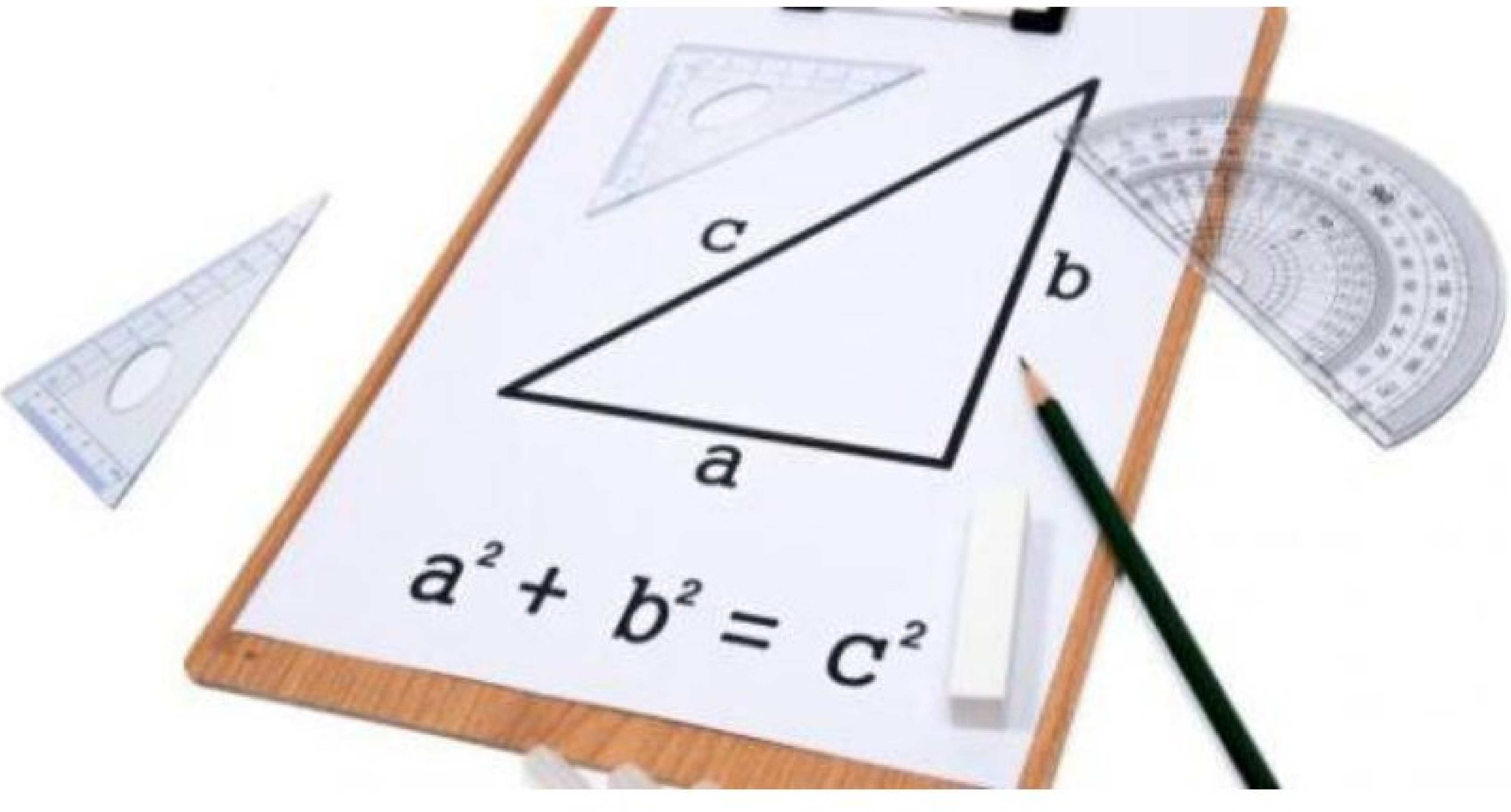
نظام حديث

الجبر وحساب المثلثات

للصف الأول الثانوي

إعداد

أ / محمد عبد الرحيم



مذكرة الشـرح

الفصل الدراسى الأول

الدرس الأول
معادلة الدرجة الثانية في مجهول واحد

متطلبات قبلية

الصورة العامة:-

$$أ\,س^{٢} + ب\,س + جـ = ٠$$

أ معامل $س^{٢}$

ب معامل س

جـ الحد المطلق

بشرط $أ \neq ٠$ لتظل من الدرجة الثانية

حل المعادلة (جذور المعادلة)

هما حلان أو جذران وهي قيم س التي تحقق المعادلة.

حل المعادلة

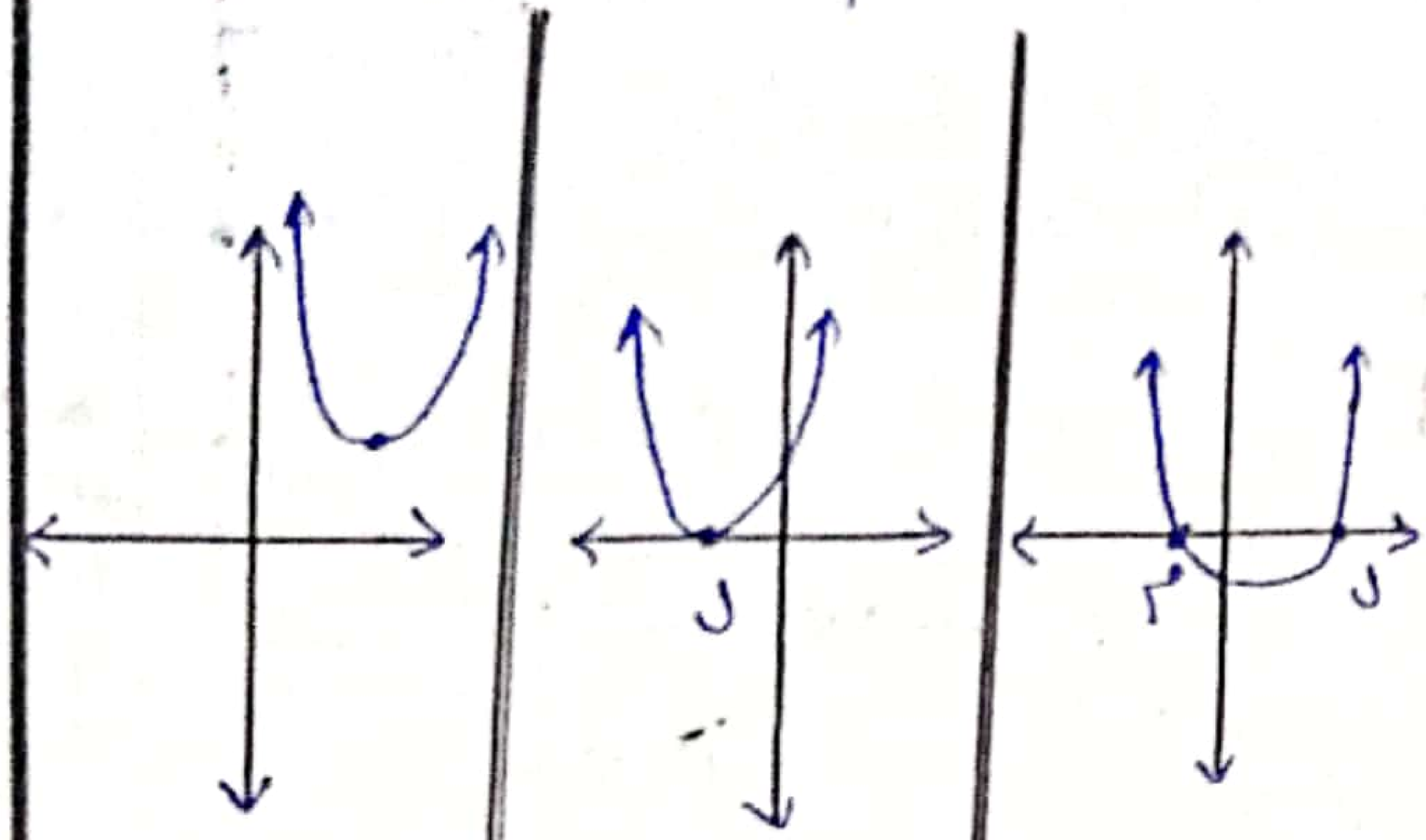
- التحليل
- القانون العام

القانون العام

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤\,أ\,جـ}}{٢\,أ}$$

يمكن حل المعادلة بيانياً بوضعها في صورة الدالة $د(س) = أ\,س^{٢} + ب\,س + جـ$

ويرسم منحنى الدالة التربيعية



لا يوجد حل	يوجد حل وحيد	يوجد حلان
Φ في ح	{ل} في ح	{ل، م} في ح

المسائل

أوجد جبرياً في ح مجموعة حل المعادلات

① $س^{٢} + ٣س = ٠$

الحل

بالتحليل $س(س + ٣) = ٠$

$س = ٠$ أو $س + ٣ = ٠ \Leftarrow س = -٣$

$\therefore$ م.ح = {٠، -٣}

② $س^{٢} + ٩ = ٠$

الحل

$س^{٢} = -٩$ ، $س = \sqrt{-٩} \notin ح$

ليس لها حل في ح

م.ح = Φ

(٣) $س^٢ + ٣س + ٥ = ٠$

الحل

يتعذر التحليل فنستخدم القانون العام

أ = ١ ، ب = ٣ ، جـ = ٥

$س = \frac{-٣ \pm \sqrt{٩ - (٤ \times ١ \times ٥)}}{٢ \times ١}$

$= \frac{-٣ \pm \sqrt{٩ - ٢٠}}{٢} = \frac{-٣ \pm \sqrt{-١١}}{٢}$

ليس لها حل في ح

م.ح = ϕ

$٢س^٢ + ٣س - ٤ = ٠$

الحل

أ = ٢ ، ب = ٣ ، جـ = -٤

$س = \frac{-٣ \pm \sqrt{٩ - (٤ \times ٢ \times -٤)}}{٢ \times ٢}$

$س = \frac{-٣ \pm \sqrt{٩ + ٣٢}}{٤} = \frac{-٣ \pm \sqrt{٤١}}{٤}$

$س = \frac{-٣ + \sqrt{٤١}}{٤} \simeq ٠,٨٥$

أو $س = \frac{-٣ - \sqrt{٤١}}{٤} \simeq -٢,٣٥$

∴ م.ح = {٠,٨٥ ، -٢,٣٥}

يمكن الحل باستخدام الحاسبة العلمية مباشرة

للتأكد من الحل

مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ}$

اختر الإجابة الصحيحة:-

(١) إذا كان منحنى الدالة التربيعية يقطع محور السينات في (٢، ٠) ، (-٣، ٠) فإن مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠ في ح هي ____

(أ) {٢ ، ٠} (ب) {-٣ ، ٠}

(جـ) {-٣ ، ٢} (د) {(٢ ، -٣)}

(٢) إذا كان س = ٣ أحد جذري المعادلة $س^٢ + م س = ٣$ فإن م = ----

[$\boxed{-٢}$ ، ٦ ، ٢ ، ٤ ، ٠]

الحل

س = ٣ تحقق المعادلة

$(٣)^٢ + م(٣) = ٣$

$٩ + ٣م = ٣ \Leftarrow ٣م = ٣ - ٩ = -٦$

$م = \frac{-٦}{٣} = -٢$

(٣) د(س) = $س^٢ + ب س + جـ$ وكان س = ٢ أحد جذري المعادلة د(س) = ٠ فإن د(٢) = ----

[٢ ، -٢ ، ٤ ، $\boxed{صفر}$]

∵ س = ٢ تحقق المعادلة

د(٢) = ٠

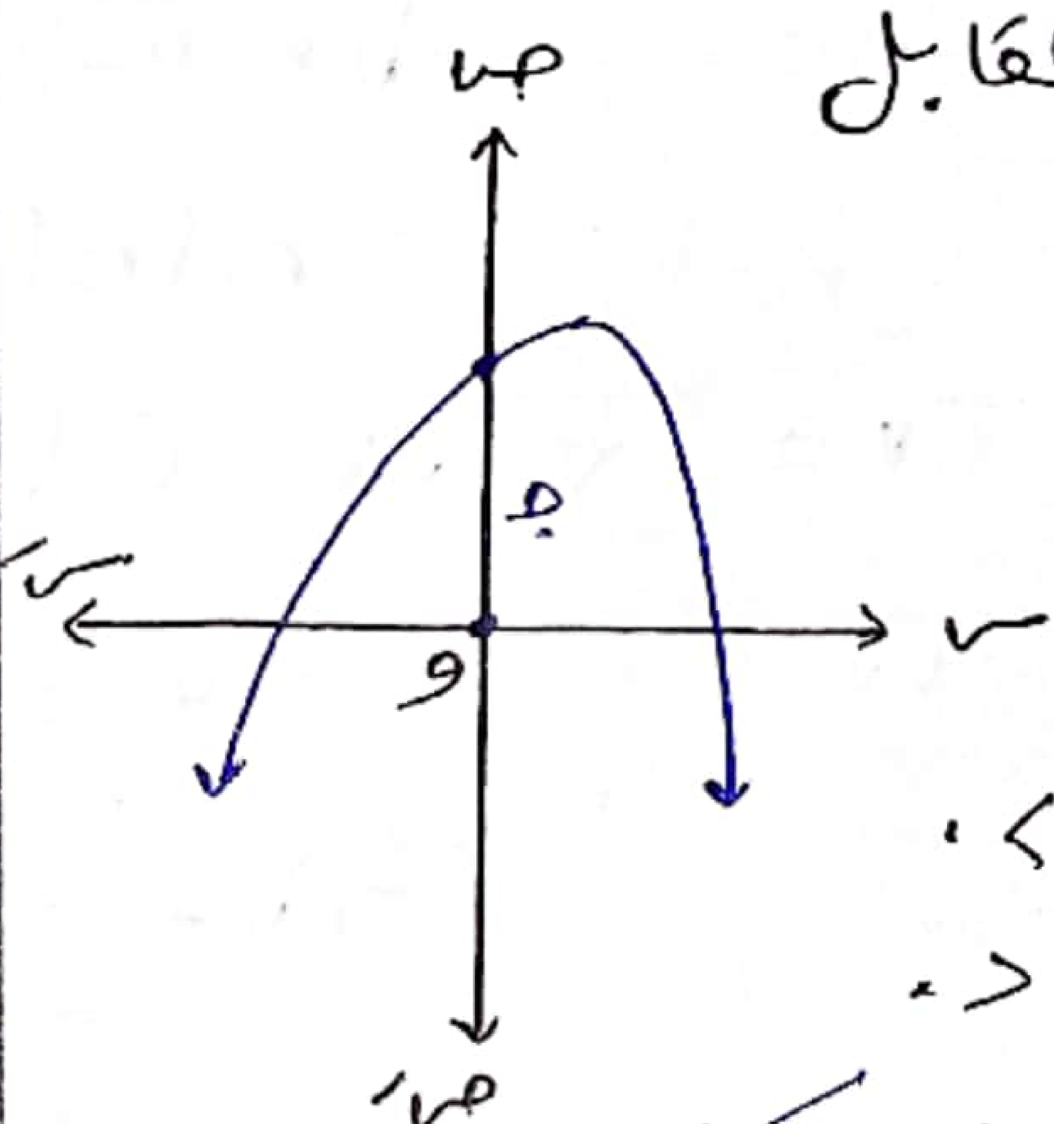
④ الشرط الذي يجعل المعادلة
أس² + ب س + جـ = ٠ تربيعية هو ...

