٣١، ٥٢. لكتابة ٤ في صورة تركيب خطي للعددين ٣١، ٥٢، فإنه يجب كتابته كما يأتي:

$$4 = 3 \times 1 + 0 \times 2$$

أوجد هذين العددين الصحيحين مستعملاً المحاولة والخطأ.

العددان الصحيحان هما: س = ٣، ص = ٢

لذا فالتركيب الخطي للقاسم المشترك الأكبر للعددين ٣١، ٥٢ هو:

$$4 = (3) \times 1 + (2) \times 2$$

احب القاسم المشترك الأكبر لعددين فيما يأتي في صورة تركيب خطي:

- (١)  $28 \times 1 + (-1) \times 21 = 7$
- (٢)  $28 \times 1 + (-1) \times 21 = 7$
- (٣)  $31 \times 1 + (-2) \times 2 = 27$
- (٤)  $31 \times 1 + (-2) \times 2 = 27$
- (٥)  $20 \times 1 + (-3) \times 18 = 4$
- (٦)  $20 \times 1 + (-3) \times 18 = 4$

## ٢-٧ تدريبات حل المسألة استعمال خاصية التوزيع

(٤) قفزة رأسيه: يُقاس ارتفاع قفزتك الرأسيه بطرح طولك وأنت واقف، من أعلى ارتفاع يمكنك أن تعمل إليه، وذلك عندما تقفز دون جري، يصل الارتفاع النموذجي للقفزة الرأسيه للاعبين المحترفين إلى ٣٤ بوصة. فإذا قفز لاعب محترف قفزة رأسيه، وكانت معادله ارتفاعه بوحه بعد ن ثانيه هي:

$$h = 16t^2 - 16t$$

فحل المعادله عندما  $h = 0$ ، مؤثراً إجاباتك إلى أقرب جزء من مئه، ثم قترها.

ن = صفح، ن = ٠.٨٤٤

يحل اللاعب إلى الأرض بعد ٠.٨٤٤ ثانيه تقريباً من بدء القفز.

**الغاب القوي:** يتدرب باس على رمي القرص، وقد رمى القرص إلى أعلى بسرعة ابتدائية قدرها ١٣ م/ثا. ثانيه، استخدم المعادله:  $f = 13t - 5t^2$ . حيث ف تقيّر عن ارتفاع القرص عن سطح الأرض بعد ن ثانيه من رمي القرص. (احب عن السؤالين ١٥، ١٤:

(٥) ما الزمن الذي يستغرقه القرص حتى يستقر على الأرض؟

٢.٧٩٥ ثانيه

(٦) إذا وصل القرص إلى أعلى ارتفاع له عند النقطة الواقعة بين صفره وجموده، فما أقصى ارتفاع له؟

٩.٦ م

(١) هزيه: يُقال: أن العلم جاليليو أسقط أجساماً مختلفه الأوزان من برج بيزا الثالث. عندما كان يعمل على تطوير معادله للسقوط الحر للأجسام، والعلاقة التي اكتشفها بين مسافة سقوط الجسم (ف) بعد زمن قدره (ن) ثانيه، وصفتها هي  $f = 16.1n^2$  (ف) بعد زمن قدره (ن) ثانيه، والتي يمكن إيجادها في المعادله:  $ص = 16.1n^2$ ، حيث ص ارتفاع جسم هتدرف من سطح الأرض إلى أعلى بالأقدام بعد ن ثانيه، ومعدل تغير سرعه ٣٢ قدماً/ثانيه. حل هذه المعادله عندما ص = صفح.

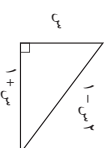
ن = ٠.٢٥، ٠.٥

(٢) بركة سياحه: بركة سياحه مستطيلة الشكل إذا كانت مساحتها (م)، حيث  $م = 12س - س^2$ ، س عرض البركة. احب عبارة تمثل طول البركة.

س = ١٢

(٣) إنشاءات: قامت شركة بناء بإنشاء سقف على شكل مثلث لقرصه على سطح بنايه. مثل القارل السطح بالابعاد الميئه أدناه (بالأصابع). أوجد أطوال أضلاع المثلث مستعملاً نظرية فيثاغورس.

٥٥، ٤٤، ٣٣



## تنمية

المعادلات التربيعية:  $س^2 + ب س + ج = ٠$

حل المعادلات بالتحويل، يمكنك استعمال التحليل وخاصة التربيع الصغرى لحل العديد من المعادلات التي في الصورة:  $س^2 + ب س + ج = ٠$

مثال ٢

مفروقات، اطلق صواريخ إلى أعلى بسرعة ابتدائية  $٢٧٨٨$  قدمًا في الثانية. كم ثانية يحتاج الصاروخ ليصطدم بالأرض؟

عقل الصيغة  $ف = ع ن - ١٦ ن^2$  ارتفاع الصاروخ بعد  $ن$  ثانية من انطلاقه بسرعة ابتدائية  $١٦$  قدم في الثانية.

المعادلة الأصلية

 $٠ = ٢٧٨٨ - ١٦ ن^2$ 
 $٠ = ١٦ ن - ٢٧٨٨$ 
 $٠ = ١٦ ن - ١٤٣$  أو  $٠ = ١٦ ن - ١٤٣$ 
 $٠ = ١٦ ن$  أو  $٠ = ١٦ ن - ١٤٣$ 
 $٠ = ١٦ ن$  أو  $٠ = ١٦ ن - ١٤٣$ 
 $٠ = ١٦ ن$  أو  $٠ = ١٦ ن - ١٤٣$ 
 $٠ = ١٦ ن$  أو  $٠ = ١٦ ن - ١٤٣$ 

## ٣-٧

تدريبات إعادة التعليم

حل المعادلات بالتحويل، يمكنك استعمال التحليل وخاصة التربيع الصغرى لحل العديد من المعادلات التي في الصورة:  $س^2 + ب س + ج = ٠$

مثال ١

عقل الصيغة  $ف = ع ن - ١٦ ن^2$  ارتفاع الصاروخ بعد  $ن$  ثانية من انطلاقه بسرعة ابتدائية  $١٦$  قدم في الثانية.

عقل الصيغة  $ف = ع ن - ١٦ ن^2$  ارتفاع الصاروخ بعد  $ن$  ثانية من انطلاقه بسرعة ابتدائية  $١٦$  قدم في الثانية.

المعادلة الأصلية

 $٠ = ٢٧٨٨ - ١٦ ن^2$ 
 $٠ = ١٦ ن - ٢٧٨٨$ 
 $٠ = ١٦ ن - ١٤٣$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 

## ٣-٧

تدريبات إعادة التعليم

حل المعادلات بالتحويل، يمكنك استعمال التحليل وخاصة التربيع الصغرى لحل العديد من المعادلات التي في الصورة:  $س^2 + ب س + ج = ٠$

مثال ٢

مفروقات، اطلق صواريخ إلى أعلى بسرعة ابتدائية  $٢٧٨٨$  قدمًا في الثانية. كم ثانية يحتاج الصاروخ ليصطدم بالأرض؟

عقل الصيغة  $ف = ع ن - ١٦ ن^2$  ارتفاع الصاروخ بعد  $ن$  ثانية من انطلاقه بسرعة ابتدائية  $١٦$  قدم في الثانية.

المعادلة الأصلية

 $٠ = ٢٧٨٨ - ١٦ ن^2$ 
 $٠ = ١٦ ن - ٢٧٨٨$ 
 $٠ = ١٦ ن - ١٤٣$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 

## ٣-٧

تدريبات إعادة التعليم

حل المعادلات بالتحويل، يمكنك استعمال التحليل وخاصة التربيع الصغرى لحل العديد من المعادلات التي في الصورة:  $س^2 + ب س + ج = ٠$

مثال ١

مفروقات، اطلق صواريخ إلى أعلى بسرعة ابتدائية  $٢٧٨٨$  قدمًا في الثانية. كم ثانية يحتاج الصاروخ ليصطدم بالأرض؟

عقل الصيغة  $ف = ع ن - ١٦ ن^2$  ارتفاع الصاروخ بعد  $ن$  ثانية من انطلاقه بسرعة ابتدائية  $١٦$  قدم في الثانية.

المعادلة الأصلية

 $٠ = ٢٧٨٨ - ١٦ ن^2$ 
 $٠ = ١٦ ن - ٢٧٨٨$ 
 $٠ = ١٦ ن - ١٤٣$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$ 
 $٠ = ١٦ ن$

## ٢-٧ تدريبات الإثرائية أحجية أعداد أولية

للمعد الأول فقط عاملان مختلفان هي العدد نفسه والعدد ١. العدد ٦ ليس أولياً؛ لأن له أكثر من عاملين. ٣، ٢ من العوامل ٦.

المعدان ٧، ٥ أوليان، العدد ١ ليس أولياً.

١) أوجد ٢٥ عدداً أولياً؛ كل منها أصغر من ١٠٠ مستعيناً بالآلة الحاسبة.

٩٧، ٨٩، ٨٣، ٧٩، ٧٣، ٦٧، ٦١، ٥٩، ٥٣، ٤٧، ٤٣، ٤١، ٣٧، ٣١، ٢٩، ١٩، ١٣، ١١، ٧، ٥، ٣، ٢

كانت الأعداد الأولية من اهتمامات علماء الرياضيات لمدة قرون، وقد حاولوا إيجاد عبارات للحصول على جميع الأعداد الأولية، أي أعداد أولية فقط. اكتشف العالم (أويلر) عام ١٧٠٠م أن ثلاثة الحدود  $٢ + ٣ + ٤١$  تنتج أعداداً أولية لتقيم من من صفرك ٣٩.

٢) أوجد الأعداد الأولية لتقيم من من صفرك ٧ مستخدماً صيغة (أويلر).

٩٧، ٨٣، ٤٧، ٤٣، ٤١، ٣٧، ٣١، ٢٩، ١٩، ١٣، ١١، ٧، ٥، ٣، ٢

٣) بين أن ثلاثة الحدود  $٢ + ٣ + ٤١$  تعطي أعداداً أولية لتقيم كبيرة لـ  $٧$ .

تطبق أعداداً أولية لتقيم  $٧ = ٢، ٣، ٤، ١٠، ١٦، ٢٢، ٢٨، ٣٤، ٤٠، ٤٦، ٥٢، ٥٨، ٦٤، ٧٠، ٧٦، ٨٢، ٨٨، ٩٤، ١٠٠$

٤) أوجد أكبر عدد أولي ينتج من صيغة (أويلر).

١١٠١

بعض تخمين (حول باتش) على أن كل عدد زوجي غير الصفر، وأكبر من ٢، يمكن كتابته في صورة مجموع عددين أوليين. لم يثبت أي شخص أن هذا التخمين صحيح دائماً، ولكن لم يجد أي شخص مثالاً مضاداً له.

٥) بين أن تخمين (حول باتش) صحيح لأول ٥ أعداد زوجية أكبر من ٢

$٢ + ٣ = ٥$ ،  $٣ + ٤ = ٧$ ،  $٤ + ٥ = ٩$ ،  $٥ + ٦ = ١١$ ،  $٦ + ٧ = ١٣$

٦) أطر طريقة يستطيع شخص أن يستعملها لإثبات عدم صحة تخمين (حول باتش).

أوجد عدداً زوجياً لا يمكن كتابته في صورة مجموع عددين أوليين.

## ٢-٧ تدريبات حل المسألة التمكلات التبريرية: س + ب = ج + د

٤) هذبية: تعتمد درجة غليان الماء على الارتفاع (ع) فوق مستوى سطح البحر.

المعادلة الآتية تمثل عدد الدرجات الفهرنهايتية (د) تقريباً التي يغلي عليها الماء تحت الدرجة ٢١٢ ف.

وعلى الارتفاع (ع) فوق مستوى سطح البحر:

$$١٥ + ٥٢٠ = ٤$$

أوجد درجة غليان الماء التقريبية في موقع على ارتفاع

٥٣٠ قدم فوق مستوى سطح البحر.

$$١٠ = ٩٠$$

درجة غليان الماء في الموقع ٩٠ ف تقريباً.

٥) معالم تذكارية: يستخدم عالمٌ تذكاريًا على شكل هرم رباعي قائم في منتزه. يتطلب التصميم أن تكون ارتفاع الهرم ٩ أقدام، وعرض قاعدته، أصغر من طرفا

يه ٥ أقدام، وحجمه ١٥٠ قدمًا مكعبًا. تذكّر أن صيغة حجم الهرم هي:

$ح = \frac{1}{3} ع ق$ ، حيث ق مساحة القاعدة، ع الارتفاع.

١) اكتب معادلة لإيجاد عرض قاعدة الهرم؛ ثم حلها.

$$١٥٠ = \frac{1}{3} س (س + ٩) \text{ أو } ٩٥ = ١٥٠ + ٣س$$

$$٣س = ١٥٠ - ٩٥ = ٥٥$$

$$س = \frac{٥٥}{٣} \approx ١٨.٣٣$$

$$س = ١٨$$

$$س = ١٨$$

$$س = ١٨$$

$$س = ١٨$$

$$س = ١٨$$

$$س = ١٨$$

$$س = ١٨$$

$$س = ١٨$$

$$س = ١٨$$

$$س = ١٨$$

$$س = ١٨$$

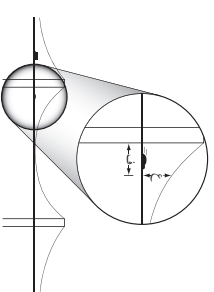
$$س = ١٨$$

$$س = ١٨$$

$$س = ١٨$$

$$س = ١٨$$

$$س = ١٨$$



إذا كان ارتفاع حزمة الأسلاك فوق سائق السيارة في لحظة ما هو ٤٩ بوصة، في الساعة بينه وبين الريح التي

يكون عندها ذاك؟

عند ٢٥، ١١ بوصة من الريح الأول.

الفضل ٧ التحليل والتمكلات التبريرية



التاريخ \_\_\_\_\_

الاسم \_\_\_\_\_

## ٤-٧ تدريبات الإثباتية نماذج مساحة تثلاثيات حدود تربيعية

بعد أن تعلّمت تجلث ثلاثة حدود تربيعية، يمكنك استعمال العوامل لرسم نماذج هندسية ثلاثية الحدود.

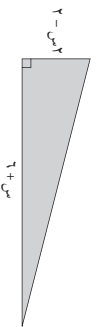
$$س^2 + ٦س + ٩ = (س + ٣)(س + ٣)$$

$$س^2 + ٦س$$

$$س^2 + ٩$$

لرسم نموذج مستطيل، استعمال القيمة ٣ بدلاً من  $س$ ،  
ليكون طول الضلع الأصغر ١. مع العلم أن وحدات القياس المستخدمة  
في الرسم هي المستمترات.

إذن مساحة المستطيل تساوي:  $س^2 + ٦س + ٩$



لرسم نموذج مثلث قائم الزاوية، تذكر أن مساحة المثلث  
تساوي نصف طول القاعدة ضرب الارتفاع. لذا سيكون طول أحد  
أضلاع المثلث مثلي طول الضلع الأصغر لنموذج المستطيل.

$$س^2 + ٦س + ٩ = (س + ٣)(س + ٣)$$

كذلك فإن مساحة المثلث القائم الزاوية تساوي:  $س^2 + ٦س + ٩$

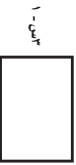
حلل كل ثلاثة حدود فيما يأتي، ثم ارسم كل نموذج:

$$١ = ٣س^2 + ٥س + ٢$$

$$١ = ٣س^2 + ٢س - ٣$$

ارسم مستطيلاً بإعادة مقياسه وحدة المستمتر.

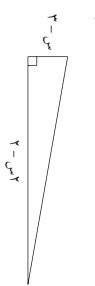
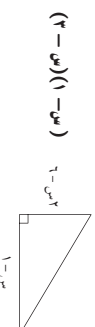
ارسم مستطيلاً بإعادة مقياسه وحدة المستمتر.



$$٣س^2 + ٥س + ٢ = (س + ٢)(٣س + ١)$$

$$٣س^2 + ٢س - ٣ = (س + ٣)(س - ١)$$

ارسم مثلثين قائمي الزاوية مختلفين، مستطيلاً وحدة المستمتر.



ارسم مثلثين قائمي الزاوية مختلفين، مستطيلاً وحدة المستمتر. استعمال ٥.



التحليل والمعادلات التربيعية  
الفصل ٧

٢١

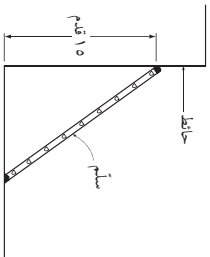
التاريخ \_\_\_\_\_

الاسم \_\_\_\_\_

## ٤-٧ تدريبات حل المسألة المعادلات التربيعية: أس + ب س + ج =

٤) سلاهم، يستند سلم إلى حائط، وليس رأس السلم  
الحائط عند ارتفاع ١٥ قدماً. فإذا كان طول السلم يزيد  
قدماً واحدة على مثلي بُعد قاعدته عن الحائط، فأوجد  
بُعد قاعدته عن الحائط. (النتيجة: حل المسألة مستطيلاً  
نظرياً فيثاغورس).

٨ أقسام



٥) موزونة، لدى عامر صفيحة معدنية مساحتها ٤٨٠  
قدماً مربعة، ويريد أن يستعملها في إنشاء خزان  
أسطواني لحفظ الحليب ارتفاعه ١٣.٥ قدماً. تذكر أن  
قانون المساحة المسطوية للأسطوانة الدائرية القائمة هو:

$$م = ط \times ر^2 + ٢ \times ط \times ت$$

أ) اكتب معادلة تربيعية (أحد طرفيها صفر)؛ للتعبير  
عن معطيات المسألة.

$$ط \times ر^2 + ٢٧ \times ط \times ت = ٤٨٠$$

ب) مستطلاً  $ط = ٣$  تقريباً، حل المعادلة بالنسبة إلى  $ر$ .

$$\{٢٣ - ٥\}$$

ج) ما طول نصف قطر الخزان الذي يتحقق على عامر  
أن يستعمله؟

٥ أقسام

٢٠

التحليل والمعادلات التربيعية  
الفصل ٧

١) تقطة التعادل: تظهر تقطة التعادل في الأفعال  
التجارية عندما تتساوى الواردات مع الكلفة. فُوربت  
ككفنة، تتخف الأظفان (الرواتب، الكهرياء، ... الخ)  
بالواردات من رسوم الدخل إليه، فلاحظ أن صفيحة  
الزمن عند تقطة التعادل هي:  $١٠٢ - ٢ - ٢٤ = ٧٦$   
أوجد عدد تقطة التعادل التي يتحقق على إدارة النصف أن  
تتمتع فيها بالوصول إلى تقطة التعادل.

٤ ساعات

٢) أعمال نجارة: يريد نجار إنشاء صندوق للألعاب،  
ارتفاعه قسمان، وعرضه يقص ٣ أقسام عن طوله. إذا  
كان حجم الصندوق ٨٠ قدماً مكعبة، فأوجد بُعديه.

$$الطول = ٨، العرض = ٥، العمق = ٥$$

٣) أثاث: يريد مدير إحدى المدارس شراء طاولات لغرفة  
الإدارة. تتاح الطاولات في متجر جاور، بإبعاد متنوعة، لكن  
كل طاولة تزيد طولها مترًا على مثلي عرضها. تتسع بترابيزة  
المرسة بترابيزة طاولة مساحة مسطحها  $٣٢ م^2$  بالضبط.

$$س^2 + ١٤س =$$

أوجد بُعدي الطاولة التي يمكن للمدرسة شراؤها.  
العرض = ١ م؛ الطول = ٣ م



### 5-7 التدرجات الإثرانية

#### تحليل ثلاثيات حدود من الدرجة الرابعة

بعض ثلاثيات الحدود في الصورة  $أ^4 + أب^3 + ب^4$  يمكن كتابتها في صورة فرق بين مربعين، ثم تحليلها.

$$\text{حلل } 4س^4 - 27ص^3 + 9ص^4$$

مثال

$$4س^4 - 27ص^3 + 9ص^4 = (2س^2 - 3ص)^2$$

الخطوة ١: أوجد الجذرين التربيعين لكل من الحدين الأول والآخر.

الخطوة ٢: أوجد باقي ناتج ضرب الجذرين التربيعين.

$$2س^2 - 3ص = 12ص^2$$

الخطوة ٣: افصل الحد الأوسط إلى قسمين، بحيث يكون القسّم الأول إيجابية للخطوة ٢ أو عكسها، والقسّم الآخر عكس مربع كامل.

$$3ص^2 - 12ص^2 + 25س^2 - 25س^2$$

الخطوة ٤: أصد كتابة ثلاثة الحدود في صورة فرق بين مربعين، ثم حلل.

$$4س^4 - 27ص^3 + 9ص^4 = (2س^2 - 3ص)^2 - (3ص)^2 + 25س^2 - 25س^2$$

$$= [(2س^2 - 3ص)^2 - (3ص)^2] + 25س^2 - 25س^2 = (2س^2 - 3ص)^2 - 9ص^2 + 25س^2 - 25س^2$$

$$= (2س^2 - 3ص)^2 - (3ص)^2 + 25س^2 - 25س^2 = (2س^2 - 3ص)^2 - (3ص)^2 + 25س^2 - 25س^2$$

حلل كل كثيرة حدود فيما يلي:

$$(1) \quad 1 + 2س + 3ص + 4س^2 + 5ص^2 + 6س^3 + 7ص^3 + 8س^4 + 9ص^4$$

$$(2) \quad 1 + 2س + 3ص + 4س^2 + 5ص^2 + 6س^3 + 7ص^3 + 8س^4 + 9ص^4$$

$$(3) \quad 1 + 2س + 3ص + 4س^2 + 5ص^2 + 6س^3 + 7ص^3 + 8س^4 + 9ص^4$$

$$(4) \quad 1 + 2س + 3ص + 4س^2 + 5ص^2 + 6س^3 + 7ص^3 + 8س^4 + 9ص^4$$

$$(5) \quad 1 + 2س + 3ص + 4س^2 + 5ص^2 + 6س^3 + 7ص^3 + 8س^4 + 9ص^4$$

$$(6) \quad 1 + 2س + 3ص + 4س^2 + 5ص^2 + 6س^3 + 7ص^3 + 8س^4 + 9ص^4$$

$$(7) \quad 1 + 2س + 3ص + 4س^2 + 5ص^2 + 6س^3 + 7ص^3 + 8س^4 + 9ص^4$$

$$(8) \quad 1 + 2س + 3ص + 4س^2 + 5ص^2 + 6س^3 + 7ص^3 + 8س^4 + 9ص^4$$

$$(9) \quad 1 + 2س + 3ص + 4س^2 + 5ص^2 + 6س^3 + 7ص^3 + 8س^4 + 9ص^4$$

### 5-7 تدرجات حل المسألة

#### المعادلات التربيعية: الفرق بين مربعين

(٤) معطاه:  $ن(ن-١) = ١١٦ + ٧٦$  المسألة التي يقضيها جسم بعد سقوطه سقوطًا حرًا من السكون من منطاد ارتفاعه ٥٧٦ قدمًا فوق سطح الأرض. بعد كم ن ثانية يصطدم الجسم بالأرض؟

بعد ٦ ثوانٍ

(٥) تصميم: تريد مريم شراء بساط مستطيل الشكل، مساحته ٨٠ قدمًا مربعة، لم تستغل تذكر طول البساط وعرضه، ولكنها تذكرت أن طوله يزيد ٨ على عدد مربعه، وعرضه يقطن ٨ عن العدد نفسه.

مساحة البساط = ٨٠

أ) اكتب معادلة تربيعية باستعمال المعلومات المعطاة.

$$س^2 - 14س + 40 = 0$$

$$\text{أو } س^2 - 14س + 40 = 0$$

ب) ما طول البساط وما عرضه؟

٢٠ قدمًا، ٤ أقدام

### 5-7 تدرجات حل المسألة

#### المعادلات التربيعية: الفرق بين مربعين

(١) أعمال خيرية: تقوم جمعية ببيع بطاقات لصالح بناء مشرع تجري الأطلاق. العارضة الآتية تساعد على حساب العائد المرجح للأشخاص الذين سيشترون البطاقات:

$$١٨١ - ٣٦ب$$

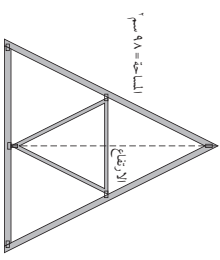
$$\text{حلل هذه العبارة تجليًا كاملًا.}$$

$$9(١٢ب + ٢) - ٣٦$$

(٢) بصريات: الماكس الموجود داخل مصباح يدوي على شكل قطع مكافئ، مساحته  $س^2 - ٢٥س$ . أوجد نقاط تقاطع الماكس مع عدسة المصباح، بإيجاد قيم  $س$  عندما  $ص = صفر$ .

$$٥ - 10$$

(٣) هندسة صمارة: بين الشكل أدناه وصفا على شكل منكس سطح شرفة. طول قاعدة الدعامة يساوي ارتفاعها، ومساحة السطح ٩٨ مترًا مربعًا.



أوجد ارتفاع الدعامة. ١٤

(تنمية)

## ٦-٧ تدريبات إعادة التعليم

### المعادلات التربيعية : المربعات الكاملة

حل معادلات تتضمن مربعات كاملة ؛ يمكنك استعمال التحليل وخاصة الضرب الصغري لحل معادلات تتضمن عوامل مكررة. يعطى العامل المكرر حلًا واحدًا فقط للمعادلة. قد تستعمل خاصية الجذر التربيعي أدناه أيضًا لحل معادلات معينة.

خاصية الجذر التربيعي لأي عدد حقيقي  $n \leq$  صفر، إذا كان  $n^2 =$  فإن  $n = \pm \sqrt{n}$

مثال حل كلٍّ من المعادلتين الآتيتين، وتحقق من صحة الحل:

(أ)  $x^2 - 2x + 9 = 0$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

المعادلة الأصلية  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

خاصية الجذر التربيعي  $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$8 \times 8 = 64$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$8 \times 8 = 64$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$  ،  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$

## ٦-٧ تدريبات إعادة التعليم

### المعادلات التربيعية : المربعات الكاملة

تحليل ثلاثية حدود في صورة مربع كامل

تحليل ثلاثية حدود في صورة مربع كامل

يمكنك استعمال القواعد أدناه لتحليل ثلاثية حدود في صورة مربع كامل:

تحليل ثلاثية حدود في صورة مربع كامل	مربع ثلاثية حدود
$x^2 + 18x + 81 = (x+9)^2$	$x^2 + 18x + 81 = (x+9)^2$
$x^2 - 14x + 49 = (x-7)^2$	$x^2 - 14x + 49 = (x-7)^2$
$x^2 + 20x + 100 = (x+10)^2$	$x^2 + 20x + 100 = (x+10)^2$
$x^2 - 22x + 121 = (x-11)^2$	$x^2 - 22x + 121 = (x-11)^2$

مثال ١ حل كلٍّ من  $x^2 + 16x + 64 = 0$  و  $x^2 - 10x + 25 = 0$

مثال ٢ حل كلٍّ من  $x^2 + 12x + 36 = 0$  و  $x^2 - 18x + 81 = 0$

مثال ٣ حل كلٍّ من  $x^2 + 14x + 49 = 0$  و  $x^2 - 20x + 100 = 0$

مثال ٤ حل كلٍّ من  $x^2 + 16x + 64 = 0$  و  $x^2 - 10x + 25 = 0$

مثال ٥ حل كلٍّ من  $x^2 + 12x + 36 = 0$  و  $x^2 - 18x + 81 = 0$

مثال ٦ حل كلٍّ من  $x^2 + 14x + 49 = 0$  و  $x^2 - 20x + 100 = 0$

مثال ٧ حل كلٍّ من  $x^2 + 16x + 64 = 0$  و  $x^2 - 10x + 25 = 0$

مثال ٨ حل كلٍّ من  $x^2 + 12x + 36 = 0$  و  $x^2 - 18x + 81 = 0$

مثال ٩ حل كلٍّ من  $x^2 + 14x + 49 = 0$  و  $x^2 - 20x + 100 = 0$

مثال ١٠ حل كلٍّ من  $x^2 + 16x + 64 = 0$  و  $x^2 - 10x + 25 = 0$

مثال ١١ حل كلٍّ من  $x^2 + 12x + 36 = 0$  و  $x^2 - 18x + 81 = 0$

مثال ١٢ حل كلٍّ من  $x^2 + 14x + 49 = 0$  و  $x^2 - 20x + 100 = 0$

مثال ١٣ حل كلٍّ من  $x^2 + 16x + 64 = 0$  و  $x^2 - 10x + 25 = 0$

مثال ١٤ حل كلٍّ من  $x^2 + 12x + 36 = 0$  و  $x^2 - 18x + 81 = 0$

مثال ١٥ حل كلٍّ من  $x^2 + 14x + 49 = 0$  و  $x^2 - 20x + 100 = 0$

مثال ١٦ حل كلٍّ من  $x^2 + 16x + 64 = 0$  و  $x^2 - 10x + 25 = 0$

مثال ١٧ حل كلٍّ من  $x^2 + 12x + 36 = 0$  و  $x^2 - 18x + 81 = 0$

مثال ١٨ حل كلٍّ من  $x^2 + 14x + 49 = 0$  و  $x^2 - 20x + 100 = 0$

مثال ١٩ حل كلٍّ من  $x^2 + 16x + 64 = 0$  و  $x^2 - 10x + 25 = 0$

مثال ٢٠ حل كلٍّ من  $x^2 + 12x + 36 = 0$  و  $x^2 - 18x + 81 = 0$

مثال ٢١ حل كلٍّ من  $x^2 + 14x + 49 = 0$  و  $x^2 - 20x + 100 = 0$

## ٦-٧ تدريبات إعادة التعليم

### المعادلات التربيعية : المربعات الكاملة

تحليل ثلاثية حدود في صورة مربع كامل

تحليل ثلاثية حدود في صورة مربع كامل

يمكنك استعمال القواعد أدناه لتحليل ثلاثية حدود في صورة مربع كامل:

تحليل ثلاثية حدود في صورة مربع كامل	مربع ثلاثية حدود
$x^2 + 18x + 81 = (x+9)^2$	$x^2 + 18x + 81 = (x+9)^2$
$x^2 - 14x + 49 = (x-7)^2$	$x^2 - 14x + 49 = (x-7)^2$
$x^2 + 20x + 100 = (x+10)^2$	$x^2 + 20x + 100 = (x+10)^2$
$x^2 - 22x + 121 = (x-11)^2$	$x^2 - 22x + 121 = (x-11)^2$

مثال ١ حل كلٍّ من  $x^2 + 16x + 64 = 0$  و  $x^2 - 10x + 25 = 0$

مثال ٢ حل كلٍّ من  $x^2 + 12x + 36 = 0$  و  $x^2 - 18x + 81 = 0$

مثال ٣ حل كلٍّ من  $x^2 + 14x + 49 = 0$  و  $x^2 - 20x + 100 = 0$

مثال ٤ حل كلٍّ من  $x^2 + 16x + 64 = 0$  و  $x^2 - 10x + 25 = 0$

مثال ٥ حل كلٍّ من  $x^2 + 12x + 36 = 0$  و  $x^2 - 18x + 81 = 0$

مثال ٦ حل كلٍّ من  $x^2 + 14x + 49 = 0$  و  $x^2 - 20x + 100 = 0$

مثال ٧ حل كلٍّ من  $x^2 + 16x + 64 = 0$  و  $x^2 - 10x + 25 = 0$

مثال ٨ حل كلٍّ من  $x^2 + 12x + 36 = 0$  و  $x^2 - 18x + 81 = 0$

مثال ٩ حل كلٍّ من  $x^2 + 14x + 49 = 0$  و  $x^2 - 20x + 100 = 0$

مثال ١٠ حل كلٍّ من  $x^2 + 16x + 64 = 0$  و  $x^2 - 10x + 25 = 0$

مثال ١١ حل كلٍّ من  $x^2 + 12x + 36 = 0$  و  $x^2 - 18x + 81 = 0$

مثال ١٢ حل كلٍّ من  $x^2 + 14x + 49 = 0$  و  $x^2 - 20x + 100 = 0$

مثال ١٣ حل كلٍّ من  $x^2 + 16x + 64 = 0$  و  $x^2 - 10x + 25 = 0$

مثال ١٤ حل كلٍّ من  $x^2 + 12x + 36 = 0$  و  $x^2 - 18x + 81 = 0$

مثال ١٥ حل كلٍّ من  $x^2 + 14x + 49 = 0$  و  $x^2 - 20x + 100 = 0$

مثال ١٦ حل كلٍّ من  $x^2 + 16x + 64 = 0$  و  $x^2 - 10x + 25 = 0$

مثال ١٧ حل كلٍّ من  $x^2 + 12x + 36 = 0$  و  $x^2 - 18x + 81 = 0$

مثال ١٨ حل كلٍّ من  $x^2 + 14x + 49 = 0$  و  $x^2 - 20x + 100 = 0$

مثال ١٩ حل كلٍّ من  $x^2 + 16x + 64 = 0$  و  $x^2 - 10x + 25 = 0$

مثال ٢٠ حل كلٍّ من  $x^2 + 12x + 36 = 0$  و  $x^2 - 18x + 81 = 0$

مثال ٢١ حل كلٍّ من  $x^2 + 14x + 49 = 0$  و  $x^2 - 20x + 100 = 0$

## ٦-٧ التدرجات الإثرائية

## تربيع الأعداد : طريقة مختصرة

توجد طريقة مختصرة لتساعده على تربيع عدد موجب مكون من رقمين، ورقم آحاده ٥. طُورت الطريقة باستعمال فكرة أنه يمكن التعبير عن هذا العدد في الصورة  $10ب + ٥$ ، حيث  $٥ = ٥$ .

$$(10ب + ٥) = (٥ + ١٠ب) \times (٥ + ١٠ب)$$

$$= ٥٠ + ٥٠٠ب + ٥٠ + ١٠٠٠ب^٢$$

$$= ١٠٠٠ب^٢ + ١٠٠٠ب + ١٠٠$$

$$(١٠ب + ٥)^٢ = ١٠٠٠ب^٢ + ١٠٠٠ب + ١٠٠$$

ننص هذه الصيغة لفظيًا: على أن ناتج تربيع عدد موجب مكون من رقمين، ورقم آحاده ٥، يجزي على  $(ب + ١)$  مرة. كذلك فإن رقم منزلة العشرات هو ٢ ورقم الأحاد هو ٥ دائمًا.

استعمال الصيغة (١٠ب + ٥) لإيجاد (٢٨٥)٢

$$(٢٨٥)^٢ = ١٠٠٠ \times ٨ \times ٨ + (١٠ + ٨) \times ٢٥$$

$$= ٧٢٠٠٠ + ٢٥٠$$

طريقة مختصرة: أولاً نكتب  $٧٢ \times ٨ = ٧٢٠$  ثم نكتب ٥

لذا لتربيع عدد مثل ٨٧٥ يمكننا كتابة ناتج ضرب رقم العشرات ب رقم العشرات في العدد الصحيح الذي يليه مباشرة (ب + ١) ثم كتابة ٥.

أوجد كلاً مما يأتي مستعملًا الطريقة المختصرة:

$$(١) \quad (٢١٥)^٢ \quad (٢) \quad (٢٣٥)^٢$$

$$(٣) \quad ٢٢٥ \quad (٤) \quad (٤٥٥)^٢$$

$$(٥) \quad (٥٥٥)^٢ \quad (٦) \quad (٦٥)^٢$$

$$(٧) \quad ٢٠٢٥ \quad (٨) \quad ٤٢٣٥$$

$$٢ \quad \text{ما رقم العشرات في مربع العدد } ٩٩٥$$

$$٥٦ \quad \text{ما آخر رقمين في مربع العدد } ٢٧٥$$

٩) أقي عدد مكون من ثلاثة أرقام يمكن كتابته في الصورة  $١٠٠ب + ١٠ب + ج$ . ربّع هذه العبارة لتلاحظ أنه إذا كان رقم آحاد عدد مكون من ثلاثة أرقام هو ٥، فإن رقمي الأحاد والعشرات في مربع هذا العدد هما ٥ ٢

$$= ١١٠٠٠٠ + ٢٢٠٠٠ب + ١٠٠٠٠ب^٢ + ٢٠٠٠ب + ٢٠٠ب + ج + ج^٢$$

$$= ١١٠٠٠٠ + ٢٢٠٠٠ب + ١٠٠٠٠ب^٢ + ٢٠٠٠ب + ٢٠٠ب + ج + ج^٢$$

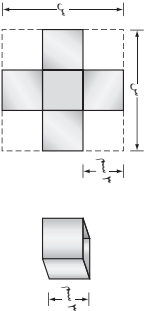
لا يتأثر رقم الآحاد والعشرات بالأرقام الخمسة الأخرى.

## ٦-٧ تدريبات حل المسألة

## الاعداد التربيعية : المربعات الكاملة

٤) هندسة: تسطيع خالد عمل صندوق بلا قطار كما في الشكل أدناه باستعمال قطعة مربعة من الورق القوي، يقص مربعات من عند الزوايا طول ضلع كل منها ٣سم، ثم طوى المربعات الأربعة الجانبية المتبقية إلى أعلى. حجم الصندوق الناتج:

ح =  $٣س^٣ - ٣س^٢ + ١٠٨س$ ، حيث س طول ضلع القطعة المربعة الأصلية من الورق القوي.



١) حلّ كثيرة الحدود الواردة في معادلة الحجم.

$$٣(س - ١)(س - ١)$$

ب) ما حجم الصندوق إذا كان طول ضلع القطعة المربعة الأصلية من الورق القوي ٤ سم؟

$$١٩٢ سم^٣$$

ج) ما طول ضلع القطعة المربعة الأصلية من الورق القوي عندما يكون حجم الصندوق ٢٧ سم<sup>٣</sup>؟

$$٣سم$$

١) إنشأوا، قمّل، تأملوا الحدود  $س^٣ - ١٠س + ٢٥$  مساحة مدينة رياضية مربعة الشكل. اكتب عبارة قمّل محيط المدينة الرياضية بدلالة التعبير س.

$$٤س - ٢٥ \text{ أو } ٤(س - ٥)$$

٢) مدينة ألعاب، تريد إدارة مدينة ألعاب تركيب مربعة أشخاص تتحرك رأسياً إلى أعلى من مستوى الأرض، بسرعة ابتدائية ٩٦ قدماً / ثانية. فإذا كانت الثالثة  $ع = ٩٦ - ن$  ن تقل ارتفاع المربع كلما بعد ن ثانية من انطلاقها، فبمذاً ن ثابتة تصل إلى ارتفاع ١٤٤ قدماً؟

$$٢ ثوان$$

٣) أعمال، تختص إحدى الشركات الزراعية بتربيع وتركيب أنظمة لري الزروع، وتستخدم الدورات الآتية لتباينة التكاليف الشهرية، والتعاملات مع، والربح الشهري و؛ حيث س عدد أنظمة الري المبيعة.

$$ت(س) = ٧س^٢ + ٢٠س - ١٢$$

$$ع(س) = ٨س^٣ + ١٢س + ٤$$

$$ر(س) = ع(س) - ت(س)$$

أوجد دالة الربح الشهري ر بدلالة س، ثم استعمالها لإيجاد نقطة التعادل التي يكون الربح عندها صفراً.

$$ر(س) = (س) - (س) - (س) = ١٦س + ٨٨س - ٤$$



وزارة التربية والتعليم  
Ministry of Education

المملكة العربية السعودية

# الرياضيات

## للفصل الثالث المتوسط

مصادر المعلم للأنشطة الصفية  
الفصل الثامن: الدوال التربيعية

العبيكان  
Obekon

Mc  
Graw  
Hill  
Education

يوزع مجاناً ولا يباع

١٤٣٤ هـ - ٢٠١٣ م

Glencoe Mathematics © 2010  
**CHAPTER RESOURCE MASTERS**  
Algebra 1

الرياضيات - الصف الثالث المتوسط  
**مصادر المعلم للأنشطة الصفية**  
أعدت النسخة العربية: شركة العبيكان للتعليم

[www.obeikaneducation.com](http://www.obeikaneducation.com)



English Edition Copyright © the McGraw-Hill Companies, Inc.  
All rights reserved.

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with  
The McGraw-Hill Companies, Inc. © 2008.



حقوق الطبع الإنجليزية محفوظة لشركة ماجروهل ©.

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار  
وفقاً لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل © ٢٠٠٨م / ١٤٢٩هـ.

لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو نقله في أي شكل أو واسطة، سواء أكانت إلكترونية أو ميكانيكية، بما في ذلك التصوير بالنسخ «فوتوكوبي»، أو التسجيل، أو التخزين  
والاسترجاع، دون إذن خطي من الناشر.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

### عزيزي المعلم / عزيزتي المعلمة

يسرنا أن نقدم هذه المجموعة من التدريبات المساندة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب. حيث نطمح أن يساعدك التنوع في هذه التدريبات على الوصول إلى جميع الطلاب في الصف، مهما تباينت مستوياتهم التحصيلية.

وقد تم تخصيص صفحتين لتدريبات إعادة التعليم و صفحة واحدة لكل من التدريبات الأخرى لكل درس من دروس كتاب الطالب. حيث يمكنك أن تكلف الطلاب حلّ صفحة التدريبات المقابلة لكل درس بحسب مستوى كلٍّ منهم؛ سواء داخل الصف أم في المنزل. وليست هذه التدريبات بديلاً عن كتاب التمارين، ولكنها مساندة ومكملة له. وهذه التدريبات هي:

### تدريبات إعادة التعليم

تركز هذه التدريبات على محتوى الدروس في كتاب الطالب، وتقدمه بأسلوب تدريسي ومعالجة يختلفان عن كتابي الطالب والتمارين. وهي موجهة إلى الطلاب ذوي المستوى دون المتوسط.

### تدريبات حلّ المسألة

تأتي هذه التدريبات انطلاقاً من اهتمام هذه المناهج بحلّ المسألة، حيث تم تخصيصها لتقديم تدريبات إضافية على حلّ المسألة ترتبط بكل درس من دروس كتاب الطالب. وهي موجهة إلى جميع الطلاب على اختلاف مستوياتهم التحصيلية.

### التدريبات الإثرائية

تساعد هذه التدريبات الإثرائية على التوسع في مفاهيم الدرس، كما تؤدي إلى توسيع مدارك الطلاب حول تعلم الرياضيات بشكل عام. وهذه التدريبات موجهة إلى الطلاب ذوي المستوى ضمن المتوسط وفوق المتوسط.

# الفهرس

المقدمة .....	٤
الدرس ١-٨ تمثيل الدوال التربيعية بيانياً	
تدريبات إعادة التعليم .....	٦
تدريبات حل المسألة .....	٨
التدريبات الإثرائية .....	٩
الدرس ٢-٨ حل المعادلات التربيعية بيانياً	
تدريبات إعادة التعليم .....	١٠
تدريبات حل المسألة .....	١٢
التدريبات الإثرائية .....	١٣
الدرس ٣-٨ حل المعادلات التربيعية يكامل المربع	
تدريبات إعادة التعليم .....	١٤
تدريبات حل المسألة .....	١٦
التدريبات الإثرائية .....	١٧
الدرس ٤-٨ حل المعادلات التربيعية باستعمال القانون العام	
تدريبات إعادة التعليم .....	١٨
تدريبات حل المسألة .....	٢٠
التدريبات الإثرائية .....	٢١

## تدريبات إعادة التعليم

### تمثيل الدوال التربيعية بيانياً

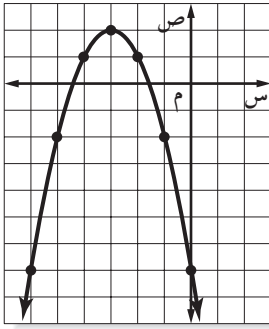
#### خصائص الدوال التربيعية

الدالة التربيعية	هي الدالة التي يمكن كتابتها على الصورة $د(س) = أس^٢ + ب س + ج$ ، حيث $أ \neq ٠$ .
مثال:	ص = $٢س^٢ + ٣س + ٨$

الدالة المولدة (الأم) للدوال التربيعية هي  $ص = س^٢$ ، ويسمى التمثيل البياني للدالة التربيعية قطعاً مكافئاً. ويكون هذا التمثيل مفتوحاً إلى أعلى إذا كان  $أ > ٠$ ، وتمثل أدنى نقطة فيه نقطة القيمة الصغرى، ويكون هذا التمثيل مفتوحاً إلى أسفل إذا كان  $أ < ٠$ ، وتمثل أعلى نقطة فيه نقطة القيمة العظمى.

مثال ٢

أ) مثل الدالة  $ص = -س^٢ - ٦س - ٧$  بيانياً، مستعملًا جدول القيم:



س	ص
-٦	-٧
-٥	-٢
-٤	١
-٣	٢
-٢	١
-١	-٢
٠	-٧

مثل الأزواج المرتبة بيانياً، ثم صل بينها بمنحنى أملس.

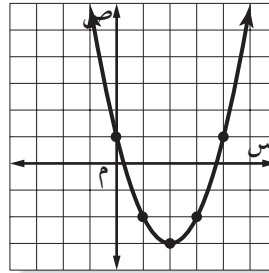
ب) حدّد مجال الدالة ومداهها.

المجال (قيم س) هو جميع الأعداد الحقيقية.

والمدى (قيم ص) هو  $\{ص | ص \leq ٢\}$ ؛ لأن ٢ هي القيمة العظمى.

مثال ١

أ) مثل الدالة  $ص = س^٢ - ٤س + ١$  بيانياً، مستعملًا جدول القيم:



س	ص
-١	٦
٠	١
١	-٢
٢	-٣
٣	-٢
٤	١

مثل الأزواج المرتبة بيانياً، ثم صل بينها بمنحنى أملس.

ب) حدّد مجال الدالة ومداهها.

المجال (قيم س) هو جميع الأعداد الحقيقية.

والمدى (قيم ص) هو  $\{ص | ص \geq -٣\}$ ؛ لأن -٣ هي القيمة الصغرى

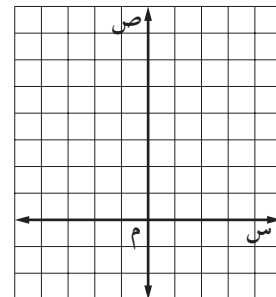
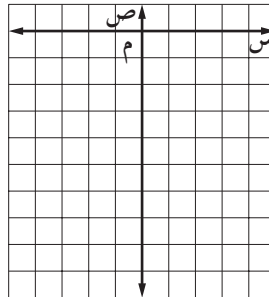
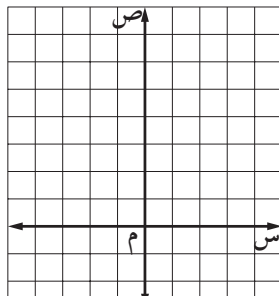
#### تمارين

مثل كل دالة فيما يأتي بيانياً، مستعملًا جدول القيم، وحدّد مجالها ومداهها:

٣)  $ص = س^٢ - ٣س + ٢$

٢)  $ص = -س^٢ - ٤$

١)  $ص = س^٢ + ٢$



## تدريبات إعادة التعليم

## تمثيل الدوال التربيعية بيانياً

(تتمة)

## محور التماثل والرأس

**محور التماثل:** هو المستقيم الذي يقسم الشكل إلى قسمين متطابقين تماماً. ويسمى عندها الشكل بأنه متماثل.

**القطع المكافئ:** هو شكل متماثل وله محور تماثل، وكل نقطة في نصف القطع إلى يسار محور التماثل تقابلها نقطة في النصف الآخر له. ويمر محور التماثل في الرأس، الذي يمثل إما نقطة قيمة عظمى أو نقطة قيمة صغرى.

محور التماثل	معادلة محور التماثل للقطع المكافئ $ص = أس^٢ + ب س + ج$ ، حيث $أ \neq ٠$ ، هي $س = -\frac{ب}{٢أ}$	مثال: معادلة محور تماثل للقطع المكافئ $ص = س^٢ + ٢س + ٥$ هي $س = ١ -$
--------------	--	---

مثال

أجب عما يأتي حول التمثيل البياني للدالة  $ص = ٢س^٢ + ٤س + ١$ :

(أ) اكتب معادلة محور التماثل للدالة:

$$ص = س^٢ - \frac{ب}{٢أ}$$

$$ص = س^٢ - \frac{٤}{(٢)٢} = س^٢ - ١$$

صيغة معادلة محور التماثل

عوض  $أ = ٢$ ،  $ب = ٤$

بسّط

معادلة محور التماثل هي  $س = ١ -$ (ج) حدّد إذا كان للدالة قيمة عظمى أم قيمة صغرى. بما أنّ معامل  $س^٢$  موجب، فالتمثيل يكون مفتوحاً إلى أعلى.

لذا يكون لهذه الدالة قيمة صغرى.

(ب) أوجد الرأس.

بما أنّ معادلة محور التماثل هي  $س = ١ -$ ، والرأس يقع على هذا المحور، فإنّ الإحداثي السيني للرأس هو  $١ -$ . ولإيجاد الإحداثي الصادي للرأس عوض الإحداثي السيني في معادلة الدالة.

$$ص = ٢س^٢ + ٤س + ١$$

$$ص = ٢(١ -)^٢ + ٤(١ -) + ١$$

$$ص = ٢(١ - ٢س + س^٢) + ٤ - ٤س + ١$$

$$ص = ٢ - ٤س + ٢س^٢ + ٤ - ٤س + ١$$

$$ص = ٢س^٢ - ٨س + ٧$$

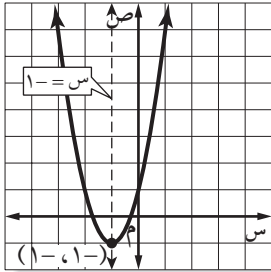
المعادلة الأصلية

عوض  $س = ١ -$

بسّط

لذا الرأس هو  $(١ -، ١ -)$ 

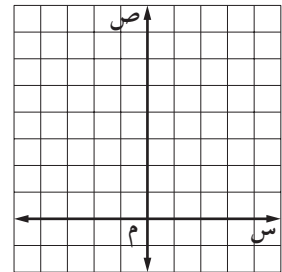
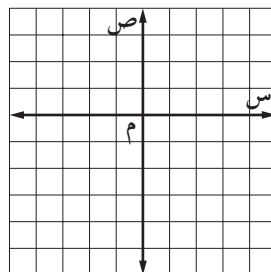
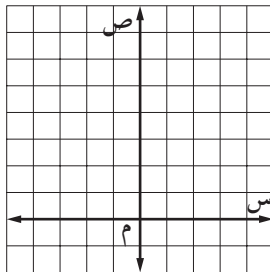
(د) مثل الدالة بيانياً.



## تمارين

في الأسئلة ١-٣ حدّد ما إذا كان للدالة قيمة عظمى أم قيمة صغرى، وأوجدتها، وحدّد مجال كل دالة ومداهما، وأوجد معادلة محور التماثل، ومثل الدالة بيانياً:

(١)  $ص = س^٢ + ٣$       (٢)  $ص = -س^٢ - ٤س - ٤$       (٣)  $ص = س^٢ + ٢س + ٣$

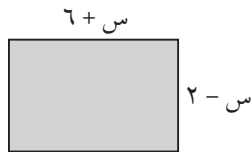


## تدريبات حل المسألة

### تمثيل الدوال التربيعية بيانياً

(٤) ألعاب نارية: أُطلق سهم نارياً إلى أعلى بسرعة ابتدائية قدرها ٦٤ قدمًا في الثانية. فإذا كانت الدالة  $f = -16t^2 + 64t$  تمثل ارتفاع السهم ف(بالأقدام) بعد زمن مقداره  $n$  (بالثواني)، فأوجد إحداثيات الرأس لتمثيل البياني لهذه الدالة، وفسّر معناه.

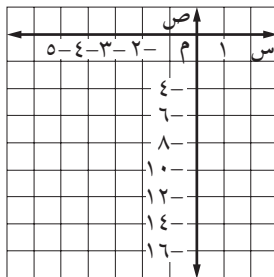
(٥) هندسة: أنشأ عز الدين قاعدة خشبية مستطيلة كما في الشكل أدناه:



(أ) اكتب دالة تمثل مساحة القاعدة الخشبية.

(ب) ما معادلة محور التماثل؟

(ج) مثل الدالة بيانياً وحدد رأس التمثيل البياني.



(١) ألعاب أولمبية: أُقيمت الألعاب الأولمبية أول مرة عام ١٨٩٦ م، وأصبحت تُقام كل ٤ سنوات (باستثناء الأعوام ١٩١٦ م، ١٩٤٠ م، ١٩٩٤ م). ويمكن تمثيل الارتفاع (ص) للفائز بمسابقة الوثب بالزانة للرجال في الدورة الأولمبية رقم (س) بالمعادلة  $ص = 37س^2 + 3س + 126$ ، أكمل الجدول أدناه لتقدير الارتفاعات للفائزين بمسابقة الوثب بالزانة في كل دورة أولمبية معطاة، مقرباً إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

الارتفاع (ص) بوصة	رقم الدورة الأولمبية (س)	السنة
	١	١٨٩٦ م
	٢	١٩٠٠ م
	٧	١٩٢٤ م
	١٠	١٩٣٦ م
	١٥	١٩٦٤ م
	٢٦	٢٠٠٨ م

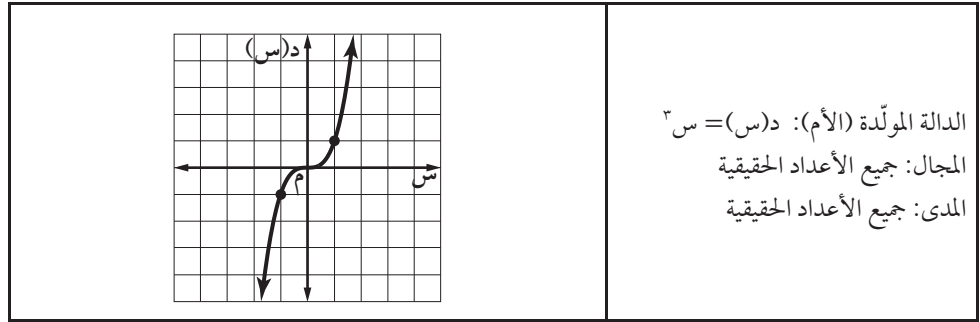
(٢) فيزياء: يستقصي طلاب في حصة الفيزياء ما يحدث عند دفع كرة بسرعة ابتدائية على سطح مائل، فتصعد عليه ثم ترجع. فوجدوا أنه يمكنهم تمثيل المسافة (ف) التي تقطعها الكرة بعد  $n$  ثانية بالدالة  $f = -16n^2 + 64n$ . على التمثيل البياني لهذه الدالة حدد قيمة  $f$  عندما  $n = 4$ .

(٣) هندسة معمارية: قوس المدخل الرئيسي لأحد الفنادق يأخذ شكل قطع مكافئ. إذا كانت المعادلة  $ص = -16س^2 + 10س$  تمثل ارتفاع القوس ص بالأقدام عند أي بُعد  $s$  عن أحد جانبيه، فحدد أقصى ارتفاع للقوس مستعملًا التمثيل البياني لدالته.

## التدريبات الإثرائية

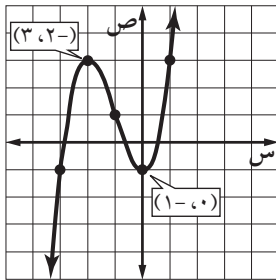
### تمثيل الدوال التكعيبية بيانياً

**الدالة التكعيبية:** هي كثيرة حدود على الصورة  $D(s) = as^3 + bs^2 + cs + e$ ، حيث  $a \neq 0$ ، لا يوجد للدالة التكعيبية نقطة قيمة عظمى مطلقة أو نقطة قيمة صغرى مطلقة مثل الدوال التربيعية، لكن قد يوجد لها نقطة قيمة عظمى محلية أو نقطة قيمة صغرى محلية.



**مثال** مثل الدالة  $V = s^3 + 3s^2 - 1$  بيانياً، مستعملًا جدول القيم، ثم قَدِّر من التمثيل البياني مواقع القيم العظمى المحلية والقيم الصغرى المحلية.

س	٣-	٢-	١-	٠	١
ص	١-	٣	١	١-	٣

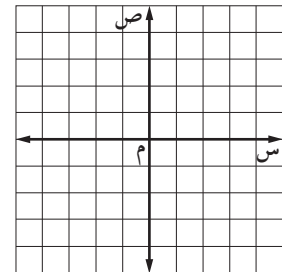
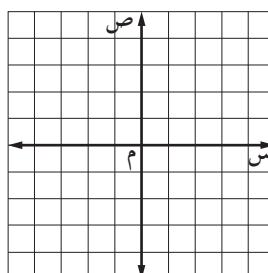
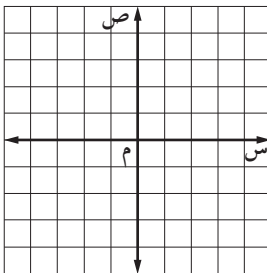


مثل الأزواج المرتبة بيانياً، وصل بينها بمنحنى أملس.  
يمتد الشكل الذي يشبه حرف (S) إلى ما لانهاية في اتجاه المحور الصادي الموجب وإلى سالب ما لانهاية في اتجاه المحور الصادي السالب. نقطة القيمة الصغرى المحلية هي  $(-1, 0)$ ، ونقطة القيمة العظمى المحلية هي  $(-3, 2)$ .

### تمارين

مثل كل دالة فيما يأتي بيانياً، مستعملًا جدول القيم، ثم قَدِّر من التمثيل البياني مواقع القيم العظمى المحلية والقيم الصغرى المحلية:

(١)  $V = 5s^3 + 3s^2 - 1$  (٢)  $V = -2s^3 - 3s^2 - 1$  (٣)  $V = 3s^3 + 2s^2 - 4$



## تدريبات إعادة التعليم

### حل المعادلات التربيعية بيانياً

حل المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني:

المعادلة التربيعية الصورة القياسية للمعادلة التربيعية هي أس<sup>٢</sup> + ب س + ج = ٠، حيث أ ≠ ٠

يمكنك تحديد حلول المعادلة التربيعية د(س) = أس<sup>٢</sup> + ب س + ج = صفر، أو جذورها بتمثيل الدالة المرتبطة د(س) = أس<sup>٢</sup> + ب س + ج وإيجاد المقاطع السينية أو أصفار الدالة.

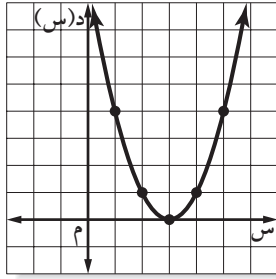
مثال ٢ حل المعادلة س<sup>٢</sup> - ٦ س + ٩ = ٠

مثال ٢

بيانياً.

مثل الدالة د(س) = س<sup>٢</sup> - ٦ س + ٩ المرتبطة بالمعادلة بيانياً.

معادلة محور التماثل هي س = ٣، والرأس عند (٣، ٠).



مثل الرأس و عدة نقاط على جانبي محور التماثل بيانياً. يتطلب أن تعرف متى تكون د(س) = ٠ لحل المعادلة س<sup>٢</sup> - ٦ س + ٩ = ٠، رأس القطع المكافئ هو المقطع السيني الوحيد لهذه الدالة، لذا فإن لهذه المعادلة حلًا وحيداً هو ٣

مثال ١ حل المعادلة س<sup>٢</sup> + ٤ س + ٣ = ٠

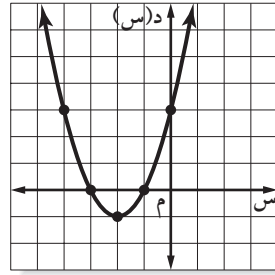
مثال ١

بيانياً.

مثل الدالة د(س) = س<sup>٢</sup> + ٤ س + ٣ المرتبطة بالمعادلة بيانياً.

معادلة محور التماثل هي س = -٢ =  $\frac{4}{(1)2}$ ، والرأس هو (-٢، ١).

مثل الرأس و عدة نقاط على جانبي محور التماثل بيانياً.

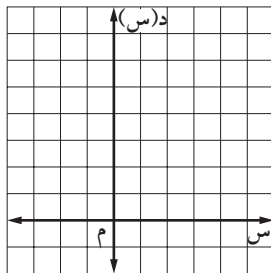


يتطلب أن تعرف متى تكون د(س) = ٠ لحل المعادلة س<sup>٢</sup> + ٤ س + ٣ = ٠، وهذا يحدث عند المقاطع السينية، -٣، -١؛ لذا فالحلول هي -٣، -١

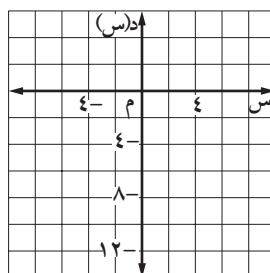
تمارين

حل كل معادلة فيما يأتي بيانياً:

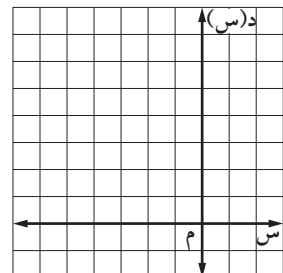
(٣) س<sup>٢</sup> - ٥ س + ٥ = ٠



(٢) س<sup>٢</sup> - ١٢ س - ١٢ = ٠



(١) س<sup>٢</sup> + ٧ س + ١٢ = ٠



## تدريبات إعادة التعليم

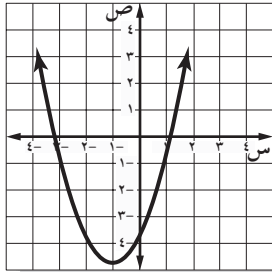
## حل المعادلات التربيعية بيانيًا

(تتمة)

**تقدير الحلول:** كانت جذور المعادلات في الصفحة السابقة أعدادًا صحيحة، إلا أن جذور المعادلات التربيعية ليست دائمًا كذلك، ويُستعمل في هذه الحالات التقدير لإيجاد قيم تقريبية لجذور المعادلة.

**مثال** حُلّ المعادلة  $س^2 + ٢س - ٤ = ٠$  بيانيًا، وإذا لم تكن الجذور أعدادًا صحيحة، فقدّرهما باختيار عددين صحيحين متتاليين يقع بينهما كل جذر.

مثل الدالة  $د(س) = س^2 + ٢س - ٤$  المرتبطة بالمعادلة بيانيًا.



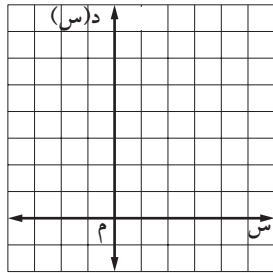
لاحظ أن قيمة الدالة تتغير من موجب إلى سالب بين قيمتي  $س: -٤, -٣$ ، وقيمتي  $س: ١, ٢$ . تقع المقاطع السينية في التمثيل البياني بين  $-٤, -٣$  و  $١, ٢$ ؛ لذا فأحد الجذرين يقع بين  $-٤, -٣$  والثاني يقع بين  $١, ٢$ .

س	د(س)
-٤	٤
-٣	١
-٢	-٤
-١	-٥
١	-٣
٢	٤

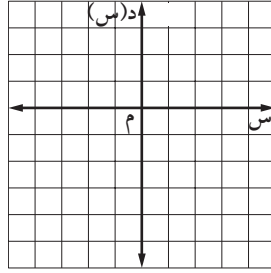
## تمارين

حُلّ كل معادلة فيما يأتي بيانيًا، وإذا لم تكن الجذور أعدادًا صحيحة، فقدّرهما إلى أقرب جزء من عشرة:

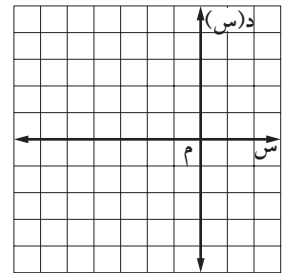
(٣)  $س^2 - ٤س + ٦ = ٠$



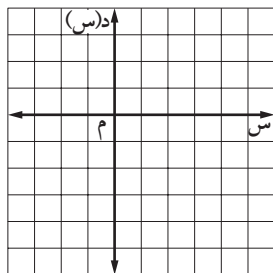
(٢)  $س^2 - ٢س - ٤ = ٠$



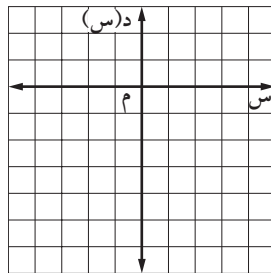
(١)  $س^2 + ٧س + ٩ = ٠$



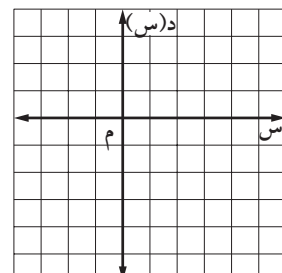
(٦)  $س^2 - ٢س - ٤ = ٠$



(٥)  $٤س^2 - ١٢س + ٣ = ٠$



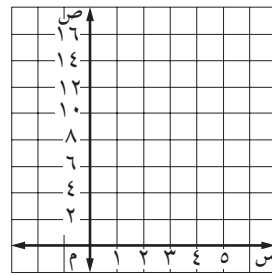
(٤)  $س^2 - ٤س - ١ = ٠$



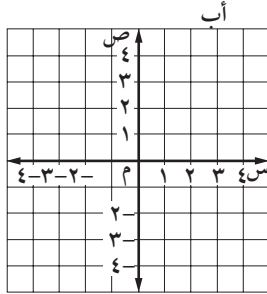
## تدريبات حل المسألة

## حل المعادلات التربيعية بيانياً

- (٤) **ورق تغليف:** هل يمكن لورقة تغليف مستطيلة مساحتها ٨١ سنتيمتراً مربعاً أن يكون محيطها ٦٠ سنتيمتراً؟ فسر إجابتك. (إرشاد: افترض أن العرض = س، الطول = ٣٠ - س).
- (١) **زراعة:** راجع عبد السلام سجلات الأعوام السابقة كي يحدّد كمية السماد المطلوبة لمحصول الذرة هذا العام، فوجد أن الإنتاج ص يعتمد على كمية السماد س المستعملة وفق الدالة  $ص = -س^2 + ٤س + ١٢$ . مثل الدالة بيانياً، وأوجد النقطة التي يتوقع عبد السلام أن يحصل عندها على أكبر إنتاج.



- (٥) **هندسة:** شكل طبق الأقمار الصناعية هو قطع مكافئ غالباً. افترض أن المعادلة  $٥ = س^2 + ٢ + ص$  تمثّل أحد هذه الأطباق.
- (أ) أوجد جذور المعادلة مستعملاً التمثيل البياني.

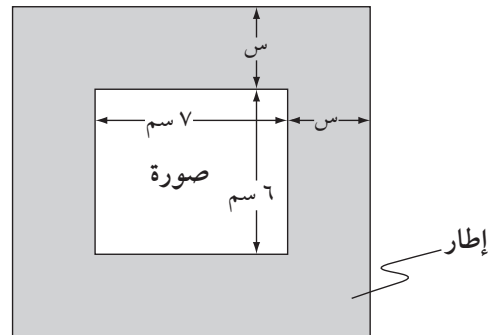


- (ب) اسحب القطع المكافئ على المستوى الإحداثي أعلاه بحيث يكون له جذر واحد. سمّ المنحنى الناتج أ.

- (ج) اسحب القطع المكافئ بحيث يصبح دون جذور. سمّ المنحنى الناتج ب.

- (٢) **ضوء:** يحمل أحمد وسيف مصباحاً يدوياً، ويسقط الضوء المنبعث منه على قطعة من ورق الرسم البياني ليشكل قطعاً مكافئاً، ف رسم أحمد وسيف القطع المكافئ الناتج، ووجد أنه يطابق التمثيل البياني للدالة  $ص = س^2 - ٣س - ١٠$ ، حدّد جذور هذه الدالة.

- (٣) **تأطير:** صورة مستطيلة الشكل طولها ٧ سم وعرضها ٦ سم، أحيطت بإطار عرضه س سم من جميع الجوانب كما في الشكل أدناه. إذا كانت مساحة الإطار والصورة معاً ١٥٦ سم<sup>٢</sup>، فما عرض الإطار؟



## التدريبات الإثرائية

## إيجاد معادلة قطع مكافئ يمر بثلاث نقاط معطاة

إذا عرفت نقطتين على مستقيم، فيمكنك إيجاد معادلته. ولايجاد معادلة قطع مكافئ يجب أن تعرف إحداثيات ثلاث نقاط واقعة عليه. وفيما يأتي توضيح لطريقة إيجاد معادلة القطع المكافئ المار بالنقاط  $(-2, 0)$ ،  $(0, 3)$ ،  $(5, 2)$ .  
أولاً: عوّض عن قيم  $s$ ،  $v$  في الصورة القياسية للمعادلة التربيعية، وهي  $v = أس^2 + ب س + ج$ ، لتحصل على ثلاث معادلات.

$$(-2, 0): -2 = ج$$

$$(0, 3): 3 = 0 + 0 + ج$$

$$(5, 2): 2 = 25 + 5ج + ج$$

ثانياً: عوّض  $-2$  عن  $ج$  في المعادلتين الثانية والثالثة، ثم حلّ هاتين المعادلتين.

اضرب المعادلة الثانية في ٥، والمعادلة الثالثة في ٣-

$$10 - 15ب + 45 = 0 \quad \text{اضرب في ٥} \quad 2 - 3ب + 9 = 0$$

$$6 - 15ب - 175 = -6 \quad \text{اضرب في ٣-} \quad 2 - 5ب + 25 = 2$$

$$4 - 30 = -6$$

$$\frac{1}{15} = أ$$

ثالثاً: عوّض  $\frac{1}{15}$  عن  $أ$  في المعادلة الثانية أو الثالثة لإيجاد قيمة  $ب$ .

$$2 - 3ب + \left(\frac{1}{15}\right)9 = 0$$

$$\frac{7}{15} = ب$$

لذا فمعادلة القطع المكافئ المارّ بالنقاط الثلاث هي:  $v = أس^2 + ب س - 2$

## تمارين

أوجد معادلة القطع المكافئ المارّ بكل مجموعة من ثلاث نقاط فيما يأتي:

$$(1) (5, 1), (6, 0), (3, 2) \quad (2) (-5, 0), (0, 0), (8, 100)$$

$$(3) (-4, -4), (1, 0), (3, -2) \quad (4) (3, 1), (0, 6), (0, 0)$$

$$(5) (2, 2), (3, -5), (1, -1) \quad (6) (4, 0), (4, 4), (-4, -4)$$

## تدريبات إعادة التعليم

### حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع

**إكمال المربع:** يمكنك حل المعادلة التربيعية التي تمثل مربعاً كاملاً بسرعة، بإيجاد الجذر التربيعي لكل من طرفي المعادلة. أما العبارة التربيعية التي ليست مربعاً كاملاً، فيمكنك تحويلها إلى مربع كامل باستعمال طريقة تُسمى طريقة إكمال المربع.