أ > ٠   أ < ٠

أ ≠ ٠   ب ≠ ٠ $\boxed{أ \neq ٠}$

لأنه معامل س²

⑤ من الشكل المقابل
منحنى ص = أس² + ب س + جـ
أيهما صحيح



(أ) أ > ٠ ، جـ > ٠
(ب) أ > ٠ ، جـ < ٠
(ج) أ < ٠ ، جـ > ٠ ✓
(د) أ < ٠ ، جـ < ٠

المنحنى لأسفل أ < ٠
الجزء المقطوع من محور ص موجب جـ > ٠

⑥ إذا كان ل جذراً أحد جذري المعادلة
س² + ٣س − ٥ = ٠ فإن قيمة المقدار
ل² + ٣ل + ٤ = ...

[صفر ، ٢ ، ٩ ، ٥]

الحل
∵ ل يحقق المعادلة
∴ ل² + ٣ل − ٥ = ٠

المقدار المطلوب = ل² + ٣ل + ٤
= ل² + ٣ل − ٥ + ٥ + ٤
= صفر + ٩ = ٩

⑦ إذا كانت س = ٢ أحد جذري
المعادلة ك²س² − ك س = ٠ فإن
ك = ...

(أ) {٠ ، ١}   (ب) {٠}
(ج) {٦}   (د) {½}

الحل
س = ٢ تحقق   ٤ك² − ٢ك = ٠
٢ك² − ك = ٠   ك(٢ك − ١) = ٠

ك = ٠ مرفوض | ٢ك − ١ = ٠
| ٢ك = ١
| $\boxed{ك = \frac{١}{٢}}$

مجموع الأعداد الصحيحة (١ + ٢ + ٣ + ... + ن)
يعطى جـ = ن/٢ (١ + ن) فكم عدد صحيحاً بدءاً
من ١ يكون مجموعها = ٧٨
الحل

٧٨ = ن/٢ (ن + ١)   (×٢)
١٥٦ = ن(ن + ١) = ن² + ن
∴ ن² + ن − ١٥٦ = ٠
(ن + ١٣)(ن − ١٢) = ٠
ن = −١٣ مرفوض | $\boxed{ن = ١٢}$

الدرس الأول
مقدمة من الأعداد المركبة

نعلم أنه للمعادلة

$\text{س}^2 + 1 = 0$ ليس لها حل في ح

لذلك تم فرض عدد تخيلي ت

لحل المعادلة بحيث $\text{ت} = \sqrt{-1}$

$\boxed{\text{ت}^2 = -1}$ بحيث $\text{ت} \notin$ ح

ت عدد غير حقيقي

ويكون حل المعادلة $\text{س}^2 + 1 = 0$

$\text{س}^2 = -1$ $\quad$ $\text{س}^2 = \pm\sqrt{-1}$

$\therefore \text{س}^2 = \pm \text{ت}$

م.ح = {ت ، – ت}

ومن ذلك نجد أن

$\sqrt{-2} = \sqrt{-1 \times 2} = \sqrt{-1} \times \sqrt{2}$

$= \sqrt{2}\,\text{ت}$

$\sqrt{-4} = \sqrt{-1 \times 4} = \sqrt{-1} \times \sqrt{4}$

$= 2\text{ت}$

وللسهولة

$\boxed{\sqrt{-\text{أ}} = \sqrt{\text{أ}}\,\text{ت}}$

حل المعادلة $\text{س}^2 + 5 = 0$

الحل

$\text{س} = \pm\sqrt{-5} = \pm\sqrt{5}\,\text{ت}$

م.ح = {$\sqrt{5}$ ت ، $-\sqrt{5}$ ت}

ملاحظة هامة

$\sqrt{-\text{أ}} \times \sqrt{-\text{ب}} = -\sqrt{\text{أب}}$

أي أن

$\sqrt{-2} \times \sqrt{-3} = \sqrt{2}\,\text{ت} \times \sqrt{3}\,\text{ت}$

$= \sqrt{6}\,\text{ت}^2 = \sqrt{6} \times -1$

$= -\sqrt{6}$

قوى ت الصحيحة

$\text{ت} = \sqrt{-1}$

$\text{ت}^2 = -1$

$\text{ت}^3 = \text{ت}^2 \times \text{ت} = -\text{ت}$

$\text{ت}^4 = \text{ت}^2 \times \text{ت}^2 = 1$

وهكذا نجد أنه لإيجاد $\text{ت}^{\text{ن}}$ فإنه

إذا كان الأس يقبل القسمة على ٤ سواء موجب أو سالب يكون الناتج = ١

إذا كان الأس موجباً نطرح منه أول عدد تحته يقبل القسمة ÷ ٤

إذا كان الأس سالباً نضيف له أول عدد فوقه يقبل القسمة ÷ ٤

أوجد في أبسط صورة :-

$ت^{١٦} = ١$

$ت^{٨} = ١$

$ت^{٢٥} = ت^{٢٥-٢٤} = ت$

$ت^{٤٣} = ت^{٤٣-٤٠} = ت^{٣} = -ت$

$ت^{-٣٠} = ت^{-٣٠+٣٢} = ت^{٢} = -١$

$ت^{-١٠١} = ت^{-١٠١+١٠٤} = ت^{٣} = -ت$

$\frac{١}{ت^{١٥}} = ت^{-١٥} = ت^{-١٥+١٦} = ت$

$\sqrt{-١٨} \times \sqrt{-١٢} = -\sqrt{١٨ \times ١٢}$

$= -\sqrt{٢١٦} = -٦\sqrt{٦}$

$-٤ت \times -٦ت = ٢٤ ت^{٢}$

$= -٢٤$

نستنتج أن الأعداد

ت ، ٢ت ، -٥ت

$\frac{١}{٢}$ت

تسمى أعداد تخيلية $\notin ح$

بينما حاصل ت عدد حقيقي

العدد المركب

هو العدد الذي يمكن كتابته في الصورة

$أ + ب ت$ حيث أ ، ب $\in ح$

، $ت^{٢} = -١$ ويرمز له ع

$ع = \boxed{أ + ب ت}$

جزء حقيقي ، جزء تخيلي

أمثلة

$٢ + ٣ت$ ، $٥ت - ٤$ ، ....

لاحظ

$ع = ٣$ عدد حقيقي وهو أيضاً عدد مركب جزءه التخيلي = ٠

$ع = ٢ت$ عدد تخيلي وهو أيضاً عدد مركب جزءه الحقيقي = ٠

أي أن مجموعة الأعداد المركبة ك هي

$ك = \{ أ + ب ت : أ ، ب \in ح ، ت^{٢} = -١ \}$

أوجد في ك مجموعة حل المعادلات الآتية

(١) $س^{٢} - ٤ س + ٥ = ٠$

الحل

$أ = ١$ $ب = -٤$ $ح = ٥$

$$\text{س} = \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ - (٤ \times ١ \times ٥)}}{٢ \times ١}$$

$$\text{س} = \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ - ٢٠}}{٢} = \frac{٤ \pm \sqrt{-٤}}{٢}$$

$$\text{س} = \frac{٤ + ٢\text{ت}}{٢} = ٢ + \text{ت} \quad \Big| \quad \text{س} = \frac{٤ - ٢\text{ت}}{٢} = ٢ - \text{ت}$$

م.ح = { ٢ ± ت }

تساوي عددين مركبين

اذا كان

أ + ب ت = حـ + د ت

فإن $\boxed{\text{أ} = \text{حـ}}$ ، $\boxed{\text{ب} = \text{د}}$

الحقيقي = الحقيقي ، التخيلي = التخيلي

أمثلة ١:-

أوجد قيمتي س ، ص حيث

س + ت ص = ٣ + ٤ت

الحل

س = ٣ ، ص = ٤

(٢س − ٣) + (٣ص + ١) ت = ٧ + ١٠ت

الحل

٢س − ٣ = ٧ | ٣ص + ١ = ١٠

٢س = ١٠ | ٣ص = ٩

$\text{س} = \frac{١٠}{٢} = \boxed{٥}$ | $\text{ص} = \frac{٩}{٣} = \boxed{٣}$

العمليات على الأعداد المركبة

① الجمع والطرح

(٣ + ٢ت) + (٢ − ٥ت)

الحل

= ٥ − ٣ت

(١ − ٣ت) − (٥ − ت)

الحل

= ١ − ٣ت − ٥ + ت

= −٤ − ٢ت

② الضرب

(٢ + ٣ت)(٥ − ٤ت)

$= ١٠ - ٨\text{ت} + ١٥\text{ت} - ١٢\cancel{\text{ت}^{٢}}$

= ١٠ − ٨ت + ١٥ت + ١٢

= ٢٢ + ٧ت

فك القوس

$(٢ - ٥\text{ت})^{٢}$

$= ٤ - ٢٠\text{ت} + ٢٥\cancel{\text{ت}^{٢}}$

= −٢١ − ٢٠ت

ملاحظة

$(1 \pm ت)^{2ن} = (\pm 2ت)^{ن}$

$(1+ت)^{10}$

الحل

$= \left((1+ت)^2\right)^5 = (\cancel{1}+2ت+\cancel{(-1)})^5$

$= (2ت)^5 = 32ت^5 = 32ت^{5-4}$

$= 32ت$

$(1+ت)^{2020} = (2ت)^{1010}$

$= 2^{1010} \times ت^{1010}$

$= 2^{1010} \times ت^{1010-1008} = 2^{1010} \times ت^2$

$= -2^{1010}$

$(1+2\cancel{ت^2})(2+3ت^5+4ت^6)$

الحل

$= (1-2)(2+3ت^{5-4}+4ت^{6-4})$

$= -1 \times (2+3ت+4\cancel{ت^2})$

$= -1 \times (-2+3ت)$

$= \boxed{2-3ت}$

العددان المترافقان

$أ+ب ت$ ، $أ-ب ت$

يختلفان في اشارة الجزء التخيلي فقط

العدد	مرافقه
$2+3ت$	$2-3ت$
$5-ت$	$5+ت$
$ت+4$	$-ت+4$
$3ت$	$-3ت$

مجموعهما وحاصل ضربهما عدد حقيقي

أوجدنا ع

$(2+3ت)+(2-3ت) = 4$

$(2+3ت)(2-3ت)$

$= 4-3ت^2 = 4+3 = 7$

للاختصار

$(أ+ب ت)(أ-ب ت) = أ^2+ب^2$

③ القسمة

$\frac{3+4ت}{5-2ت}$ بالضرب في مرافق المقام بسطاً ومقاماً

$= \frac{3+4ت}{5-2ت} \times \frac{5+2ت}{5+2ت}$

$= \frac{15+6ت+20ت+8\cancel{ت^2}}{25+4}$

$\frac{٧ + ٢٦ت}{٢٩} = \frac{٧}{٢٩} + \frac{٢٦}{٢٩}ت$

اختر الإجابة الصحيحة

① مرافق العدد $(٣ت - ٤)$ هو

الإجابة $-٣ت - ٤$

تغيير الجزء التخيلي فقط

② المعكوس الجمعي للعدد $٤ - ٧ت$

هو $-٤ + ٧ت$

معكوس جمعي للعدد ع هو $-ع$

③ $١٢ + ٣أت = ٤ن - ٢٧ت$

فإن $أ + ن =$ ____

الحل

$٤ن = ١٢$ ، $ن = ٣$ | $-٢٧ = ٣أ$ ، $أ = \frac{-٢٧}{٣} = -٩$

$أ + ن = ٣ + (-٩) = -٦$

④ $(١ + ت^{٤})(١ - ت^{٧}) = س + ص ت$

فإن $س + ص =$ ----

الحل

$(١ + ١)(١ - ت^{٧-٤}) = س + ص ت$

$٢(١ - ت^{٣}) = س + ص ت$

$٢(١ + ت) = ٢ + ٢ت$

$س + ص = ٢ + ٢ = \boxed{٤}$

ل ، م جذرا المعادلة $س^{٢} + ١ = ٠$

فإن $ل^{٢٠١٨} + م^{٢٠١٨} =$ ---- -٢

الحل

جذرا المعادلة ت ، $-ت$

$٢٠١٨ - ٢٠١٦$

$ت^{٢٠١٨} + (-ت)^{٢٠١٨} = ٢(ت)^{٢٠١٨}$

$= ٢ت^{٢} = -٢$

$\left(\frac{١ - ت}{١ + ت}\right)^{١٠٠} = س + ت ص$ فإن

$(س ، ص) =$ ---- $(١ ، ٠)$

$\frac{(١ - ت)^{١٠٠}}{(١ + ت)^{١٠٠}} = \frac{(-٢ت)^{١٠٠}}{(٢ت)^{١٠٠}} = ١$

$س = ١$ ، $ص = ٠$

مرافق العدد $(٢ + ت)^{-١}$ هو ____

$= \frac{١}{٢ + ت} \times \frac{٢ - ت}{٢ - ت} = \frac{٢ - ت}{٤ + ١}$

$= \frac{٢}{٥} - \frac{١}{٥}ت$

مرافقه $= \frac{٢ + ت}{٥}$

اصغر قيمة موجبة ن تجعل المقدار

$\left(\frac{١ + ت}{١ - ت}\right)^{ن} = ١$ هو ٤

ت + ت^٢ + ت^٣ + ... + ت^١٠٠

= صفر

الحل

ت + (-١) + (-ت) + ١ + ...

يكرر المقدار ٢٥ مرة

= ٢٥ (~~ت~~ + ~~(-١)~~ + ~~(-ت)~~ + ~~١~~)

= ٢٥ × صفر = صفر

إذا كانت ت^م = ت^ن فأي مما يلي صحيح:

(١) م = ن ✗ (ليس بالضرورة)

(٢) (م + ن) عدد زوجي ✓

(٣) (ن - م) مضاعف للعدد ٤ ✓

الحل

(١) ، (٢) فقط

أي مما يأتي صحيح

٢ + ٣ت > ٣ + ٤ت

٣ - ٤ت < ٢ - ٣ت

١ + ت > -١ - ت

لا شيء مما سبق (✓)

لأنه لا يوجد ترتيب للأعداد المركبة في ك.