#### إكمال المربع

لإكمال المربع في أي عبارة تربيعية على الصورة  $s^2 + 2bs + c$ ، اتبع الخطوات الآتية:  
الخطوة ١: أوجد نصف  $b$  (معامل  $s$ ).

الخطوة ٢: ربّع الناتج في الخطوة ١.

الخطوة ٣: أضف الناتج من الخطوة ٢ إلى  $s^2 + 2bs + c$ .

$$s^2 + 2bs + c = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(s + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

#### مثال

أوجد قيمة  $c$  التي تجعل ثلاثية الحدود  $s^2 + 2s + c$  مربعاً كاملاً.

$$1 = \frac{c}{4}$$

الخطوة ١: أوجد  $\frac{1}{2}$  العدد ٢

$$1 = 2c$$

الخطوة ٢: ربّع الناتج من الخطوة ١

$$s^2 + 2s + 1 = (s + 1)^2$$

الخطوة ٣: أضف الناتج من الخطوة ٢ إلى  $s^2 + 2s + c$ .

لذا  $c = 1$ ، لاحظ أنّ  $s^2 + 2s + 1 = (s + 1)^2$

#### تمارين

أوجد قيمة  $c$  التي تجعل كل ثلاثية حدود فيما يأتي مربعاً كاملاً:

(٢)  $s^2 + 14s + c$

(١)  $s^2 + 10s + c$

(٤)  $s^2 - 8s + c$

(٣)  $s^2 - 4s + c$

(٦)  $s^2 + 9s + c$

(٥)  $s^2 + 5s + c$

(٨)  $s^2 - 15s + c$

(٧)  $s^2 - 3s + c$

(١٠)  $s^2 + 22s + c$

(٩)  $s^2 + 28s + c$

## تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

## حلّ المعادلات التربيعية بإكمال المربع

حلّ المعادلات بإكمال المربع: بما أنّ القليل من العبارات التربيعية هي مربعات كاملة، فيمكنك استعمال طريقة إكمال المربع لحلّ المعادلات التربيعية، التي تتطلب فصل الحدين  $س^٢$ ، ب  $س$  أولاً. اتّبع الخطوات الآتية لإكمال المربع لعبارات تربيعية على الصورة  $أس^٢ + ب س$ .

الخطوة ١:	أوجد $\frac{ب}{٢}$
الخطوة ٢:	أوجد $\left(\frac{ب}{٢}\right)^٢$
الخطوة ٣:	أضف $\left(\frac{ب}{٢}\right)^٢$ إلى $أس^٢ + ب س$

مثال حلّ المعادلة  $س^٢ + ٦س + ٣ = ١٠$  بإكمال المربع.

المعادلة الأصلية	$س^٢ + ٦س + ٣ = ١٠$
اطرح ٣ من كلا الطرفين	$س^٢ + ٦س + ٣ - ٣ = ١٠ - ٣$
بسّط	$س^٢ + ٦س = ٧$
بما أنّ $\left(\frac{٦}{٢}\right)^٢ = ٩$ ، لذا أضف ٩ إلى كلا الطرفين	$س^٢ + ٦س + ٩ = ٧ + ٩$
حلّل $س^٢ + ٦س + ٩$	$(س + ٣)^٢ = ١٦$
أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين	$س + ٣ = \pm ٤$
اطرح ٣ من كلا الطرفين	$س = -٣ \pm ٤$
افصل الحلين	$س = -٣ + ٤$ أو $س = -٣ - ٤$
	$س = ١$ أو $س = -٧$

الحلّان هما ١، -٧ ومجموعة الحل هي  $\{-٧، ١\}$ .

## تمارين

حلّ كل معادلة فيما يأتي بإكمال المربع، مقرّباً الحلّ إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضرورياً:

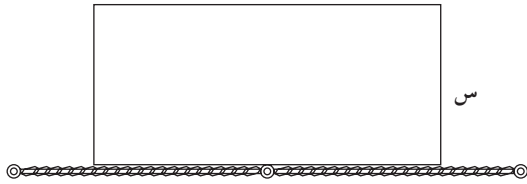
- (١)  $س^٢ - ٤س + ٣ = ٠$
- (٢)  $س^٢ + ١٠س - ٩ = ٠$
- (٣)  $س^٢ - ٨س - ٩ = ٠$
- (٤)  $س^٢ - ٦س + ١٦ = ٠$
- (٥)  $س^٢ - ٤س - ٥ = ٠$
- (٦)  $س^٢ - ١٢س + ٩ = ٠$
- (٧)  $س^٢ + ٨س + ٢٠ = ٠$
- (٨)  $س^٢ + ٢س + ١ = ٠$
- (٩)  $س^٢ + ٢٠س + ١١ = ٠$
- (١٠)  $س^٢ - ١ = ٥س$
- (١١)  $س^٢ + ٢٢س + ٢٣ = ٠$
- (١٢)  $س^٢ - ٨س = ٧-$
- (١٣)  $س^٢ + ١٠س = ٢٤$
- (١٤)  $س^٢ - ١٨س = ١٩$
- (١٥)  $س^٢ + ١٦س = ١٦-$
- (١٦)  $س^٢ + ٢٤س = ٤٤$
- (١٧)  $س^٢ + ٤س + ٢ = ٨$
- (١٨)  $س^٢ + ٤٠س + ٤٤ = ٤٤$

## تدريبات حل المسألة

## حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع

(٤) **ضفادع:** كان ضفدع جالسًا على جذع شجرة ارتفاعه ٣ أقدام، ثم قفز وهبط على الأرض. فإذا كانت المعادلة  $ص = -٥س + ٢س + ٣$  تمثل ارتفاع الضفدع ص (بالأقدام) عن سطح الأرض في أثناء قفزه، حيث تمثل  $س$  بُعدُه عن قاعدة الجذع، فما بعد الضفدع عن قاعدة الجذع عندما يصل إلى الأرض؟

(٥) **بستنة:** يخطط سمير لإحاطة ثلاثة جوانب لبستان خضروات مستطيل الشكل بسياج طوله ٢٥٠ مترًا. والجانب الرابع محاط بسياج قديم.



(أ) ليكن  $س =$  عرض المستطيل. اكتب دالة لتمثيل مساحة الحديقة عند استعمال السياج الجديد.

(ب) أوجد رأس منحنى الدالة التي أوجدتها في الفرع أ، وحدد ما إذا كان يمثل نقطة قيمة عظمى أو صغرى.

(ج) فسّر معنى رأس المنحنى في سياق الموقف.

(١) **تصميم داخلي:** يتم فرش الغرفة بقطع صغيرة من السجاد بدلاً من قطعة واحدة كبيرة أحيانًا، ويساعد هذا على استبدال قطع صغيرة فقط في حالة تلف جزء من سجاد الغرفة. افترض أنه تم فرش الغرفة في المخطط أدناه بقطع السجاد المبيّنة في الشكل. أكمل المربع الكبير لتحديد عدد قطع السجاد المربعة (قدم في قدم) المطلوبة لتكملة أرضية الغرفة، واملأ الحدود المفقودة في المعادلة الموضحة أدناه.

س	س	س	س	س	س
س					
س					
س					
س					

$$س^٢ + ١٠س + \dots = (\dots + س)^٢$$

(٢) **الأجسام الساقطة:** ألقى معاذ حجرًا في بئر قديمة، وأمكن تمثيل المسافة  $ف$  (بالأقدام) التي يقطعها الحجر بعد  $ن$  ثانية بالمعادلة  $ف = ١٦ن^٢ + ٦٤ن$ . إذا كان الماء في البئر دون مستوى الأرض بمقدار ٨٠ قدمًا، فبعد كم ثانية يصل الحجر إلى سطح الماء؟

(٣) **المريخ:** قوة الجاذبية على سطح المريخ أصغر من قوة جاذبية الأرض. عند ضرب كرة جولف إلى أعلى بسرعة ابتدائية ٢٦ مترًا في الثانية من سطح الأرض، فإن أقصى ارتفاع لها هو ٥,٣٤ مترًا تقريبًا. إذا كانت المعادلة  $ف = -٩,٩١ن^٢ + ٢٦ن$  تمثل الارتفاع  $ف$  بعد  $ن$  ثانية، لجسم قُذف من سطح المريخ بسرعة ابتدائية ٢٦ مترًا في الثانية، فأوجد أقصى ارتفاع تصل إليه كرة الجولف نفسها عند ضربها من سطح المريخ بالسرعة الابتدائية نفسها، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

## التدريبات الإثرائية

## تحليل كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة

إن إكمال المربع طريقة مفيدة في تحليل العبارات التربيعية وحلّ المعادلات التربيعية. ويمكنك الاستفادة من طريقة مشابهة في تحليل كثيرات حدود من الدرجة الرابعة على الصورة  $s^4 + c$ .

مثال

حلّ كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة  $s^4 + 64$

**الخطوة ١:** أوجد قيمة الحد الأوسط المطلوب لإكمال المربع.

وهذه القيمة هي  $(\sqrt{64})^2$  أو  $16$  من  $s^2$

**الخطوة ٢:** أعد كتابة كثيرة الحدود الأصلية على صورة قابلة للتحليل:

$$s^4 + 64 = (s^2 + 8)^2 - 16s^2$$

**الخطوة ٣:** حلّ كثيرة الحدود  $s^4 + 64$  من  $s^2 + 8$  إلى  $(s^2 + 8)$

$$s^4 + 64 = (s^2 + 8)^2 - 16s^2$$

**الخطوة ٤:** أعد المقدار السابق في صورة فرق بين مربعين على النحو الآتي:

$$(s^2 + 8 + 4s)(s^2 + 8 - 4s)$$

لذا فإن تحليل  $s^4 + 64$  هو  $(s^2 + 4s + 8)(s^2 - 4s + 8)$ . ويمكنك تحليلها إلى أبعد من ذلك، إذا كان هذا ضرورياً، لإيجاد حلول معادلة من الدرجة الرابعة.

حلّ كلّ كثيرة حدود من الدرجة الرابعة فيما يأتي:

(١)  $s^4 + 4$

(٢)  $s^4 + 324$

(٣)  $s^4 + 2500$

(٤)  $s^4 + 9604$

(٥)  $s^4 + 1024$

(٦)  $s^4 + 5184$

(٧)  $s^4 + 484$

(٨)  $s^4 + 9$

(٩)  $s^4 + 144$

(١٠) حلّ  $s^4 + c$  للوصول إلى قاعدة عامة لتحليل كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة.

## ٤-٨

## تدريبات إعادة التعليم

## حل المعادلات التربيعية باستعمال القانون العام

**القانون العام:** يمكنك حل المعادلة التربيعية على الصورة القياسية أس<sup>٢</sup> + ب س + ج = ٠ باستعمال القانون العام.

$\text{حلّ المعادلة التربيعية أس}^2 + \text{ب س} + \text{ج} = 0, \text{ حيث } 0 \neq \text{أ} \text{ يعبّر عنه بالقانون العام:}$ $\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - 4\text{أج}}}{2\text{أ}}$	القانون العام
--	---------------

**مثال ٢** حلّ المعادلة س<sup>٢</sup> - ٦س - ٢ = ٠

باستعمال القانون العام، مقرباً الحلّ إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضرورياً.

في هذه المعادلة، أ = ١، ب = -٦، ج = -٢.

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - 4\text{أج}}}{2\text{أ}}$$

$$\text{س} = \frac{\sqrt{(-6)^2 - 4(1)(-2)} \pm (-1)(-6)}{2(1)}$$

$$\frac{\sqrt{44} \pm 6}{2}$$

$$\text{س} = \frac{\sqrt{44} + 6}{2} \quad \text{أو} \quad \text{س} = \frac{\sqrt{44} - 6}{2}$$

$$\approx 3, 0$$

$$\approx 3, 6$$

مجموعة الحل هي {٠, ٣, ٦, ٣}.

**مثال ١** حلّ المعادلة س<sup>٢</sup> + ٢س = ٣

باستعمال القانون العام.

أعد كتابة المعادلة بالصورة القياسية.

$$\text{س}^2 + 2\text{س} = 3$$

المعادلة الأصلية

$$\text{س}^2 + 2\text{س} - 3 = 3 - 3$$

اطرح ٣ من كلا الطرفين

$$\text{س}^2 + 2\text{س} - 3 = 0$$

بسّط

والآن عوّض أ = ١، ب = ٢، ج = -٣ في القانون العام.

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - 4\text{أج}}}{2\text{أ}}$$

$$\text{س} = \frac{\sqrt{2^2 - 4(1)(-3)} \pm (-1)(-2)}{2(1)}$$

$$\frac{\sqrt{16} \pm 2}{2}$$

$$\text{س} = \frac{\sqrt{16} + 2}{2} \quad \text{أو} \quad \text{س} = \frac{\sqrt{16} - 2}{2}$$

$$1 = 3 -$$

مجموعة الحل هي {١, ٣}.

## تمارين

حلّ كلّ معادلة فيما يأتي باستعمال القانون العام، مقرباً الحلّ إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضرورياً:

$$(٢) \text{س}^2 - ٨\text{س} = ١٦$$

$$(١) \text{س}^2 - ٣\text{س} + ٢ = ٠$$

$$(٤) \text{س}^2 + ٥\text{س} = ٦$$

$$(٣) ١٦\text{س}^2 - ٨\text{س} = ١$$

$$(٦) ٨\text{س}^2 - ٨\text{س} - ٥ = ٠$$

$$(٥) ٨ = ٣\text{س}^2 + ٢\text{س}$$

$$(٨) ٥ = ٢\text{س}^2 + ٦\text{س}$$

$$(٧) ٢١ = ٤\text{س}^2 + ١٩\text{س}$$

$$(١٠) ٢٤ = ٨\text{س}^2 - ٤\text{س}$$

$$(٩) ٠ = ٤٨\text{س}^2 + ٢٢\text{س} - ١٥$$

$$(١٢) ٠ = ٨\text{س}^2 + ٩\text{س} - ٤$$

$$(١١) ٨ = ٢\text{س}^2 + ٥\text{س}$$

$$(١٤) ٠ = ٨\text{س}^2 + ١٧\text{س} + ٢$$

$$(١٣) ٠ = ٤\text{س}^2 + ٩\text{س} + ٢$$

## تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

## حل المعادلات التربيعية باستعمال القانون العام

**المميّز:** في القانون العام، تسمى العبارة التي تحت الجذر (ب<sup>٢</sup> - ٤ أ ج) المميّز، ويمكنك استعماله لتحديد عدد الحلول الحقيقية للمعادلة التربيعية.

الحالة ١: ب <sup>٢</sup> - ٤ أ ج > ٠	لا يوجد جذور حقيقية
الحالة ٢: ب <sup>٢</sup> - ٤ أ ج = ٠	جذر حقيقي واحد
الحالة ٣: ب <sup>٢</sup> - ٤ أ ج < ٠	جذران حقيقيان

مثال

أوجد قيمة المميّز لكل معادلة فيما يأتي، ثم حدّد عدد حلولها الحقيقية:

<p>(ب) <math>٢س^٢ + ٣س - ٤ = ٠</math></p> <p>المعادلة الأصلية <math>٢س^٢ + ٣س - ٤ = ٠</math></p> <p>أضف ٤ إلى كلا الطرفين <math>٢س^٢ + ٣س = ٤</math></p> <p>بسّط <math>٢س^٢ + ٣س - ٤ = ٠</math></p> <p>أوجد المميّز.</p> <p>ب<sup>٢</sup> - ٤ أ ج = <math>(٣)^٢ - ٤(٢)(٤)</math></p> <p><math>٢٣ - ٤ =</math></p> <p>بما أنّ المميّز سالب، فالمعادلة ليس لها حلول حقيقية.</p>	<p>(أ) <math>١٢س^٢ + ٥س - ٤ = ٠</math></p> <p>اكتب المعادلة بالصورة القياسية.</p> <p>المعادلة الأصلية <math>١٢س^٢ + ٥س - ٤ = ٠</math></p> <p>اطرح ٤ من كلا الطرفين <math>١٢س^٢ + ٥س - ٤ - ٤ = ٠</math></p> <p>بسّط <math>١٢س^٢ + ٥س - ٨ = ٠</math></p> <p>أوجد المميّز.</p> <p>ب<sup>٢</sup> - ٤ أ ج = <math>(٥)^٢ - ٤(١٢)(-٨)</math></p> <p><math>٢١٧ =</math></p> <p>بما أنّ المميّز موجب، فالمعادلة لها حلان حقيقيان.</p>
---	--

## تمارين

أوجد قيمة المميّز لكل معادلة فيما يأتي، ثم حدّد عدد حلولها الحقيقية:

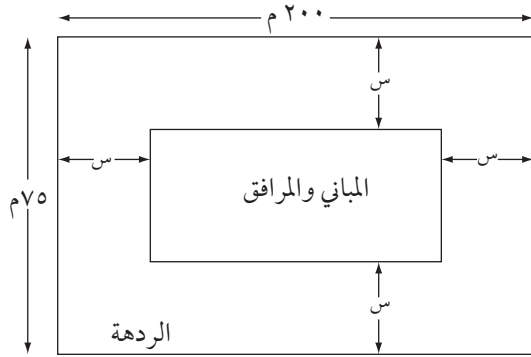
(١) $٣س^٢ + ٢س - ٣ = ٠$	(٢) $٣س^٢ - ٧س - ٨ = ٠$	(٣) $٢س^٢ - ١٠س - ٩ = ٠$
(٤) $٤س^٢ + ٥س = ٤$	(٥) $٣س^٢ - ١٣س = ١٠$	(٦) $٦س^٢ - ١٠س + ١٠ = ٠$
(٧) $٢س^٢ - ٢٠س = ٠$	(٨) $٦س^٢ - ١١س - ٤٠ = ٠$	(٩) $٩س^٢ + ١٨س - ٩ = ٠$
(١٠) $١٢س^٢ + ٩س - ٦ = ٠$	(١١) $٩س^٢ = ٨١$	(١٢) $١٦س^٢ + ١٦س + ٤ = ٠$
(١٣) $٨س^٢ + ٩س = ٢$	(١٤) $٤س^٢ - ٤س + ٣ = ٠$	(١٥) $٣س^٢ - ١٨س - ١٤ = ٠$

## تدريبات حل المسألة

## حل المعادلات التربيعية باستعمال القانون العام

٤) **حرف يدوية:** قصت سعاد خيطاً طوله ٦٠ سنتمتراً إلى قطعتين غير متساويتين، واستعملت كل قطعة في صنع مربع. فإذا كان مجموع مساحتي المربعين ١١٧ سنتمتراً مربعاً، وكانت س تمثل طول إحدى القطعتين، فاكتب معادلة للتعبير عن هذا الموقف، ثم حلها لإيجاد طولي القطعتين الأصليتين.

٥) **تصميم مواقع:** تخطط إحدى البلديات لبناء وحدة لمعالجة المياه على قطعة أرض مستطيلة الشكل عرضها ٧٥ متراً، وطولها ٢٠٠ متر، كما في الشكل أدناه. وتغطي المباني والمرافق منطقة مساحتها ١٠٠٠٠ متر مربع. وقد جرى الاتفاق مع المصمم على توفير أكبر فسحة ممكنة بين المباني والمرافق وحدود قطعة الأرض من كل جهاتها. افترض أن س تمثل عرض هذه الفسحة.



أ) مثل الموقف مستعملاً معادلة شبيهة بالمعادلة  $م = ل \times ع$

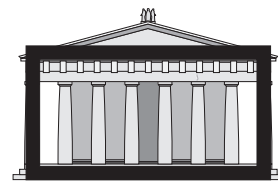
ب) اكتب المعادلة بالصورة التربيعية القياسية، ثم حلها.

ج) كم يتعين أن يكون عرض الفسحة؟ قرب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

١) **أعمال:** بدأ أجد عملاً خاصاً جديداً، ويمكنه بناءً على سجلاته تقدير أرباحه الأسبوعية باستعمال الدالة  $د(س) = ٢س + ٣٧ - س$ ، حيث س عدد الوحدات التي ينتجها. وعندما تكون د(س) سالبة يكون العمل خاسراً. فما أقل عدد من الوحدات التي يتعين على أجد إنتاجها حتى يربح؟

٢) **علم الطيران:** عند إقلاع مكوك الفضاء (دسكفري) يكون تسارعه ثابتاً مقداره ٤, ١٦ قدمًا في الثانية المربعة، وتكون سرعته الابتدائية ١٣٤١ قدمًا في الثانية بسبب دوران الأرض. إذا كانت المعادلة  $ف(ن) = ١٣٤١ن + ٢, ٨ن^٢$  تمثل المسافة المقطوعة ف بعد ن ثانية من الإقلاع، فما الزمن الذي يقطع فيه المكوك ٤٠٠٠٠ قدم؟ قرب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

٣) **فن العمارة:** تظهر النسبة الذهبية في نموذج التصميم



المجاور؛ لأن عرض الواجهة الأمامية س، وارتفاعها ع يرتبطان وفق المعادلة  $\frac{س}{ع} = \frac{ع + س}{س}$

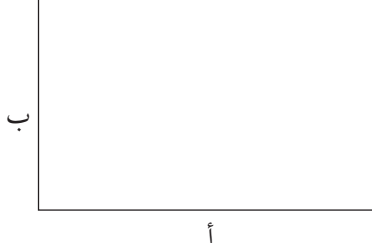
إذا كان ارتفاع النموذج ١٦ سنتمتراً فما عرضه؟ قرب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

## التدريبات الإثرائية المستطيلات الذهبية

للمستطيل الذهبي خاصية تتمثل في أن أضلعه تحقق التناسب الآتي:

$$\frac{أ + ب}{ب} = \frac{أ}{ب}$$

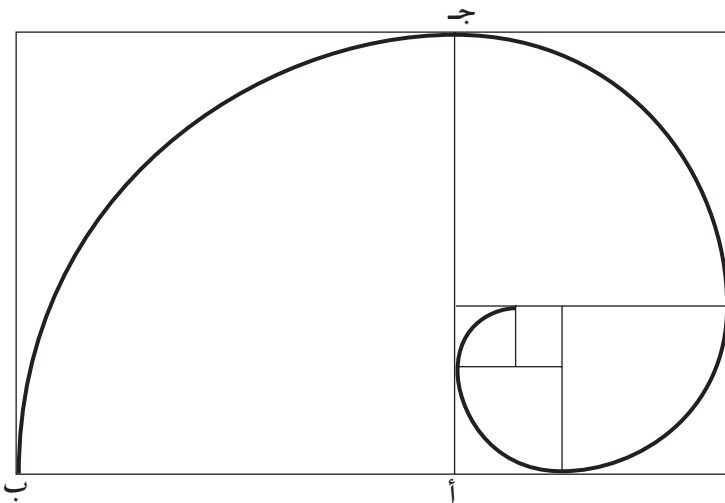
ويمكن كتابة معادلتين تربيعيتين من هذا التناسب، تسميان المعادلتين التربيعيتين الذهبيتين أحياناً.



(١) في التناسب أعلاه، افترض أن  $أ = ١$ ،  
(٢) حلّ المعادلة في تمرين (١) لـ  $ب$ .  
واكتب معادلة تربيعية مستعملاً الضرب التبادلي.

(٣) في التناسب أعلاه، افترض أن  $ب = ١$ ،  
(٤) حلّ المعادلة في تمرين (٣) لـ  $أ$ .  
واكتب معادلة تربيعية مستعملاً الضرب التبادلي.

(٥) فسّر لماذا تسمّى كلٌّ من  $\frac{١}{٢}(١ + \sqrt{٥})$ ،  $\frac{١}{٢}(١ - \sqrt{٥})$  نسبة ذهبية.



توجد خاصية أخرى للمستطيلات الذهبية، وهي أنه إذا رُسم مربع داخل مستطيل ذهبي فإنه يُنشئ مستطيلاً ذهبياً أصغر. في التصميم المجاور، وُصّلت الرؤوس المتقابلة في كل مربع بأقواس أرباع دوائر. فمثلاً، يُرسم القوس الواصل من النقطة ب إلى النقطة جـ بوضع رأس الفرجار عند النقطة أ، وبنصف قطر طوله أب.

(٦) ارسم نسخة مكبّرة من هذا التصميم على ورقة منفصلة. ابدأ بمستطيل ذهبي طول ضلعه الأطول ٢٥ سم.

# ملحق الإجابات

**تمتمة**

**1-8 تدريبات إعادة التعليم**  
تمثيل الدوال التربيعية بيانياً

محور التماثل والرأس

محور التماثل: هو المستقيم الذي يقسم الشكل إلى قسمين متطابقين تمامًا. ويسمى عندما الشكل بأنه متماثل.

القطع المكافئ: هو شكل متماثل وله محور تماثل، وكل نقطة في نصف القطع إلى يسار محور التماثل تتألف نقطة في النصف الأخرى له، ويسمى محور التماثل في الرأس، الذي يمثل أيضًا نقطة قيمة عظمى أو نقطة قيمة صغرى.

معاداة محور التماثل للقطع المكافئ ص = أس <sup>2</sup> + ب س + ج، مثال: معاداة محور تماثل للقطع المكافئ ص = س <sup>2</sup> + 3س + 2 هي س = -1	معاداة محور التماثل للقطع المكافئ ص = أس <sup>2</sup> + ب س + ج، مثال: معاداة محور تماثل للقطع المكافئ ص = س <sup>2</sup> + 3س + 2 هي س = -1	معاداة محور التماثل للقطع المكافئ ص = أس <sup>2</sup> + ب س + ج، حيث أ ≠ 0، هي س = - $\frac{ب}{2أ}$
--	--	---

- أ) اكتب معاداة محور التماثل للدالة ص = 2س<sup>2</sup> + 4س + 1:  
ب) أوجد الرأس.

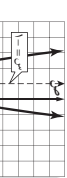
ج) معاداة محور التماثل هي ص = 2س<sup>2</sup> + 4س + 1

د) الرأس هو (-1، -1)

هـ) معاداة محور التماثل هي ص = 2س<sup>2</sup> + 4س + 1

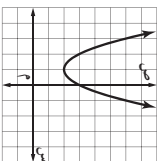
و) معاداة محور التماثل هي ص = 2س<sup>2</sup> + 4س + 1

بما أن معاداة محور التماثل هي س = -1، والرأس يقع على خط المحور، فإن الإحداثي السيني للرأس هو -1، لإيجاد الإحداثي الصادي للرأس عوض الإحداثي السيني في معاداة الدالة.



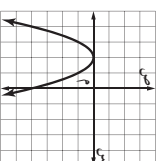
لذا الرأس هو (-1، -1).  
مثال الدالة بيانياً.

1) ص = س<sup>2</sup> - 4س + 3



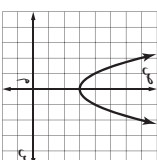
قيمة صغرى هي ٣  
النقطة: جميع الأعداد الحقيقية  
التي: (أما ص < 3)  
معاداة محور التماثل: س = ٢

2) ص = -س<sup>2</sup> - 4س - 4



قيمة عظمى هي صفر  
النقطة: جميع الأعداد الحقيقية  
التي: (أما ص ≥ ٧)  
معاداة محور التماثل: س = ٧

3) ص = س<sup>2</sup> + 3س



قيمة صغرى هي ٣  
النقطة: جميع الأعداد الحقيقية  
التي: (أما ص > 3)  
معاداة محور التماثل: س = ٣

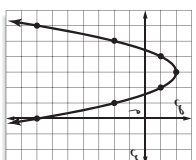
**1-8 تدريبات إعادة التعليم**  
تمثيل الدوال التربيعية بيانياً

خصائص الدوال التربيعية

الدالة التربيعية هي الدالة التي يمكن كتابتها على الصورة (دس) = أس <sup>2</sup> + ب س + ج حيث أ ≠ ٠.	مثال: ص = س <sup>2</sup> + ٢س + ٨
---	-----------------------------------

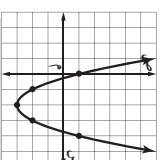
الدالة المربعة (الأزرق) للدوال التربيعية هي ص = س<sup>2</sup>، ويسمى التمثيل البياني للدالة التربيعية قطعاً مكافئاً، ويكون هذا التمثيل مقعر نحو أعلى إذا كان  $أ > ٠$ ، وقابل أدنى نقطة فيه نقطة القيمة الصغرى، ويكون هذا التمثيل منقوعاً إلى أسفل إذا كان  $أ < ٠$ ، وقابل أعلى نقطة فيه نقطة القيمة العظمى.

- أ) مثل الدالة ص = -س<sup>2</sup> - 6س - ٧ بيانياً، مستملاً جدول القيم.



ص	س
٧-	١-
٥-	٢-
٤-	٣-
٢-	٤-
١-	٥-
٠	٦-

- أ) مثل الدالة ص = س<sup>2</sup> - 4س + 1 بيانياً، مستملاً جدول القيم.



ص	س
١-	١
٠	٢
١	٣
٢	٤
٣	٥
٤	٦

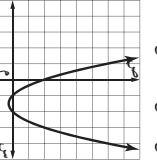
مثل الأزواج المرتبة بيانياً، ثم صل بينها بنسجى أملى.

ب) حدد مجال الدالة ومداها.

المجال (قيم س) هو جميع الأعداد الحقيقية.

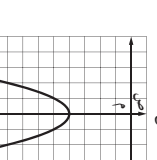
والذي (قيم ص) هو {ص | ص ≥ ٢}؛ لأن ٢ هي القيمة العظمى.

١) ص = س<sup>2</sup> - 3س + 2



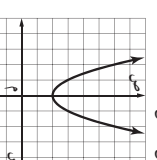
قيمة صغرى هي ٣  
النقطة: جميع الأعداد الحقيقية  
التي: (أما ص ≤ 3)  
معاداة محور التماثل: س = 3

٢) ص = -س<sup>2</sup> - 4س - 4



قيمة عظمى هي صفر  
النقطة: جميع الأعداد الحقيقية  
التي: (أما ص ≥ 4)  
معاداة محور التماثل: س = 4

٣) ص = س<sup>2</sup> + 3س

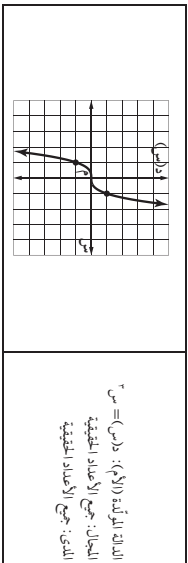


قيمة صغرى هي ٣  
النقطة: جميع الأعداد الحقيقية  
التي: (أما ص > 3)  
معاداة محور التماثل: س = 3

## ١-٨ التدرجات الإثرائية

### تمثيل الدوال التكرارية بيانياً

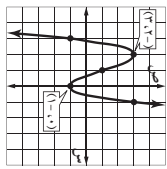
**الدالة التكرارية:** هي كثيرة حدود على الصورة  $D(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، حيث  $a \neq 0$ ، لا يوجد للدالة التكرارية نقطة قيمة عظمى متناهية أو نقطة قيمة صغرى متناهية، بل متناهية على الدوال التكرارية، لكن قد يوجد لها نقطة قيمة عظمى محلية أو نقطة قيمة صغرى محلية.



الدالة الموزعة (الأ):  $D(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$   
 الجذر: جميع الأعداد الحقيقية  
 الذي: جميع الأعداد الحقيقية

مثال: مثل الدالة  $D(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ ، مستملاً جدول القيم، ثم قُدّر من التمثيل البياني مواقع القيم العظمى المحلية والقيم الصغرى المحلية.

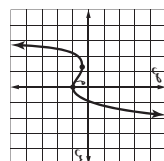
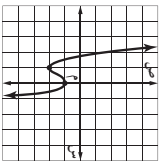
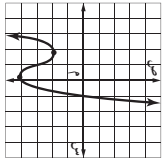
مثال	مثل الدالة $D(x) = x^3 + 3x^2 - 1$		
القيم العظمى المحلية والقيم الصغرى المحلية.	١	٠	١-٣
	٣	١-	٣
	٣	١-	٣



مثل الأزواج المرتبة بيانياً، وصل بينها بمنحنى أملس، يمتد الشكل الذي يشبه حرف (S) إلى ما لا نهاية في اتجاه المحور الصادي الموجب وذلك سالب ما لا نهاية في اتجاه المحور الصادي السالب. نقطة القيمة الصغرى المحلية هي  $(2, -4)$ ، ونقطة القيمة العظمى المحلية هي  $(1, 2)$ .

تمارين:

مثل كل دالة في الجدول التالي، مستملاً جدول القيم، ثم قُدّر من التمثيل البياني مواقع القيم العظمى المحلية والصغرى المحلية:



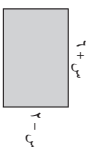
- قيمة عظمى محلية عند:  $(-1, 8)$       قيمة عظمى محلية عند:  $(1, 0)$       قيمة عظمى محلية عند:  $(-1, 8)$   
 قيمة صغرى محلية عند:  $(2, -1)$       قيمة صغرى محلية عند:  $(2, -1)$       قيمة صغرى محلية عند:  $(2, -1)$

## ١-٨ تدريبات حل المسألة

### تمثيل الدوال التكرارية بيانياً

٤) ألعاب ترفيهية: أقلك سهم ناربي إلى أعلى بسرعة ابتدائية قدرها ٢٤ قدمًا في الثانية. إذا كانت الدالة  $f(x) = 16x^2 + 32x + 1$  تمثل ارتفاع السهم ف(بالقدم) بعد زمن مقداره  $x$  (بالثواني)، فأوجد إحداثيات الرأس للتمثيل البياني لهذه الدالة، وفتر معناه.

٥) هنتسة: أنشأ عز الدين قاعدة خمسية مستطيلة كما في الشكل أدناه:



أ) اكتب دالة تمثل مساحة القاعدة الخمسية.

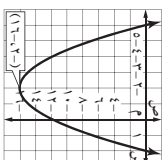
$$ص = (ص - ٢)(٢ + ص)$$

$$ص = ص^2 + ٢ص - ٢$$

ب) ما معادلة محور التماس؟

$$ص = ٢ - ص$$

ج) مثل الدالة بيانياً وحدد رأس التمثيل البياني.



الراس  $(-٢, -١)$

- ١) ألعاب أولمبية: أقيمت الألعاب الأولمبية أول مرة عام ١٨٩٦م وأصبحت تُقام كل ٤ سنوات (باستثناء الأعوام ١٩١٦م، ١٩٤٠م، ١٩٤٤م، ١٩٤٨م)، ويمكن تمثيل الارتفاع (ص) للثقل بمسابقة الوثب بالزمن للرجال في الدورة الأولمبية رقم (ص) بالمعادلة  $ص = ٣٧ + ٣س + ٤س^2 + ١,٢٦$  اكمل الجدول أدناه لتقدير الارتفاعات للثقلين بمسابقة الوثب بالزمن في كل دورة أولمبية معطاة، معزياً إجاباتك إلى أقرب جزء من صغرة.

الارتفاع (ص)	رقم الدورة الأولمبية (ص)	السنة
١٣٠,٧	١	١٨٩٦
١٣٦,١	٢	١٩٠٠
١٧٤,٢	٧	١٩٢٤
٢٠٦,٠	١٠	١٩٣٨
٢٧٣,٨	١٥	١٩٥٢
٤٨٧,٩	٢٦	٢٠٠٨

٢) هنتسة: يستغني طلاب في حصة الفيزياء، ما يحدث عند دفع كرة بسرعة ابتدائية على سطح مائل، فتصعد عليه ثم ترجع. فوجدوا أنه يمكنهم تمثيل المسافة (ف) التي تقطعها الكرة بعد  $n$  ثانية بالدالة  $ف = -١٦n^2 + ٦٤n$ . على التمثيل البياني لهذه الدالة حدد قيمة  $n$  عندما  $٨٤ = n$

٣) هنتسة معمارية: قوس المدخل الرئيسي لأحد الفنادق يأخذ شكل قطع مكافئ. إذا كانت المعادلة  $ص = -١٠س^2 + ١٠٠س$  تمثل ارتفاع القوس ص بالأقدام عند أي بعد  $س$  عن أحد جانبيه، فحدد أقصى ارتفاع للقوس مستعملاً التمثيل البياني للدالة.

٢٥ قدمًا

(تنمية)

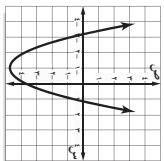
## ٢-٨ تدريبات إعادة التعليم

### حل المعادلات التربيعية بيانيًا

تقدير الم طول: كانت جذور المعادلات في الصفحة السابقة أعدادًا صحيحة، إلا أن جذور المعادلات التربيعية ليست دائمًا كذلك، ويُشتمل في هذه الحالات التقدير لإيجاد قيم تقريبية لجذور المعادلة.

مثال حل المعادلة  $x^2 + 2x - 4 = 0$  بيانيًا، وإذا لم يكن الجذور أعدادًا صحيحة، فقدرها باختيار عددين صحيحين متساويين يقع بينهما كل جذر.

مثل المعادلة  $x^2 + 2x - 4 = 0$  المرتبطة بالمعادلة بيانيًا.



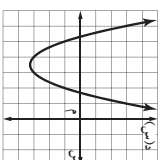
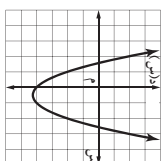
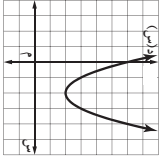
لاحظ أن قيمة الدالة تتغير من موجب إلى سالب بين قيمتي  $x = -4$ ،  $x = 3$ ، وقيمتي  $x = 1$ ،  $x = 4$ . تقع المقاطع السالبة في النطاق البياني بين  $-4$ ،  $-3$  و  $1$ ،  $2$  لذا فأحد الجذور يقع بين  $-4$ ،  $-3$  والثاني يقع بين  $1$ ،  $2$

د(دس)	س
٤	٤-
١-	٣-
٤-	٢-
٥-	١-
١-	١
٤	٢

تعمارين

حل كل معادلة فيما يلي بيانيًا، وإذا لم يكن الجذور أعدادًا صحيحة، فقدرها إلى أقرب جزء من مئة:

(١)  $x^2 + 7x + 3 = 0$       (٢)  $x^2 - 4 = 0$       (٣)  $x^2 - 4x + 6 = 0$

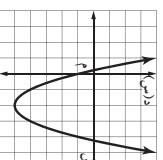
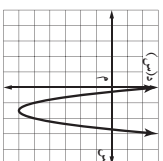
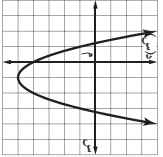


لا يوجد حلول حقيقية.

١- > x > ٢-      ٢ > x > ٣

١- > x > ٥-      ١- > x > ١-

(٤)  $x^2 - 4x + 1 = 0$       (٥)  $x^2 - 12x + 3 = 0$       (٦)  $x^2 - 2x - 4 = 0$



١- > x > ٢-      ١- > x > ٠

٤ > x > ٢

١١

## ٢-٨ تدريبات إعادة التعليم

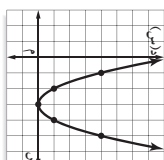
### حل المعادلات التربيعية بيانيًا

حل المعادلات التربيعية بالتعويض البياني:

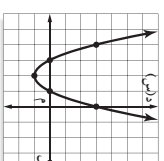
المعادلة التربيعية الصورة القياسية للمعادلة التربيعية هي  $ax^2 + bx + c = 0$ ، حيث  $a \neq 0$ . يمكنك تحديد حلول المعادلة التربيعية  $ax^2 + bx + c = 0$  ب  $x$  و  $y$  صفراً، أو جذورها بتبثيل الدالة المرتبطة (دس)  $y = ax^2 + bx + c$  ب  $x$  و  $y$  وإيجاد المقاطع السالبة أو الصغر الدالة.

مثال ٣ حل المعادلة  $x^2 - 2x - 9 = 0$  بيانيًا.

مثل المعادلة (دس)  $y = x^2 - 2x - 9$  المرتبطة بالمعادلة بيانيًا.



مثل الرأس وعدة نقاط على جانبي محور التمثيل بيانيًا. يتطلب أن تعرف متى تكون (دس)  $y = 0$ ، حل المعادلة  $x^2 - 2x - 9 = 0$  رأس المقاطع الكافي هو المقاطع السمي الوحيد لهذه الدالة، لذا فإن هذه المعادلة حلًا وحيدًا هو  $x = 3$

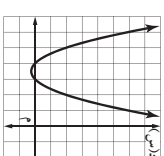
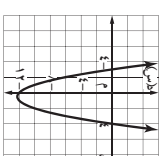
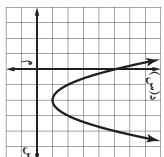


يتطلب أن تعرف متى تكون (دس)  $y = 0$ ، حل المعادلة  $x^2 + 4x + 3 = 0$  وهذا يحدث عند المقاطع السالبة،  $x = -3$ ،  $x = -1$ ، لذا فإن حلول هي  $x = -3$ ،  $x = -1$

تعمارين

حل كل معادلة فيما يلي بيانيًا:

(١)  $x^2 + 7x + 3 = 0$       (٢)  $x^2 - 12 = 0$       (٣)  $x^2 - 4x + 3 = 0$



١٠

## ٢-٨ التدريبات الإثرائية

## إيجاد معادلة قطع مكافئ يمر بثلاث نقاط معطاة

إذا عرفت نقطتين على مستقيم، فممكن إيجاد معادله. وإيجاد معادلة قطع مكافئ يجب أن تمر بثلاث إحداثيات ثلاث نقاط وإعطاء عليه، وفيما يأتي توضيح طريقة إيجاد معادلة القطع المكافئ المار بالنقاط  $(٠, ٢)$ ،  $(٢, ٥)$ ،  $(٤, ٥)$ .  
أولاً: عوّض عن قسم  $س$ ، في الصورتين القياسية للمعادلة التربيعية، وهي  $ص = أس^٢ + ب س + ج$  لتحصل على ثلاث معادلات.

$$\begin{aligned} ٢ = ٢ - & (٢, ٠) \\ ٥ = ٠ + ٣ + ٢ - & (٠, ٢) \\ ٥ = ٢ + ١٥ + ٢ - & (٢, ٥) \end{aligned}$$

ثانياً: عوّض  $٢ = ٢$  من  $(٢, ٥)$  في المعادلتين الثانية والثالثة، ثم حلّ هاتين المعادلتين.

$$\begin{aligned} ١٠ - ١٥ + ٤ = ٠ & \\ ٦ + ١٥ - ١٧ = ٠ - & \\ \frac{٦ - ١١}{٤} = \frac{٠ - ١٧}{٤} = -٤ & \end{aligned}$$

ثالثاً: عوّض  $١٥$  عن  $أ$  في المعادلة الثانية أو الثالثة لإيجاد قيمة  $ب$ .

$$\begin{aligned} ٩ = ٠ + \left(\frac{١}{٥}\right) ٢ - ٢ - & \\ \frac{٧}{٥} = ٢ - & \\ \text{لذا فمعادلة القطع المكافئ المار بالنقاط الثلاث هي: } ص = \frac{١}{٥} س^٢ + \frac{٧}{٥} س - ٢ & \end{aligned}$$

تعاريف

أوجد معادلة القطع المكافئ المار بكل مجموعة من ثلاث نقاط فيما يأتي:

- (١)  $(٤, ٥)$ ،  $(٢, ٠)$ ،  $(٠, ٢)$  ص =  $\frac{١}{١٥} س^٢ + \frac{٢}{١٥} س - \frac{١١}{١٥}$
- (٢)  $(٠, ٥)$ ،  $(٠, ٠)$ ،  $(٠, ٨)$  ص =  $\frac{١}{١٥} س^٢ + \frac{٢}{١٥} س - \frac{١١}{١٥}$
- (٣)  $(٤, ٤)$ ،  $(١, ٠)$ ،  $(٣, ١)$  ص =  $\frac{١}{٥} س^٢ - \frac{١}{٥} س + ١$
- (٤)  $(٠, ٠)$ ،  $(٠, ٦)$ ،  $(٣, ١)$  ص =  $\frac{١}{٥} س^٢ + \frac{٦}{٥} س - \frac{١١}{٥}$
- (٥)  $(٢, ٢)$ ،  $(٠, ٥)$ ،  $(٣, ٠)$  ص =  $\frac{١}{١٠} س^٢ - \frac{١٩}{١٠} س + ١$

## ٢-٨ تدريبات حل المسألة

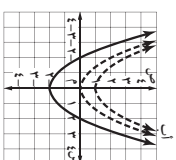
## حل المعادلات التربيعية بيانياً

٤) ورق تقطيع: هل يمكن لورقة تقطيع مستطيلة مساحتها ٨١ سنتيمترًا مربعًا أن يكون محيطها ٢٠ سنتيمترًا؟ فسر إجابتك. (ارتقاء: افترض أن العرض  $س$ ، الطول  $٣ - س$ ).

عند حل المعادلة  $(٣ - س) س = ٨١$  نجد أن  $س = ٢$  أو  $٢٧$ . فالورقة التي بعرضها  $٢٧$  سم تكون مساحتها  $٨١$  سم<sup>٢</sup> ومحيطها  $٦٠$  سم وتطوق المطلوب.

٥) هندسة: شكل طبق الأرز الصناعية هو قطع مكافئ غائباً. افترض أن المعادلة  $٥ = س^٢ + ٢ = ص$  تمثل أحد هذه الأطباق.

أ) أوجد جذور المعادلة مستعملًا التمثيل البياني.



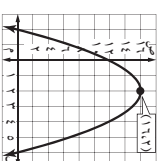
ب) اسحب القطع المكافئ على المستوى الإحداثي أعلاه بحيث يكون له جذور واحد. سمّ المنحني الناتج أ.

إجابة ممكنة: المنحني الشكل (١) أعلاه.

ج) اسحب القطع المكافئ بحيث يصبح دون جذور. سمّ المنحني الناتج ب.

إجابة ممكنة: المنحني الشكل (ب) أعلاه.

١) زواجة: راجع عبد السلام سجلات الأعمار السابقة كي يجنّد كمية السباد المطلوبة لحصول النذرة هذا العام، فوجد أن الإنتاج  $ص$  يعتمد على كمية السباد  $س$  المستخدمة وفق المعادلة  $ص = -س^٢ + ٤س + ١٢$ . يقلّ النذرة إنتاجاً، وأزجّد النقطه التي يتوقع عبد السلام أن يحصل عندها على أكبر إنتاج.

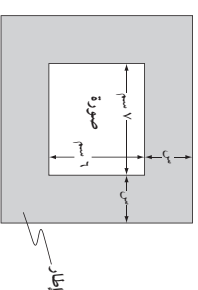


٢) ضوء: جعل أحد وسيف مصباحاً يدويًا، ومستط الضوء المنبعث منه على قطعة من ورق الرسم البياني ليشكل قطعاً مكافئًا، ف رسم أحد وسيف القطع المكافئ الناتج، ووجد أنه يطابق المنحني البياني للمعادلة  $ص = -س^٢ - ٣س - ١٠$ . حدد جذور هذه المعادلة.

٥,٢-

٣) تأهضو: صورة مستطيلة الشكل طولها ٧ سم وعرضها ٦ سم، أضيفت إطارات عرضة  $س$  سم من جميع الجوانب كما في الشكل أدناه، إذا كانت مساحة الإطار والصورة معًا  $١٥٦$  سم<sup>٢</sup>، فما عرض الإطار؟

٣٣



التاريخ \_\_\_\_\_

الاسم \_\_\_\_\_

(تنمية)

### ٣-٨ تدريبات إعادة التعليم

#### حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع

حل المعادلات بإكمال المربع؛ بما أن القليل من العبارات التربيعية هي مربعات كاملة، فيمكنك استعمال طريقة إكمال المربع لحل المعادلات التربيعية التي تتطلب فصل الحدين من  $x^2$  ب  $x$  أولاً. أقم الخطوات الآتية لإكمال المربع لمباريات تربيعية على الصورة  $ax^2 + bx + c = 0$ .

الخطوة ١: أوجد $\frac{b}{2}$	الخطوة ٢: أوجد $(\frac{b}{2})^2$
الخطوة ٣: أضف $(\frac{b}{2})^2$ إلى أس $x^2$ وأس $x$	الخطوة ٤: أضف $(\frac{b}{2})^2$ إلى أس $x^2$ وأس $x$

مثال حل المعادلة  $x^2 + 6x + 3 = 10$  بإكمال المربع.

المعادلة الأصيلة

$$x^2 + 6x + 3 = 10$$

$$x^2 + 6x + 3 - 3 = 10 - 3$$

$$x^2 + 6x = 7$$

$$x^2 + 6x + 9 = 7 + 9$$

$$(x+3)^2 = 16$$

$$x+3 = \pm 4$$

$$x = -3 \pm 4$$

$$x = 1 \text{ أو } x = -7$$

الحلّان هما  $x = 1$  و  $x = -7$  ومجموعة الحل هي  $\{-7, 1\}$ .

تعمارين

حل كل معادلة فيما يأتي بإكمال المربع، مقترناً الحلّ إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضرورياً:

$$1) \quad x^2 - 2x + 3 = 0 \quad x^2 - 9 = 0 \quad x^2 - 9 = (x-3)(x+3) \quad x = 3 \text{ أو } x = -3$$

$$2) \quad x^2 - 10x + 25 = 0 \quad x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2 \quad x = 5$$

$$3) \quad x^2 - 16 = 0 \quad x^2 - 16 = (x-4)(x+4) \quad x = 4 \text{ أو } x = -4$$

$$4) \quad x^2 - 8x + 16 = 0 \quad x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2 \quad x = 4$$

$$5) \quad x^2 + 6x + 9 = 10 \quad x^2 + 6x + 9 - 9 = 10 - 9 \quad x^2 + 6x = 1 \quad x^2 + 6x + 9 = 1 + 9 \quad (x+3)^2 = 10 \quad x+3 = \pm \sqrt{10} \quad x = -3 \pm \sqrt{10}$$

$$6) \quad x^2 - 14x + 49 = 0 \quad x^2 - 14x + 49 = (x-7)^2 \quad x = 7$$

$$7) \quad x^2 - 10x + 25 = 10 \quad x^2 - 10x + 25 - 25 = 10 - 25 \quad x^2 - 10x = -15 \quad x^2 - 10x + 25 = -15 + 25 \quad (x-5)^2 = 10 \quad x-5 = \pm \sqrt{10} \quad x = 5 \pm \sqrt{10}$$

$$8) \quad x^2 - 12x + 36 = 0 \quad x^2 - 12x + 36 = (x-6)^2 \quad x = 6$$

$$9) \quad x^2 - 14x + 49 = 10 \quad x^2 - 14x + 49 - 49 = 10 - 49 \quad x^2 - 14x = -39 \quad x^2 - 14x + 49 = -39 + 49 \quad (x-7)^2 = 10 \quad x-7 = \pm \sqrt{10} \quad x = 7 \pm \sqrt{10}$$

$$10) \quad x^2 - 10x + 25 = 10 \quad x^2 - 10x + 25 - 25 = 10 - 25 \quad x^2 - 10x = -15 \quad x^2 - 10x + 25 = -15 + 25 \quad (x-5)^2 = 10 \quad x-5 = \pm \sqrt{10} \quad x = 5 \pm \sqrt{10}$$

$$11) \quad x^2 - 12x + 36 = 10 \quad x^2 - 12x + 36 - 36 = 10 - 36 \quad x^2 - 12x = -26 \quad x^2 - 12x + 36 = -26 + 36 \quad (x-6)^2 = 10 \quad x-6 = \pm \sqrt{10} \quad x = 6 \pm \sqrt{10}$$

المفصل ٨ السؤال التربيعة

١٥

التاريخ \_\_\_\_\_

الاسم \_\_\_\_\_

٣-٨

### تدريبات إعادة التعليم

#### حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع

إكمال المربع؛ يمكنك حل المعادلة التربيعية التي تمثل مربعاً كاملاً بسرعة، بإيجاد الجذر التربيعي لكل من طرفي المعادلة. إذا العبارة التربيعية التي ليست مربعاً كاملاً، فيمكنك تحويلها إلى مربع كامل باستعمال طريقة تُسمى طريقة إكمال المربع.

إكمال المربع

لإكمال المربع في أي عبارة تربيعية على الصورة  $x^2 + bx + c = 0$ ، أقم الخطوات الآتية:

الخطوة ١: أوجد نصف  $b$  (معامل  $x$ ).

الخطوة ٢: رقع الناتج في الخطوة ١.

الخطوة ٣: أضف الناتج من الخطوة ٢ إلى أس  $x^2$  وأس  $x$ .

الخطوة ٤: أضف  $(\frac{b}{2})^2$  إلى أس  $x^2$  وأس  $x$ .

مثال

أوجد قيمة  $x$  التي تجعل العبارة الحدودية  $x^2 + 6x + 3 = 10$  حلاً.

$$x^2 + 6x + 3 = 10$$

$$x^2 + 6x + 3 - 3 = 10 - 3$$

$$x^2 + 6x = 7$$

$$x^2 + 6x + 9 = 7 + 9$$

$$(x+3)^2 = 16$$

$$x+3 = \pm 4$$

$$x = -3 \pm 4$$

$$x = 1 \text{ أو } x = -7$$

الحلّان هما  $x = 1$  و  $x = -7$  ومجموعة الحل هي  $\{-7, 1\}$ .

تعمارين

أوجد قيمة  $x$  التي تجعل كل عبارة حدودية فيما يأتي مربعاً كاملاً:

$$1) \quad x^2 + 10x + 25 = 0 \quad x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2 \quad x = -5$$

$$2) \quad x^2 - 14x + 49 = 0 \quad x^2 - 14x + 49 = (x-7)^2 \quad x = 7$$

$$3) \quad x^2 - 16 = 0 \quad x^2 - 16 = (x-4)(x+4) \quad x = 4 \text{ أو } x = -4$$

$$4) \quad x^2 - 8x + 16 = 0 \quad x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2 \quad x = 4$$

$$5) \quad x^2 + 6x + 9 = 10 \quad x^2 + 6x + 9 - 9 = 10 - 9 \quad x^2 + 6x = 1 \quad x^2 + 6x + 9 = 1 + 9 \quad (x+3)^2 = 10 \quad x+3 = \pm \sqrt{10} \quad x = -3 \pm \sqrt{10}$$

$$6) \quad x^2 - 10x + 25 = 10 \quad x^2 - 10x + 25 - 25 = 10 - 25 \quad x^2 - 10x = -15 \quad x^2 - 10x + 25 = -15 + 25 \quad (x-5)^2 = 10 \quad x-5 = \pm \sqrt{10} \quad x = 5 \pm \sqrt{10}$$

$$7) \quad x^2 - 12x + 36 = 0 \quad x^2 - 12x + 36 = (x-6)^2 \quad x = 6$$

$$8) \quad x^2 - 14x + 49 = 10 \quad x^2 - 14x + 49 - 49 = 10 - 49 \quad x^2 - 14x = -39 \quad x^2 - 14x + 49 = -39 + 49 \quad (x-7)^2 = 10 \quad x-7 = \pm \sqrt{10} \quad x = 7 \pm \sqrt{10}$$

$$9) \quad x^2 - 10x + 25 = 10 \quad x^2 - 10x + 25 - 25 = 10 - 25 \quad x^2 - 10x = -15 \quad x^2 - 10x + 25 = -15 + 25 \quad (x-5)^2 = 10 \quad x-5 = \pm \sqrt{10} \quad x = 5 \pm \sqrt{10}$$

$$10) \quad x^2 - 12x + 36 = 10 \quad x^2 - 12x + 36 - 36 = 10 - 36 \quad x^2 - 12x = -26 \quad x^2 - 12x + 36 = -26 + 36 \quad (x-6)^2 = 10 \quad x-6 = \pm \sqrt{10} \quad x = 6 \pm \sqrt{10}$$

١٤

المفصل ٨ السؤال التربيعة

### ٢-٨ التدرجات الإثرائية

#### تحليل كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة

إن أركان الرفع طريقة مفيدة في تحليل المبركات التربيعية وحل المعادلات التربيعية. ويمكن الاستفادة من طريقة مشابهة في تحليل كثيرات حدود من الدرجة الرابعة على الصورة  $x^4 + \dots$ .

**حلل كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة  $x^4 + 24x^2 + 144$**

مثال

**الخطوة ١:** أوجد قيمة الحد الأوسط المطلوب لإكمال المربع.

وهذه القيمة هي  $(\frac{24}{2})^2 = 144$  أو  $12^2$  م<sup>٢</sup>

**الخطوة ٢:** أعد كتابة كثيرة الحدود الأصلية على صورة قابلة للتحليل:

$$x^4 + 24x^2 + 144 = (x^2 + 12)^2 - (8)^2$$

**الخطوة ٣:** حلل كثيرة الحدود  $x^2 + 12$  م<sup>٢</sup> إلى  $x^2 + 8$  م<sup>٢</sup> و  $x^2 + 20$  م<sup>٢</sup>

$$x^2 + 12 = (x + 2\sqrt{3})(x - 2\sqrt{3})$$

**الخطوة ٤:** أعد القادر السابق في صورة فرق بين مربعين على النحو الآتي:

$$(x^2 + 8 + 8 + 16) - (8 - 8 + 16)$$

لذا فإن تحليل  $x^4 + 24x^2 + 144$  هو  $(x^2 + 8 + 8 + 16) - (8 - 8 + 16)$ . ويمكنك تحليلها إلى أبعد من ذلك، إذا كان هذا ضروريًا، لإيجاد حلول معادلة من الدرجة الرابعة.

**حلل كل كثيرة حدود من الدرجة الرابعة فيما يأتي:**

- ١)  $x^4 + 4x^2 + 4$  م<sup>٢</sup>
- ٢)  $x^4 + 2x^2 + 1$  م<sup>٢</sup>
- ٣)  $x^4 + 10x^2 + 25$  م<sup>٢</sup>
- ٤)  $x^4 + 14x^2 + 49$  م<sup>٢</sup>
- ٥)  $x^4 + 8x^2 + 16$  م<sup>٢</sup>
- ٦)  $x^4 + 12x^2 + 36$  م<sup>٢</sup>
- ٧)  $x^4 + 44x^2 + 44$  م<sup>٢</sup>
- ٨)  $x^4 + 9x^2 + 14$  م<sup>٢</sup>
- ٩)  $x^4 + 14x^2 + 49$  م<sup>٢</sup>

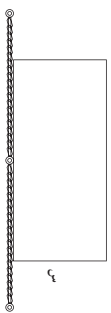
### ٢-٨ تدرجات حل المسألة

#### حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع

٤) **ضفادع:** كان ضفادع جالسًا على جذع شجرة ارتفاعه ٣ أقدام، ثم قفز وخط على الأرض. فإذا كانت المعادلة  $x^2 + 5x - 24 = 0$  تمثل ارتفاع الضفادع من (الأقدام) عن سطح الأرض في أثناء قفزه، حيث تمثل  $x$  بُعدًا عن قاعدة الجذع، فما بعد الضفادع عن قاعدة الجذع عندما يصل إلى الأرض؟

٢ + ٦، أو ٦، أو ٥ أقدام تقريبًا

٥) **بيستية:** يخطط سمي لإحاطة ثلاثة جوانب بيستان جدران مستطيل الشكل بسياج طوله ٢٥٠ مترًا. والجانب الرابع محاط بسياج قديم.



١) **يكن  $S =$  عرض المستطيل.** اكتب دالة لتمثيل مساحة المنطقة عند استكمال السياج الجديد.

س(٢٥٠ - ٢)

ب) **أوجد رأس منحنى الدالة التي أوجدتها في الفقرة أ، وحدد ما إذا كان يمثل نقطة قيمة عظمى أو صغرى.**

عظمى (٢٧٥، ٧٨١٢٥)

ج) **فسر معنى رأس المنحنى في سياق الموقف.**  
إذا كان عرض البيستان ١٢٥ مترًا، وطوله ١٢٥ مترًا، فإن مساحته تكون أكبر ما يمكن، وتساوي ٧٨١٢٥ مترًا مربعية.

١) **تصميم داخلي:** يتم فرش العرف بقطع صغيرة من السجاد بدلاً من قطعة واحدة كبيرة أحاديًا، ويساعد هذا على استبدال قطع صغيرة فقط في حالة تلف جزء من سجاد العرف. افترض أنه تم فرش العرف في المحيط أثناء قطع السجاد المبني في الشكل. أكمل المربع الكبير لتحديد عدد قطع السجاد الربعة (قدم) المطلوبة لتكملة أرضية العرف، وإملاء الحدود المفقودة في المعادلة الموضحة أدناه.

س	س	س	س	س	س
س	س	س	س	س	س
س	س	س	س	س	س
س	س	س	س	س	س

$$x^2 + 10x + \dots = (x + 20)\dots$$

٢) **الأجسام المسقطية:** ألقى معاذ حجرًا في بئر قديمة، ولكن غرق المساقط (الأقدام) التي قطعها الحجر بعد ن ثانية بالمعادلة  $f = 16t^2 + 24t - 16$ . إذا كان الماء في البئر دون مستوى الأرض بمقدار ٨٠ قدمًا، فبعد كم ثانية يصل الحجر إلى سطح الماء؟

بعد ثانية واحدة

٣) **المربيع:** قوة الجاذبية على سطح المريخ أصغر من قوة جاذبية الأرض. عند ضرب كرة جولف إلى أعلى بسرعة ابتدائية ٢٦ مترًا في الثانية من سطح الأرض، فإن أقصى ارتفاع لها هو ٥، ٣٤ مترًا تقريبًا. إذا كانت المعادلة  $f = -9.8t^2 + 31.6t$  تمثل الارتفاع  $f$  بعد  $t$  ثانية، فمقدار  $f$  من سطح المريخ سرعًا ابتدائية ٢٦ مترًا في الثانية، فأوجد أقصى ارتفاع تصل إليه كرة الجولف نفسها عند ضربها من سطح المريخ بالسرعة الابتدائية نفسها، مقارنًا إجاباتك إلى أقرب جزء من عشرة.

٢٨٨٩

## تنبؤة

تدريبات إعادة التعليم  
حل المعادلات التربيعية باستخدام القانون العام

المميز في القانون العام، تسمى العبار التي تحت الجذر (ب<sup>2</sup> - 4أج) المميز، ويمكن استعماله لتحديد عدد الحلول الحقيقية للمعادلة التربيعية.

الحالة ١، ب <sup>2</sup> - 4أج > ٠	لا يوجد جذور حقيقية
الحالة ٢، ب <sup>2</sup> - 4أج = ٠	جذر حقيقي واحد
الحالة ٣، ب <sup>2</sup> - 4أج < ٠	جذوران حقيقتان

مثال

$$(ب) \quad ٢س^2 + ٣س - ٤ = ٠$$

المادة الأصلية

$$٢س^2 + ٣س - ٤ = ٠$$

$$٢س^2 + ٣س - ٤ = ٠$$

$$٢س^2 + ٣س - ٤ = ٠$$

$$٢س^2 + ٣س - ٤ = ٠$$

$$٢س^2 + ٣س - ٤ = ٠$$

بإذن المميز سالب، فالمعادلة ليس لها حلول حقيقية.

$$(أ) \quad ١٢س^2 + ٣س + ٤ = ٠$$

الكتب المعادلة بالصورة القياسية.

$$١٢س^2 + ٣س + ٤ = ٠$$

$$١٢س^2 + ٣س + ٤ = ٠$$

$$١٢س^2 + ٣س + ٤ = ٠$$

$$١٢س^2 + ٣س + ٤ = ٠$$

$$١٢س^2 + ٣س + ٤ = ٠$$

بإذن المميز موجب، فالمعادلة لها حلان حقيقتان.

تعاريف

أوجد قيمة المميز لكل معادلة فيما يأتي، ثم حدد عدد حلولها الحقيقية:

- (١)  $٣س^2 - ٢س - ٨ = ٠$  حلان حقيقتان
- (٢)  $٣س^2 - ٧س - ٨ = ٠$  حلان حقيقتان
- (٣)  $٢س^2 - ١٠س - ٩ = ٠$  حلان حقيقتان
- (٤)  $٤س^2 + ٣س + ٤ = ٠$  حلان حقيقتان
- (٥)  $٣س^2 - ١٣س + ١٠ = ٠$  حلان حقيقتان
- (٦)  $٢س^2 - ١٠س + ١٠ = ٠$  ليس لها حلول حقيقية
- (٧)  $٢س^2 - ١١س + ١١ = ٠$  ليس لها حلول حقيقية
- (٨)  $٤س^2 - ١١س + ١١ = ٠$  ليس لها حلول حقيقية
- (٩)  $٩س^2 - ٨٩س - ٨٩ = ٠$  ليس لها حلول حقيقية
- (١٠)  $٩س^2 - ١٢س + ١٢ = ٠$  حلان حقيقتان
- (١١)  $٩س^2 - ١٢س + ١١ = ٠$  حلان حقيقتان
- (١٢)  $٩س^2 - ١٢س + ١١ = ٠$  حلان حقيقتان
- (١٣)  $٨س^2 + ٣س - ٩ = ٠$  حلان حقيقتان
- (١٤)  $٤س^2 - ٤س + ٤ = ٠$  حلان حقيقتان
- (١٥)  $٣س^2 - ١٨س - ١٤ = ٠$  حلان حقيقتان
- (١٦)  $١٤٥$  حلان حقيقتان
- (١٧)  $١٤٥$  حلان حقيقتان
- (١٨)  $١٤٥$  حلان حقيقتان
- (١٩)  $١٤٥$  حلان حقيقتان
- (٢٠)  $١٤٥$  حلان حقيقتان

## تدريبات إعادة التعليم

## حل المعادلات التربيعية باستخدام القانون العام

القانون العام، يمكنك حل المعادلة التربيعية على الصورة القياسية أس<sup>٢</sup> + ب س + ج = ٠ باستخدام القانون العام.

القانون العام	حل المعادلة التربيعية أس <sup>٢</sup> + ب س + ج = ٠ ب <sup>2</sup> - 4أج > ٠ ب <sup>2</sup> - 4أج = ٠ ب <sup>2</sup> - 4أج < ٠
---------------	---

مثال ١

استعمال القانون العام.

أعد كتابة المعادلة بالصورة القياسية.

$$٣س^2 + ٢س - ٣ = ٠$$

المادة الأصلية

$$٣س^2 + ٢س - ٣ = ٠$$

$$٣س^2 + ٢س - ٣ = ٠$$

$$٣س^2 + ٢س - ٣ = ٠$$

$$٣س^2 + ٢س - ٣ = ٠$$

$$٣س^2 + ٢س - ٣ = ٠$$

$$٣س^2 + ٢س - ٣ = ٠$$

$$٣س^2 + ٢س - ٣ = ٠$$

$$٣س^2 + ٢س - ٣ = ٠$$

$$٣س^2 + ٢س - ٣ = ٠$$

$$٣س^2 + ٢س - ٣ = ٠$$

$$٣س^2 + ٢س - ٣ = ٠$$

$$٣س^2 + ٢س - ٣ = ٠$$

$$٣س^2 + ٢س - ٣ = ٠$$

$$٣س^2 + ٢س - ٣ = ٠$$

$$٣س^2 + ٢س - ٣ = ٠$$

$$٣س^2 + ٢س - ٣ = ٠$$

$$٣س^2 + ٢س - ٣ = ٠$$

$$٣س^2 + ٢س - ٣ = ٠$$

$$٣س^2 + ٢س - ٣ = ٠$$

$$٣س^2 + ٢س - ٣ = ٠$$

$$٣س^2 + ٢س - ٣ = ٠$$

$$٣س^2 + ٢س - ٣ = ٠$$

$$٣س^2 + ٢س - ٣ = ٠$$

$$٣س^2 + ٢س - ٣ = ٠$$

$$٣س^2 + ٢س - ٣ = ٠$$

$$٣س^2 + ٢س - ٣ = ٠$$

$$٣س^2 + ٢س - ٣ = ٠$$

$$٣س^2 + ٢س - ٣ = ٠$$

$$٣س^2 + ٢س - ٣ = ٠$$

$$٣س^2 + ٢س - ٣ = ٠$$

$$٣س^2 + ٢س - ٣ = ٠$$

$$٣س^2 + ٢س - ٣ = ٠$$





وزارة التربية والتعليم  
Ministry of Education

المملكة العربية السعودية

# الرياضيات

## للفصل الثالث المتوسط

مصادر المعلم للأنشطة الصفية  
الفصل التاسع: الدوال الجذرية والمثلثات

العبيكان  
Obekon

Mc  
Graw  
Hill Education

يوزع مجاناً ولا يباع

١٤٣٤ هـ - ٢٠١٣ م

Glencoe Mathematics © 2010  
**CHAPTER RESOURCE MASTERS**  
Algebra 1

الرياضيات - الصف الثالث المتوسط  
**مصادر المعلم للأنشطة الصفية**  
أعدت النسخة العربية: شركة العبيكان للتعليم

[www.obeikaneducation.com](http://www.obeikaneducation.com)



English Edition Copyright © the McGraw-Hill Companies, Inc.  
All rights reserved.

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with  
The McGraw-Hill Companies, Inc. © 2008.



حقوق الطبع الإنجليزية محفوظة لشركة ماجروهل ©.

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار  
وفقاً لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل © ٢٠٠٨م / ١٤٢٩هـ.

لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو نقله في أي شكل أو واسطة، سواء أكانت إلكترونية أو ميكانيكية، بما في ذلك التصوير بالنسخ «فوتوكوبي»، أو التسجيل، أو التخزين  
و الاسترجاع، دون إذن خطي من الناشر.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

### عزيزي المعلم / عزيزتي المعلمة

يسرنا أن نقدم هذه المجموعة من التدريبات المساندة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب. حيث نطمح أن يساعدك التنوع في هذه التدريبات على الوصول إلى جميع الطلاب في الصف، مهما تباينت مستوياتهم التحصيلية.

وقد تم تخصيص صفحتين لتدريبات إعادة التعليم و صفحة واحدة لكل من التدريبات الأخرى لكل درس من دروس كتاب الطالب. حيث يمكنك أن تكلف الطلاب حلّ صفحة التدريبات المقابلة لكل درس بحسب مستوى كلٍّ منهم؛ سواء داخل الصف أم في المنزل. وليست هذه التدريبات بديلاً عن كتاب التمارين، ولكنها مساندة ومكملة له. وهذه التدريبات هي:

### تدريبات إعادة التعليم

تركز هذه التدريبات على محتوى الدروس في كتاب الطالب، وتقدمه بأسلوب تدريسي ومعالجة يختلفان عن كتابي الطالب والتمارين. وهي موجهة إلى الطلاب ذوي المستوى دون المتوسط.

### تدريبات حلّ المسألة

تأتي هذه التدريبات انطلاقاً من اهتمام هذه المناهج بحلّ المسألة، حيث تم تخصيصها لتقديم تدريبات إضافية على حلّ المسألة ترتبط بكل درس من دروس كتاب الطالب. وهي موجهة إلى جميع الطلاب على اختلاف مستوياتهم التحصيلية.