الدرس الثاني

تحديد نوع جذري المعادلة التربيعية

أ س^٢ + ب س + جـ = ٠

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{\boxed{ب^2 - 4 أ جـ}}}{2 أ}$$

المميز = $\boxed{ب^2 - 4 أ جـ}$

- موجب > ٠ : الجذران حقيقيان مختلفان
- صفر : الجذران حقيقيان متساويان
- سالب < ٠ : الجذران مركبان غير حقيقيان

حدد نوع جذري المعادلات الآتية

(١) س^٢ - ١١ س + ١٠ = ٠

الحل

المميز = ب^٢ - ٤ أ جـ

= ١٢١ - (٤ × ١ × ١٠)

= ٨١ > ٠

الجذران حقيقيان مختلفان

للتأكد (س - ١٠)(س - ١) = ٠

الجذران ١٠ ، ١

② س^2 − ١٠ س + ٢٥ = ٠

الحل

المميز = ب^2 − ٤ أ جـ

= ١٠٠ − (٤ × ١ × ٢٥)

= ١٠٠ − ١٠٠ = صفر

الجذران حقيقيان متساويان

للتأكد (س − ٥)(س − ٥) = ٠

الجذران متساويان

---

③ س^2 − ٢ س + ٥ = ٠

الحل

المميز = ب^2 − ٤ أ جـ

= ٤ − (٤ × ١ × ٥)

= ٤ − ٢٠ = −١٦ < ٠

الجذران مركبان غير حقيقيان

للتأكد

س = (+٢ ± √−١٦) / ٢ = (+٢ ± ٤ت) / ٢

الجذران ١ ± ٢ت

(س − ١١) − س(س − ٦) = ٠

الحل

س − ١١ − س^2 + ٦ س = ٠ ÷ (−١)

س^2 − ٧ س + ١١ = ٠

المميز = ٤٩ − ٤ × ١ × ١١ = ٤ > ٠

حقيقيان مختلفان

إذا كان جذري المعادلة الآتية حقيقيان متساويان أوجد قيمة ك في كل حالة:

① ١٨ س^2 − ك س + ٨ = ٠

الحل

∵ الجذران حقيقيان متساويان ∴ المميز:

ب^2 − ٤ أ جـ = ٠

ك^2 − (٤ × ١٨ × ٨) = ٠

ك^2 = ٥٧٦

ك = ± √٥٧٦ = ± ٢٤

س^2 + ٢(ك − ١) س + (٢ك + ١) = ٠

الحل

أ = ١ ب = ٢(ك − ١) جـ = ٢ك + ١

المميز = ب^2 − ٤ أ جـ

= ٤(ك − ١)^2 − (٤ × ١ × (٢ك + ١)) = ٠

= ٤ك^2 − ٨ك + ٤ − ٨ك − ٤ = ٠

٤ك^2 − ١٦ك = ٠ ÷ ٤

ك^2 − ٤ك = ٠

ك = ٠ ك = ٤

س^2 − ٢س + ١ = ٠

(س − ١)(س − ١) = ٠

الجذران ١ ، ١

س^2 + ٦س + ٩ = ٠

(س + ٣)(س + ٣) = ٠

الجذران −٣ ، −٣

أوجد قيمة ك التي تجعل جذري المعادلة

$س^2 + 4س + ك = 0$ حقيقيين مختلفين

الحل

الجذران حقيقيان مختلفان المميز > ٠

$ب^2 - 4 أ جـ > 0$

$16 - 4 \times 1 \times ك > 0$

$-4 ك > -16$

$ك < \frac{-16}{-4} \Leftarrow ك < 4$

$ك \in]-\infty ، 4[$

أوجد ك التي تجعل جذري المعادلة

$ك س^2 - 8 س + 16 = 0$

مركبان غير حقيقيان

الحل

المميز < ٠ ، $ب^2 - 4 أ جـ < 0$

$64 - (4 \times ك \times 16) < 0$

$-64 ك < -64$

$ك > \frac{-64}{-64}$ ، $ك > 1$

$ك \in]1 ، \infty[$

ملاحظة (١)

إذا كانت أ ، ب ، جـ أعداد نسبية للمعادلة $أ س^2 + ب س + جـ = 0$ وكان المميز مربعاً كاملاً فإن الجذرين يكونان أعداد نسبية

مثال

إذا كان ل ، م عددين نسبيين فأثبت أن جذري المعادلة

$ل س^2 + (ل - م) س - م = 0$

عددان نسبيان

الحل

ل ، ل - م ، - م $\in$ ن

المميز $= (ل - م)^2 - 4 ل \times -م$

$= ل^2 - 2 ل م + م^2 + 4 ل م$

$= ل^2 + 2 ل م + م^2$

$= (ل + م)^2$ مربع كامل

∴ الجذران أعداد نسبية

ملاحظة (٢)

إذا كان مميز المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية غير موجب فإن جذري المعادلة يكونان مركبان ومترافقان

أكمل ما يأتي

(1) جذرا المعادلة $س^2 - 2\sqrt{5}\, س + 1 = 0$ يكونان ------

المميز $= (-2\sqrt{5})^2 - (4 \times 1 \times 1)$

$= 20 - 4 = 16$ موجب مربع كامل

لكن $ب \notin ن$

∴ الجذرين حقيقيين وغير نسبيين

---

(2) $م س^2 + ن س + م = 0$ وكان $م \in ح^*$ ، $ب \in ح$ ، $م \in ح$

$(ن^2 - 4 م م)$ غير موجب فإن جذري المعادلة مركبين ومترافقين

---

(3) م ، ب ، جـ أعداداً صحيحة $م + ب + جـ = 0$ ، $م \neq جـ$ فإن جذري المعادلة

$(ن + جـ - م)\, س^2 + (جـ + م - ب)\, س + (م + ب - جـ) = 0$ يكونان ------

الحل

يمكن كتابة المعادلة

$-2م\, س^2 + (-2ن)\, س + (-2جـ) = 0$

$م س^2 + ن س + جـ = 0$

المميز $= ب^2 - 4 م جـ = (-م - جـ)^2 - 4 م جـ$

$= م^2 + 2 م جـ + جـ^2 - 4 م جـ = (م - جـ)^2$

∴ الجذران حقيقيان مختلفان نسبيان

---

(4) إذا كان للمعادلة $س^2 - 2\sqrt{2}\, س + م = 0$ جذران مركبان مترافقان فإن $م \in$ ------

الحل

الجذران مركبان مترافقان

∴ المميز < 0 ، المعاملات حقيقية

$ب^2 - 4م < 0$

$8 - 4م < 0 \Leftarrow -4م < -8$

$م > \frac{-8}{-4}$ $م > 2$

$م \in]2 ، \infty[$

إذا كان جذري المعادلة $4 س^2 - 2 س + م = 0$ ينتميان للفترة $]-1 ، 1[$ فإن ------

(1) $0 \leq م < 2$ (ب) $-6 < م \leq \frac{1}{8}$

(جـ) $-2 < م \leq \frac{1}{4}$ (د) $-6 < م < -2$

الحل

$\frac{2 + \sqrt{4 - 16م}}{2 \times 4} < 1$

$2 + \sqrt{4 - 16م} < 8 \Leftarrow \sqrt{4 - 16م} < 6$

$0 < 4 - 16م < 36$

$-4 < -16م < 32$

$\frac{-4}{16} < -م < \frac{32}{16} \Leftarrow -2 < م \leq \frac{1}{4}$

الدرس الثالث

العلاقة بين جذري المعادلة ومعاملات حدودها

أ س² + ب س + جـ = ٠

جذريها هما ل ، م

مجموع الجذرين = ل + م = $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$

حاصل ضربهما = ل م = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$

ل + م = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^2}$ ، ل م = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^2}$

ملاحظات هامة

① اذا كان أحد الجذرين معكوس جمعي للآخر $\boxed{\text{ب} = 0}$

② اذا كان أحد الجذرين معكوس ضربي للآخر $\boxed{\text{أ} = \text{جـ}}$

③ اذا كان مجموع الجذرين = حاصل ضربهما ⇐ $\boxed{\text{ب} = -\text{جـ}}$

المسائل

دون حل المعادلات أوجد مجموع وحاصل ضرب جذريها :

٤ س² + ٤ س − ٣٥ = ٠

الحل

ل + م = $\frac{-4}{4}$ = $\boxed{-1}$

ل م = $\frac{-35}{4}$

اختر الإجابة الصحيحة

① حاصل ضرب جذري المعادلة ٣ + ٢ س − $\frac{1}{4}$ س² = ٠ يساوي

[$\frac{-2}{3}$ ، ١٢ ، $\boxed{-12}$ ، $\frac{3}{4}$]

حاصل ضربهم = ٣ ÷ $\frac{-1}{4}$ = −١٢

---

② المعادلة ب س² + جـ س + أ = ٠ حاصل ضرب جذريها = ...

الحل

ل م = $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

---

③ اذا كان أحد جذري المعادلة أ س² − ٣ س + ٢ = ٠ معكوساً ضربياً للآخر فإن أ = ...

الحل

أ = جـ = ٢

إذا كان أحد جذري المعادلة الآتية

$س^{٢} - (ب - ٣) س + ٥ = ٠$

معكوساً جمعياً للآخر فإن ب = ...

[$\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، ٢ ، $\boxed{٣}$]

∵ معامل س = ٠ ⇐ ب − ٣ = ٠

ب = ٣

إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة

$(ك - ٢) س^{٢} - ٦ س + ١٢ = ٠$ هو ٣

فإن ك = ___

[٠ ، ٤ ، $\boxed{٦}$ ، ٣٨]

$\frac{جـ}{أ} = ٣ \Leftarrow \frac{١٢}{ك - ٢} = \frac{٣}{١}$

$ك - ٢ = \frac{١٢ \times ١}{٣} = ٤ \Leftarrow ك = ٦$

إذا كانت (١ + ت) أحد جذري

$س^{٢} - ٢ س + أ = ٠$ فإن أ = ...

حيث أ ∈ ح .

الحل

∵ المعاملات حقيقية وأحد الجذرين

مركب يكون الآخر مرافقه

∴ الجذر الآخر ١ − ت

حاصل ضربهم = (١ − ت)(١ + ت) = أ

$\Leftarrow أ = ١ + ١ = \boxed{٢}$

أوجد قيمتي أ ، ب إذا كان :-

(١) −٣ ، ٧ جذري المعادلة

$أ س^{٢} - ب س - ٢١ = ٠$

الحل

$(س + ٣)(س - ٧) = ٠$

$س^{٢} - ٤ س - ٢١ = ٠$

$أ س^{٢} - ب س - ٢١ = ٠$

∴ أ = ١ ب = ٤

---

(٢) $\sqrt{٣}$ ت ، $-\sqrt{٣}$ ت جذري المعادلة

$س^{٢} + أ س + ب = ٠$

الحل

مجموع الجذرين = صفر = −أ ⇐ أ = ٠

حاصل ضربهم = $-٣ ت^{٢}$ = ٣ = ب

$\boxed{أ = ٠}$ $\boxed{ب = ٣}$

ملاحظات

إذا كان أحد الجذرين ل فيكون الثاني

ضعف الآخر ٢ل

ثلاثة أمثال الآخر ٣ل

نصف الآخر $\frac{ل}{٢}$

معكوس جمعي للآخر −ل

معكوس ضربي للآخر $\frac{١}{ل}$

مربع الآخر $ل^{٢}$

أوجد الشرط اللازم لكي يكون أحد جذري المعادلة $أس^٢ + ب س + جـ = ٠$ ضعف الآخر.

الحل

الجذران ل ، ٢ل

مجموعهم $= ٣ل = \frac{-ب}{أ} \Leftarrow \boxed{ل = \frac{-ب}{٣أ}}$

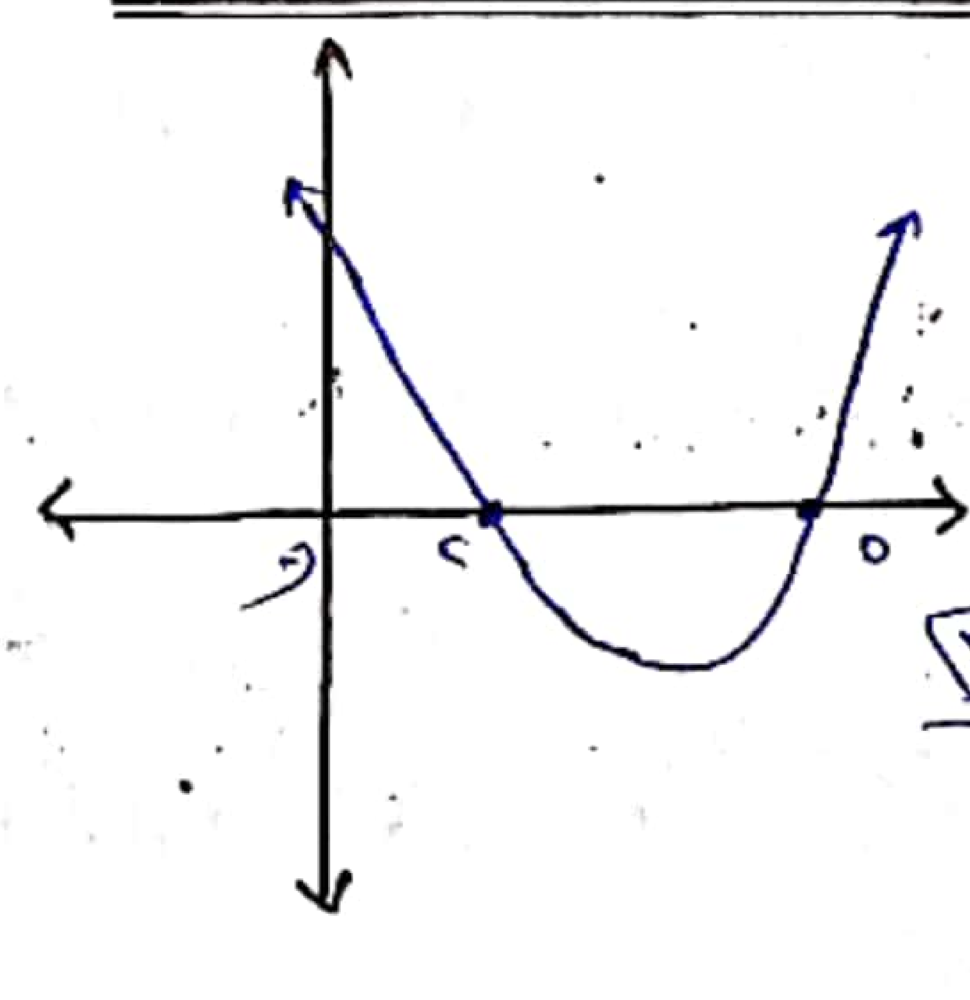
ضربهم $= ٢ل^٢ = \frac{جـ}{أ}$ بالتعويض عن ل

$٢\left(\frac{-ب}{٣أ}\right)^٢ = \frac{جـ}{أ}$

$\frac{٢ب^٢}{٩\cancel{أ^٢}} = \frac{جـ}{\cancel{أ}} \Leftarrow \frac{٢ب^٢}{٩أ} = \frac{جـ}{١}$

الشرط اللازم $\boxed{٢ب^٢ = ٩أ جـ}$

في الشكل المقابل منحنى د(س). $= أس^٢ + ب س + جـ$



أوجد $\frac{ب + جـ}{أ} = \boxed{٣}$

$= \frac{ب}{أ} + \frac{جـ}{أ}$

$=$ - مجموع الجذرين + حاصل ضربهم

$= -(٥ + ٢) + (٥ \times ٢)$

$= -٧ + ١٠ = \boxed{٣}$

الدرس الرابع

تكوين المعادلة التربيعية متى علم جذراها

إذا كان ل ، م جذري المعادلة

$أس^٢ + ب س + جـ = ٠$

بالقسمة ÷ أ $\neq ٠$ للطرفين

$س^٢ - \left(\frac{-ب}{أ}\right) س + \frac{جـ}{أ} = ٠$

$\boxed{س^٢ - (\text{مجموع الجذرين})\, س + (\text{حاصل ضربهم}) = ٠}$

كون المعادلة التربيعية التي جذراها

(١) $-٢ ، ٤$

الحل

مجموعهم $= ٤ - ٢ = \boxed{٢}$ ضربهم $= \boxed{-٨}$

$س^٢ - ٢س - ٨ = ٠$.

---

(٢) $٥\sqrt{٣} ، -٢\sqrt{٣}$

الحل

جمعهم $= ٣\sqrt{٣}$ ضربهم $= -١٠ \times ٣$
$= -٣٠$

المعادلة

$س^٢ - ٣\sqrt{٣}\, س - ٣٠ = ٠$

③ $٣ - ٢\sqrt{٢}$ ت ، $٣ + ٢\sqrt{٢}$ ت

الحل

مجـ = $\boxed{٦}$ حـ = ٩ + ٨ = $\boxed{١٧}$

المعادلة هي

س^{٢} - ٦ س + ١٧ = ٠

اختر الإجابة الصحيحة

① إذا كان ل ، ل^{٢} هما جذرا المعادلة

٢ س^{٢} + ب س + ٥٤ = ٠ فإن ب = ...

[$\boxed{-١٢}$ ، -٢٤ ، ٢٧ ، ٣٦]

الحل

حـ = ل^{٣} = $\frac{٥٤}{٢}$ = ٢٧

ل = ٣ ل^{٢} = ٩

مجـ = ٩ + ٣ = ١٢ ∴ ب = -١٢

---

② إذا كان م ، $\frac{٢}{م}$ هما جذرا المعادلة

م س^{٢} + ب س + ١٢ = ٠ فإن م = ...

[٣ ، ٥ ، $\boxed{٦}$ ، ٩]

الحل

حـ = م × $\frac{٢}{م}$ = ٢ = $\frac{١٢}{م}$

∴ م = $\frac{١٢}{٢}$ = $\boxed{٦}$

تكوين معادلة من معادلة أخرى معطاه

تذكر المتطابقات الآتية

① ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} - ٢ ل م

② ل^{٣} + م^{٣} = (ل + م) [(ل + م)^{٢} - ٣ ل م]

③ (ل - م)^{٢} = (ل + م)^{٢} - ٤ ل م

④ $\frac{ل}{م} + \frac{م}{ل} = \frac{(ل + م)^{٢} - ٢ ل م}{ل م}$

المسائل

إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة س^{٢} - ٥ س + ٣ = ٠ كون المعادلة التي جذراها

① ل - ٤ ، م - ٤

الحل

المعطاه ل ، م

ل + م = ٥ ل م = ٣

المطلوب (ل - ٤ ، م - ٤)

مجـ = ل - ٤ + م - ٤ = ل + م - ٨

= ٥ - ٨ = -٣

حـ = (ل - ٤)(م - ٤) = ل م - ٤ ل - ٤ م + ١٦

= ل م - ٤ (ل + م) + ١٦

= ٣ - ٤ × ٥ + ١٦ = -١

المعادلة هي

$س^{2} + ٣س - ١ = ٠$

---

(٢) $٢ل$ ، $٢م$

الحل

$جـ = ٢ل + ٢م = ٢(ل + م)$

$= ٢ \times ٥ = ١٠$

$ض = ٤ل م = ٤ \times ٣ = ١٢$

$س^{2} - ١٠س + ١٢ = ٠$

---

(٣) $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$

الحل

$جـ = \frac{١}{ل} + \frac{١}{م} = \frac{ل + م}{ل م}$

$= \frac{٥}{٣}$

$ض = \frac{١}{ل} \times \frac{١}{م} = \frac{١}{ل م} = \frac{١}{٣}$

$س^{2} - \frac{٥}{٣}س + \frac{١}{٣} = ٠$ (×٣)

$٣س^{2} - ٥س + ١ = ٠$

---

(٤) $ل^{2}$ ، $م^{2}$

الحل

$جـ = ل^{2} + م^{2} = (ل + م)^{2} - ٢ل م$

$= ٢٥ - ٢ \times ٣ = ١٩$

$ض = (ل م)^{2} = (٣)^{2} = ٩$

المعادلة $س^{2} - ١٩س + ٩ = ٠$

---

(٥) $\frac{ل}{م}$ ، $\frac{م}{ل}$

الحل

$جـ = \frac{ل}{م} + \frac{م}{ل} = \frac{(ل + م)^{2} - ٢ل م}{ل م}$

$= \frac{(٥)^{2} - ٢ \times ٣}{٣} = \boxed{\frac{١٩}{٣}}$

$ض = \frac{ل}{م} \times \frac{م}{ل} = \boxed{١}$

المعادلة

$س^{2} - \frac{١٩}{٣}س + ١ = ٠$ (×٣)

$٣س^{2} - ١٩س + ٣ = ٠$

---

(٦) $ل^{3}$ ، $م^{3}$

الحل

$جـ = ل^{3} + م^{3} = (ل + م)[(ل + م)^{2} - ٣ل م]$

$= ٥[٢٥ - ٣ \times ٢] = \boxed{٨٠}$

$ض = (ل م)^{3} = ٢٧$

المعادلة

$س^{2} - ٨٠س + ٢٧ = ٠$

---

(٧) $ل + م$ ، $ل م$

الحل

$جـ = (ل + م) + ل م = ٥ + ٣ = ٨$

$ض = (ل + م)(ل م) = ٥ \times ٣ = ١٥$

$س^{2} - ٨س + ١٥ = ٠$

(8) $3ل+2م$ ، $2ل+3م$

الحل

مجموعهم $= 3ل+2م + 2ل+3م$

$= 5ل+5م = 5(ل+م)$

$= 5\times5 = \boxed{25}$

ضربهم $= (3ل+2م)(2ل+3م)$

$= 6ل^2 + 9لم + 4لم + 6م^2$

$= 6(ل^2+م^2) + 13لم$

$= 6\times19 + 13\times3$

$= \boxed{153}$

$س^2 - 25س + 153 = 0$

قانون الفرق بين الجذرين

$$ل - م = \frac{\pm\sqrt{ب^2 - 4أجـ}}{أ}$$

مثال

اذا كان الفرق بين جذري المعادلة $س^2 + كس + 2ك = 0$ يساوي ضعف حاصل ضرب جذري المعادلة $س^2 + 3س + ك = 0$ فاوجد قيمة ك ؟

الحل

الفرق بين جذري المعادلة الأولى

$$= \frac{\pm\sqrt{ك^2 - 8ك}}{1}$$

حاصل ضرب جذري المعادلة الثانية

$= ك$

الفرق = ضعف حاصل الضرب الثانية

$\pm\sqrt{ك^2 - 8ك} = 2ك$ بتربيع الطرفين

$ك^2 - 8ك = 4ك^2$

$3ك^2 + 8ك = 0$

$ك(3ك + 8) = 0$

$\boxed{ك = 0}$ أو $\boxed{ك = \frac{-8}{3}}$

اذا كان ل+1 ، م+1 جذرا المعادلة $س^2 + 5س + 3 = 0$. كون المعادلة التي جذراها ل ، م .

الحل

المعطاه

$(ل+1+م+1) = -5$

$ل+م+2 = -5$ $\quad ل+م = \boxed{-7}$

$(ل+1)(م+1) = 3$

$لم + (ل+م) + 1 = 3$

$لم - 7 + 1 = 3$ $\quad لم = \boxed{9}$

$\therefore س^2 + 7س + 9 = 0$

اختر الاجابه الصحيحه :-

① اذا كان $\text{م}^2+3\text{م}+1=0$ ،
$\text{ب}^2+3\text{ب}+1=0$ حيث م ، ب عددان حقيقيان مختلفان فإن $\frac{\text{م}}{\text{ب}}+\frac{\text{ب}}{\text{م}}=.....$

الحل

م ، ب هما جذرا المعادله $\text{س}^2+3\text{س}+1=0$

$\text{م}+\text{ب}=-3$ ، $\text{م}\,\text{ب}=1$

المقدار $\frac{\text{م}}{\text{ب}}+\frac{\text{ب}}{\text{م}}=\frac{\text{م}^2+\text{ب}^2}{\text{م}\,\text{ب}}$

$=\frac{(\text{م}+\text{ب})^2-2\text{م}\,\text{ب}}{\text{م}\,\text{ب}}=\frac{9-2}{1}=\boxed{7}$

اذا كان جذرا المعادله التربيعيه $\text{س}^2+\text{ب}\,\text{س}+\text{جـ}=0$ عدديه فرديين متتاليين فإن $\text{ب}^2-4\text{جـ}=.....$

الحل

الجذران فرديان متتاليان ∴ $\text{ل}-\text{م}=2$

∴ $\text{ل}-\text{م}=\frac{\pm\sqrt{\text{ب}^2-4\text{م}\,\text{جـ}}}{\text{م}}$

$2=\frac{\pm\sqrt{\text{ب}^2-4\text{جـ}}}{1}$

بتربيع الطرفين

$\text{ب}^2-4\text{جـ}=\boxed{4}$

الدرس الخامس

إشارة الداله

بحث إشارة الداله ص = د(س)
هي قيم س التي تجعل د(س)

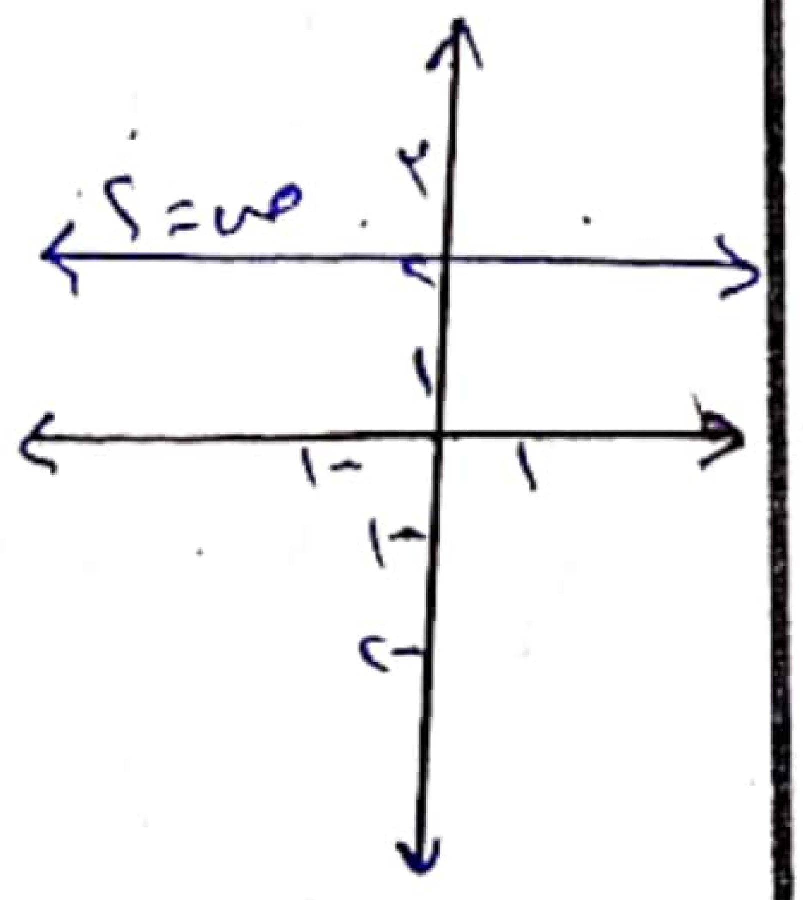
- موجبه : د(س) > ٠
- صفر : د(س) = ٠
- سالبه : د(س) < ٠

أولاً : الداله الثابتة :-

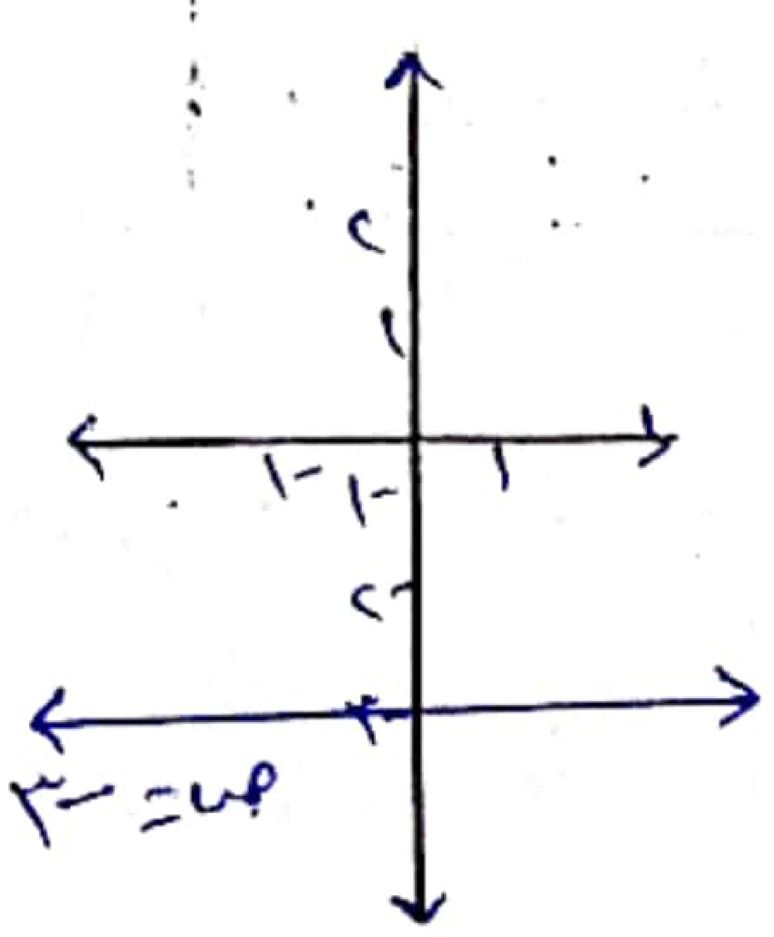
د(س) = جـ حيث جـ ∈ ح

إشارتها نفس إشارة جـ لجميع قيم س ∈ ح

د(س) = ٢
موجبه لجميع قيم س ∈ ح



د(س) = -٣
سالبه لجميع قيم س ∈ ح



لاحظ بحث الإشارة بيانيا

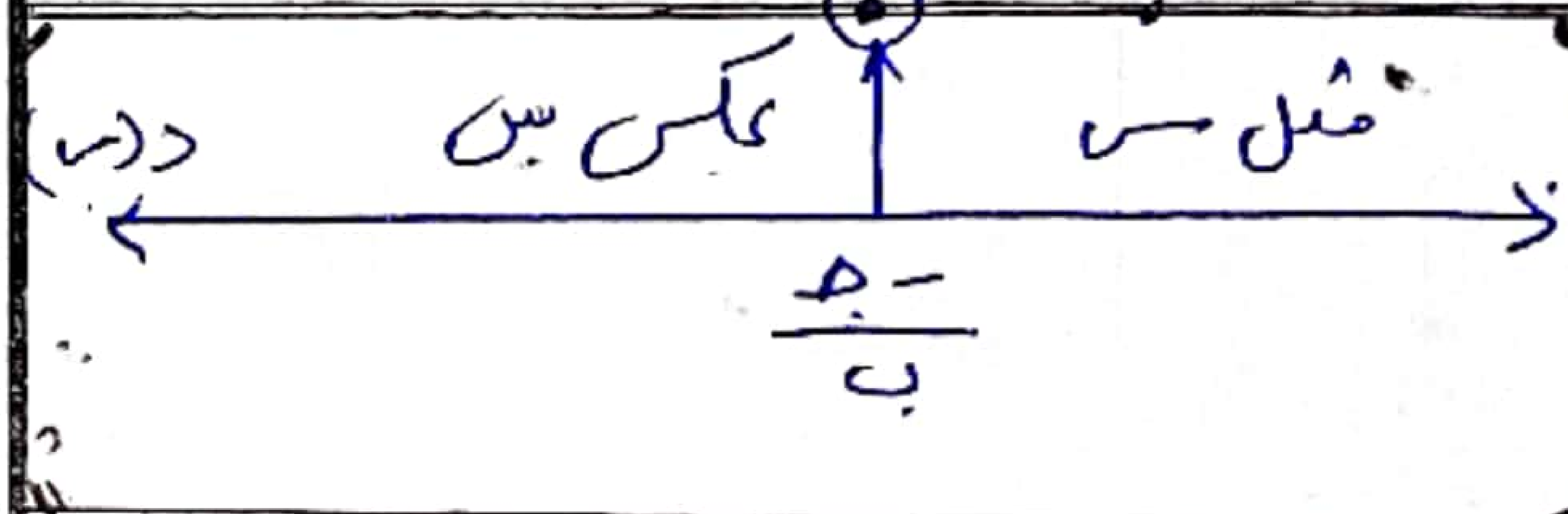
المنحنى أعلى محور السينات موجب
" أسفل محور السينات سالب