### التدريبات الإثرائية

تساعد هذه التدريبات الإثرائية على التوسع في مفاهيم الدرس، كما تؤدي إلى توسيع مدارك الطلاب حول تعلم الرياضيات بشكل عام. وهذه التدريبات موجهة إلى الطلاب ذوي المستوى ضمن المتوسط وفوق المتوسط.

	المقدمة .....	٤
	<b>الدرس ١-٩ تبسيط العبارات الجذرية</b>	
	تدريبات إعادة التعليم .....	٦
	تدريبات حل المسألة .....	٨
	التدريبات الإثرائية .....	٩
	<b>الدرس ٢-٩ العمليات على العبارات الجذرية</b>	
	تدريبات إعادة التعليم .....	١٠
	تدريبات حل المسألة .....	١٢
	التدريبات الإثرائية .....	١٣
	<b>الدرس ٣-٩ المعادلات الجذرية</b>	
	تدريبات إعادة التعليم .....	١٤
	تدريبات حل المسألة .....	١٦
	التدريبات الإثرائية .....	١٧
	<b>الدرس ٤-٩ نظرية فيثاغورس</b>	
	تدريبات إعادة التعليم .....	١٨
	تدريبات حل المسألة .....	٢٠
	التدريبات الإثرائية .....	٢١
	<b>الدرس ٥-٩ المسافة بين نقطتين</b>	
٢٢	تدريبات إعادة التعليم .....	
٢٤	تدريبات حل المسألة .....	
٢٥	التدريبات الإثرائية .....	
	<b>الدرس ٦-٩ المثلثات المتشابهة</b>	
٢٦	تدريبات إعادة التعليم .....	
٢٨	تدريبات حل المسألة .....	
٢٩	التدريبات الإثرائية .....	
	<b>الدرس ٧-٩ النسب المثلثية</b>	
٣٠	تدريبات إعادة التعليم .....	
٣٢	تدريبات حل المسألة .....	
٣٣	التدريبات الإثرائية .....	

## تدريبات إعادة التعليم

### تبسيط العبارات الجذرية

**خاصية ضرب الجذور التربيعية:** يمكنك استعمال خاصية ضرب الجذور التربيعية والتحليل إلى العوامل الأولية لتبسيط الجذور التربيعية. ويجب استعمال القيمة المطلقة عند تبسيط العبارات الجذرية بمتغيرات إذا كان ما تحت الجذر التربيعي متغيراً إذا أس زوجي وناتج تبسيطه ذا أس فردي؛ للتأكد من أن النتيجة غير سالبة.

خاصية ضرب الجذور التربيعية	$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ ، إذا كانت $a \geq 0$ ، $b \geq 0$
----------------------------	---

مثال ١

بسط العبارة:  $\sqrt{180}$ 

حلل ١٨٠ إلى عوامله الأولية

$$\sqrt{180} = \sqrt{5 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2} = \sqrt{5 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2}$$

خاصية ضرب الجذور

$$= \sqrt{5} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$$

بسط

$$= \sqrt{5} \times 3 \times 2 =$$

بسط

$$= \sqrt{60}$$

مثال ٢

بسط العبارة:  $\sqrt{120a^2b^3c^4}$ 

$$\sqrt{120a^2b^3c^4} = \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 2 \times a^2 \times b^3 \times c^4} = \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 2 \times a^2 \times b^3 \times c^4}$$

$$= \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 2 \times a^2 \times b^3 \times c^4} = \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 2 \times a^2 \times b^3 \times c^4}$$

$$= 2 \times a \times b \times c^2 \sqrt{30} = 2abc^2\sqrt{30}$$

تمارين

بسط كل عبارة فيما يأتي:

(١)  $\sqrt{28}$

(٢)  $\sqrt{68}$

(٣)  $\sqrt{60}$

(٤)  $\sqrt{75}$

(٥)  $\sqrt{162}$

(٦)  $\sqrt{6} \times \sqrt{3}$

(٧)  $\sqrt{5} \times \sqrt{2}$

(٨)  $\sqrt{10} \times \sqrt{5}$

(٩)  $\sqrt[4]{4}$

(١٠)  $\sqrt[4]{9s}$

(١١)  $\sqrt[4]{300}$

(١٢)  $\sqrt[7]{128}$

(١٣)  $\sqrt{6} \times \sqrt{10} \times 4$

(١٤)  $\sqrt[3]{3s} \times \sqrt[2]{3s}$

(١٥)  $\sqrt[4]{20b}$

(١٦)  $\sqrt[3]{100s}$

(١٧)  $\sqrt[4]{24a^2}$

(١٨)  $\sqrt[4]{81s^4}$

(١٩)  $\sqrt[4]{150a^2b}$

(٢٠)  $\sqrt[3]{1728a^3b}$

(٢١)  $\sqrt[4]{45s^2}$

(٢٢)  $\sqrt[4]{98s^4}$

## تدريبات إعادة التعليم

### تبسيط العبارات الجذرية

١-٩

**خاصية قسمة الجذور التربيعية:** تكون العبارة الكسرية المحتوية على جذور تربيعية في أبسط صورة، إذا لم يتبق جذور في المقام. يمكنك استعمال خاصية قسمة الجذور التربيعية وإنتاج المقام عند قسمة الجذور التربيعية، وتبسيط العبارات الجذرية التي تحتوي على قسمة. إنطاق المقام الذي يحتوي على جذر يعني ضرب كل من البسط والمقام في عامل يؤدي إلى حذف الجذر من المقام.

خاصية قسمة الجذور التربيعية	لأي عددين حقيقيين أ، ب، حيث $أ \geq ٠$ ، $ب > ٠$ ، فإن $\sqrt{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}$
-----------------------------	---

مثال  
بسط العبارة:  $\sqrt{\frac{٥٦}{٤٥}}$

حلل إلى العوامل

$$\sqrt{\frac{١٤ \times ٤}{٩ \times ٥}} = \frac{\sqrt{١٤ \times ٤}}{\sqrt{٩ \times ٥}}$$

بسط كلاً من البسط والمقام

$$\frac{\sqrt{١٤} \sqrt{٢}}{\sqrt{٣} \sqrt{٥}}$$

اضرب كلاً من البسط والمقام في  $\sqrt{٥}$

$$\frac{\sqrt{٥} \sqrt{١٤} \sqrt{٢}}{\sqrt{٥} \sqrt{٣} \sqrt{٥}}$$

خاصية ضرب الجذور

$$\frac{\sqrt{٧٠} \sqrt{٢}}{١٥}$$

تمارين

بسط كل عبارة فيما يأتي:

$$(١) \frac{\sqrt{٩}}{\sqrt{١٨}}$$

$$(٣) \frac{\sqrt{١٠٠}}{\sqrt{١٢١}}$$

$$(٥) \frac{\sqrt{٢} \sqrt{٨}}{\sqrt{٨} \sqrt{٢}}$$

$$(٧) \sqrt{\frac{٥}{٢}} \times \sqrt{\frac{٣}{٤}}$$

$$(٩) \sqrt{\frac{٢٤٣}{١٠٠}}$$

$$(١١) \sqrt{\frac{٤١٠٠}{١٤٤}}$$

$$(٢) \frac{\sqrt{٨}}{\sqrt{٢٤}}$$

$$(٤) \frac{\sqrt{٧٥}}{\sqrt{٣}}$$

$$(٦) \sqrt{\frac{٦}{٥}} \times \sqrt{\frac{٢}{٥}}$$

$$(٨) \sqrt{\frac{٢}{٥}} \times \sqrt{\frac{٥}{٧}}$$

$$(١٠) \sqrt{\frac{٦}{٤}}$$

$$(١٢) \sqrt{\frac{٧٥}{٢٤}}$$

$$(١٤) \frac{\sqrt{٨}}{\sqrt{٣} \sqrt{٢}}$$

$$(١٦) \frac{\sqrt{٨}}{\sqrt{١٠} \sqrt{٤} + \sqrt{٧} \sqrt{٢}}$$

$$(١٣) \frac{\sqrt{٤}}{\sqrt{٥} \sqrt{٣}}$$

$$(١٥) \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٥} \sqrt{٥}}$$

## تدريبات حل المسألة

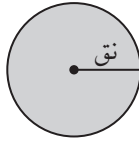
### تبسيط العبارات الجذرية

- (٤) **فيزياء:** عندما تكون مادة مثل بخار الماء في الحالة الغازية، فإن حجم جزيئاتها وسرعتها يزيدان مع زيادة درجة الحرارة. يُعطى متوسط السرعة  $s$  للجزيء الواحد الذي كتلته  $k$  عند درجة حرارة  $D$  بالمعادلة:

$$s = \sqrt{\frac{3D}{k}}$$

حلّ المعادلة بالنسبة لـ  $A$ .

- (٥) **هندسة:** افترض أنّ مدير أحد المستشفيات الكبيرة يريد بناء مهبط لطائرات إسعاف عمودية، على أن يكون المهبط دائرياً ومصنوعاً من مادة مطاطية مقاومة للحرارة كما في الشكل أدناه:



- (أ) إذا كانت مساحة المهبط  $M$ ، فاكتب معادلة يمكن استعمالها لإيجاد طول نصف القطر  $r$ .

- (ب) اكتب عبارة جذرية في أبسط صورة تمثل طول نصف قطر مهبط مساحته  $288$  متراً مربعاً.

- (ج) أوجد طول نصف القطر، مقرباً إلى أقرب جزء من مئة، باستعمال آلة حاسبة.

- (١) **رياضة:** حسبت ياسمين ارتفاع عارضة مرمى كرة القدم فوجدته يساوي  $\sqrt{\frac{15}{3}}$  قدم. بسّط هذه العبارة.

- (٢) **تسونامي:** سببت هزة أرضية تحت المحيط الهندي عام ٢٠٠٤ تسونامي مدمراً. ويستطيع العلماء حساب السرعة التقريبية  $s$  (قدم/ث) لتسونامي في ماء عمقه  $E$  (بالأقدام) بالمعادلة  $s = \sqrt{1.6E}$ . حدّد سرعة تسونامي في ماء عمقه  $300$  قدم. اكتب إجابتك في أبسط صورة جذرية.

- (٣) **سيارات:** يمكن إيجاد الزمن الذي تستغرقه سيارة لتتسارع من وضع التوقف إلى أن تصبح سرعتها  $60$  ميلاً في الساعة باستعمال المعادلة الآتية:

$$s = \sqrt{\frac{2Cn}{k}}$$

حيث  $s$  سرعة السيارة (م/ث)،

$C$  متوسط قدرتها (بوحدة الواط)،  $k$  كتلتها

(بالكيلوجرامات)،  $n$  الزمن بالثواني. أوجد الزمن

الذي تستغرقه سيارة كتلتها  $900$  كيلوجرام، ومتوسط

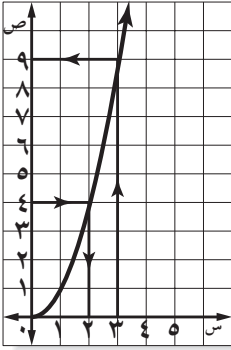
قدرتها  $60000$  واط لتتسارع من وضع التوقف إلى

أن تصبح سرعتها  $26,82$  م/ث، أي  $60$  ميلاً في

الساعة. قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

## التدريبات الإثرائية

## إيجاد مربعات الأعداد والجذور التربيعية لها من التمثيل البياني



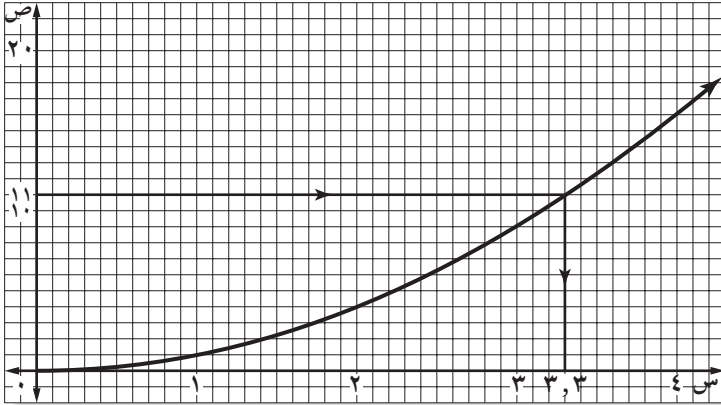
يمكنك استعمال التمثيل البياني للدالة  $ص = س^2$  لإيجاد مربعات الأعداد والجذور التربيعية لها. لإيجاد مربع العدد ٣، عيّن ٣ على محور السينات، ثم أوجد قيمة ص المناظرة لها من التمثيل البياني. تبين الأسهم أن  $٩ = ٣^2$

ولإيجاد الجذر التربيعي للعدد ٤، عيّن ٤ على محور الصادات، ثم أوجد قيمة س المناظرة لها من التمثيل البياني. تبين الأسهم أن  $٢ = \sqrt{٤}$

يبين الشكل أدناه جزءاً صغيراً من التمثيل البياني للدالة  $ص = س^2$ ، حيث كانت النسبة بين طول الوحدة على محور الصادات إلى طول الوحدة على محور السينات تساوي ١٠ : ١

مثال أوجد  $\sqrt{١١}$  من التمثيل البياني المجاور.

تشير الأسهم إلى أن  $\sqrt{١١} = ٣,٣$  مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة.



## تمارين

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي، مستعملاً التمثيل أعلاه، مقرباً إلى أقرب عدد كلي:

$$(١) (١, ٥) \quad (٢) (٢, ٧) \quad (٣) (٠, ٩)$$

$$(٤) (٣, ٦) \quad (٥) (٤, ٢) \quad (٦) (٣, ٩)$$

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي، مستعملاً التمثيل أعلاه، مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة:

$$(٧) \sqrt{١٥} \quad (٨) \sqrt{٨} \quad (٩) \sqrt{٣}$$

$$(١٠) \sqrt{٥} \quad (١١) \sqrt{١٤} \quad (١٢) \sqrt{١٧}$$

## تدريبات إعادة التعليم

### العمليات على العبارات الجذرية

جمع العبارات الجذرية وطرحها: عند جمع العبارات الجذرية وطرحها، استعمل خاصيتي التجميع والتوزيع لتبسيطها، وإذا لم تكن في أبسط صورة، فاكتبها في أبسط صورة.

مثال ١

$$\sqrt{6} \sqrt{4} - \sqrt{3} \sqrt{6} + \sqrt{3} \sqrt{5} - \sqrt{6} \sqrt{10}$$

خاصيتا التجميع والتوزيع

$$\sqrt{3} \sqrt{(6+5-)} + \sqrt{6} \sqrt{(4-10)} = \sqrt{6} \sqrt{4} - \sqrt{3} \sqrt{6} + \sqrt{3} \sqrt{5} - \sqrt{6} \sqrt{10}$$

بسّط

$$\sqrt{3} \sqrt{+} + \sqrt{6} \sqrt{-} =$$

مثال ١

$$\sqrt{50} \sqrt{5} + \sqrt{12} \sqrt{3}$$

بسّط

$$\sqrt{3 \times 50} \sqrt{5} + \sqrt{3 \times 12} \sqrt{3} = \sqrt{50} \sqrt{50} + \sqrt{12} \sqrt{3}$$

بسّط

$$\sqrt{3 \sqrt{50} \times 5} + \sqrt{3 \sqrt{2} \times 3} =$$

بسّط

$$\sqrt{3 \sqrt{250}} + \sqrt{3 \sqrt{6}} =$$

خاصية التوزيع

$$\sqrt{3 \sqrt{31}} =$$

تمارين

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

$$\sqrt{6} \sqrt{4} - \sqrt{6} \sqrt{6} \quad (٢)$$

$$\sqrt{5} \sqrt{4} + \sqrt{5} \sqrt{2} \quad (١)$$

$$\sqrt{5} \sqrt{2} + \sqrt{50} \sqrt{3} \quad (٤)$$

$$\sqrt{2} \sqrt{6} - \sqrt{8} \sqrt{6} \quad (٣)$$

$$\sqrt{3} \sqrt{50} - \sqrt{6} \sqrt{6} + \sqrt{3} \sqrt{2} \quad (٦)$$

$$\sqrt{5} \sqrt{3} - \sqrt{5} \sqrt{2} + \sqrt{20} \sqrt{6} \quad (٥)$$

$$\sqrt{24} \sqrt{6} + \sqrt{50} \sqrt{6} - \sqrt{2} \sqrt{3} + \sqrt{6} \sqrt{3} \quad (٨)$$

$$\sqrt{3} \sqrt{50} - \sqrt{3} \sqrt{2} + \sqrt{12} \sqrt{6} \quad (٧)$$

$$\sqrt{24} \sqrt{6} + \sqrt{54} \sqrt{6} \quad (١٠)$$

$$\sqrt{12} \sqrt{50} + \sqrt{12} \sqrt{6} - \sqrt{18} \sqrt{6} \quad (٩)$$

$$\frac{1}{3} \sqrt{6} + \sqrt{12} \sqrt{6} \quad (١٢)$$

$$\frac{1}{3} \sqrt{6} + \sqrt{3} \sqrt{6} \quad (١١)$$

$$\sqrt{180} \sqrt{6} + \sqrt{20} \sqrt{6} - \sqrt{80} \sqrt{6} \quad (١٤)$$

$$\frac{1}{4} \sqrt{6} - \sqrt{54} \sqrt{6} \quad (١٣)$$

$$\frac{1}{3} \sqrt{6} + \sqrt{54} \sqrt{6} - \sqrt{3} \sqrt{2} \quad (١٦)$$

$$\sqrt{27} \sqrt{6} + \sqrt{75} \sqrt{6} - \sqrt{18} \sqrt{6} + \sqrt{50} \sqrt{6} \quad (١٥)$$

$$\frac{1}{12} \sqrt{6} - \sqrt{3} \sqrt{3} + \frac{2}{3} \sqrt{6} \quad (١٨)$$

$$\frac{1}{3} \sqrt{6} + \frac{1}{5} \sqrt{2} - \sqrt{120} \sqrt{6} \quad (١٧)$$

ضرب العبارات الجذرية: يشبه ضرب العبارات الجذرية ضرب وحيدات الحد.

مثال بسّط العبارة  $(\sqrt{8} + \sqrt{20})(\sqrt{5} - \sqrt{3})$  باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب.

$$(\sqrt{8})(\sqrt{5}) - (\sqrt{20})(\sqrt{5}) - (\sqrt{8})(\sqrt{3}) + (\sqrt{20})(\sqrt{3}) =$$

$$\text{اضرب} \quad \sqrt{40} - \sqrt{100} - \sqrt{24} + \sqrt{60} =$$

$$\text{بسّط} \quad 10\sqrt{4} - 10 \times 10 - 4 \times 3 + 10\sqrt{3} =$$

$$\text{بسّط} \quad 10\sqrt{4} - 100 - 12 + 10\sqrt{3} =$$

$$\text{اجمع الحدود المشابهة} \quad 68 - 10\sqrt{20} =$$

## تمارين

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

$$(2) \quad (\sqrt{6} - \sqrt{3})\sqrt{6}$$

$$(1) \quad (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2$$

$$(4) \quad (\sqrt{5} + \sqrt{3})\sqrt{2}$$

$$(3) \quad (\sqrt{2} - \sqrt{5})\sqrt{5}$$

$$(6) \quad (\sqrt{6} + 3)^2$$

$$(5) \quad (\sqrt{2} + 2)(\sqrt{2} - 2)$$

$$(8) \quad (\sqrt{24} + \sqrt{8})\sqrt{3}$$

$$(7) \quad (\sqrt{5} - 2)^2$$

$$(10) \quad (\sqrt{8} - \sqrt{12})(\sqrt{3} + \sqrt{2})$$

$$(9) \quad (\sqrt{15} + \sqrt{2})\sqrt{8}$$

$$(12) \quad (\sqrt{6} + \sqrt{3})^2$$

$$(11) \quad (\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{5})$$

$$(14) \quad (\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{2} - \sqrt{5})$$

$$(13) \quad (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$$

$$(16) \quad (\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{18} - \sqrt{5})$$

$$(15) \quad (\sqrt{6} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{8})$$

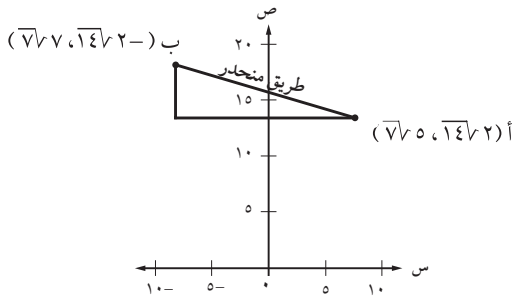
$$(18) \quad (\sqrt{6} + \sqrt{10})(\sqrt{3} - \sqrt{5})$$

$$(17) \quad (\sqrt{6} + \sqrt{12})(\sqrt{5} - \sqrt{3})$$

## تدريبات حل المسألة

## العمليات على العبارات الجذرية

- (٤) ميل منحدر: حسب ماجد ميل طريق منحدر، مستعملًا جهازًا رقميًا متّصلًا بحاسوب. وقد حدّد النموذج الحاسوبي إحداثيات نقطتي القمة والقاع للمنحدر، كما في الشكل أدناه. أوجد ميل الطريق المنحدر، مستعملًا عبارة جذرية في إجابتك.



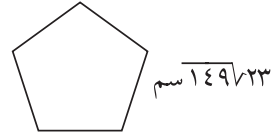
- (٥) سقوط حر: افترض أنّ كرة أُسقطت من نافذة غرفة مبنى مرتفع لمسافة ٨٠٠ قدم في الهواء، وأنّ كرة ثانية أُسقطت في الوقت نفسه من نافذة غرفة ارتفاعها ٢٨٨ قدمًا. يمكنك أن تجد الزمن  $t$  بالثواني لتقطع الكرة مسافة  $f$  (بالأقدام)، مع إهمال مقاومة الهواء، باستعمال الصيغة:
- $$f = \frac{1}{2}gt^2$$

(أ) ما الزمن الذي يمضي بين اصطدام الكرة الأولى واصطدام الكرة الثانية بالأرض؟ اكتب إجابتك مستعملًا عبارة جذرية.

(ب) أي الكرتين تصل إلى الأرض أولًا؟

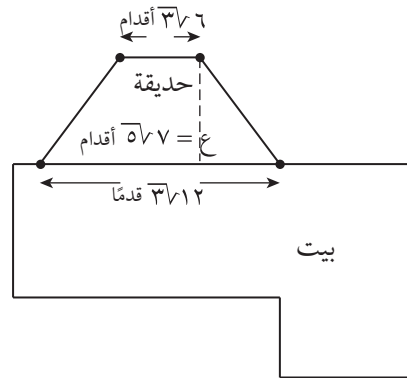
(ج) قرّب إجابة الفرع (أ) إلى أقرب جزء من عشرة.

- (١) هندسة: أوجد محيط المضلع الخماسي المنتظم أدناه، إذا كان طول ضلعه  $149\sqrt{23}$  سم، مستعملًا عبارة جذرية في إجابتك.



- (٢) الأرض: صيغة مساحة سطح الكرة هي  $4\pi r^2$ ، حيث  $r$  طول نصف قطرها. افترض أنّ الأرض كروية، وأنّ مساحة سطحها تساوي ١,٠٥ × ١٠<sup>٨</sup> كيلومتر مربع تقريبًا، فما طول نصف قطرها إلى أقرب ١٠ كيلومتر؟

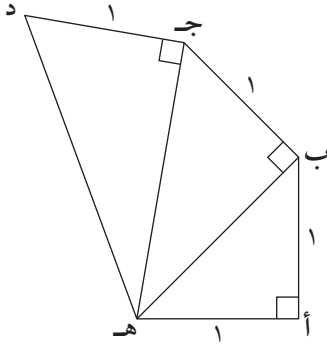
- (٣) هندسة: يمكنك إيجاد مساحة شبه المنحرف بضرب ارتفاعه في متوسط طولي قاعدتيه. أوجد مساحة حديقة على شكل شبه منحرف مجاورة لبيت سلطان، كما هو مبين أدناه، مستعملًا عبارة جذرية في إجابتك.



## التدريبات الإثرائية

### عجلة ثيودورس

٢-٩



اهتم علماء الرياضيات الإغريق بمسائل متعلقة بتمثيل الأعداد المختلفة والعبارات، باستعمال إنشاءات هندسية. يقال: إنَّ الفيلسوف الإغريقي ثيودورس (عام ٤٢٥ ق. م) قد اكتشف طريقة لإنشاء المتتابعة:

...  $1\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, \dots$

يبين الشكل المجاور بداية هذا الإنشاء الهندسي. ابدأ بمثلث قائم الزاوية متطابق الضلعين، طول ضلعه وحدة واحدة.

اكتب طول كلٍّ من القطع المستقيمة الآتية من الشكل أعلاه، مستعملًا عبارة جذرية في أبسط صورة:

(٢)  $\overline{ب هـ}$

(١)  $\overline{أ هـ}$

(٤)  $\overline{د هـ}$

(٣)  $\overline{ج هـ}$

(٥) بين كيفية إضافة مثلث جديد إلى الشكل.

(٦) طول وتر المثلث الأول  $2\sqrt{2}$ ، وطول وتر المثلث الثاني  $3\sqrt{2}$ . اكتب عبارة تمثل طول وتر المثلث الذي ترتيبه ن.

(٧) بين أنَّ طريقة الإنشاء الهندسي ستنتج باستمرار العدد التالي في المتتابعة. (إرشاد: أوجد عبارة تمثل طول وتر المثلث الذي ترتيبه  $n + 1$ )

(٨) أنشئ عجلة ثيودورس في الفراغ أدناه. ابدأ بقطعة مستقيمة طولها ١ سم. متى تبدأ العجلة في التداخل؟

## تدريبات إعادة التعليم

### المعادلات الجذرية

٣-٩

**المعادلات الجذرية** : المعادلات التي تحتوي متغيرات تحت الجذر تُسمى معادلات جذرية. ويمكنك حلّ هذه المعادلات باستعمال الخطوتين الآتيتين:

**الخطوة ١** : اجعل المتغير الذي تريد إيجاد قيمته في طرف من المعادلة.

**الخطوة ٢** : ربّع كل طرف من المعادلة للتخلص من الجذر.

**مثال ٢** حلّ المعادلة  $\sqrt{4s-7} + 7 = 2$ .

المعادلة الأصلية  $\sqrt{4s-7} + 7 = 2$

اطرح ٧ من الطرفين  $\sqrt{4s-7} + 7 - 7 = 2 - 7$

بسّط  $\sqrt{4s-7} = -5$

ربّع الطرفين  $(\sqrt{4s-7})^2 = (-5)^2$

بسّط  $4s-7 = 25$

اجمع ٧ للطرفين  $4s-7+7 = 25+7$

بسّط  $4s = 32$

اقسم الطرفين على ٤  $s = 8$

الحلّ هو ٨، وهو يحقق المعادلة الأصلية عند تعويضه فيها.

**مثال ١** حلّ المعادلة  $\frac{\sqrt{s}}{2} = 16$ .

المعادلة الأصلية  $\frac{\sqrt{s}}{2} = 16$

اضرب الطرفين في ٢  $(\frac{\sqrt{s}}{2}) \cdot 2 = (16) \cdot 2$

بسّط  $\sqrt{s} = 32$

ربّع الطرفين  $(\sqrt{s})^2 = (32)^2$

بسّط  $s = 1024$

الحلّ هو ١٠٢٤، وهو يحقق المعادلة الأصلية عند تعويضه فيها.

### تمارين

حلّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحّة الحلّ:

(١)  $\sqrt{a} = 8$

(٢)  $32 = 6 + \sqrt{a}$

(٣)  $8 = \sqrt{2s}$

(٤)  $\sqrt{26n-2} = 7$

(٥)  $6 = \sqrt{a-1}$

(٦)  $3 = \sqrt{3r} \pm$

(٧)  $\sqrt{2s} = 3\sqrt{2}$

(٨)  $7 = 2 - \sqrt{3s}$

(٩)  $6 = \sqrt{4-s}$

(١٠)  $5 = \sqrt{3+m}$

(١١)  $24 = 19 + \sqrt{3b-2}$

(١٢)  $3 = \sqrt{4s-1}$

(١٣)  $3\sqrt{2} = \sqrt{2+3r}$

(١٤)  $\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{s}{2}}$

(١٥)  $4 = \sqrt{\frac{s}{8}}$

(١٦)  $2 = \sqrt{6s+5}$

(١٧)  $8 = 6 + \sqrt{\frac{s}{3}}$

(١٨)  $11 = 3 + \sqrt{\frac{3s}{5}}$

## تدريبات إعادة التعليم

### المعادلات الجذرية

(تتمة)

**حلول دخيلة:** لحل معادلة جذرية بمتغير في طرفيها، يلزمك تربيع الطرفين. وهذا التربيع ينتج حلًا دخيلًا أحيانًا، أو حلًا لا يحقق المعادلة الأصلية. لذا عليك التحقق من الحلول كلها بالتعويض في المعادلة الأصلية.

	مثال
حل المعادلة $\sqrt{s+3} = s-3$	
المعادلة الاصلية	$\sqrt{s+3} = s-3$
ربّع الطرفين	$(s+3) = (s-3)^2$
بسّط	$s+3 = s^2-6s+9$
اطرح $s+3$ من الطرفين	$0 = s^2-7s+6$
حلّ	$0 = (s-1)(s-6)$
خاصية الضرب الصفري	$s-1 = 0$ أو $s-6 = 0$
حلّ	$s = 1$ أو $s = 6$

تحقق:

المعادلة الاصلية	$\sqrt{s+3} = s-3$	المعادلة الأصلية	$\sqrt{s+3} = s-3$
عوض $s = 6$	$\sqrt{6+3} = 6-3$	عوض $s = 1$	$\sqrt{1+3} = 1-3$
بسّط	$3 = 3$	بسّط	$2 = -2$
صحيح	$3 = 3$	خطأ	$2 \neq -2$

وبما أنّ 1 لا يحقق المعادلة الأصلية، فإنّ 3 هو الحل الوحيد.

تمارين

حلّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحّة الحلّ:

(١) $\sqrt{a} = a$	(٢) $\sqrt{a+6} = a$	(٣) $\sqrt{2s} = s$
(٤) $\sqrt{2n-2} = n$	(٥) $\sqrt{a-1} = a$	(٦) $\sqrt{10k-6} + 3 = k$
(٧) $\sqrt{1-v} = 1-v$	(٨) $\sqrt{3a-2} = a$	(٩) $\sqrt{s+2} = s$
(١٠) $\sqrt{5+b} = 5-b$	(١١) $\sqrt{3b+6} = b+2$	(١٢) $\sqrt{4s-4} = s$
(١٣) $2 = \sqrt{r-2} + r$	(١٤) $\sqrt{s^2+10s} = s+4$	(١٥) $\sqrt{\frac{s}{8}} - 2 = 15$
(١٦) $\sqrt{6s^2-4} = s+2$	(١٧) $\sqrt{25s-64} = s+2$	(١٨) $\sqrt{3s^2+12s+1} = s+5$

## تدريبات حل المسألة المعادلات الجذرية

٤) **مكافحة حرائق:** يمكن حساب معدّل انسياب الماء لإخماد حريق من خرطوم ماء بالمعادلة:  $m = 9, 26 \sqrt{q}$ ، حيث  $m$  معدّل انسياب الماء (بالجالون لكل دقيقة)،  $q$  ضغط فوهة الخرطوم (بالباوند لكل بوصة مربعة)،  $q$  طول قطر الخرطوم (بالبوصات). ولإخماد حريق بفاعلية، يجب أن يكون معدّل انسياب الماء من خرطومين  $2430$  جالون في الدقيقة الواحدة. فإذا كان طول قطر كل خرطوم  $3$  بوصات، وضغط فوهة أحدهما يساوي  $4$  أمثال ضغط فوهة الخرطوم الثاني، فما ضغط فوهة كل منهما؟ قَرِّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

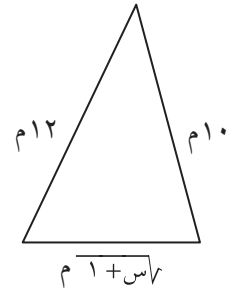
٥) **هندسة:** صيغة المساحة الجانبية لمخروط دائري قائم هي:  $m = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$  حيث  $r$  طول نصف قطر القاعدة،  $h$  الارتفاع.

أ) إذا كانت المساحة الجانبية لقمع على شكل مخروط دائري قائم هي  $127, 54$  سم<sup>٢</sup>، وطول نصف قطره  $3, 5$  سم، فأوجد ارتفاعه إلى أقرب جزء من عشرة من الستمتر.

ب) ما مساحة فوهة القمع أو قاعدة المخروط؟

١) **غواصات:** تعطى المسافة التقريبية  $f$  بالأميال التي يستطيع منظار غواصة كشفها على سطح الماء بالمعادلة:  $f = 1, 22 \sqrt{d}$ ، حيث  $d$  الارتفاع بالأقدام فوق سطح الماء. كم يجب أن يكون ارتفاع منظار غواصة فوق الماء لتحديد مكان سفينة تبعد  $6$  أميال؟ قَرِّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

٢) **هندسة:** أوجد قيمة  $s$  إذا كان محيط المثلث أدناه يساوي  $25$  متراً.



٣) **صناعة الأخشاب:** يقدر قانون (دويل) كمية الخشب  $k$  (بوحدّة حجم لوح طوله ١ قدم، وعرضه ١ قدم وارتفاعه ١ بوصة) التي يمكن استخلاصها من جذوع الأشجار بالمعادلة  $k = \frac{1}{4}(q-2)^2$ ، حيث  $l$  طول الخشب (بالأقدام)،  $q$  طول قطر الجذع (بالبوصات). افترض أن شاحنة تحمل  $20$  جذعاً متساوية الأقطار، طول كل منها  $25$  قدماً، وأن كمية الأخشاب الناتجة عنها تساوي  $6000$  وحدة، فقدر قطر الجذع إلى أقرب بوصة مفترضاً أن الجذوع كلها أسطوانية منتظمة.

## التدريبات الإثرائية

### أكثر من جذر تربيعي واحد

تعلمت بأنه للتخلص من الجذر التربيعي في معادلة، تحتاج أولاً إلى وضع الجذر التربيعي في طرف، ثم تربيع الطرفين، وأخيراً حلّ المعادلة الناتجة.

وعلى أيّ حال، توجد معادلات تحتوي كل منها على أكثر من جذر تربيعي واحد. والتربيع مرة واحدة فقط لا يكفي للتخلص من جميع هذه الجذور التربيعية.

مثال

حلّ المعادلة:  $\sqrt{s+7} = \sqrt{s+1} + 1$ 

أحد الجذرين في طرف	$\sqrt{s+7} = \sqrt{s+1} + 1$
ربّع الطرفين للتخلص من الجذر التربيعي	$(\sqrt{s+7})^2 = (\sqrt{s+1} + 1)^2$
بسّط، وربّع الطرف الأيسر مستعملاً طريقة التوزيع	$s+7 = s+1 + 2\sqrt{s+1} + 1$
بسّط	$s+7 = s+2 + 2\sqrt{s+1}$
بسّط، وضع الجذر التربيعي في طرف	$5 = 2\sqrt{s+1}$
اقسم الطرفين على ٢	$\frac{5}{2} = \sqrt{s+1}$
ربّع الطرفين	$\frac{25}{4} = s+1$
	$s = \frac{21}{4}$

تحقق: عوّض في المعادلة الأصلية للتأكد من صحّة إجابتك.

عوّض عن $s = \frac{21}{4}$	$1 + \sqrt{9} = \sqrt{7+9}$
بسّط	$1 + 3 = \sqrt{16}$
	$4 = 4$

لذا فإنّ ٩ هو الحلّ.

### تمارين

حلّ كل معادلة فيما يأتي:

$$(2) \quad \sqrt{s+3} + 2 = \sqrt{s+11}$$

$$(1) \quad \sqrt{s+1} = 2 - \sqrt{s+13}$$

$$(4) \quad \sqrt{s+3} = \sqrt{s+21} - 3$$

$$(3) \quad \sqrt{s-6} = 3 - \sqrt{s+9}$$

$$(6) \quad \sqrt{s+1} + 5 = \sqrt{s-6} + 6$$

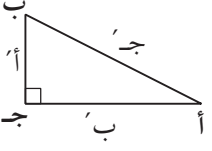
$$(5) \quad \sqrt{s+20} + 2 = \sqrt{s+9} + 3$$

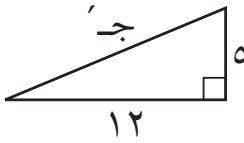
## تدريبات إعادة التعليم

### نظرية فيثاغورس

٤-٩

**نظرية فيثاغورس:** يسمّى الضلع المقابل للزاوية القائمة في المثلث القائم وترًا، وهو أطول الأضلاع في المثلث، ويسمّى كلٌّ من الضلعين الآخرين ساقًا. ويمكنك استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد طول أي ضلع من أضلاع المثلث القائم، إذا علم طول الضلعين الآخرين.

	<p>نظرية فيثاغورس</p> <p>إذا كان أ، ب، طولَي ساقَي المثلث القائم، ج' طول الوتر، فإنَّ ج'² = أ² + ب²</p>
---	---

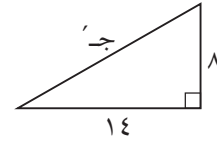
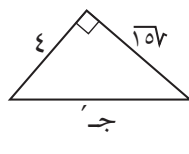
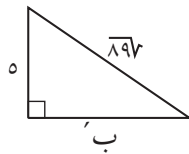
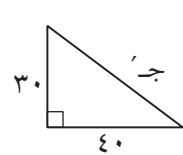
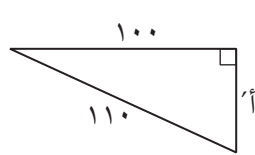
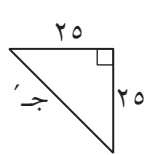


مثال أوجد طول الضلع المجهول في الشكل المجاور.

$$\begin{aligned} \text{ج}'^2 &= \text{أ}'^2 + \text{ب}'^2 && \text{نظرية فيثاغورس} \\ \text{ج}'^2 &= 5^2 + 12^2 && \text{أ}' = 5, \text{ب}' = 12 \\ \text{ج}'^2 &= 169 && \text{بسّط} \\ \text{ج}' &= \sqrt{169} && \text{أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين} \\ \text{ج}' &= 13 && \\ &&& \text{فيكون طول الوتر هو 13.} \end{aligned}$$

تمارين

أوجد طول الضلع المجهول في كلِّ مما يأتي، وقرب الحلِّ إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر:



## تدريبات إعادة التعليم

### نظرية فيثاغورس

(تتمة)

**المثلث القائم الزاوية:** إذا كانت الأطوال أ'، ب'، ج' لأضلاع مثلث تحقق المعادلة ج'<sup>2</sup> = أ'<sup>2</sup> + ب'<sup>2</sup>، فإن المثلث قائم الزاوية.

مثال

حدّد ما إذا كانت كل مجموعة من الأطوال الآتية تشكّل مثلثاً قائم الزاوية أم لا:

(أ) ١٤، ١٢، ١٠

بما أنّ طول الضلع الأكبر ١٤، فإنّ ج' = ١٤، أ' = ١٠، ب' = ١٢.

$$\text{ج}'^2 = \text{أ}'^2 + \text{ب}'^2 \quad \text{نظرية فيثاغورس}$$

$$14^2 \stackrel{?}{=} 10^2 + 12^2 \quad \text{ج}' = 14, \text{أ}' = 10, \text{ب}' = 12$$

$$169 \stackrel{?}{=} 100 + 144 \quad \text{ربّع}$$

$$169 \stackrel{?}{=} 244 \quad \text{اجمع}$$

بما أنّ ج'<sup>2</sup> ≠ أ'<sup>2</sup> + ب'<sup>2</sup>، فإنّ قياسات هذه الأضلاع لا تشكّل مثلثاً قائم الزاوية.

(ب) ٢٥، ٢٤، ٧

بما أنّ طول الضلع الأكبر ٢٥، فإنّ ج' = ٢٥، أ' = ٧، ب' = ٢٤.

$$\text{ج}'^2 = \text{أ}'^2 + \text{ب}'^2 \quad \text{نظرية فيثاغورس}$$

$$25^2 \stackrel{?}{=} 7^2 + 24^2 \quad \text{ج}' = 25, \text{أ}' = 7, \text{ب}' = 24$$

$$625 \stackrel{?}{=} 49 + 576 \quad \text{ربّع}$$

$$625 \stackrel{?}{=} 625 \quad \text{اجمع}$$

بما أنّ ج'<sup>2</sup> = أ'<sup>2</sup> + ب'<sup>2</sup>، فإنّ قياسات هذه الأضلاع تشكّل مثلثاً قائم الزاوية.

### تمارين

حدّد ما إذا كانت كل مجموعة من الأطوال الآتية تشكّل مثلثاً قائم الزاوية أم لا، ثم حدّد ما إذا كانت تشكّل ثلاثية فيثاغورس:

(٣) ١٠، ٨، ٨

(٢) ١٠، ٨، ٦

(١) ٥٠، ٤٨، ١٤

(٦) ٥√٤، ٨، ٤

(٥) ٢٥، ٢٠، ١٥

(٤) ١٥٠، ١٢٠، ٩٠

(٩) ٣٥، ٣٠، ٢٥

(٨) ٢٠√٤، ٤، ٤

(٧) ٨√٤، ٢، ٢

(١٢) ٢٥٠، ٢٠٠، ١٥٠

(١١) ٨٢، ٨٠، ١٨

(١٠) ٤٨، ٣٦، ٢٤

(١٥) ١٣٠٠، ١٠٠٠، ٧٠٠

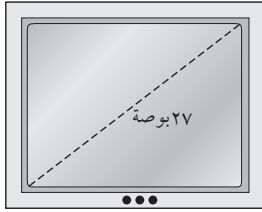
(١٤) ١٣٠٠، ١٢٠٠، ٥٠٠

(١٣) ٣٠٠، ٢٠٠، ١٠٠

## تدريبات حل المسألة

## نظرية فيثاغورس: تبسيط العبارات الجذرية

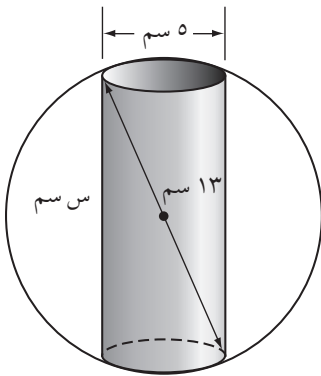
- (٤) أجهزة تلفاز: تُحدّد قياسات أجهزة التلفاز بقياس قطر شاشة العرض. فمثلاً: تلفاز قياسه ٢٧ بوصة يعني أنّ طول قطر شاشته ٢٧ بوصة.



أكمل الجدول الآتي لإيجاد ارتفاع شاشة كل تلفاز إذا علم قياسه وعرض شاشته، مقرباً إجابتك إلى أقرب عدد كلي:

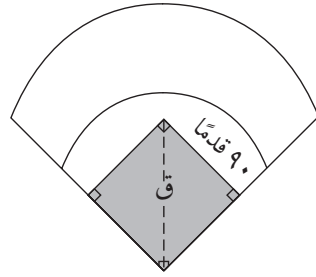
الطول (بالبوصات)	العرض (بالبوصات)	قياس التلفاز
	١٥	١٩ بوصة
	٢١	٢٥ بوصة
	٢٥	٣٢ بوصة
	٤٠	٥٠ بوصة

- (٥) تصنيع: يعمل محمود في شركة لتصنيع قطع سيارات، ويتحدّد عمله في حفر ثقب في كرة فولاذية. بيّن الشكل الآتي أبعاد كل من الكرة والثقب لكل قطعة:



- (أ) ما عمق الثقب؟  
(ب) ما طول نصف القطر لكرة إذا كان عرض الثقب فيها ٧ سم، وعمقه ٢٤ سم؟

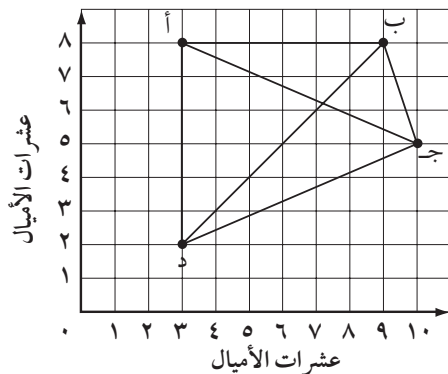
- (١) هندسة: أوجد طول القطر ق للمربع المظلل في الشكل أدناه، حيث طول ضلعه ٩٠ قدمًا. قَرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.



- (٢) مثلثات: صمّم كل طالب في الصف الثالث المتوسط في مدرسة ابن الهيثم مثلثًا قائم الزاوية خاصًا به، باستخدام عيدان من القش. ثم أنشأ أحمد الجدول الآتي، وفيه أطوال أضلاع كل مثلث، لكنه أخطأ عند تسجيل نتيجة أحد الطلاب. من الطالب الذي سُجّلت نتيجته بطريقة خطأ؟

أطوال الأضلاع							
الطالب	أ	ب	ج	الطالب	أ	ب	ج
ماجد	٣	٤	٥	سامر	٨	١٤	١٦
سعيد	٧	٢٤	٢٥	لطفى	٥	١٢	١٣
فارس	٩	١٢	١٥				

- (٣) خرائط: أوجد المسافة بين الموقعين أ، ج في الشكل الآتي، مقرباً إجابتك إلى أقرب عُشر.

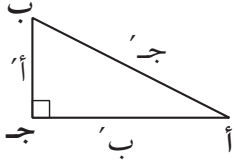


## التدريبات الإثرائية

٤-٩

## ثلاثيات فيثاغورس

تذكر نظرية فيثاغورس:



$$ج'^2 = أ'^2 + ب'^2$$

لاحظ أن ج' هو طول الوتر.

إذا كان المثلث قائم الزاوية فإن مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي ضلعيه (ساقيه).

$$٢٥ = ٢٤ + ٢٣$$

الأعداد الصحيحة ٣، ٤، ٥ تحقق نظرية فيثاغورس،

$$٢٥ = ١٦ + ٩$$

ويمكن أن تشكل أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية.

$$٢٥ = ٢٥$$

وبصورة عامة فإنه لأي عدد صحيح موجب ن،

$$٢١٠ = ٢٨ + ٢٦؛ ٢ = ٢$$

تحقق الأعداد ٣، ٤، ٥ نظرية فيثاغورس.

$$١٠٠ = ٦٤ + ٣٦$$

إذا حققت ثلاثة أعداد صحيحة موجبة نظرية فيثاغورس،

$$١٠٠ = ١٠٠$$

تسمى هذه الأعداد ثلاثية فيثاغورس

توجد طريقة سهلة لإيجاد ثلاثيات فيثاغورس.

تشكل الأعداد أ'، ب'، ج' ثلاثية فيثاغورس إذا كانت أ' = م<sup>٢</sup> - ن<sup>٢</sup>، ب' = ٢م ن، ج' = م<sup>٢</sup> + ن<sup>٢</sup>، حيث م، ن عدنان صحيحان موجبان ليس لهما قاسم مشترك سوى ١، م < ن.

مثال

اختر م = ٥، ن = ٢.

$$أ' = م^2 - ن^2$$

تحقق:

$$ب' = ٢م ن$$

$$ج' = م^2 + ن^2$$

$$٢٢ - ٢٥ =$$

$$٢(٢٩) \stackrel{?}{=} ٢(٢١) + ٢(٢٠)$$

$$٢٢ + ٢٥ = (٢)(٥)٢ =$$

$$٢٢ - ٢٥ =$$

$$٨٤١ \stackrel{?}{=} ٤٤١ + ٤٠٠$$

$$٤ + ٢٥ = ٢٠ =$$

$$٤ - ٢٥ =$$

$$٨٤١ = ٨٤١$$

$$٢٩ =$$

$$٢١ =$$

تمارين

أوجد ثلاثيات فيثاغورس فيما يأتي، مستعملاً قيم م، ن المعطاة:

$$(٣) \quad م = ٥، ن = ٣$$

$$(٢) \quad م = ٤، ن = ١$$

$$(١) \quad م = ٣، ن = ٢$$

$$(٦) \quad م = ٨، ن = ٥$$

$$(٥) \quad م = ١٠، ن = ٧$$

$$(٤) \quad م = ٦، ن = ٥$$

## تدريبات إعادة التعليم

### المسافة بين نقطتين

**قانون المسافة بين نقطتين:** يعتمد قانون المسافة بين نقطتين على نظرية فيثاغورس، كما هو مبين أدناه. ويمكنك استعمال هذا القانون لإيجاد المسافة بين أي نقطتين على المستوى الإحداثي.

المسافة بين نقطتين إحداثياتها  $(س_١, ص_١)$ ،  $(س_٢, ص_٢)$  يُعبر عنها بالقانون:

$$ف = \sqrt{(س_١ - س_٢)^2 + (ص_١ - ص_٢)^2}$$

المسافة بين نقطتين

رسم جميل قطعة

مثال ٢

مستقيمة من النقطة  $(١, ٤)$  إلى النقطة  $(٩٨, ٤٩)$  على شاشة الحاسوب. فما طول القطعة؟

$$ف = \sqrt{(س_١ - س_٢)^2 + (ص_١ - ص_٢)^2}$$

$$= \sqrt{(١ - ٩٨)^2 + (٤ - ٤٩)^2}$$

$$= \sqrt{٩٧^2 + ٤٥^2}$$

$$= \sqrt{٩٤٠٩ + ٢٠٢٥}$$

$$= \sqrt{١١٤٣٤}$$

طول القطعة المستقيمة هو ٩٣, ١٠٦ وحدات تقريبًا.

أوجد المسافة بين النقطتين  $(٥, ٤)$ ،  $(٢, ٥)$ .

مثال ١

$$ف = \sqrt{(س_١ - س_٢)^2 + (ص_١ - ص_٢)^2}$$

$$= \sqrt{(٥ - ٢)^2 + (٤ - ٥)^2}$$

بسط

$$= \sqrt{٣ + ١}$$

ربّع

$$= \sqrt{٩ + ١}$$

بسط

$$= \sqrt{١٠}$$

المسافة هي  $\sqrt{١٠}$  أو ٣, ٤٩ وحدات تقريبًا.

### تمارين

أوجد المسافة بين كلّ نقطتين فيما يأتي:

(١)  $(١, ٣)$ ،  $(٥, ١)$  (٢)  $(٠, ٠)$ ،  $(٨, ٦)$  (٣)  $(٨, ٢)$ ،  $(٣, ٧)$  (٤)  $(٧, ٦)$ ،  $(٢, ٨)$

(٥)  $(٥, ١)$ ،  $(٤, ٨)$  (٦)  $(٤, ٣)$ ،  $(٤, ٤)$  (٧)  $(٤, ١)$ ،  $(٢, ٣)$  (٨)  $(٠, ٠)$ ،  $(٥, ٣)$

(٩)  $(٦, ٢)$ ،  $(١, ٧)$  (١٠)  $(٥, ٢)$ ،  $(٨, ٠)$  (١١)  $(٤, ٣)$ ،  $(٠, ٠)$  (١٢)  $(٤, ٣)$ ،  $(١٦, ٤)$

أوجد القيم الممكنة للمتغير أ، مستعملًا إحداثيات كلّ نقطتين، والمسافة المعطاة بينهما:

(١٤)  $(٠, ٠)$ ،  $(٤, ٤)$ ؛ ف = ٥

(١٣)  $(١, ١)$ ،  $(٣, ٢)$ ؛ ف =  $\sqrt{٥}$

(١٦)  $(٣, ١)$ ،  $(٢١, ٢)$ ؛ ف = ٢٥

(١٥)  $(١, ٢)$ ،  $(٣, ٣)$ ؛ ف = ٥

(١٨)  $(٤, ٣)$ ،  $(٤, ٤)$ ؛ ف =  $\sqrt{٦٥}$

(١٧)  $(١, ١)$ ،  $(٢, ٤)$ ؛ ف = ٣

## تدريبات إعادة التعليم

### المسافة بين نقطتين

(تمة)

**قانون نقطة المنتصف:** تُسمى النقطة الواقعة على بعدين متساويين من طرفي قطعة مستقيمة وتنتمي إلى هذه القطعة نقطة المنتصف. ويمكنك إيجاد إحداثي نقطة المنتصف باستعمال قانون نقطة المنتصف.

قانون نقطة المنتصف	يستعمل القانون $M = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$ لإيجاد إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي نهايتها النقطتان $(x_1, y_1)$ و $(x_2, y_2)$ .
--------------------	--

أوجد إحداثي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين  $(-2, 5)$ ،  $(4, 9)$ .

مثال

$$\begin{aligned} \text{قانون نقطة المنتصف} \quad M &= \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \\ &= \left( \frac{-2 + 4}{2}, \frac{5 + 9}{2} \right) \\ &= \left( \frac{2}{2}, \frac{14}{2} \right) \\ &= (1, 7) \end{aligned}$$

تمارين

أوجد إحداثي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة الواصلة بين كل نقطتين فيما يأتي:

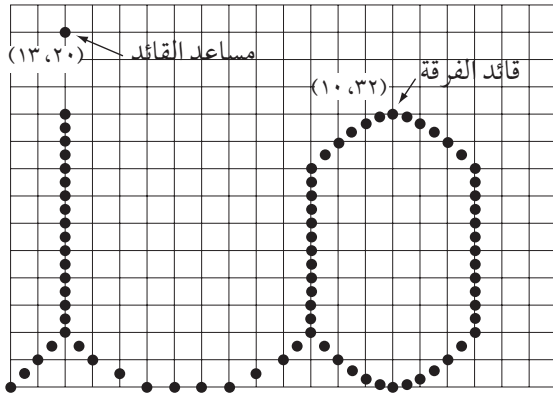
- ١)  $(6, 1)$ ،  $(3, 10)$
- ٢)  $(-4, 2)$ ،  $(0, 6)$
- ٣)  $(7, 2)$ ،  $(13, -4)$
- ٤)  $(-2, 1)$ ،  $(1, 0)$
- ٥)  $(-3, 3)$ ،  $(5, -11)$
- ٦)  $(0, 8)$ ،  $(-6, 0)$
- ٧)  $(-4, 3)$ ،  $(-3, 2)$
- ٨)  $(1, -9)$ ،  $(3, -7)$
- ٩)  $(2, -1)$ ،  $(8, 7)$
- ١٠)  $(4, -4)$ ،  $(-3, 12)$
- ١١)  $(0, 4)$ ،  $(-2, 6)$
- ١٢)  $(1, 9)$ ،  $(7, 1)$
- ١٣)  $(0, 12)$ ،  $(2, -6)$
- ١٤)  $(1, 1)$ ،  $(9, -9)$
- ١٥)  $(4, 5)$ ،  $(-2, -1)$
- ١٦)  $(1, -14)$ ،  $(5, 0)$
- ١٧)  $(2, 2)$ ،  $(6, 8)$
- ١٨)  $(-7, 3)$ ،  $(5, -3)$

## تدريبات حل المسألة

### المسافة بين نقطتين

٤) **شبكة توزيع الكهرباء:** قامت إحدى شركات الكهرباء بتركيب أعمدة وأسلاك كهربائية في منطقة خالية من المباني، حيث وضعت عمودًا عند النقطة (٢، ١٤)، وعمودًا ثانيًا عند النقطة (٧، ٨). فإذا أرادت الشركة وضع عمود ثالث عند نقطة منتصف المسافة بين العمودين السابقين، فما إحداثيا هذه النقطة؟

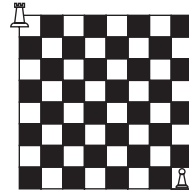
٥) **تشكيلات رياضية:** قامت فرقة تابعة لأحد النوادي الرياضية بإجراء تشكيلات رياضية في ملعب النادي بمناسبة اليوبيل الفضي لتأسيسه، وكانت تلجأ أحيانًا إلى استعمال الإحداثيات (بالأمتار) لضبط مجريات التشكيلات في الملعب. وفيما يأتي واحد من هذه التشكيلات الذي تمثل فيه كل نقطة أحد أعضاء الفرقة.



أ) ما المسافة بين قائد الفرقة ومساعده؟

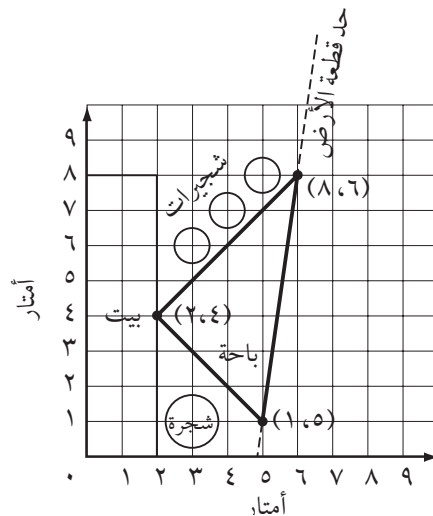
ب) إذا كان سعيد أحد أعضاء الفرقة، وموقعه عند النقطة (٢٦، ٠)، فما المسافة بينه وبين مساعدا القائد؟ قَرِّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

١) **لعبة الشطرنج:** تقع آخر قطعتين متبقيتين مع سمير من قطع لعبة الشطرنج عند مركزي المربعين الواقعين عند الركنين المتقابلين لرقعة الشطرنج، كما في الشكل أدناه. فإذا كان طول ضلع رقعة الشطرنج هذه ٨ بوصات، فما المسافة بين هاتين القطعتين؟ قَرِّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.



٢) **هندسة:** رسم سالم ميدانًا دائريًا على مخطط في إطار خطة لتطوير الحي. فإذا كانت النقطة (١، -١) تقع عند مركز الميدان في مخطط الرسم، وكانت النقطة (٣، ٢) تقع على الحد الخارجي للميدان، فما طول نصف قطر الميدان؟

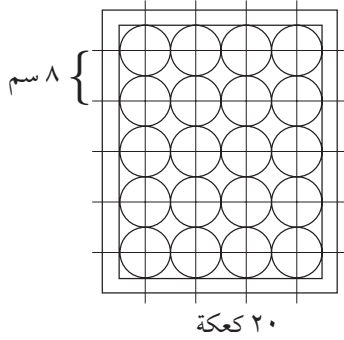
٣) **منظر طبيعي:** رسمت سعاد باحة مثلثة الشكل بجوار بيت، على مخطط قطعة أرض، كما هو مبين أدناه. ما طول السياج الذي يُحتاج إليه لضلع المثلث المحاذي لحد قطعة الأرض؟ قَرِّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.



## التدريبات الإثرائية

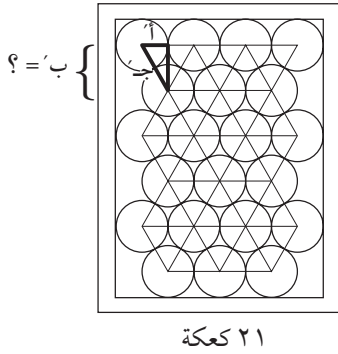
### تقليل الفراغات

٥-٩



يبيّن الشكلان المجاوران طريقتين مختلفتين لترتيب قطع الكعك على طبق طوله ٤٠ سم وعرضه ٣٢ سم. طول قطر الكعكة الواحدة بعد إخراجها من الفرن مخبوزة هو ٨ سم. تنطبق مراكز قطع الكعك في الترتيب الموجود في الشكل الأول على رؤوس المربعات، في حين تنطبق مراكز قطع الكعك في الترتيب الموجود في الشكل الثاني على رؤوس مثلثات متطابقة الأضلاع.

أي الترتيبين أفضل اقتصادياً؟



الترتيب في الشكل الثاني، أي الترتيب ذي المثلثات، أفضل اقتصادياً؛ لأنه يحتوي على كعكة واحدة إضافية زيادة على ما يحتويه الترتيب ذي المربعات في الشكل الأول. توضع الصفوف في الترتيب ذي المربعات في الشكل الأول على بعد ٨ سم عن بعضها. ما المسافة بين الصفوف المتتالية في الترتيب ذي المثلثات في الشكل الثاني؟

لاحظ المثلث القائم الذي أطوال أضلاعه أ'، ب'، ج'. الضلع أ' هو طول نصف قطر الكعكة، ويساوي ٤ سم، في حين أنّ طول الوتر ج' هو مجموع طولي نصف القطر، ويساوي ٨ سم. أوجد ب'، أي المسافة بين كلّ صفين متتاليين، مستعملاً نظرية فيثاغورس.

$$ج' = أ' + ب'$$

$$٨ = ٤ + ب'$$

$$ب' = ٨ - ٤$$

$$ب' = ٤$$

$$ب' = ٤$$

لذا فإن المسافة بين كلّ صفين متتاليين هي ٦,٩٣ سم تقريباً.

حلّ كلّ مسألة مما يأتي:

(١) افترض أنّه استعملت طريقة الترتيب ذي المثلثات في الشكل الثاني لقطع الكعك، طول قطر كلّ منها ١٠ سم. ما المسافة بين كلّ صفين متتاليين؟

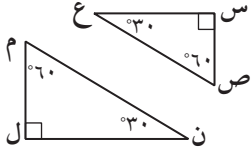
(٢) إذا استعملت طريقة الترتيب ذي المثلثات في الشكل الثاني لقطع الكعك، وكانت المسافة بين كلّ صفين متتاليين تساوي ٣، فأوجد طول قطر الكعكة الواحدة.

(٣) صف تطبيقات عملية أخرى يمكنك أن تستعمل فيها طريقة الترتيب ذي المثلثات، لتقليل الفراغات بين الأشياء المتماثلة عند ترتيبها.

٦-٩

## تدريبات إعادة التعليم

### المثلثات المتشابهة



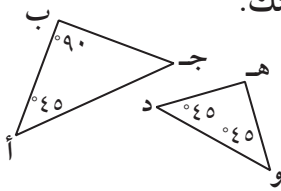
المثلثات المتشابهة:  $\Delta م ن$ ،  $\Delta س ص ع$  في الشكل المجاور متشابهان. قياسات الزوايا المتناظرة متساوية، وقياسات أضلاعها المتناظرة متناسبة.

	$\Delta أ ب ج \sim \Delta د ه و$ $\frac{أ ب}{د ه} = \frac{ب ج}{ه و} = \frac{أ ج}{د و}$	<p>إذا تشابه مثلثان، فإن قياسات زواياهما المتناظرة متساوية، وقياسات أضلاعها المتناظرة متناسبة.</p>	<p>المثلثات المتشابهة</p>
--	---	--	---------------------------

حدّد إذا كان المثلثان الآتيان متشابهين

مثال ٢

أم لا، وبرّر إجابتك.



$$\text{قياس } \angle ج = 180^\circ - (90^\circ + 45^\circ) = 45^\circ$$

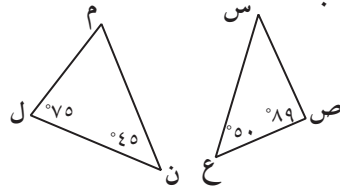
$$\text{قياس } \angle ه = 180^\circ - (45^\circ + 45^\circ) = 90^\circ$$

بما أنّ قياسات الزوايا المتناظرة متساوية، فإنّ المثلثين متشابهان.

حدّد إذا كان المثلثان الآتيان متشابهين

مثال ١

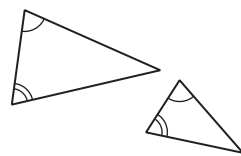
أم لا، وبرّر إجابتك.



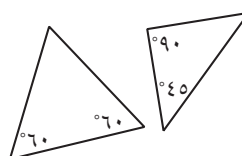
بما أنّ قياسات الزوايا المتناظرة ليست متساوية، فإنّ المثلثين غير متشابهين.

### تمارين

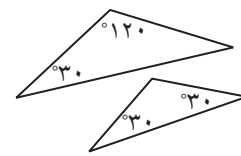
حدّد إذا كان كل مثلثين ممّا يأتي متشابهين أم لا، وبرّر إجابتك:



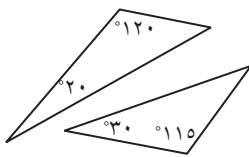
(٣)



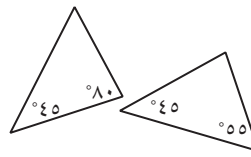
(٢)



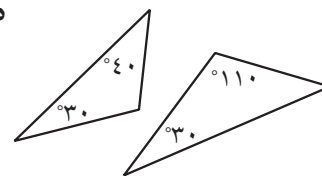
(١)



(٦)



(٥)



(٤)

## تدريبات إعادة التعليم

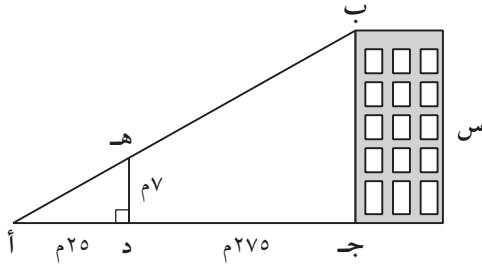
### المثلثات المتشابهة

(تتمة)

**إيجاد قياسات العناصر المجهولة:** يمكنك استعمال التناسب لإيجاد قياسات العناصر المجهولة، عندما تكون بعض أطوال أضلاع المثلثات المتشابهة معلومة.

مثال

قياس غير مباشر: إذا كان  $\Delta أ ب ج \sim \Delta هـ د ا$  في الشكل المجاور،



فأوجد ارتفاع المبنى.

ليكن  $ب ج = س$ .

$$\frac{أ د}{ب ج} = \frac{هـ د}{أ ج}$$

$$\frac{25}{300} = \frac{7}{س}$$

$$هـ د = 7، أ د = 25، أ ج = 300$$

اضرب تبادلياً

اقسم على 25

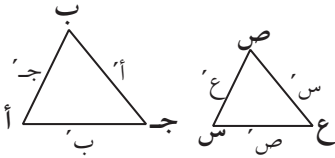
$$25 س = 2100$$

$$س = 84$$

ارتفاع المبنى 84 متراً.

### تمارين

أوجد قياسات العناصر المجهولة فيما يأتي للمثلثين المتشابهين  $\Delta أ ب ج، \Delta س ص ع$  في الشكل المجاور:



(١)  $ج' = 15، س' = 8، ص' = 6، ع' = 10$

(٢)  $ج' = 20، أ' = 12، ب' = 8، ع' = 15$

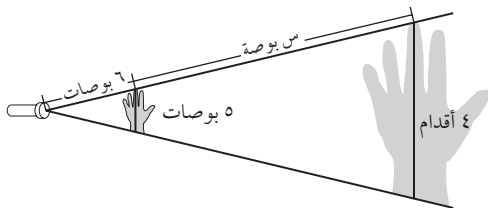
(٣)  $أ' = 8، س' = 8، ص' = 6، ع' = 7$

(٤)  $أ' = 20، س' = 10، ص' = 8، ع' = 10$

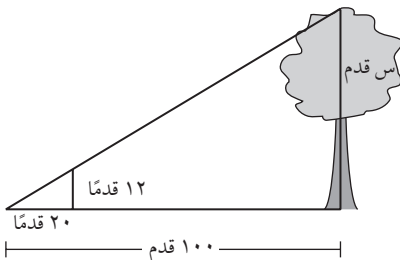
(٥)  $ج' = 5، س' = 10، ص' = 8، ع' = 8$

(٦)  $أ' = 25، ب' = 20، ج' = 15، ع' = 12$

(٧)  $ب' = 8، س' = 8، ص' = 4، ع' = 10$



(٨) **قياس غير مباشر:** يريد سامر تسليية أخيه الأصغر، بتوجيه أشعة مصباح يدوي على كفه، والحصول على ظل الكف على الحائط كما في الشكل المجاور. ما قيمة س؟



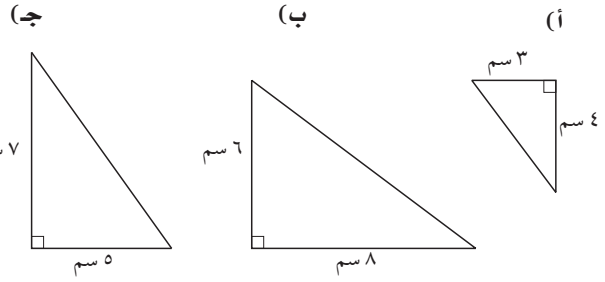
(٩) **قياس غير مباشر:** يستعمل حارس غابة حرجية المثلثات المتشابهة لإيجاد ارتفاع شجرة. أوجد ارتفاع الشجرة في الشكل المجاور.

## تدريبات حل المسألة

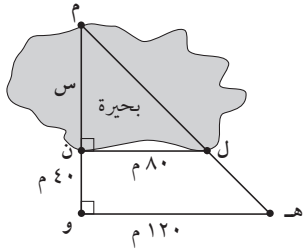
### المثلثات المتشابهة

٦-٩

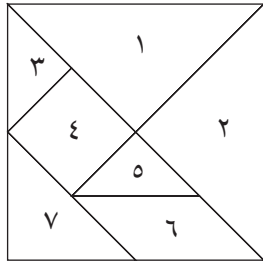
- (١) **حرف يدوية:** تريد ليل شراء مجموعة مغناط متشابهة لتضعها على باب الثلاجة، فوجدت المغناط الميئة أدناه، في متجر أحد المتاجر. فأَيّ اثنين منها متشابهان؟



- (٤) **مسح الأراضي:** يستعمل المساحون تشابه المثلثات لإيجاد مسافات مجهولة. أوجد المسافة المجهولة  $س$  عبر البحيرة في الشكل أدناه، مستعملًا الأبعاد المعطاة.



- (٥) **الغاز:** يبيّن الشكل أدناه لغازًا صينيًا قديمًا يُسمّى (تانجرام)، حيث توجد ٧ قطع يمكن إعادة تشكيلها للحصول على عدد لانهاثي من التصاميم والصّور.