ثانياً: الدالة الخطية

د(س) = ب س + جـ

لبحث الإشارة نضع د(س) = ٠

س = $\frac{-جـ}{ب}$ ونلاحظ



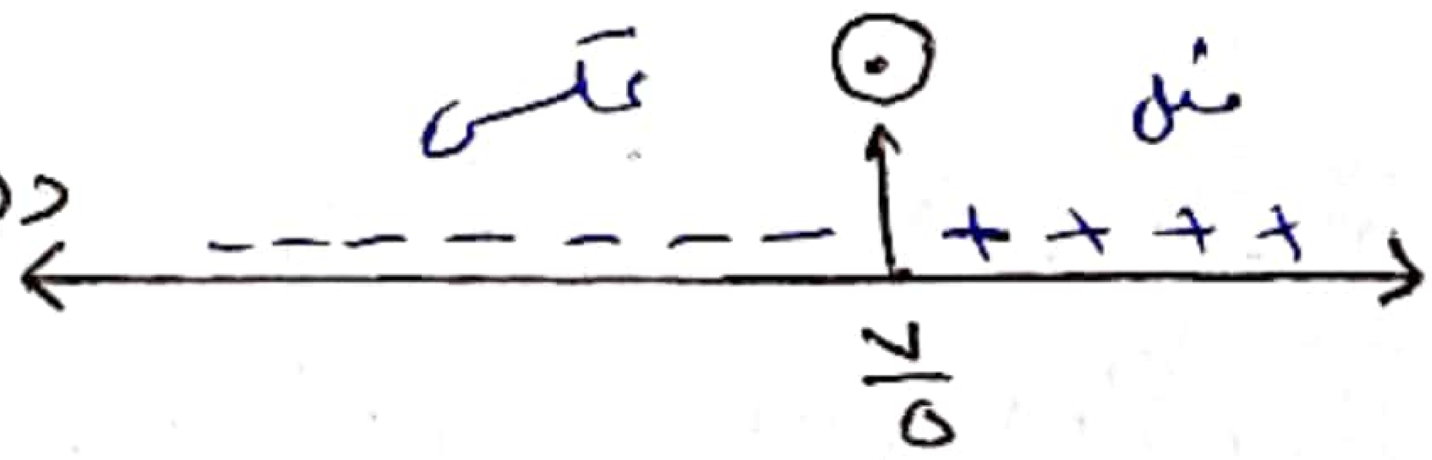
ابحث إشارة الدوال الآتية

(١) د(س) = ٥س - ٧

الحل

٥س - ٧ = ٠   س = $\frac{٧}{٥}$

نستخدم خط الأعداد



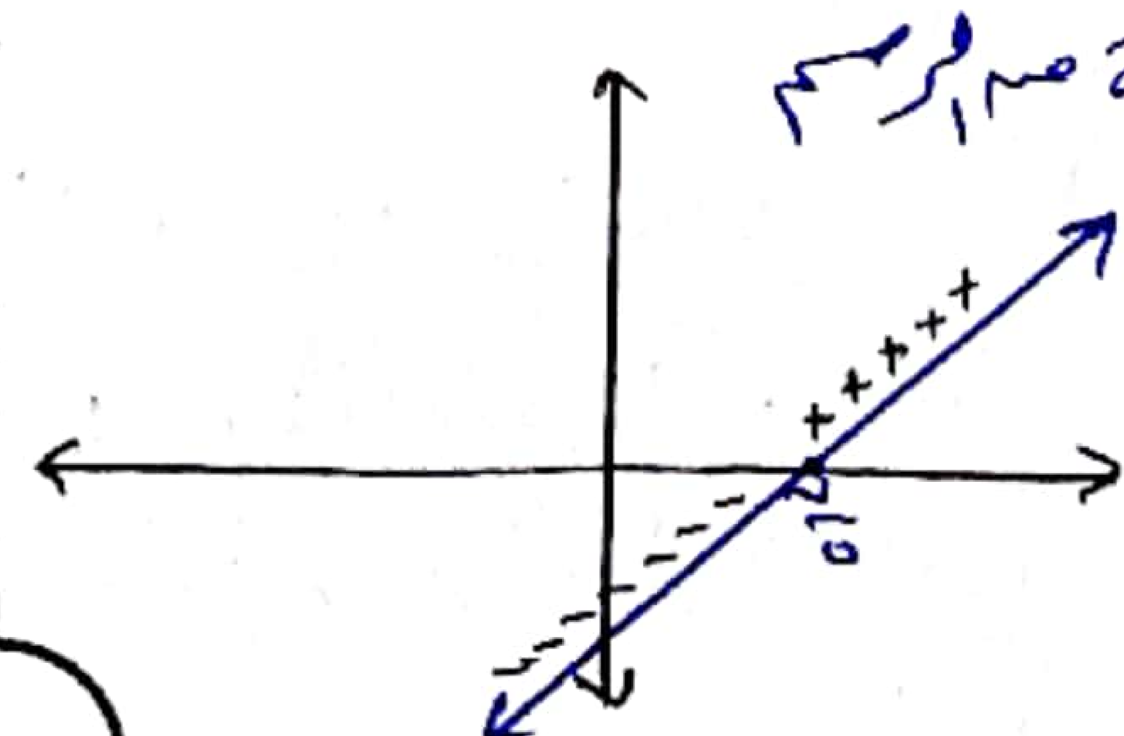
د(س) > ٠ عند س > $\frac{٧}{٥}$

أي في الفترة]$\frac{٧}{٥}$ ، ∞[

د(س) < ٠ عند س < $\frac{٧}{٥}$ في]-∞، $\frac{٧}{٥}$[

د(س) = ٠ عند س = $\frac{٧}{٥}$

لاحظ الإشارة من الرسم



اختر الإجابة الصحيحة

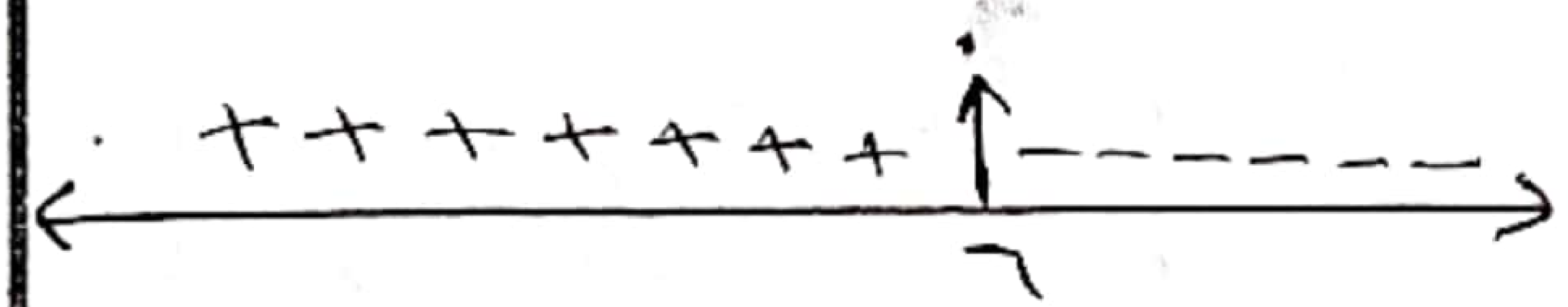
(١) د(س) = -٤ تكون سالبة في .... ح

الحل ح =]-∞، ∞[

(٢) د(س) = ٦ - س موجبة في ....

الحل

٦ - س = ٠   س = ٦



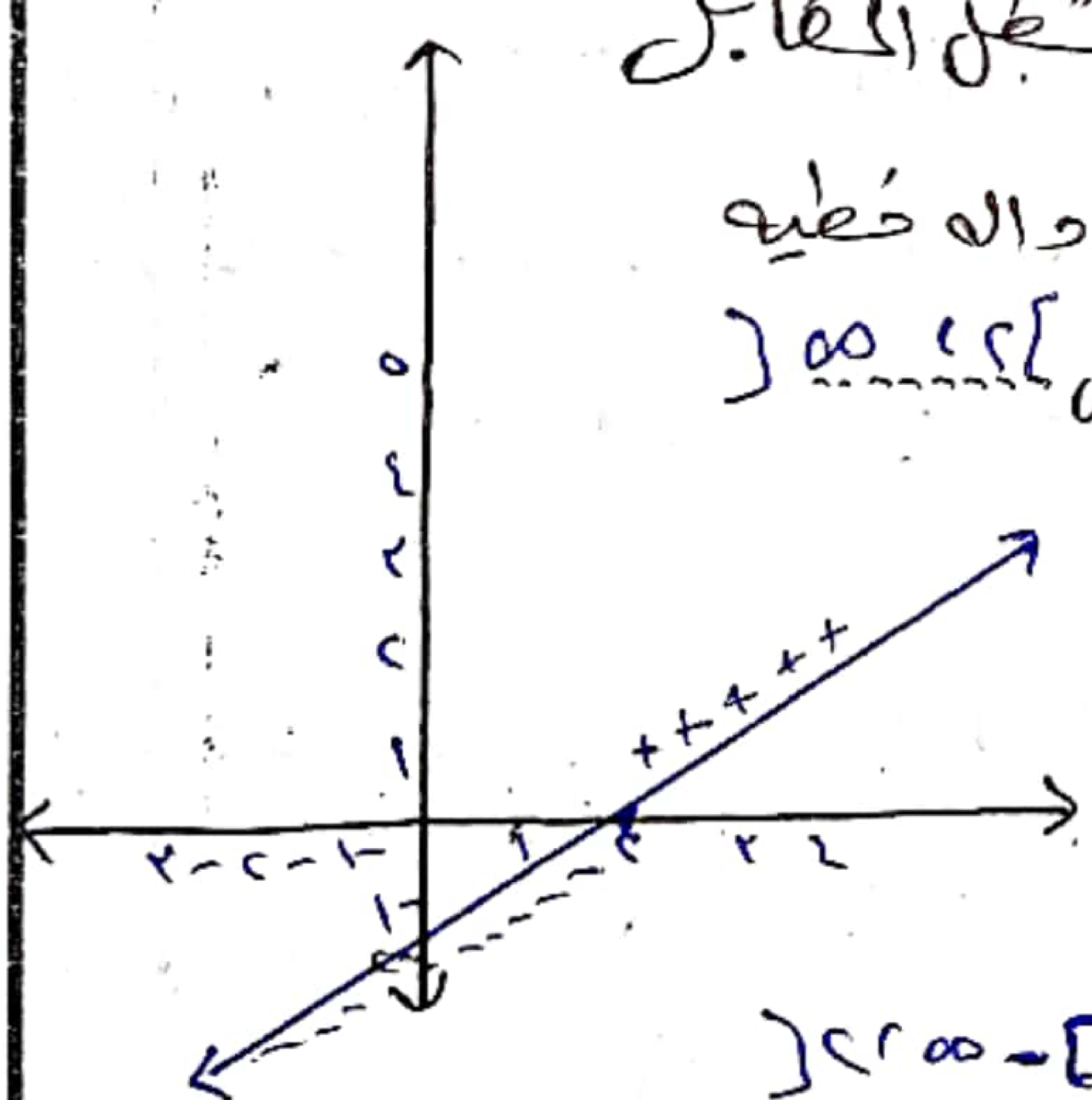
د(س) > ٠ في س < ٦

]-∞، ٦[

(٣) من الشكل المقابل

د(س) دالة خطية

موجبة في]٢ ، ∞[



سالبة في]-∞، ٢[

د(س) = ٠ عندما س = ٢

ثالثاً: الدالة التربيعية

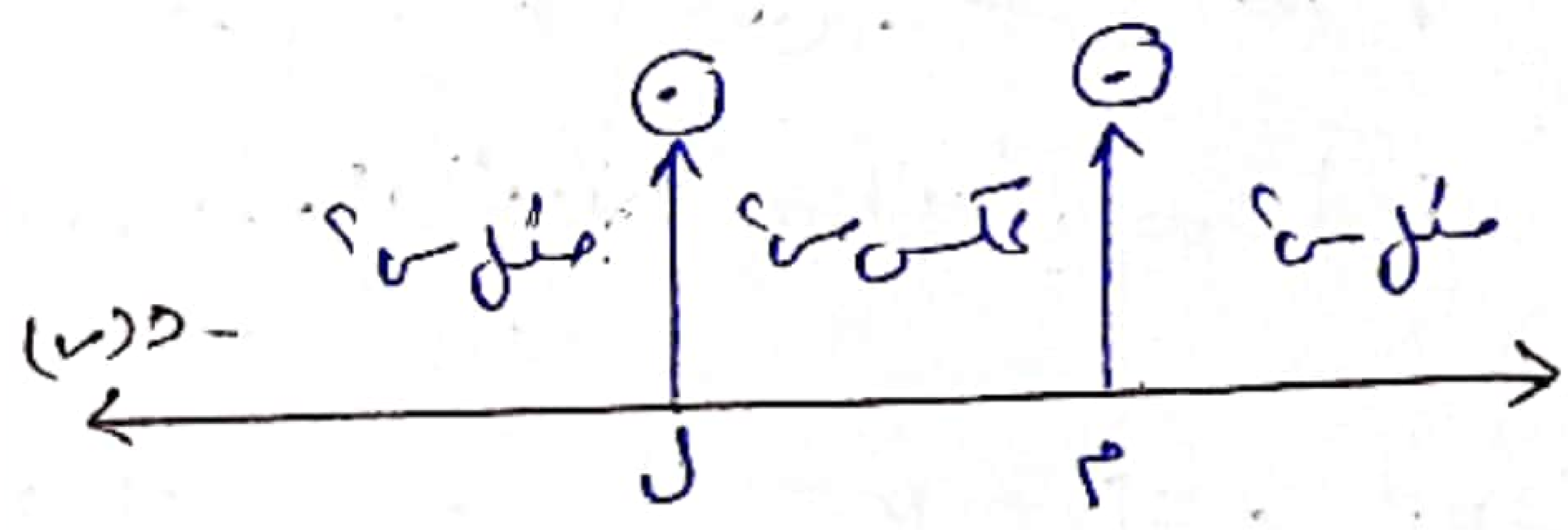
د(س) = أس² + ب س + جـ

بوضع د(س) = ٠

أس² + ب س + جـ = ٠

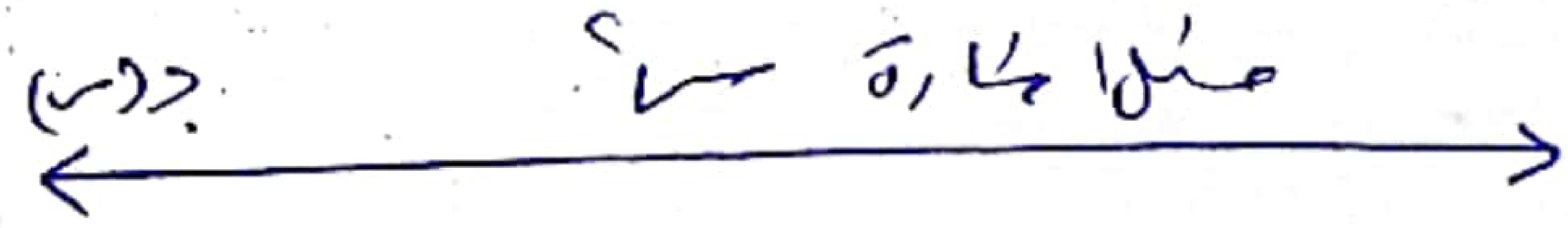
يوجد ثلاث حالات كما درسنا

① صفيران مختلفان ل ، م



② صفيران متساويان ل ، ل

③ مركبان غير حقيقيان ∉ ح



تذكر

بحث الإشارة بيانياً

موجب: أعلى محور السينات

= ٠: محور السينات تقاطع

سالب: أسفل محور السينات

ابحث إشارة كل من الدوال الآتية

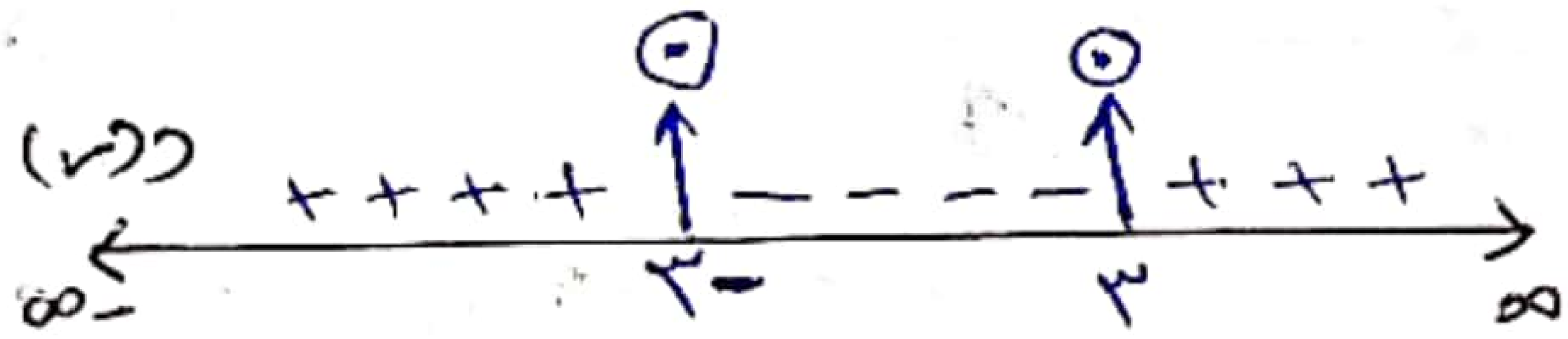
(١) د(س) = س² − ٩

الحل

د(س) = ٠ ، س² − ٩ = ٠

(س − ٣)(س + ٣) = ٠

س = ٣ أ، س = −٣



د(س) > ٠ في ح − [−٣ ، ٣]

د(س) < ٠ في]−٣ ، ٣[

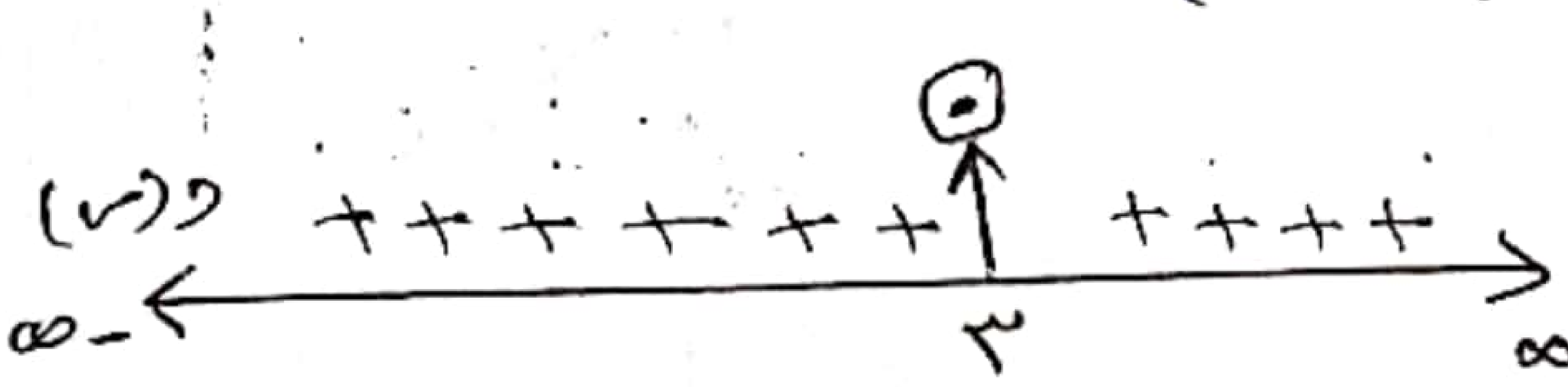
د(س) = ٠ في {−٣ ، ٣}

(٢) د(س) = س² − ٦س + ٩

الحل

د(س) = ٠ ، س² − ٦س + ٩ = ٠

(س − ٣)² = ٠ حل وحيد



د(س) > ٠ في ح − {٣}

د(س) < ٠ في ∅

د(س) = ٠ في {٣}

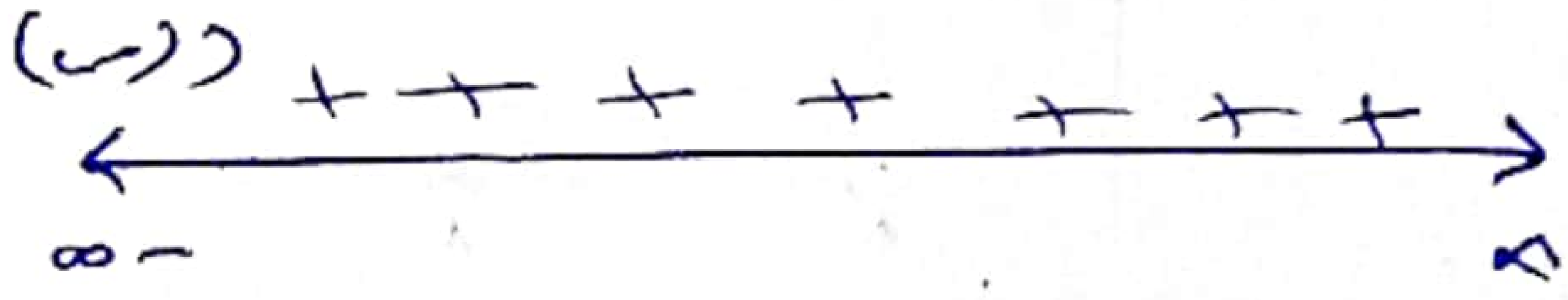
③ $د(س) = ٢س^2 - ٣س + ٥$

الحل

$د(س) = ٠$ ، $٢س^2 - ٣س + ٥ = ٠$

المميز $= ٩ - (٤ \times ٢ \times ٥) = -٣١ < ٠$

لا توجد جذور حقيقية

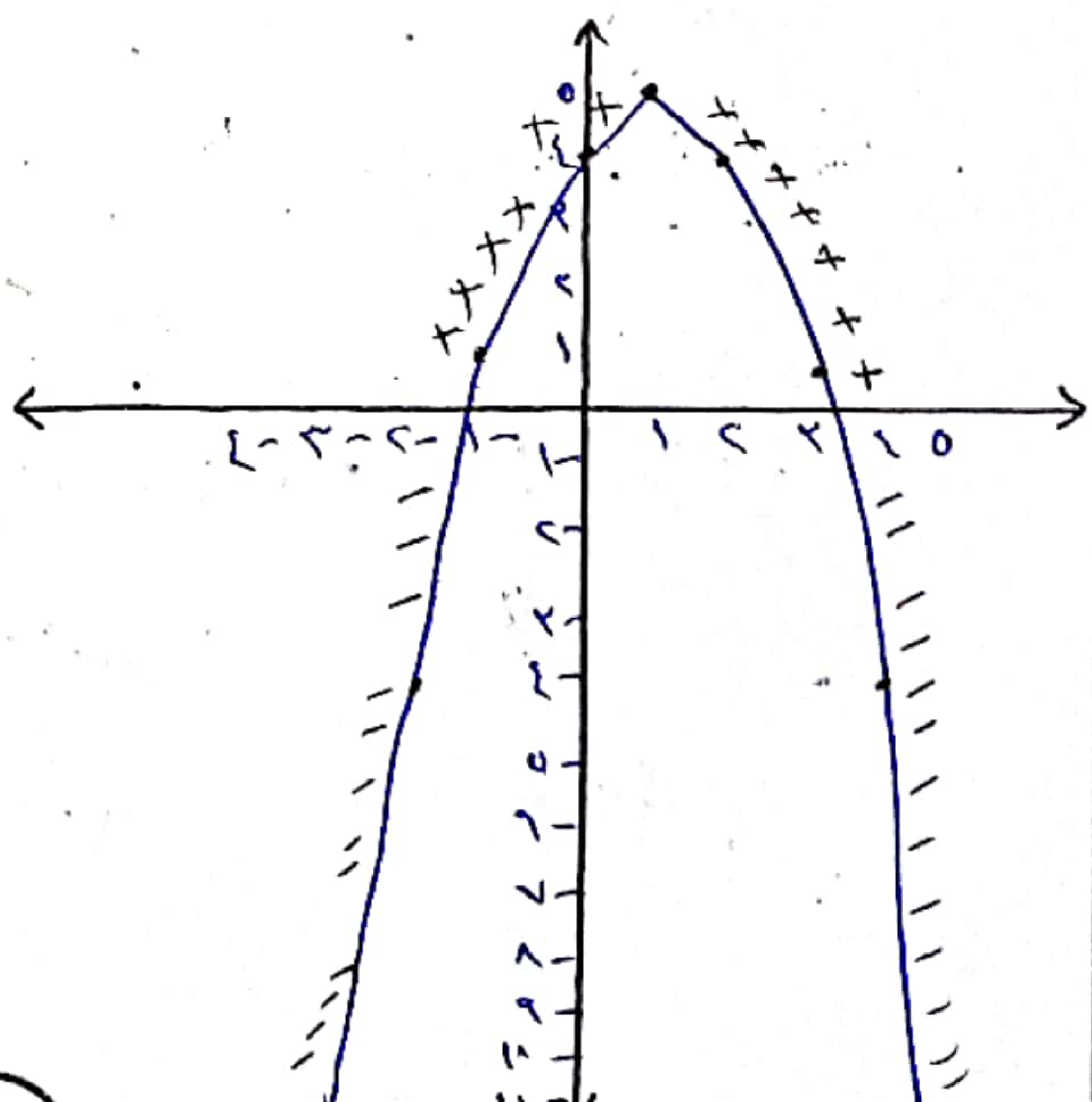


موجب لجميع قيم $س \in ح$

ارسم منحنى الدالة $د(س) = -س^2 + ٢س + ٤$ من $[-٣ ، ٥]$ ومن الرسم عين إشارة الدالة في هذه الفترة

الحل

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤	٥
د(س)	-١١	-٤	١	٤	٥	٤	١	-٤	-١١



$د(س) > ٠$ $]-١,٢ ، ٣,٢[$

$د(س) < ٠$ $[-٣ ، -١,٢[\cup]٣,٢ ، ٥]$

$د(س) = ٠$ $\{-١,٢ ، ٣,٢\}$

حيث $-١,٢$ ، $٣,٢$ قيم تقريبية للجذور

اذا كانت $د_1(س) = س - ٣$ ، $د_2(س) = ٥ + ٤س - س^2$ بين متى تكون الدالتين سالبتين معاً.