- افترض أن طول ضلع مربع هذا التانجرام يساوي  $\sqrt{2}$  سم. أجب عما يأتي، مع تبسيط العبارات الجذرية:

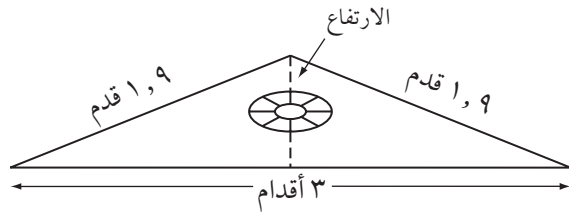
(أ) ما أطوال أضلاع المثلثين ١، ٢؟

(ب) ما أطوال أضلاع المثلث ٧؟

(ج) ما أطوال أضلاع المثلثين ٣، ٥؟

- (٢) **معارض:** عُرضت أطول شمعة في العالم عام ١٨٩٧ م في معرض ستوكهولم. افترض أنّ أحمد قاس طول ظل هذه الشمعة في أحد الأيام عند الساعة ١١:٠٠ صباحًا، فكان ١٢ قدمًا، وفي الوقت نفسه كان طول ظل عمود خيمة مجاورة ٥ أقدام. فإذا كان ارتفاع عمود الخيمة ٢٥ قدمًا، فما ارتفاع أطول شمعة في العالم؟

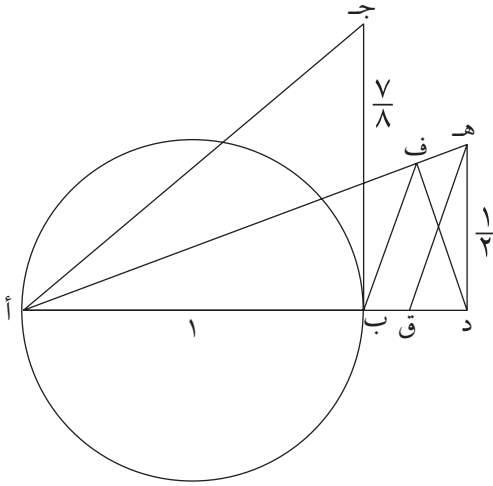
- (٣) **نماذج:** يبيّن الشكل أدناه نموذجًا للمنظر الأمامي للجزء العلوي لمنزل، إذا كان مقياس رسم النموذج ١ بوصة: ١ قدم، فما الارتفاع الحقيقي لهذا الجزء من المنزل؟



## التدريبات الإثرائية

### إنشاء هندسي طريف

٦-٩



اهتمّ الكثير من علماء الرياضيات بطرائق الإنشاءات الهندسية لتمثيل النسبة التقريبية ط. ويبيّن الشكل المجاور إحدى هذه الإنشاءات.

١  $\Delta$  أ ب ج،  $\Delta$  د ه قائم الزاوية، وطول أد يساوي طول أج، ف ب يوازي ه ق .

يعطي طول ب ق تقريباً عشريناً للجزء الكسري لقيمة النسبة التقريبية ط لسبع منازل عشرية.

اتّبع الخطوات الآتية لإيجاد طول ب ق ، وقرب إلى أقرب سبع منازل عشرية:

١) استعمل طول ب ج ونظرية فيثاغورس لإيجاد طول أج .

٢) أوجد طول أد .

٣) أوجد طول أه، مستعملاً طول أد ونظرية فيثاغورس.

٤) أطوال أضلاع المثلثين المتشابهين  $\Delta$  ف ه د،  $\Delta$  د ه أ متناسبة. لذا فإنّ  $\frac{ف ه}{أ ه} = \frac{د ه}{أ ه}$  . أوجد طول ف ه.

٥) أوجد أف.

٦) أطوال أضلاع المثلثين المتشابهين  $\Delta$  أ ف ب،  $\Delta$  أ ه ق متناسبة. لذا فإنّ  $\frac{أ ف}{أ ه} = \frac{أ ب}{أ ق}$  . أوجد طول أ ق .

٧) أوجد طول ب ق.

٨) قيمة ط لسبعة منازل عشرية هي ١٤١٥٩٢٧, ٣. قارن الجزء الكسري لقيمة ط بطول ب ق .

## تدريبات إعادة التعليم

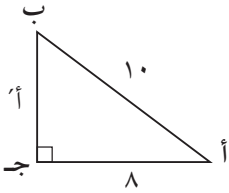
### النسب المثلثية

**النسب المثلثية:** حساب المثلثات هو دراسة العلاقة بين زوايا المثلث وأضلاعه. والنسب الثلاث الأكثر شيوعاً هي الجيب وجيب التمام، والظل.

	جا أ = $\frac{أ}{ج}$	جيب أ = $\frac{\text{الضلع المقابل للزاوية أ}}{\text{الوتر}}$
	جا ب = $\frac{ب}{ج}$	جيب ب = $\frac{\text{الضلع المقابل للزاوية ب}}{\text{الوتر}}$
	جتا أ = $\frac{ب}{ج}$	جيب تمام أ = $\frac{\text{الضلع المجاور للزاوية أ}}{\text{الوتر}}$
	جتا ب = $\frac{أ}{ج}$	جيب تمام ب = $\frac{\text{الضلع المجاور للزاوية ب}}{\text{الوتر}}$
	ظا أ = $\frac{أ}{ب}$	ظل أ = $\frac{\text{الضلع المقابل للزاوية أ}}{\text{الضلع المجاور للزاوية أ}}$
	ظا ب = $\frac{ب}{أ}$	ظل ب = $\frac{\text{الضلع المقابل للزاوية ب}}{\text{الضلع المجاور للزاوية ب}}$

مثال

أوجد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية أ.



الخطوة ١: استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد ب ج

نظرية فيثاغورس

$$٢ج' = ٢ب' + ٢ج'$$

$$١٠ = ٨ + ج'$$

$$٢١٠٠ = ٦٤ + ٢ج'$$

بسط

$$١٠٠ = ٦٤ + ٢ج'$$

اطرح ٦٤ من كلا الطرفين

$$٣٦ = ٢ج'$$

أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين

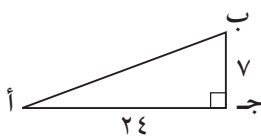
$$٦ = ج'$$

الخطوة ٢: استعمل أطوال الأضلاع لكتابة النسب المثلثية.

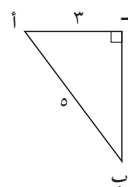
$$\text{جا أ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}, \text{جتا أ} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}, \text{ظا أ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$$

تمارين

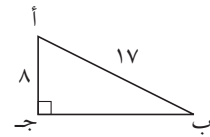
أوجد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية أ في كلٍّ مما يأتي:



(٣)



(٢)



(١)

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة النسبة المثلثية إلى أقرب جزء من عشرة آلاف في كلٍّ مما يأتي:

$$(٦) \text{ ظا } ٨٥^\circ$$

$$(٥) \text{ جتا } ٢٥^\circ$$

$$(٤) \text{ جا } ٤٠^\circ$$

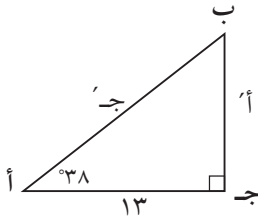
## تدريبات إعادة التعليم

### النسب المثلثية

(تمة)

**استعمال النسب المثلثية:** عندما تجد القياسات المجهولة لأضلاع المثلث القائم وزواياه، فهذا يعني أنك قمت بحل المثلث. ويمكنك إيجاد القياسات المجهولة إذا علمت طولَي ضلعين في المثلث، أو طول ضلع وقياس إحدى الزاويتين الحادتين.

**حلّ المثلث القائم الزاوية، مقربًا طول كل ضلع إلى أقرب جزء من عشرة.**



**الخطوة ١:** أوجد قياس  $\angle B$ . مجموع قياسات زوايا المثلث  $180^\circ$

$$180^\circ = (38^\circ + 90^\circ) - 52^\circ$$

$$\text{قياس } \angle B = 52^\circ$$

**الخطوة ٢:** أوجد قياس  $\angle C$ . بما أن قياس الضلع المجاور للزاوية أ معطى، وتريد إيجاد قياس الوتر، فاستعمل نسبة جيب التمام.

تعريف جيب التمام

$$\frac{13}{\text{ج}} = \text{جتا } 38^\circ$$

اضرب كلا الطرفين في ج

$$13 = \text{جتا } 38^\circ \cdot \text{ج}$$

اقسم كلا الطرفين على جتا  $38^\circ$ ، استعمل آلة حاسبة

$$\frac{13}{\text{جتا } 38^\circ} = \text{ج}$$

لذا فإن  $\text{ج} = \text{أب} = 16,5$  تقريبًا.

**الخطوة ٣:** أوجد قياس  $\angle A$ . بما أن قياس الضلع المجاور للزاوية أ معطى، وتريد إيجاد قياس الضلع المقابل لها، فاستعمل نسبة الظل.

تعريف الظل

$$\frac{\text{ج}}{13} = \text{ظا } 38^\circ$$

اضرب كلا الطرفين في 13

$$\text{ج} = 13 \cdot \text{ظا } 38^\circ$$

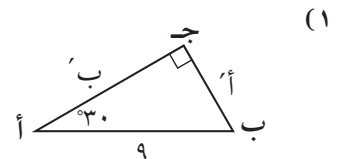
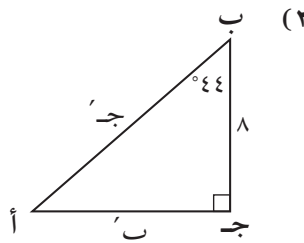
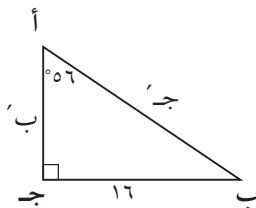
استعمل آلة حاسبة

$$\text{ج} \approx 10,2$$

لذا فإن  $\text{ج} = \text{ب} = 10,2$  تقريبًا.

**تمارين**

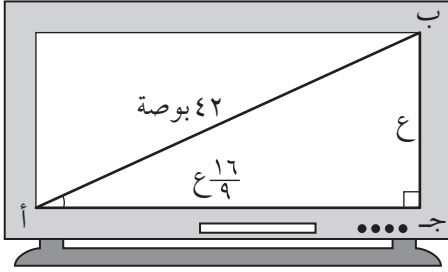
**حلّ المثلث القائم الزاوية في كلِّ مما يأتي، مقربًا طول كل ضلع إلى أقرب جزء من عشرة:**



## تدريبات حل المسألة

### النسب المثلثية

(٥) أجهزة تلفاز: تُحدّد قياسات أجهزة التلفاز بقياس قطر شاشة العرض. والقياس الشائع للشاشة العريضة لتلفاز البلازما يساوي ٤٢ بوصة.

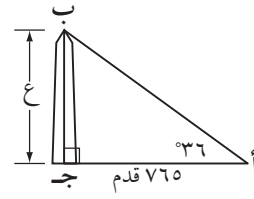


(أ) إذا كانت نسبة العرض ل إلى الارتفاع ع لشاشة تلفاز هي ١٦ : ٩، فإنّ العرض يساوي  $\frac{16}{9}$  مرة من الارتفاع. اكتب معادلة لإيجاد الارتفاع (بالبوصات) لشاشة تلفاز، مستعملًا نظرية فيثاغورس، ثم أوجد قيمة الارتفاع.

(ب) حلّ المثلث القائم أ ب ج، مستعملًا المعلومات الواردة في الفرع أ.

(ج) ما قياس الزاوية أ لتلفاز نسبة عرض شاشته إلى ارتفاعه ٤ : ٣؟

(١) أبراج: يحاول ياسر تحديد ارتفاع البرج في الشكل أدناه. إذا كانت المسافة بين النقطتين أ، ج تساوي ٢٥٥ مترًا، وكان قياس الزاوية بين الأرض وقمة البرج عند النقطة أ يساوي  $36^\circ$ ، فأوجد ارتفاع البرج إلى أقرب قدم.



(٢) طائرات: ألق طيار بطائرته من مدرج المطار، بزاوية مائلة عن الأفق قياسها  $20^\circ$ ، حتى وصلت إلى ارتفاع ٢٥٠٠ قدم. فما المسافة الأفقية التي قطعها الطائرة عند هذا الارتفاع؟

(٣) سلّم شاحنة: تستعمل إحدى شركات ترحيل الأثاث سلّمًا طوله ٤ أمتار لتنزيل الأثاث من شاحنة. إذا كان السطح السفلي لصندوق الشاحنة يرتفع مترًا واحدًا عن الأرض، فما قياس زاوية ميل السلّم إلى أقرب درجة؟

(٤) مثلثات خاصة: لاحظت سلوى عند استقصاء المثلث القائم الزاوية ك ل م، أنّ جتا م = جا م، فما قياس الزاوية م؟

## التدريبات الإثرائية

### المزيد من النسب المثلثية

٧-٩

يوجد ثلاث نسب مثلثية أخرى شائعة، إضافة إلى الجيب، وجيب التمام، والظل. وهذه النسب هي القاطع، وقاطع التمام، وظل التمام.

	$\frac{\text{الوتر}}{\text{الضلع المجاور للزاوية أ}} = \text{قاطع } \Delta \text{ أ}$	$\frac{\text{قا أ}}{\text{ج ب}} = \frac{\text{ج أ}}{\text{ب ج}}$
	$\frac{\text{الوتر}}{\text{الضلع المجاور للزاوية ب}} = \text{قاطع } \Delta \text{ ب}$	$\frac{\text{قا ب}}{\text{ج أ}} = \frac{\text{ج ب}}{\text{أ ج}}$
	$\frac{\text{الوتر}}{\text{الضلع المقابل للزاوية أ}} = \text{قاطع تمام } \Delta \text{ أ}$	$\frac{\text{قا أ}}{\text{ج أ}} = \frac{\text{ج ب}}{\text{ب ج}}$
	$\frac{\text{الوتر}}{\text{الضلع المقابل للزاوية ب}} = \text{قاطع تمام } \Delta \text{ ب}$	$\frac{\text{قا ب}}{\text{ج ب}} = \frac{\text{ج أ}}{\text{أ ج}}$
	$\frac{\text{الضلع المجاور للزاوية أ}}{\text{الضلع المقابل للزاوية أ}} = \text{ظل تمام } \Delta \text{ أ}$	$\frac{\text{ظنا أ}}{\text{ج أ}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}}$
	$\frac{\text{الضلع المجاور للزاوية ب}}{\text{الضلع المقابل للزاوية ب}} = \text{ظل تمام } \Delta \text{ ب}$	$\frac{\text{ظنا ب}}{\text{ج ب}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}}$

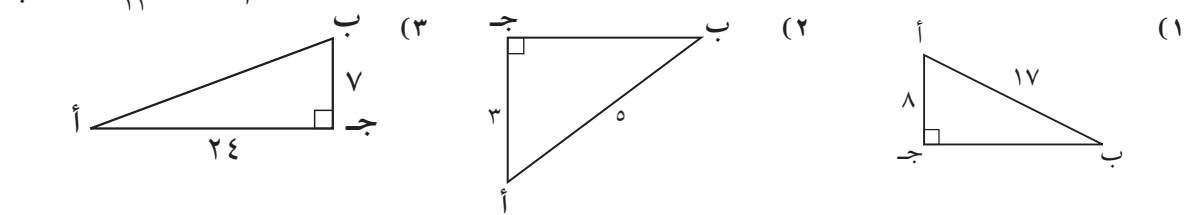
مثال

أوجد القاطع وقاطع التمام وظل التمام للزاوية أ في الشكل المجاور.

$$\text{قا أ} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} \quad \text{قا ب} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3} \quad \text{ظنا أ} = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

تمارين

أوجد القاطع وقاطع التمام وظل التمام للزاوية أ في كلٍّ مثلث مما يأتي:



(٤) ما العلاقة بين قاطع تمام الزاوية وجيبها؟ وما العلاقة بين قاطع الزاوية وجيب تمامها؟ وما العلاقة بين ظل تمام الزاوية وظلها؟

أوجد كلَّ نسبة مثلثية فيما يأتي إلى أقرب جزء من عشرة آلاف، مستعملاً العلاقات التي وجدتها في السؤال ٤ والآلة الحاسبة:

(٧) ظنا ٨١°

(٦) قتا ٤٩°

(٥) قا ١٧°

# ملحق الإجابات

التاريخ \_\_\_\_\_

الاسم \_\_\_\_\_

## 1-9 تدريبات إعادة التعليم تبسيط العبارات الجذرية

خاصية قسمة الجذور التربيعية : تكون العارة الكسرية المحتوية على جذور تربيعية في أسسط صورة، إذا لم يتبق جذور في المقام، يمكن استعمال خاصية قسمة الجذور التربيعية وإطاق المقام عند قسمة الجذور التربيعية، وتبسيط الجورات الجذرية التي تحتوي على قسمة. إطاق المقام الذي يحتوي على جذر يعني ضرب كل من البسط والمقام في عامل يؤدي إلى حذف الجذر من المقام.

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} \text{ لأن } \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{a}{b}} \text{ حيث } a \geq 0, b > 0 \text{ ولأن } \frac{12}{3} = 4$$

خاصية قسمة الجذور التربيعية

مثال ١

$$\sqrt{\frac{14 \times 4}{9 \times 5}} = \frac{\sqrt{14} \times \sqrt{4}}{\sqrt{9} \times \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{14}}{3\sqrt{5}}$$

حلل إلى المراسل

يبتعد كلًا من البسط والمقام

$$\frac{5\sqrt{2} \times \sqrt{14}}{5\sqrt{2} \times \sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{28}}{5\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{10}}$$

اضرب كلًا من البسط والمقام بـ ٥

تفانين

بسط كل عبارة فيما يأتي:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{11}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{4}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{4}}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}$$

الفصل ٩ السؤال الجذرية والتفانين

التاريخ \_\_\_\_\_

الاسم \_\_\_\_\_

## 1-9 تدريبات إعادة التعليم تبسيط العبارات الجذرية

خاصية ضرب الجذور التربيعية : يمكن استعمال خاصية ضرب الجذور التربيعية والتحليل إلى العوامل الأولية لتبسيط الجذور التربيعية. ويجب استعمال القيمة المطلقة عند تبسيط العبارات الجذرية بهتغيرات إذا كان ما تحت الجذر التربيعي متغيرًا أو أس زوجي وناتج تبسيطه أو أس فردي؛ لتأكد من أن النتيجة غير سالبة.

$$\sqrt{a^2} = |a| \text{ إذا كانت } a \leq 0, \sqrt{a^2} = a \text{ إذا كانت } a \geq 0$$

خاصية ضرب الجذور التربيعية

مثال ١

$$\sqrt{180} = \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5} = 3\sqrt{20}$$

حلل إلى عوامله الأولية

$$\sqrt{20} = \sqrt{2 \times 2 \times 5} = 2\sqrt{5}$$

خاصية ضرب الجذور

$$\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

يبسط

مثال ٢

$$\sqrt{120} = \sqrt{2^3 \times 3 \times 5} = 2\sqrt{30}$$

$$\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{10} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

تفانين

بسط كل عبارة فيما يأتي:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{11}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{4}}$$

$$\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{4}}$$

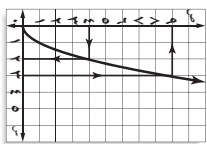
$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}$$

٦

الفصل ٩ السؤال الجذرية والتفانين

## ١-٩ التدرجات الإثرائية

إيجاد مربعات الأعداد والجذور التربيعية لها من التمثيل البياني

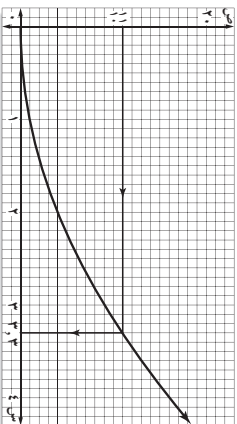


يمكنك استعمال التمثيل البياني للدالة  $y = x^2$  من إيجاد مربعات الأعداد والجذور التربيعية لها. لإيجاد مربع العدد ٣، عتني ٣ على محور السينات، ثم أوجد قيمة  $x$  المناظرة لها من التمثيل البياني. تبين الأسم  $x = 3$  = ٩

ولإيجاد الجذر التربيعي للعدد ٤، عتني ٤ على محور الصادات، ثم أوجد قيمة  $x$  المناظرة لها من التمثيل البياني. تبين الأسم أن  $x = \sqrt{4} = 2$

يبين الشكل أدناه جزءاً صغيراً من التمثيل البياني للدالة  $y = x^2$ ، حيث كانت النسبة بين طول الوحدة على محور الصادات إلى طول الوحدة على محور السينات تساوي ١٠ : ١

مثال  
أوجد  $\sqrt{121}$  من التمثيل البياني المجاور.  
تشر الأسم إلى أنه  $\sqrt{121} = 11$ ، مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة.



تعريف

أوجد ناتج كل مما يأتي، مستملاً التمثيل أعلاه، مقرباً إلى أقرب عدد كمي:

- ١)  $\sqrt{4}$  (٣) ٢)  $\sqrt{25}$  (٥) ٣)  $\sqrt{16}$  (٤)  
٤)  $\sqrt{36}$  (٦) ٥)  $\sqrt{81}$  (٩) ٦)  $\sqrt{100}$  (١٠)

أوجد ناتج كل مما يأتي، مستملاً التمثيل أعلاه، مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة:

- ١)  $\sqrt{1.21}$  (١.١) ٢)  $\sqrt{0.49}$  (٠.٧)  
٣)  $\sqrt{0.09}$  (٠.٣) ٤)  $\sqrt{0.16}$  (٠.٤)  
٥)  $\sqrt{0.25}$  (٠.٥) ٦)  $\sqrt{0.36}$  (٠.٦)

## ١-٩ تدرجات حل المسألة

تبسيط العبارات الجذرية

٤) هيكلية هـ، عندما تكون مادة مثل بخار الماء في الحالة الغازية، فإن حجم جزيئاتها وسرعها يزيدان مع زيادة درجة الحرارة. يُعطى متوسط السرعة  $v$  من للجزيء الواحد الذي كتلته  $m$  عند درجة حرارة  $T$  بالمعادلة:

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{2m}}$$

حل المعادلة بالنسبة لـ  $T$ .

$$T = \frac{2mv^2}{3k}$$

٥) هكتسة: افترض أن مليون أحد المستشفيات الكبيرة يريد بناء مهبط للطائرات إسماعف عمودية، على أن يكون المهبط دائرياً ومضروباً من مادة عطاطية تقاومة للحرارة كما في الشكل أدناه:



١) إذا كانت مساحة المهبط  $M$ ، فكتب معادلة يمكن استعمالها لإيجاد طول نصف القطر  $r$ .

$$r = \sqrt{\frac{M}{\pi}}$$

ب) اكتب عبارة جذرية في أبسط صورة تمثل طول نصف قطر مهبط مساحته  $278\pi$  متراً مربعاً.

$$r = \sqrt{\frac{278\pi}{\pi}}$$

ج) أوجد طول نصف القطر  $r$  مقرباً إلى أقرب جزء من مئة، باستعمال آلة حاسبة.

$$r \approx 9.57$$

١) رياضة: حست بامسمن ارتفاع عارضة مرمى كرة القدم فوجدته يساوي  $\frac{15}{\sqrt{3}}$  قدم. تبسط هذه العبارة.

$$\frac{15\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3}$$

٢) تسواهي: سبت هرة أرضية تحت المحيط القندي عام ٢٠٠٤ تسواهي مدتوا. وسطيح العلماء حساب السرعة الفعلية من (قدم/ث) لسواهي في ماء عمقه  $10$  قدم. بالمقدم) بالمعادلة  $v = \sqrt{16g \cdot d}$  . جتت سرعة تسواهي في ماء عمقه  $300$  قدم. اكتب اجابك في أبسط صورة جذرية.

$$v = \sqrt{16 \cdot 3200} = 160$$

٣) سيارات: يمكن إيجاد الزمن الذي تستغرقه سيارة لتسارع من وضع التوقف إلى أن تصبح سرعتها  $60$  ميلاً في الساعة باستعمال المعادلة الآتية:

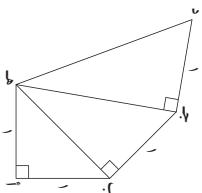
$$v = \sqrt{\frac{2at^2}{m}}$$

حيث  $v$  سرعة السيارة (م/ث)،  $a$ ،  $t$  متوسط قدرتها (بوحدة الزمان)،  $m$  كتلتها (بالكيلو جرامات)،  $n$  الزمن بالزمن. أوجد الزمن الذي تستغرقه سيارة كتلتها  $900$  كيلو جرام، ومتوسط قدرتها  $2000$  واط لتسارع من وضع التوقف إلى أن تصبح سرعتها  $36.87$  م/ث، أي  $84$  ميلاً في الساعة. قرب اجابك إلى أقرب جزء من عشرة.

$$t \approx 0.4$$



## ٢-٩ التدرجات الإثرائية مجلة ثيوودرس



احتم علم الرياضيات الإغريق بمسائل متعلقة بتبثيل الأعداد المختلطة والعبارة، باستعمال إنشاءات هندسية. يقال: أن الفيلسوف الإغريقي ثيوودرس (عام ٤٢٥ ق.م) قد اكتشف طريقة لإنشاء التتابع:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

يبين الشكل الجارء بداية هذا الإنشاء الهندسي، أيًا بمثل قائم الزاوية متطابق الضلعين، طول ضلعه وحدة واحدة واحدة.

اكتب طول كل من القطع المستقيمة الأتية من الشكل أعلاه، مستعملًا عبارة جبرية في أبسط صورة:

(١)  $\sqrt{17}$       (٢)  $\sqrt{2}$

(٣)  $\sqrt{17}$       (٤)  $\sqrt{2}$

(٥) بين كيفية إسقاط مثلث جديد إلى الشكل.

رسم ضلعًا جديدًا موثقه وحدة واحدة يقام آخره، ثم رسم الوتر الجديد.

(١) طول وتر المثلث الأورثو، وطول وتر المثلث التانثو، اكتب عبارة عقل طول وتر المثلث الذي ترتيبه ن.

$$\frac{1}{n+1}$$

(٢) بين أن طريقة الإنشاء الهندسي سُمّيت باستمرار العدد التالي في التتابع.

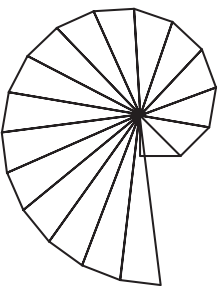
(إرشاد: أوجد عبارة عقل طول وتر المثلث الذي ترتيبه  $(1+n)$ )

$$\frac{1}{n+2} \sqrt{1+n}$$

(٣) أسمى، مجلة ثيوودرس في الفروع أدناه، أيًا بقطعة مستقيمة طولها ١ سم، متى تبدأ العجلة في التناقل؟

$$\sqrt{187}$$

بعد العنود ١٨٧



## ٢-٩ تدريبات حل المسألة العمليات على العبارات الجبرية

(١) هنتسة: أوجد محيط المثلث الخارجي المنتظم أدناه، إذا كان طول ضلعه  $1491723$  سم، مستعملًا عبارة جبرية في إجاباتك.



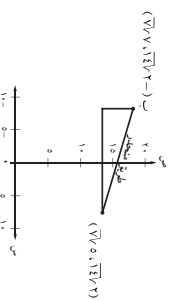
$$331491723$$

$$110 \sqrt{1491723}$$

(٢) الأرض، صيغة مساحة سطح الكرة هي  $4\pi r^2$ ، حيث  $r$  طول نصف قطرها. افترض أن الأرض كروية، وأن مساحة سطحها تساوي  $10^8 \times 4$  كيلومتر مربع تقريبًا، فما طول نصف قطرها إلى أقرب ١٠ كيلومتر؟

$$10^4 \text{ كيلومتر}$$

$$\frac{10^4}{4}$$



(٥) سقوط حجر، افترض أن كرة أسقطت من نافذة غرفة مبنى مرتفع لسانفة ٨٠٠ قدم في الهواء، وأن كرة ثانية أسقطت في الوقت نفسه من نافذة غرفة ارتفاعها ٢٨٨ قدمًا. يمكن أن نجرب الزمن  $n$  بالثواني لتقطع الكرة مسافة  $f(n)$  بالأقدام، مع إهمال مقاومة الهواء، باستعمال الصيغة:

$$f(n) = \frac{1}{2}gt^2$$

(١) ما الزمن الذي يمضي بين اصطدام الكرة الأولى واصطدام الكرة الثانية بالأرض؟ اكتب إجاباتك مستعملًا عبارة جبرية.

$$\frac{2}{g}$$

(٢) أي الكرتين تصل إلى الأرض أولًا؟

(٣) استخدام الكرة الثانية بالأرض؟ اكتب إجاباتك مستعملًا عبارة جبرية.

(٤) اكتب إجابة الفرع (١) إلى أقرب جزء من عشرة.

(٥) اكتب إجابة الفرع (١) إلى أقرب جزء من عشرة.

(٦) اكتب إجابة الفرع (١) إلى أقرب جزء من عشرة.

(٧) اكتب إجابة الفرع (١) إلى أقرب جزء من عشرة.

(٨) اكتب إجابة الفرع (١) إلى أقرب جزء من عشرة.

(٩) اكتب إجابة الفرع (١) إلى أقرب جزء من عشرة.

(١٠) اكتب إجابة الفرع (١) إلى أقرب جزء من عشرة.

(١١) اكتب إجابة الفرع (١) إلى أقرب جزء من عشرة.

(١٢) اكتب إجابة الفرع (١) إلى أقرب جزء من عشرة.

## ٢-٩ تدريبات حل المسألة

### العمليات على العبارات الجبرية

(١) هنتسة: أوجد محيط المثلث الخارجي المنتظم أدناه، إذا كان طول ضلعه  $1491723$  سم، مستعملًا عبارة جبرية في إجاباتك.



$$331491723$$

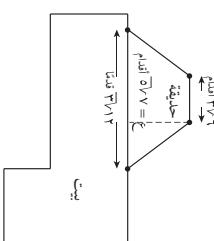
$$110 \sqrt{1491723}$$

(٢) الأرض، صيغة مساحة سطح الكرة هي  $4\pi r^2$ ، حيث  $r$  طول نصف قطرها. افترض أن الأرض كروية، وأن مساحة سطحها تساوي  $10^8 \times 4$  كيلومتر مربع تقريبًا، فما طول نصف قطرها إلى أقرب ١٠ كيلومتر؟

$$10^4 \text{ كيلومتر}$$

$$\frac{10^4}{4}$$

(٣) هنتسة: يمكنك إيجاد مساحة شبه المنحرف بغير ارتفاعه في متوسط طولي قاعدتيه، أوجد مساحة حلقة على شكل شبه منحرف مجاورة لبيت سلطان، كما هو مبين أدناه، مستعملًا عبارة جبرية في إجاباتك.



$$10^8 \text{ قدمًا مربعة}$$

(تفئة)

### ٣-٩ تدريبات إعادة التعليم المعادلات الجذرية

حلل وحيلة: لعل معادلة جذرية يعتبر في طرفها، يترك ترتيب الطرفين. وهذا الترتيب يتيح حلًا وحيدًا أحيانًا، أو حلًا لا يحقق المعادلة الأصلية. لذا عليك التحقق من الحلول كلها بالتعويض في المعادلة الأصلية.

مثال:  $\sqrt{x+3} = x-3$

$$\sqrt{x+3} = x-3 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$(\sqrt{x+3})^2 = (x-3)^2 \quad \text{رفع الطرفين}$$

$$x+3 = x^2-6x+9 \quad \text{بسط}$$

$$0 = x^2-7x+6 \quad \text{الترح من الطرفين}$$

$$0 = (x-6)(x-1) \quad \text{حل}$$

$$x=6 \text{ أو } x=1 \quad \text{خاصية القرب الضربي}$$

$$x=6 \text{ أو } x=1 \quad \text{حل}$$

$$\text{نتحقق:}$$

$$\sqrt{6+3} = 6-3 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$\sqrt{9} = 3 \quad \text{موزع من}$$

$$3 = 3 \quad \text{بسط}$$

$$3 = 3 \quad \text{صحيح}$$

$$\sqrt{1+3} = 1-3 \quad \text{خطا}$$

$$2 = -2 \quad \text{خطا}$$

$$2 \neq -2$$

$$\text{وبما أن } 1 \text{ لا يحقق المعادلة الأصلية، فإن } 1 \text{ هو الحل الوحيد.}$$

$$\text{تمارين}$$

$$\text{حل كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل:}$$

$$1) \sqrt{x} = 1 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$2) \sqrt{x+1} = 1 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$3) \sqrt{x+2} = 2 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$4) \sqrt{x-1} = 0 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$5) \sqrt{x+4} = 2 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$6) \sqrt{x+1} = 1 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$7) \sqrt{x-1} = 1 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$8) \sqrt{x+2} = 2 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$9) \sqrt{x+3} = 3 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$10) \sqrt{x+4} = 4 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$11) \sqrt{x+5} = 5 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$12) \sqrt{x+6} = 6 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$13) \sqrt{x+7} = 7 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$14) \sqrt{x+8} = 8 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$15) \sqrt{x+9} = 9 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

### ٣-٩ تدريبات إعادة التعليم المعادلات الجذرية

المعادلات الجذرية: المعادلات التي تحتوي متغيرات تحت الجذر تُسمى معادلات جذرية، ويمكنك حل هذه المعادلات باستعمال الخطوات الآتية:

الخطوة ١: اجعل التعبير الذي تريد إيجاد قيمته في طرف من المعادلة.

الخطوة ٢: رفع كل طرف من المعادلة للتخلص من الجذر.

الخطوة ٣: حل المعادلة الناتجة.

الخطوة ٤: التحقق من الحلول.

الخطوة ٥: كتابة الحلول.

الخطوة ٦: كتابة الحلول.

الخطوة ٧: كتابة الحلول.

الخطوة ٨: كتابة الحلول.

الخطوة ٩: كتابة الحلول.

الخطوة ١٠: كتابة الحلول.

الخطوة ١١: كتابة الحلول.

الخطوة ١٢: كتابة الحلول.

الخطوة ١٣: كتابة الحلول.

الخطوة ١٤: كتابة الحلول.

الخطوة ١٥: كتابة الحلول.

الخطوة ١٦: كتابة الحلول.

الخطوة ١٧: كتابة الحلول.

الخطوة ١٨: كتابة الحلول.

الخطوة ١٩: كتابة الحلول.

الخطوة ٢٠: كتابة الحلول.

الخطوة ٢١: كتابة الحلول.

الخطوة ٢٢: كتابة الحلول.

الخطوة ٢٣: كتابة الحلول.

الخطوة ٢٤: كتابة الحلول.

الخطوة ٢٥: كتابة الحلول.

الخطوة ٢٦: كتابة الحلول.

الخطوة ٢٧: كتابة الحلول.

الخطوة ٢٨: كتابة الحلول.

الخطوة ٢٩: كتابة الحلول.

الخطوة ٣٠: كتابة الحلول.

الخطوة ٣١: كتابة الحلول.

الخطوة ٣٢: كتابة الحلول.

الخطوة ٣٣: كتابة الحلول.

الخطوة ٣٤: كتابة الحلول.

الخطوة ٣٥: كتابة الحلول.

الخطوة ٣٦: كتابة الحلول.

الخطوة ٣٧: كتابة الحلول.

الخطوة ٣٨: كتابة الحلول.

الخطوة ٣٩: كتابة الحلول.

الخطوة ٤٠: كتابة الحلول.

### ٣-٩ التدرجات الإثرائية أكثر من جذر تربيعي واحد

تمثلت بأنه التخلص من الجذر التربيعي في معادلة، نتج أولاً أن وضع الجذر التربيعي في طرف، ثم تربيع الطرفين، وأخيراً حل المعادلة الناتجة.

وعلى أي حال، توجد معادلات تحوي كل منها على أكثر من جذر تربيعي واحد. والتربيع مرة واحدة فقط لا يكفي للتخلص من جميع هذه الجذور التربيعية.

مثال حل المعادلة:  $x + \sqrt{x+7} = 7 + \sqrt{x+1}$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+7} &= 7 + \sqrt{x+1} - x \\ \sqrt{x+7} &= \sqrt{x+1} + 6 - x \\ (\sqrt{x+7})^2 &= (\sqrt{x+1} + 6 - x)^2 \\ x+7 &= x+1 + 12\sqrt{x+1} + 36 - 12x + 6x^2 - 12x\sqrt{x+1} + x^2 \\ 6x^2 - 23x - 28 &= 12\sqrt{x+1} \\ 6x^2 - 23x - 28 &= 12\sqrt{x+1} \end{aligned}$$

نحقق: عوض في المعادلة الأصلية للتأكد من صحة إجابتك.

$$\begin{aligned} 6x^2 - 23x - 28 &= 12\sqrt{x+1} \\ 6x^2 - 23x - 28 &= 12\sqrt{x+1} \end{aligned}$$

لذا فإن  $x = 9$  هو الحل.