الحل

$د_1(س) = ٠$ ، $س - ٣ = ٠$ ، $س = ٣$

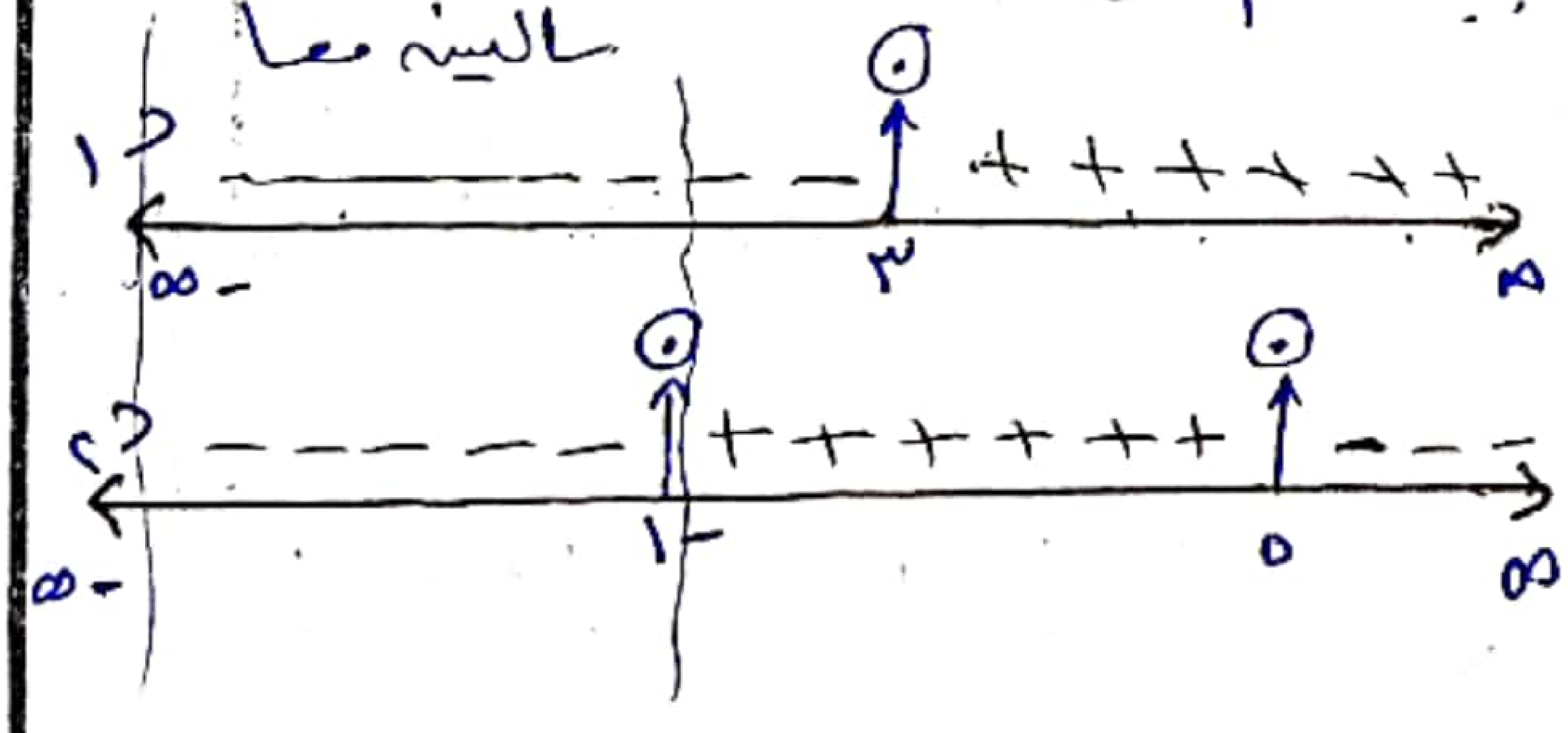
$د_2(س) = ٠$ ، $٥ + ٤س - س^2 = ٠$

$س^2 - ٤س - ٥ = ٠$

$(س - ٥)(س + ١) = ٠$

$س = ٥$ ، $س = -١$

نبحث الإشارتين معاً



من رسم الدالتين سالبتين معاً في $]-\infty ، -١[$

الدرس السادس

متباينة الدرجة الثانية في مجهول واحد

خطوات الحل

① نكتب الدالة التربيعية المرتبطة

② ندرس إشارة الدالة التربيعية

③ نحدد الفترات التي تحقق المتباينة

المسائل

أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية

① $س^{٢} + ٢س - ٨ > ٠$

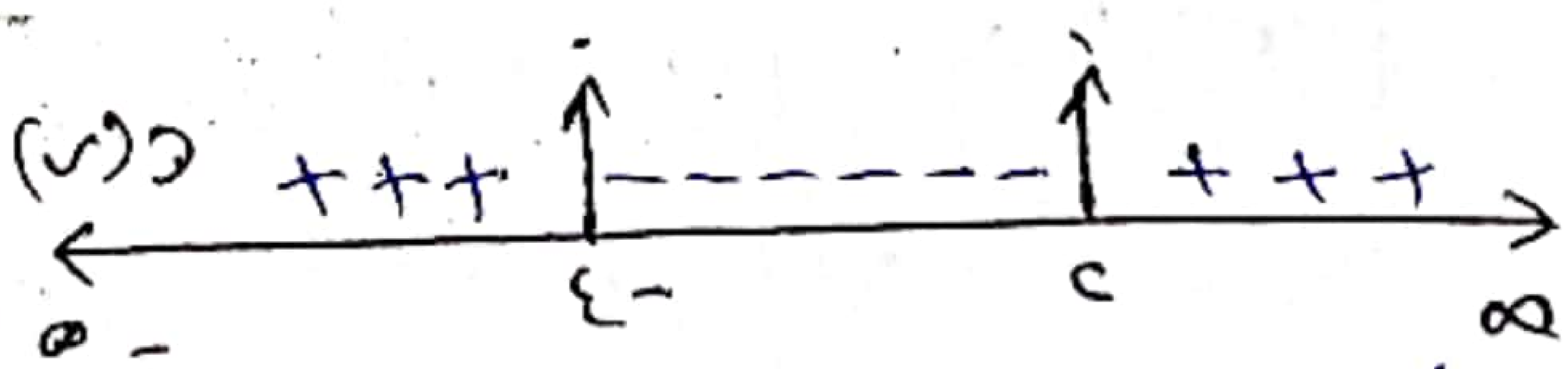
الحل

$د(س) = س^{٢} + ٢س - ٨$

$د(س) = ٠$ $س^{٢} + ٢س - ٨ = ٠$

$(س - ٢)(س + ٤) = ٠$

$س = ٢$ أو $س = -٤$



المتباينة

$د(س) > ٠$ س ∈]−٤ ، ٢[

---

② $س^{٢} \leq ٩$

الحل

$س^{٢} - ٩ \leq ٠$

$د(س) = س^{٢} - ٩$

$د(س) = ٠$ $س^{٢} - ٩ = ٠$

$(س - ٣)(س + ٣) = ٠$

$س = ٣$ $س = -٣$

$د(س) > ٠$ ح − [−٣ ، ٣]

$د(س) < ٠$]−٣ ، ٣[✓

$د(س) = ٠$ {−٣ ، ٣} ✓

مجموعة حل المتباينة $د(س) \leq ٠$

]−٣ ، ٣[∪ {−٣ ، ٣} = [−٣ ، ٣]

---

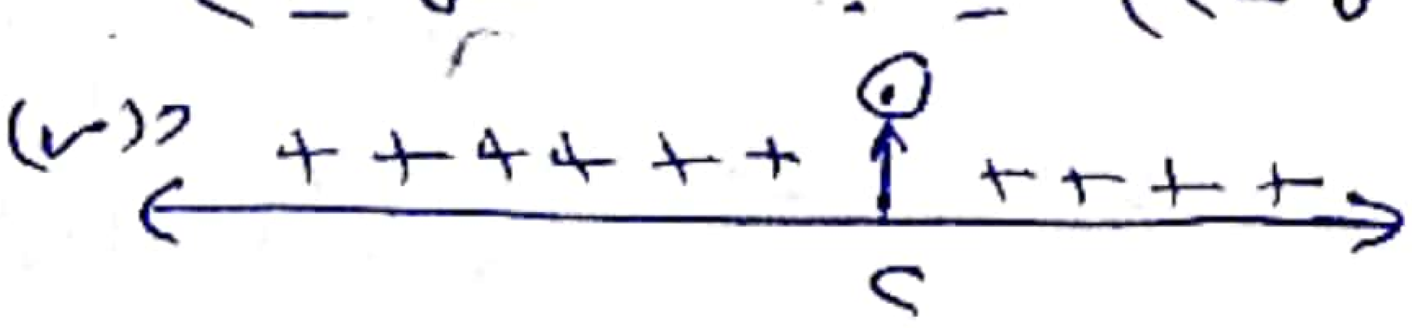
③ $س^{٢} - ٤س + ٤ \geq ٠$

الحل

$د(س) = س^{٢} - ٤س + ٤$

$د(س) = ٠$ $س^{٢} - ٤س + ٤ = ٠$

$(س - ٢)^{٢} = ٠$ $س = ٢$



مجموعة حل المتباينة ح − {٢} ∪ {٢}

= ح

④ ٢س − س² < ٠

الحل

د(س) = ٢س − س²

د(س) = ٠ ⟸ ٢س − س² = ٠ (×−١)

س² − ٢س = ٠ ، س(س − ٢) = ٠

س = ٠ أو س = ٢

مجموعة حل المتباينة د(س) < ٠

هي ح − [٠ ، ٢]

---

⑤ ٥ − ٢س ≥ س²

الحل

٥ − ٢س − س² ≥ ٠

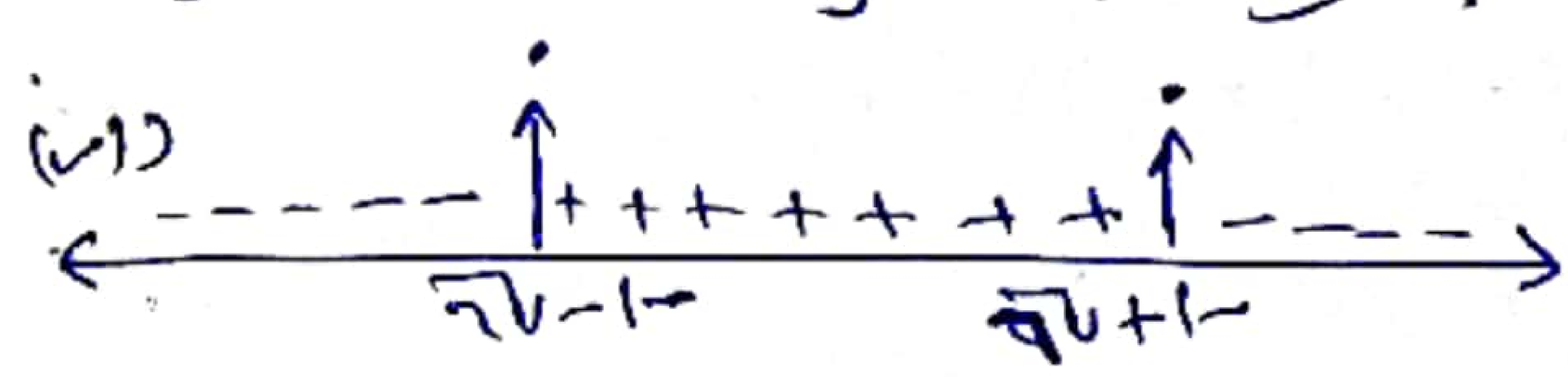
د(س) = ٥ − ٢س − س²

د(س) = ٠ ⟸ ٥ − ٢س − س² = ٠ (×−١)

س² + ٢س − ٥ = ٠

المميز = ٤ − ٤ × ١ × −٥ = ٢٤ > ٠

الجذران هما {−١ + √٦ ، −١ − √٦}

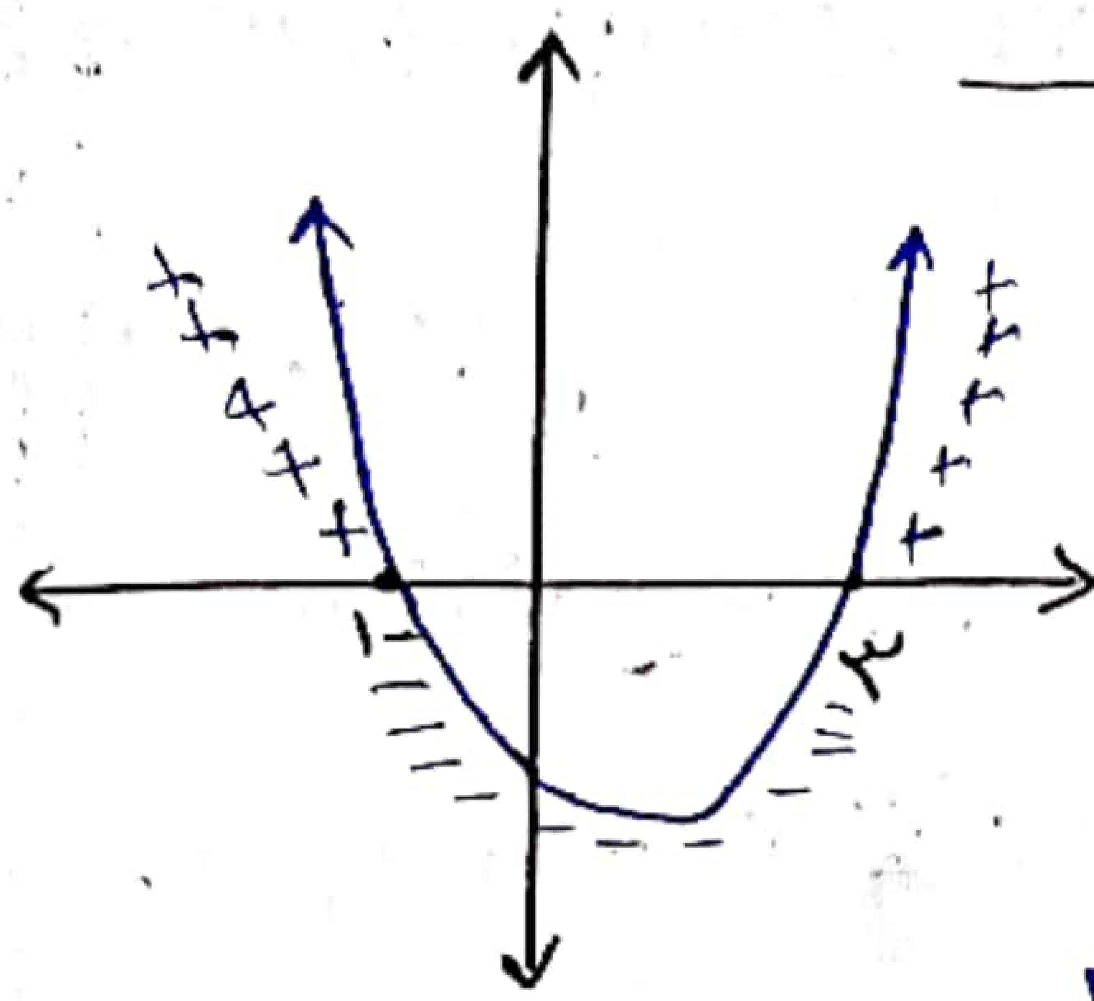


مجموعة حل المتباينة د(س) ≥ ٠

= ح − [−١ − √٦ ، −١ + √٦]

---

⑥ من الشكل المقابل د(س) منحنى دالة تربيعية فإن مجموعة حل المتباينة د(س) ≥ ٠ هي ______



ص١ = −١ ، ص٢ = ٣

د(س) > ٠ في ح − [−١ ، ٣]

د(س) = ٠ في {−١ ، ٣}

م.ح المتباينة ح −]−١ ، ٣[

أو]−∞ ، −١] ∪ [٣ ، ∞[

---

⑦ إذا كان مجموعة حل المتباينة التالية

س² − ٤ ≥ س + ل هي [−٢ ، ٣]