تعمير

$$(1) \sqrt{x+3} = \sqrt{x+11} + \sqrt{x+2} - 2$$

$$(2) \sqrt{x+3} = \sqrt{x+11} + \sqrt{x+2} - 2$$

$$(3) \sqrt{x+3} = \sqrt{x+11} + \sqrt{x+2} - 2$$

$$(4) \sqrt{x+3} = \sqrt{x+11} + \sqrt{x+2} - 2$$

$$(5) \sqrt{x+3} = \sqrt{x+11} + \sqrt{x+2} - 2$$

$$(6) \sqrt{x+3} = \sqrt{x+11} + \sqrt{x+2} - 2$$

$$(7) \sqrt{x+3} = \sqrt{x+11} + \sqrt{x+2} - 2$$

$$(8) \sqrt{x+3} = \sqrt{x+11} + \sqrt{x+2} - 2$$

$$(9) \sqrt{x+3} = \sqrt{x+11} + \sqrt{x+2} - 2$$

$$(10) \sqrt{x+3} = \sqrt{x+11} + \sqrt{x+2} - 2$$

### ٣-٩ تدريبات حل المسألة المتعدلات الجذرية

(٤) **مكافحة حرايق**: يمكن حساب معادل المساب الماء لإخلاء حريق من خرطوم ماء بالمعادلة:  $m = 3.1, 9 = 2\sqrt{r}$  حيث  $m$  معادل المساب الماء (بالجرون لكل دقيقة)،  $r$  هو ضغط فوهة الخرطوم (بالجرون لكل بوصة مربعة)،  $q$  طول قطر الخرطوم (بالبرصات)، وإيجاد حريق بقايعه، يجب أن يكون معادل المساب الماء من خرطومين  $2430$  جالون في الدقيقة الواحدة، فإذا كان قطر كل خرطوم  $3$  برصات، وضغط فوهة أحدهما يساوي  $4$  أمثال ضغط فوهة الخرطوم الثاني، فما ضغط فوهة كل منهما؟ قرب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

(٥) **هكتسة**: صيغة المساحة الجائبة لخرطوم دائري قائم هي:  $m = \frac{r^2 + r^2}{2}$  حيث  $m$  طول نصف قطر القاعدة،  $r$  الارتفاع. إذا كانت المساحة الجائبة لقمع على شكل مخروط دائري قائم هي  $117, 04$  سم، وطول نصف قطره  $3$  سم، فأوجد ارتفاعه إلى أقرب جزء من عشرة من المستمتر.

(ب) ما مساحة فوهة القمع أو قاعدة الخرطوم؟

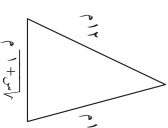
$$117, 04$$

$$117, 04$$

(١) **غواصات**: تحطى المساحة التريية ف بالأميال التي يستطيع منظر غواصة كمنها على سطح الماء بالمعادلة:  $f = \sqrt{d}, 1, 2 = \sqrt{d}$  حيث  $f$  الارتفاع بالأقدام فوق سطح الماء،  $d$  عمق أن يكرز ارتفاع منظر غواصة فوق الماء لتحديد مكان سفينة تبعد  $2$  أميال عن قرب إجاباتك إلى أقرب جزء من عشرة.

$$24, 2$$

(٣) **هكتسة**: أوجد قيمة  $s$  إذا كان محيط المثلث أدناه يساوي  $25$  مكر.



$$s = 8$$

(٣) **مساحة الأخشاب**: يقدر قانون (دويل) كمية الخشب ك (بوحة حجم ليح طوله  $2$  أقدام، وعرضه  $1$  أقدام وارتفاعه  $1$  بوصة) التي يمكن استخراجها من جذوع الأشجار بالمعادلة  $k = \frac{1}{4}(l - 4)$ ، حيث  $l$  طول الخشب (بالأقدام)،  $k$  طول قطر الجذع (بالبرصات). افترض أن مساحة تحمل  $20$  جناحاً متساوية الأقطار، طول كل منها  $25$  قدماً، وأن كمية الأخشاب الناتجة عنها تساوي  $2000$  وحدة، فقدر قطر الجذع إلى أقرب بوصة مقرباً أن الجذوع كلها أسطوانية مستقيمة.

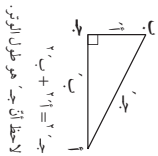
$$18$$



### 4-9 التدريبات الإثرائية تلاخيص فيثاغورس

تذكر نظرية فيثاغورس:

إذا كان المثلث قائم الزاوية فإن مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي ضلعيه (سابقه).



جـ<sup>2</sup> = ب<sup>2</sup> + أ<sup>2</sup>  
جـ<sup>2</sup> = أ<sup>2</sup> + ب<sup>2</sup>  
لاحظ أن جـ هو طول الوتر.

الأعداد الصحيحة ٣، ٤، ٥ تحقق نظرية فيثاغورس،  
٣<sup>2</sup> + ٤<sup>2</sup> = ٥<sup>2</sup>  
١٦ + ٩ = ٢٥  
٢٥ = ٢٥  
افتراض ن = ٢٤ + ٣٦ = ٦٠  
١٠٠ = ١٠٠  
إذا حقيقت ثلاثة أعداد صحيحة موجبة نظرية فيثاغورس،  
فستسمى هذه الأعداد ثلاثية فيثاغورس  
توجد طريقة سهلة لإيجاد ثلاثيات فيثاغورس.

تشكل الأعداد ١، ٤، ٥، جـ، ثلاثة فيثاغورس إذا كانت أ<sup>2</sup> = ن<sup>2</sup> - ب<sup>2</sup>، جـ = ن<sup>2</sup> - ب<sup>2</sup>، ن<sup>2</sup> + ب<sup>2</sup> = ن<sup>2</sup>، حيث ن، عدنان صحيحان موجبان ليس لهما قاسم مشترك سوى ١، ن < ن.

اختر م = ٥، ن = ٢.

تحقق،  
٢<sup>2</sup> + ٥<sup>2</sup> = ٢٩  
٤ + ٢٥ = ٢٩  
٢٩ = ٢٩  
٢<sup>2</sup> + ٥<sup>2</sup> = ٢٩  
٤ + ٢٥ = ٢٩  
٢٩ = ٢٩

تعاليف

١) ن = ٢، ب = ٥، ج = ٢٩  
٢) ن = ٥، ب = ١، ج = ٢٩  
٣) م = ٥، ن = ٣، ج = ٢٩  
٤) م = ٥، ن = ٦، ج = ٢٩  
٥) م = ٧، ن = ١٠، ج = ٢٩  
٦) م = ٨، ن = ١٦، ج = ٢٩  
٧) م = ٨، ن = ١٠، ج = ٢٩  
٨) م = ٨، ن = ١٦، ج = ٢٩  
٩) م = ٨، ن = ١٠، ج = ٢٩  
١٠) م = ٨، ن = ١٦، ج = ٢٩

### 4-9 تدريبات حل المسألة نظرية فيثاغورس: تبسيط المعادلات الجبرية

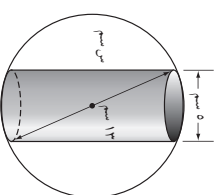
٤) أجهزة تقاطع: نجد قياسات أجهز تقاطع المثلثات ب قياس قطر شاشة العرض. فنلاحظ: تقاطع قياس ٢٧ بوصة يعني أن طول قطر شاشته ٢٧ بوصة.



أكمل الجدول الآتي لإيجاد ارتفاع شاشة كل تقاطع إذا علم قياسه وعرض شاشته، مقرباً إجاباتك إلى أقرب عدد كسري.

القياس	العرض (بالبوصات)	الطول (بالبوصات)
١٩ بوصة	١٥	١٢
٢٥ بوصة	٢١	١٤
٣٢ بوصة	٢٥	٢٠
٥٠ بوصة	٤٠	٣٠

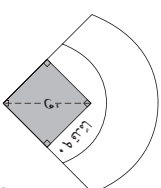
٥) تصحيح: يعمل حمولة في شركة لتصنيع قطع سيارات، ويتحدث عمله في حفر ثقب في كرة لينة. يتبين الشكل الآتي أبعاد كل من الكرة والثقب لكل قطعة:



أ) ما عمق الثقب؟  
ب) ما طول نصف القطر الكرة إذا كان عرض الثقب فيها ٧ سم، وعمقه ٢ سم؟  
ج) ما طول نصف القطر الكرة إذا كان عرض الثقب فيها ١٢,٥ سم؟

### 4-9 تدريبات حل المسألة نظرية فيثاغورس: تبسيط المعادلات الجبرية

١) هندسة: أوجد طول القطر للمربع المثلث في الشكل إذا كان عرضه ٩٠ قدمًا. قرب إجاباتك إلى أقرب جزء من عشرة.

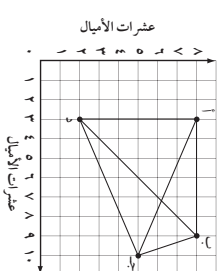


١٢٧,٢ قدم

٢) معادلات: صمم كل طالب في الصف العاشر المتوسط في مدرسة ابن العديم مثلثًا قائم الزاوية كما به، باستعمال عيدان من القش ثم أنشأ أحد الجداول الآتي، وفي أطوال أضلاع كل مثلث، لكنه أعطى عند تسجيل نتيجة أحد الطلاب. من الطالب الذي سُجلت نتيجته بطريقة خاطئة؟

أطوال الأضلاع	الطالب أ	الطالب ب	الطالب ج
١٦	٨	٥	٤
١٣	٥	٤	٣
١٣	٥	٤	٣
١٣	٥	٤	٣
١٣	٥	٤	٣
١٣	٥	٤	٣

٣) جواركط: أوجد المسافة بين الموقعين أ، ج في الشكل الآتي، مقرباً إجاباتك إلى أقرب عُشر. ٣١,٢ ميلًا



## تنبئة

تدريبات إعادة التعليم  
المسافة بين نقطتين

قانون نقطة المنتصف: تُسمى النقطة الواقعة على بعدين متساويين من طرفي قطعة مستقيمة وتنتمي إلى هذه القطعة نقطة المنتصف ويمكن إيجاد إحداثي نقطة المنتصف بأverage قانون: نقطة المنتصف.

قانون نقطة المنتصف: يستعمل القانون  $M = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$  لإيجاد إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي يربطها النقطتان  $(x_1, y_1)$  و  $(x_2, y_2)$ .

أوجد إحداثي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة الواقعة بين النقطتين  $(-2, 5)$ ،  $(4, 9)$ .

مثال

$$M = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = \left( \frac{-2 + 4}{2}, \frac{5 + 9}{2} \right) = \left( \frac{2}{2}, \frac{14}{2} \right) = (1, 7)$$

قانون نقطة المنتصف  
 $(x_1, y_1) = (-2, 5)$   
 $(x_2, y_2) = (4, 9)$   
 ينطبق  
 ينطبق  
 ينطبق

تعمارين

أوجد إحداثي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة الواقعة بين كل نقطتين فيما يأتي:

$(1, 1)$ ، $(3, 2)$	$(-4, 2)$ ، $(2, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 1)$
$(1, 1)$ ، $(3, 2)$	$(-4, 2)$ ، $(2, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 1)$
$(1, 1)$ ، $(3, 2)$	$(-4, 2)$ ، $(2, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 1)$
$(1, 1)$ ، $(3, 2)$	$(-4, 2)$ ، $(2, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 1)$
$(1, 1)$ ، $(3, 2)$	$(-4, 2)$ ، $(2, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 1)$
$(1, 1)$ ، $(3, 2)$	$(-4, 2)$ ، $(2, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 1)$
$(1, 1)$ ، $(3, 2)$	$(-4, 2)$ ، $(2, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 1)$
$(1, 1)$ ، $(3, 2)$	$(-4, 2)$ ، $(2, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 1)$
$(1, 1)$ ، $(3, 2)$	$(-4, 2)$ ، $(2, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 1)$
$(1, 1)$ ، $(3, 2)$	$(-4, 2)$ ، $(2, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 1)$

تدريبات إعادة التعليم  
المسافة بين نقطتين

قانون المسافة بين نقطتين: يعتمد قانون المسافة بين نقطتين على نظرية فيثاغورس، كما هو مبين أدناه. ويمكنك استعمال هذا القانون لإيجاد المسافة بين أي نقطتين على المستوى الإحداثي.

المسافة بين نقطتين  $(x_1, y_1)$  و  $(x_2, y_2)$  هي  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ .

رسم جيل قطعة

مستقيمة من النقطة  $(1, 4)$  إلى النقطة  $(9, 4)$  على خطية المحاور. ما طول القطعة؟

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(9 - 1)^2 + (4 - 4)^2} = \sqrt{8^2 + 0^2} = \sqrt{64} = 8$$

طول القطعة المستقيمة هو ٨، ٩٣، ١٠٦ وحدات تقريباً.

تعمارين

أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي:

$(1, 1)$ ، $(3, 2)$	$(-4, 2)$ ، $(2, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 1)$
$(1, 1)$ ، $(3, 2)$	$(-4, 2)$ ، $(2, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 1)$
$(1, 1)$ ، $(3, 2)$	$(-4, 2)$ ، $(2, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 1)$
$(1, 1)$ ، $(3, 2)$	$(-4, 2)$ ، $(2, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 1)$
$(1, 1)$ ، $(3, 2)$	$(-4, 2)$ ، $(2, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 1)$
$(1, 1)$ ، $(3, 2)$	$(-4, 2)$ ، $(2, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 1)$
$(1, 1)$ ، $(3, 2)$	$(-4, 2)$ ، $(2, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 1)$
$(1, 1)$ ، $(3, 2)$	$(-4, 2)$ ، $(2, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 1)$
$(1, 1)$ ، $(3, 2)$	$(-4, 2)$ ، $(2, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 1)$
$(1, 1)$ ، $(3, 2)$	$(-4, 2)$ ، $(2, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 3)$	$(-1, 1)$ ، $(1, 1)$

## 5-9- التدريبات الإثرائية

### تفصيل الفروقات

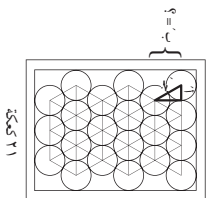
يتم التكرار للمدارس أربعين مختلفتين لترتيب قطع الكعك على طول 40 سم وعرضه 24 سم. طول قطر الكعكة الواحدة بعد إخراجها من الفرن مجزأة هو 8 سم. تفعلين مراكز قطع الكعك في الترتيب الموجه في الشكل الأول على رؤوس المربعات، في حين تطبقين مراكز قطع الكعك في الترتيب الموجود في الشكل الثاني على رؤوس مثلثات متطابقة الأضلاع.

أي الترتيبين أفضل اقتصادياً؟

الترتيب في الشكل الثاني، أي الترتيب ذي المثلثات، أفضل اقتصادياً؛ لأنه يجزئ على كعكة واحدة إضافية زيادة على ما يجزئ الترتيب ذي المربعات في الشكل الأول.

توضع الصفوف في الترتيب ذي المربعات في الشكل الأول على بعد 8 سم عن بعضها. والمسافة بين الصفوف المتتالية في الترتيب ذي المثلثات في الشكل الثاني؟

لاحظ المثلث القائم الذي أطوال أضلعه 1، 1، ج. الضلع 1 هو طول نصف قطر الكعكة، ويساوي 4 سم، في حين أن طول الوتر ج هو مجموع طولي نصف القطر، ويساوي 8 سم. أوجد ب، أي المسافة بين كل صفين متتاليين، مستعملاً نظرية فيثاغورس.



شكل 11

$$\text{ج}^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$\text{ج} = \sqrt{2} = 1.414$$

$$2^2 + 4^2 = 20$$

$$2^2 + 4^2 = 20$$

$$2^2 + 4^2 = 20$$

$$2^2 + 4^2 = 20$$

لذا فإن المسافة بين كل صفين متتاليين هي 1.414 سم تقريباً.

حل كل مسألة مما يلي:

(1) افترض أنك استعملت طريقة الترتيب ذي المثلثات في الشكل الثاني لقطع الكعك، وكانت المسافة بين كل صفين متتاليين المسافة بين كل صفين متتاليين؟ 8.11 سم

(2) إذا استعملت طريقة الترتيب ذي المثلثات في الشكل الثاني لقطع الكعك، وكانت المسافة بين كل صفين متتاليين تساوي 3، فأوجد طول قطر الكعكة الواحدة. 6 سم

(3) صف تطبيقات عملية أخرى يمكنك أن تستعمل فيها طريقة الترتيب ذي المثلثات، لتفصيل الفروقات بين الأشياء القريبة عند ترتيبها. اجابة ممكنة: ترتيب طبقات في صناديق.

## 5-9- تدريبات حل المسألة

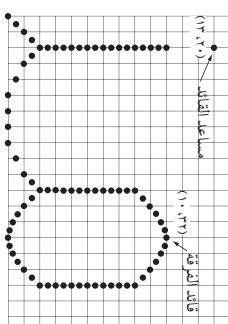
### المسافة بين نقطتين

(4) شبكة توزيع الكهرباء، قامت إحدى شركات الكهرباء بتركيب أعمدة وأسلاك كهربائية في منطقة خالية من المباني، حيث وضعت عموداً عند النقطة (3، 4) و عموداً ثانياً عند النقطة (7، 8)، فإذا أرادت الشركة وضع عمود ثالث عند نقطة منتصف المسافة بين العمودين السابقين، فما إحداثيات هذه النقطة؟

(4، 5)

هذه النقطة؟

(5) تشكيلات رياضية، قامت فرقة تابعة لأحد النوادي الرياضية بإجراء تشكيلات رياضية في ملعب النادي بمناسبة اليوم الرياضي التأسيسي، وكانت تلجأ أحياناً إلى استعمال الإحداثيات (الأبواب) لوصف مجريات التشكيلات في الملعب. وفيما يأتي واحد من هذه التشكيلات الذي تمثل فيه كل نقطة أحد أعضاء الفرقة.



مساحة القائل (1, 1) (10, 10)

قائد الفرقة (1, 1) (10, 10)

(أ) ما المسافة بين قائد الفرقة ومساعده؟

17.4

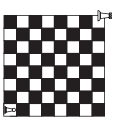
(ب) إذا كان سعيد أحد أعضاء الفرقة، وموقعه عند النقطة (10، 1)، في المسافة بينه وبين مساعده القائد، فترتب إحداثك إلى أقرب جزء من عشرة.

3.9

(1) لعبة الشطرنج: تقع آخر قطعتين بنتيتين مع سبير من قطع لعبة الشطرنج عند مركزي المربعين الواقعين عند الركنين المقابلين لرتعة الشطرنج، كما في الشكل أدناه.

فإذا كان طول ضلع رتعة الشطرنج هذه 8 بوصات، فما المسافة بين هاتين القطعتين؟ قرب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

9.9 بوصات

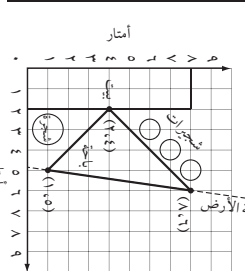


(2) هندسة: رسم سالم ميداناً دائرياً على مخطط في إطار خطية لتطور الطي، فإذا كانت النقطة (1، 0) تقع عند مركز الميدان في مخطط الـ 8 سم، وكانت النقطة (3، 2) تقع على الحد الخارجي للميدان، فما طول نصف قطر الميدان؟

5 وحدات

(3) منظر طبيعي: رسمت سارة باحة مثثلة الشكل بجوار بيت، على مخطط نقطة أرض، كما هو مبين أدناه. ما طول السياج الذي يحتاج إليه لقطع المثلث الحاد ذي الحدة قائمة الأرض؟ قرب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

7.1

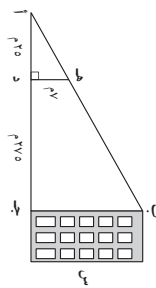


**(تمثيلاً)**

**٦-٩ تدريبات إعادة التعليم**  
**المثلثات المتشابهة**

إيجاد قياسات العناصر المجهولة؛ يمكنك استعمال التناسب لإيجاد قياسات العناصر المجهولة عندما يكون بعض أطوال أضلاع المثلثات المتشابهة معلومة.

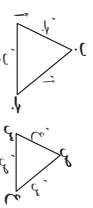
قاس غير مباشر: إذا كان  $\Delta$  أ ب ج  $\sim$   $\Delta$  د ه و في الشكل الجانبي،



فأوجد ارتفاع المثلث.  
ليكن ب ج = س.  
ب ج =  $\frac{أ د}{أ ج}$   
س =  $\frac{٢٥}{٧}$   
س = ٣٠٠  
س = ٢٥  
س = ٢١٠٠٠  
س = ٨٤  
س = ٢٥  
اسم على ٢٥  
اسم جوارها  
اسم على ٢٥  
ارتفاع المثلث ٨٤ مم.

تماثلين

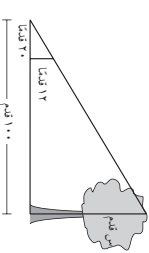
أوجد قياسات العناصر المجهولة في مثلثي المثلثين التاليين أ ب ج  $\sim$  د ه و في الشكل الجانبي:



- ١) ج = ١٥، س = ٨، ع = ٦، ١٠ = ع، ٦ = ١٠، ١٢ = ب، ٩ = ١٥
- ٢) ج = ٢٠، ١ = ع، ٨ = ب، ١٥ = ع، ٨ = س، ٩ = س، ١٥ = ب
- ٣) ١ = د، ٨ = س، ٨ = ص، ٦ = ع، ٦ = ٧، ١ = د، ٨ = س، ٨ = ص، ٦ = ع، ٦ = ٧
- ٤) ١ = د، ٢٠ = س، ١٠ = ص، ٨ = ع، ١٠ = ب، ١٦ = ج، ٢٠ = ١٠
- ٥) ج = ٥، س = ١٠، ص = ٨، ع = ٨، ٨ = ب، ٢٥ = ٥
- ٦) ١ = د، ٢٥ = ب، ٢٠ = ج، ١٥ = ع، ١٥ = س، ٢٠ = ص، ١٥ = ب
- ٧) ب = ٨، س = ٨، ص = ٨، ع = ٤، ١٠ = ب، ١٦ = ج، ٢٠ = ١٠



قياس غير مباشر: يريد سامر تسليماً أبيض الأصغر، يتوجه أخته مصباح يادوي على كفة، والظنول على ظل الكف على الحائط كما في الشكل الجانبي. ما قيمة س؟  
٥١٦ بوصة أو ٤٢٣ أقدام



المعلم ٩ الدوران الجديدة والتمتت

٢٧

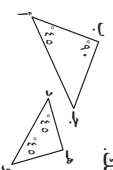
١) قياس غير مباشر: يستعمل جارس غاية حرجة المثلثات المتشابهة لإيجاد ارتفاع شجرة. أوجد ارتفاع الشجرة في الشكل الجانبي. ٦٠ قدماً

**٦-٩ تدريبات إعادة التعليم**  
**المثلثات المتشابهة**

المثلثات المتشابهة  $\Delta$  م ن،  $\Delta$  س ص في الشكل الجانبي متشابهين. قياسات الزوايا المتناظرة متساوية، وقياسات أضلاعها المتناظرة متناسبة.

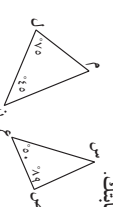
	<p>أ ب ج <math>\sim</math> د ه و أ ب ج = ١ د ه و = ٢</p>	<p>أ ب ج <math>\sim</math> د ه و أ ب ج = ١ د ه و = ٢</p>	<p>أ ب ج <math>\sim</math> د ه و أ ب ج = ١ د ه و = ٢</p>
--	--	--	--

مثال ٢ أم لا، وبرز إجابتك. حدد إذا كان المثلثان الأتيان متشابهين



قياس  $>$  ج =  $١٨٠ - (٩٠ + ٤٥) = ٤٥$   
قياس  $>$  ه =  $١٨٠ - (٤٥ + ٩٠) = ٤٥$   
بما أن قياسات الزوايا المتناظرة متساوية، فإن المثلثين متشابهين.

مثال ١ أم لا، وبرز إجابتك. حدد إذا كان المثلثان الأتيان متشابهين



بما أن قياسات الزوايا المتناظرة ليست متساوية، فإن المثلثين غير متشابهين.

تماثلين

حدد إذا كان كل مثلثين مما يلي متشابهين أم لا، وبرز إجابتك:

- ١) نعم؛ قياسات الزوايا المتناظرة متساوية.
- ٢) نعم؛ قياسات الزوايا المتناظرة متساوية.
- ٣) نعم؛ قياسات الزوايا المتناظرة متساوية.
- ٤) نعم؛ قياسات الزوايا المتناظرة متساوية.
- ٥) نعم؛ قياسات الزوايا المتناظرة متساوية.
- ٦) نعم؛ قياسات الزوايا المتناظرة متساوية.

٢٦

المعلم ٩ الدوران الجديدة والتمتت



**(تنبؤ)**

**٧-٩ تدريبات إعادة التعليم**  
**النسب المثلثية**

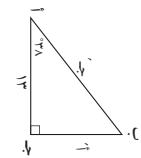
استعمال النسب المثلثية: عندما نجد القياسات المجاورة لأضلاع المثلث القائم وزواياه، فهذا يعني أنك قمت بحل المثلث. ويمكنك إيجاد القياسات المجاورة إذا علمت طوكي ضلعين في المثلث، أو طول ضلع ونيس إحدى الزاويتين الحادتين.

حلّ المثلث القائم الزاوية، مقرّبًا طول كل ضلع إلى أقرب جزء من عشرة.

الخطوة ١: أوجد قياس جيب. مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠°

$$١٨٠^\circ - (٩١^\circ + ٣٨^\circ) = ٥٢^\circ$$

$$\text{قياس جيب} = ٥٢^\circ$$



الخطوة ٢: أوجد قياس جيب. بما أن قياس الضلع المجاور للزاوية المعطى، ونريد إيجاد قياس الزاوية، فاستعمل نسبة جيب التمام.

تعريف جيب التمام

انصرب كلا الطرفين في جـ'

اقسم كلا الطرفين على جـ' لاستعمل آلة حاسبة

$$\frac{١٣}{٣٨} = \text{جـ}'$$

$$\text{لذا فإن جـ}' = \text{أب} = ٥, ١٦ \text{ تقريبًا.}$$

الخطوة ٣: أوجد قياس ١. بما أن قياس الضلع المجاور للزاوية المعطى، ونريد إيجاد قياس الضلع المقابل لها، فاستعمل نسبة المثلث.

تعريف المثلث

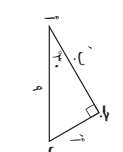
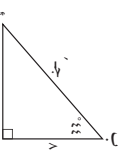
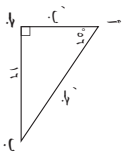
انصرب كلا الطرفين في ١٣

استعمل آلة حاسبة

$$\text{لذا فإن} \sin ١ = \text{جـ}' = ٥, ١٦ \text{ تقريبًا.}$$

تعاريف

حلّ المثلث القائم الزاوية في كلِّ مثالين، مقرّبًا طول كل ضلع إلى أقرب جزء من عشرة:



١)  $\sin ٥٢^\circ = \frac{١٣}{١٧} \Rightarrow \sin ٥٢^\circ \approx ٠,٧٦$   
 $\cos ٥٢^\circ = \frac{١}{١٧} \Rightarrow \cos ٥٢^\circ \approx ٠,٠٥٨$   
 $\tan ٥٢^\circ = \frac{١٣}{١} \Rightarrow \tan ٥٢^\circ \approx ١٣$

٢)  $\sin ٤٤^\circ = \frac{٨}{١١} \Rightarrow \sin ٤٤^\circ \approx ٠,٧٢$   
 $\cos ٤٤^\circ = \frac{١}{١١} \Rightarrow \cos ٤٤^\circ \approx ٠,٠٩١$   
 $\tan ٤٤^\circ = \frac{٨}{١} \Rightarrow \tan ٤٤^\circ \approx ٨$

٣)  $\sin ٣٠^\circ = \frac{٩}{١٧} \Rightarrow \sin ٣٠^\circ \approx ٠,٥٢٩$   
 $\cos ٣٠^\circ = \frac{١}{١٧} \Rightarrow \cos ٣٠^\circ \approx ٠,٠٥٩$   
 $\tan ٣٠^\circ = \frac{٩}{١} \Rightarrow \tan ٣٠^\circ \approx ٩$

**٧-٩ تدريبات إعادة التعليم**  
**النسب المثلثية**

النسب المثلثية: حساب العلاقات بين زوايا المثلث وأضلاعه، والنسب الثلاث الأكبر شيوفاً هي الجيب وجيب التمام، والمثلث.

	جـ' = ١	الضلع المقابل للزاوية أ
	جـ' = ١	الوتر
	جـ' = ١	الضلع المقابل للزاوية ب
	جـ' = ١	الوتر
	جـ' = ١	الضلع المجاور للزاوية أ
	جـ' = ١	الوتر
	جـ' = ١	الضلع المجاور للزاوية أ
	جـ' = ١	الوتر

مثال: أوجد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية أ.

الخطوة ١: استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد جـ'

نظرية فيثاغورس

$$١٠^2 = ٨^2 + \text{جـ}'^2$$

$$\text{جـ}' = ٦$$

المثلث من كلا الطرفين

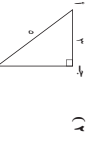
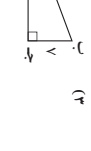
أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين

الخطوة ٢: استعمل أطوال الأضلاع لكتابة النسب المثلثية.

$$\sin ١ = \frac{١}{١٠} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{١}{١٠}$$

$$\cos ١ = \frac{٨}{١٠} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{٤}{٥}$$

$$\tan ١ = \frac{١}{٨} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{١}{٨}$$



١)  $\sin ١ = \frac{١}{١٠} = ٠,١$   
 $\cos ١ = \frac{٨}{١٠} = ٠,٨$   
 $\tan ١ = \frac{١}{٨} = ٠,١٢٥$

٢)  $\sin ٤ = \frac{٤}{١٠} = ٠,٤$   
 $\cos ٤ = \frac{٨}{١٠} = ٠,٨$   
 $\tan ٤ = \frac{٤}{٨} = ٠,٥$

٣)  $\sin ١٥ = \frac{٢,٥}{١٠} = ٠,٢٥$   
 $\cos ١٥ = \frac{٩,٥}{١٠} = ٠,٩٥$   
 $\tan ١٥ = \frac{٢,٥}{٩,٥} = ٠,٢٦٣$

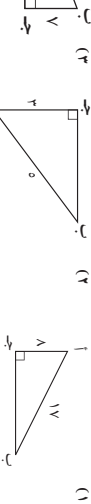
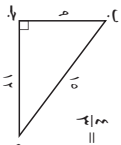
## ٧-٩ التدرجات الإثرائية المزيد من التسيب المثبتية

يوجد ثلاث نسب متطابقة أخرى شائعة، إضافة إلى الجيب، وجيب التمام، والظل. وهذه النسب هي القاطع، وقاطع التمام، وظل التمام.

$\frac{\text{جيب}}{\text{ب}} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}}$	$\frac{\text{الوتر}}{\text{الجوارب الزاوية أ}}$	ظل ح = ا
$\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{جيب}}{\text{ب}}$	$\frac{\text{الوتر}}{\text{الجوارب الزاوية ب}}$	ظل ح = ب
$\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{جيب}}{\text{ب}}$	$\frac{\text{الوتر}}{\text{القاطع الجوارب الزاوية أ}}$	ظل ح = ا
$\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{جيب}}{\text{ب}}$	$\frac{\text{الوتر}}{\text{القاطع الجوارب الزاوية ب}}$	ظل ح = ب

أوجد القاطع وقاطع التمام وظل التمام للزاوية في الشكل المجاور.

مثال  
ظل =  $\frac{\text{الوتر}}{\text{الجوارب}} = \frac{١٥}{١٢} = \frac{٥}{٤}$       قاطع =  $\frac{\text{الوتر}}{\text{القاطع}} = \frac{١٥}{٩} = \frac{٥}{٣}$



مثال  
ظل =  $\frac{\text{الوتر}}{\text{الجوارب}} = \frac{١٧}{٨} = \frac{١٧}{٨}$       قاطع =  $\frac{\text{الوتر}}{\text{القاطع}} = \frac{١٧}{١٥} = \frac{١٧}{١٥}$

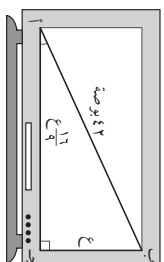
أوجد القاطع وقاطع التمام وظل التمام للزاوية في كلٍّ من مثلثي المثالين التاليين:

المسألة ٩ السؤال الجبرية والمثلثات

٣٣

## ٧-٩ تدريبات حل المسألة التسيب المثبتية

٥) أجهزة تلتافاز، تُعدّ قياسات أجهزة التلتافاز بقياس قطر شاشة العرض، والقياس الناتج للنتيجة المعروفة بالتلتافاز البلازما يساوي ٤٢ بوصة.



١) إذا كانت نسبة العرض ل ال الارتفاع الخ شاشة تلتافاز هي ١٦ : ٩ ، فإن العرض يساوي ١٣ مرة من الارتفاع. اكتب معادلة لإيجاد الارتفاع (بالبوصات) لشاشة تلتافاز، مستعملًا نظرية فيثاغورس، ثم أوجد قيمة الارتفاع.

٢٠٦ بوصة =  $٤٢ + (١٦٩)$

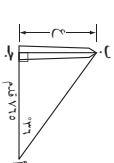
ب) حلّ المثلث القائم أ ب ج مستعملًا المعلومات الواردة في الفرج أ.

العرض =  $٣٦,٦$  بوصة ، قاطع =  $٢٠,٩$  ، قاطع =  $٦١$

ج) ما قياس الزاوية أ لتلتافاز نسبة عرضه شاشته إلى ارتفاعه ٢٣:٤ ؟

٩٧°

١) أبراج، يجازون بانس تحديد ارتفاع البرج في الشكل أدناه. إذا كانت المسافة بين العظمين أ ج تساوي ٢٥٥ مترًا، وكان قياس الزاوية بين الأرض ونقطة البرج عند النقطة أ يساوي ٣٦°، فأوجد ارتفاع البرج إلى أقرب قدم.



١٨٥ مترًا

٢) طابقت، أفق طاربطاوت، من مدح المطار، براوية مائة من الألف قياسها ٢٠° حتى وصلت إلى ارتفاع ٢٥٠٠ قدم. في المسألة الأتية التي قطعها الطائرة وعند هذا الارتفاع؟

١٨٢٩ قدمًا تقريبًا

٣) سلم هاجحة، تستعمل إحدى شراكات تحمل الأثاث سلاطون ٤ أمتار لتبذل الأثاث من شاحنة. إذا كان السطح السفلي للسفوف الشاحنة يرفع مترًا واحدًا عن الأرض، فما قياس زاوية ميل السلم إلى أقرب درجة؟

٩٤°

٤) مثلثات خاصة، لاحظت سولي عند استقصاء المثلث القائم الزاوية لك أن  $\text{جا} = \text{جا}$ ، في قياس الزاوية م°؟

٤٥°

٣٢

المسألة ٩ السؤال الجبرية والمثلثات