فإن ل = ----

الحل

المتباينة س² − س − ٤ − ل ≥ ٠

∵ مجموعة الحل [−٢ ، ٣] ∴ {−٢ ، ٣}

هما جذرا المعادلة المرتبطة

حاصل ضربهما = −٢ × ٣ = −٦ = $\frac{-٤-ل}{١}$

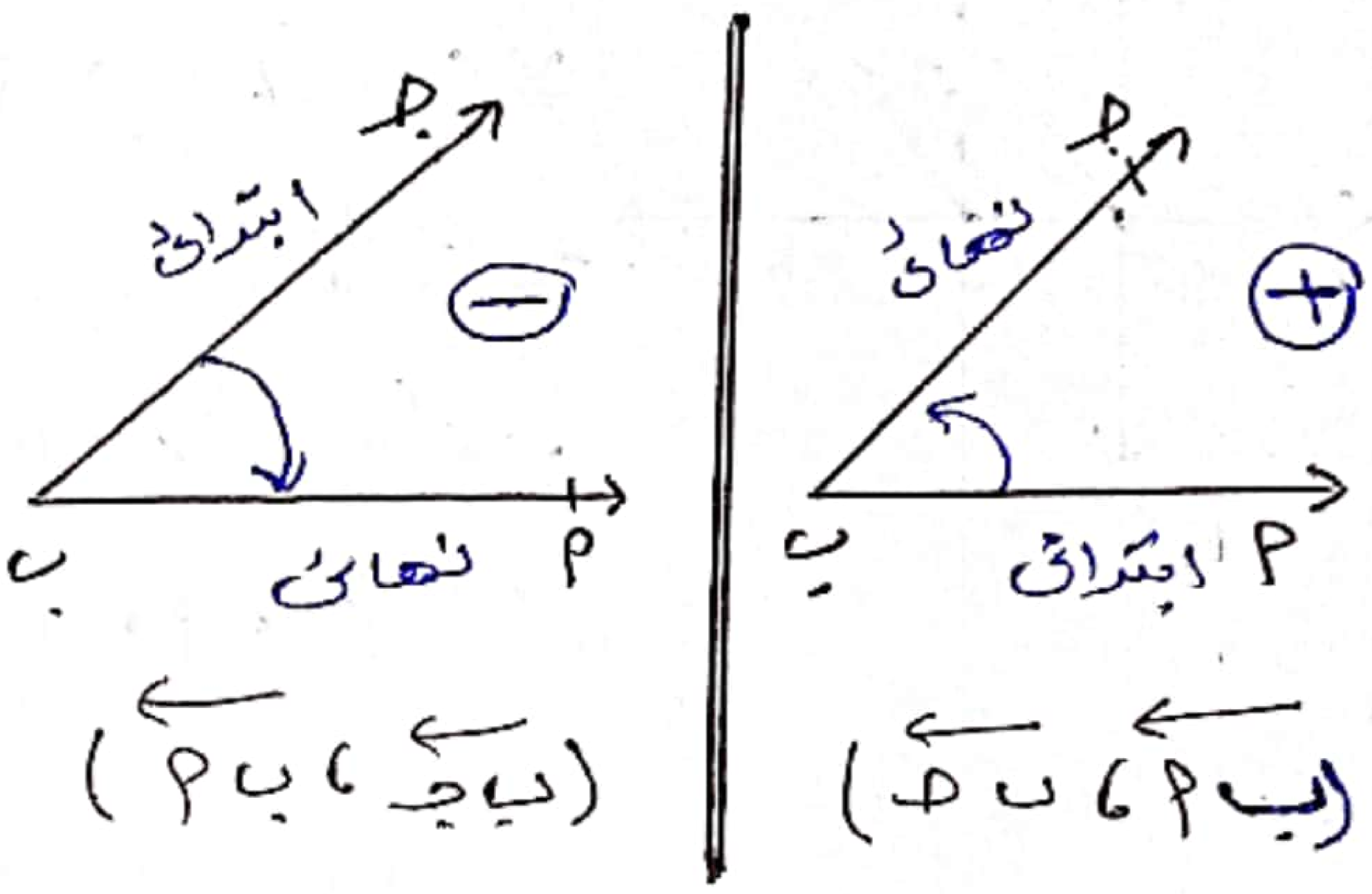
∴ −٤ − ل = −٦ ⟸ ل = −٤ + ٦

ل = $\boxed{2}$

المادة: حساب مثلثات .... الدرس: .... الزاوية الموجهة

الدرس الأول
الزاوية الموجهة

زوج مرتب من شعاعين هما ضلعا الزاوية ولها نقطة بداية واحدة هي رأس الزاوية.



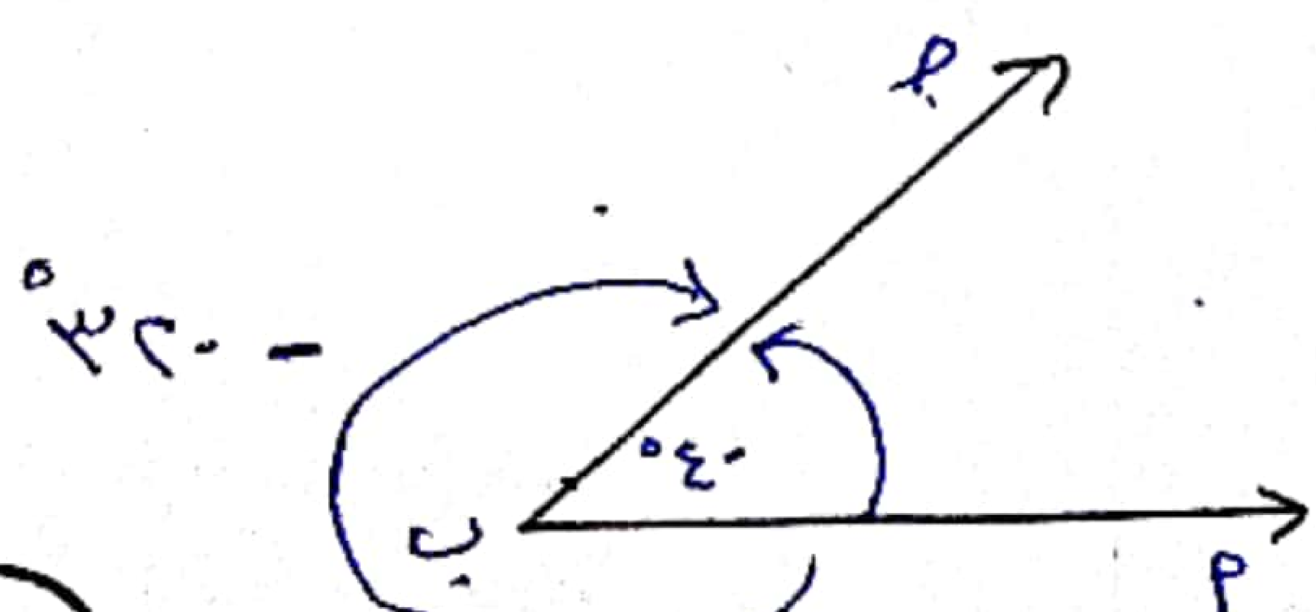
القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة

⊕ عكس عقارب الساعة

⊖ مع عقارب الساعة

لاحظ أن

لكل زاوية موجهة قياسان أحدهما موجب والآخر سالب



أي أن

القياس الموجب لزاوية موجهة سالبة = الزاوية + ٣٦٠°

القياس السالب لزاوية موجهة موجبة = الزاوية − ٣٦٠°

اكمل

① القياس السالب لزاوية موجهة قياسها ٥٠°

= ٥٠° − ٣٦٠° = −٣١٠°

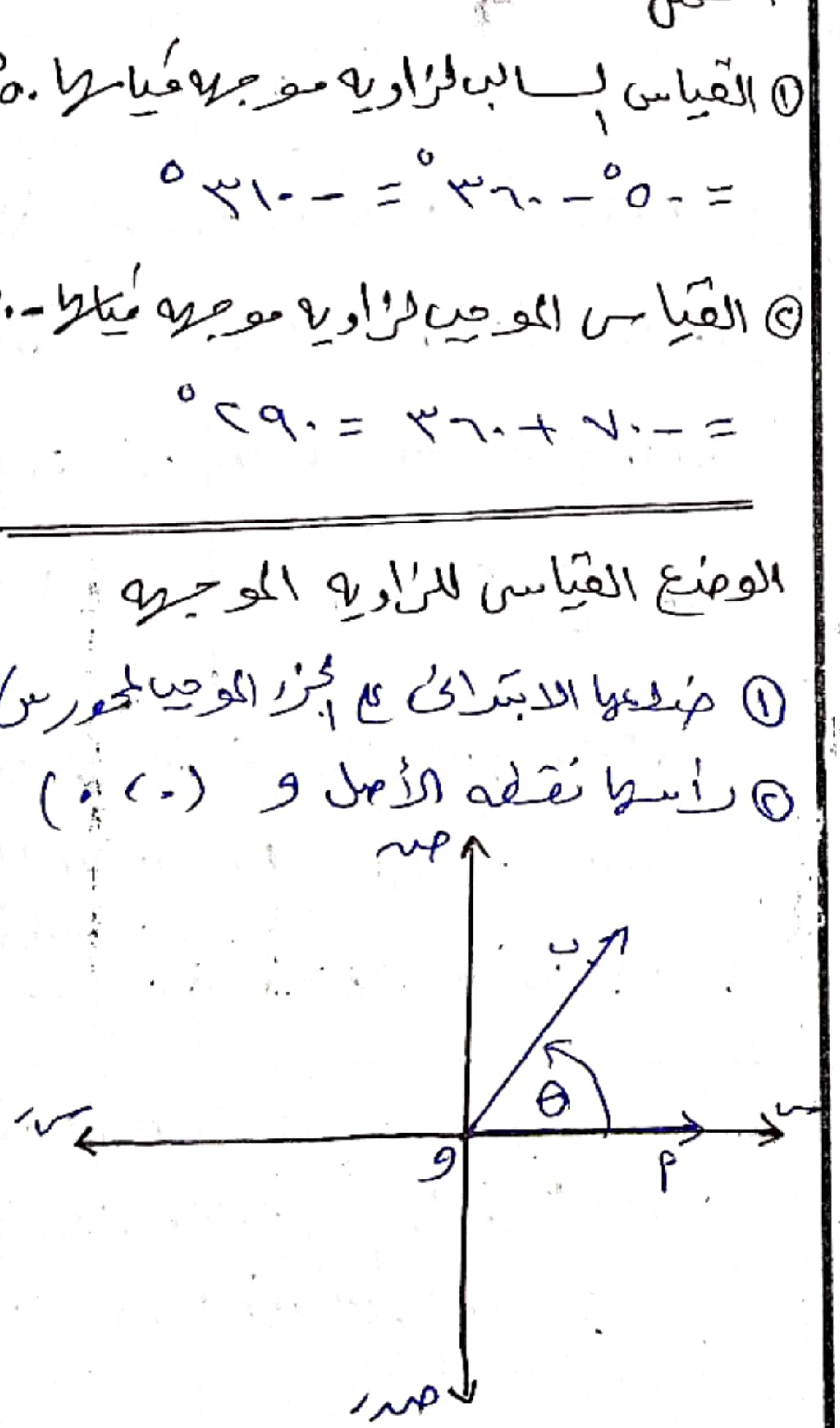
② القياس الموجب لزاوية موجهة قياسها −٧٠

= −٧٠ + ٣٦٠ = ٢٩٠°

الوضع القياسي للزاوية الموجهة

① ضلعها الابتدائي على الجزء الموجب لمحور س

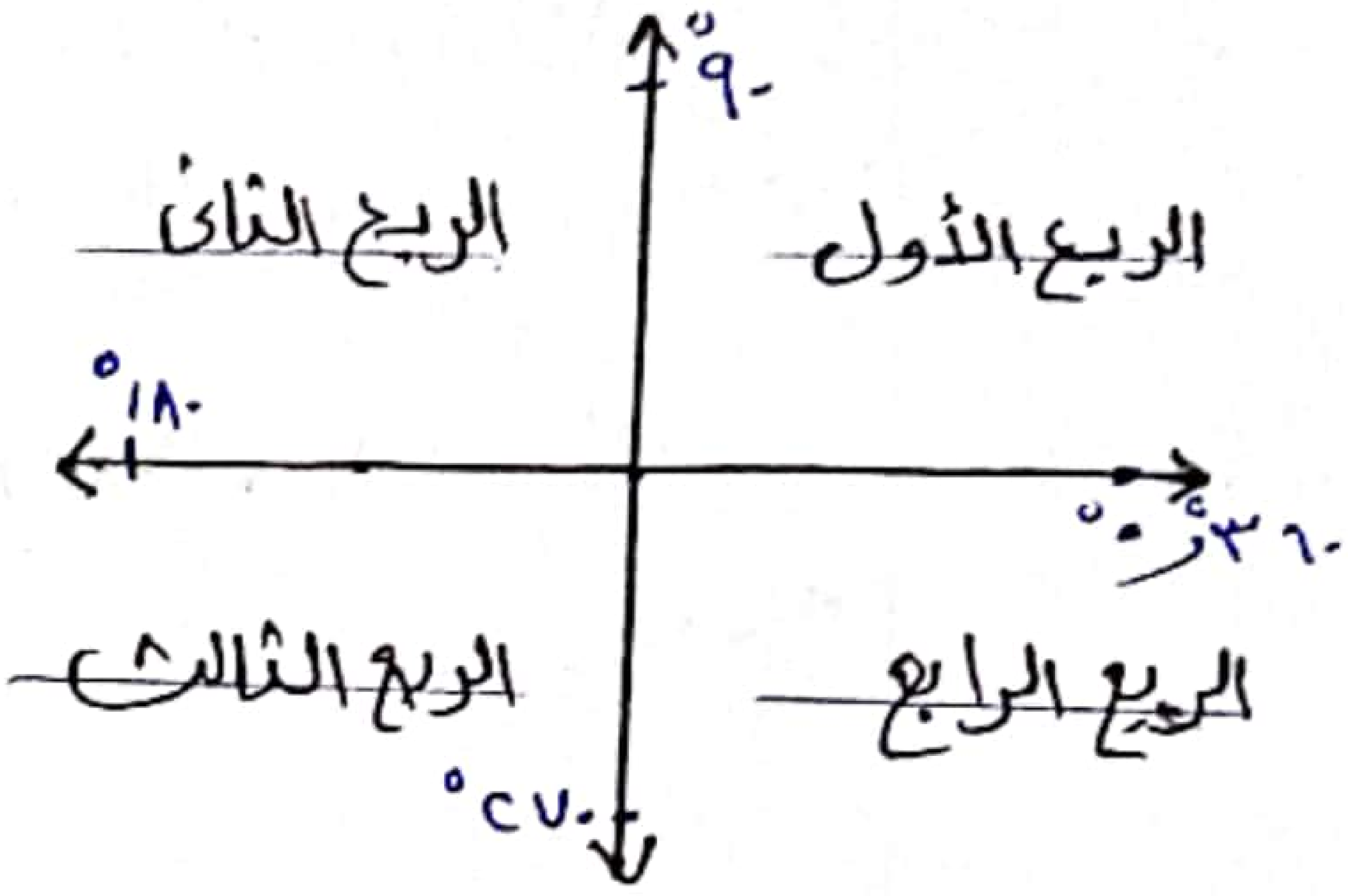
② رأسها نقطة الأصل و (٠، ٠)



∠ أوب الموجهة تسمى θ (ثيتا)

(و أ→، و ب→) في الوضع القياسي

موقع الزاوية الموجهة من الوضع القياسي



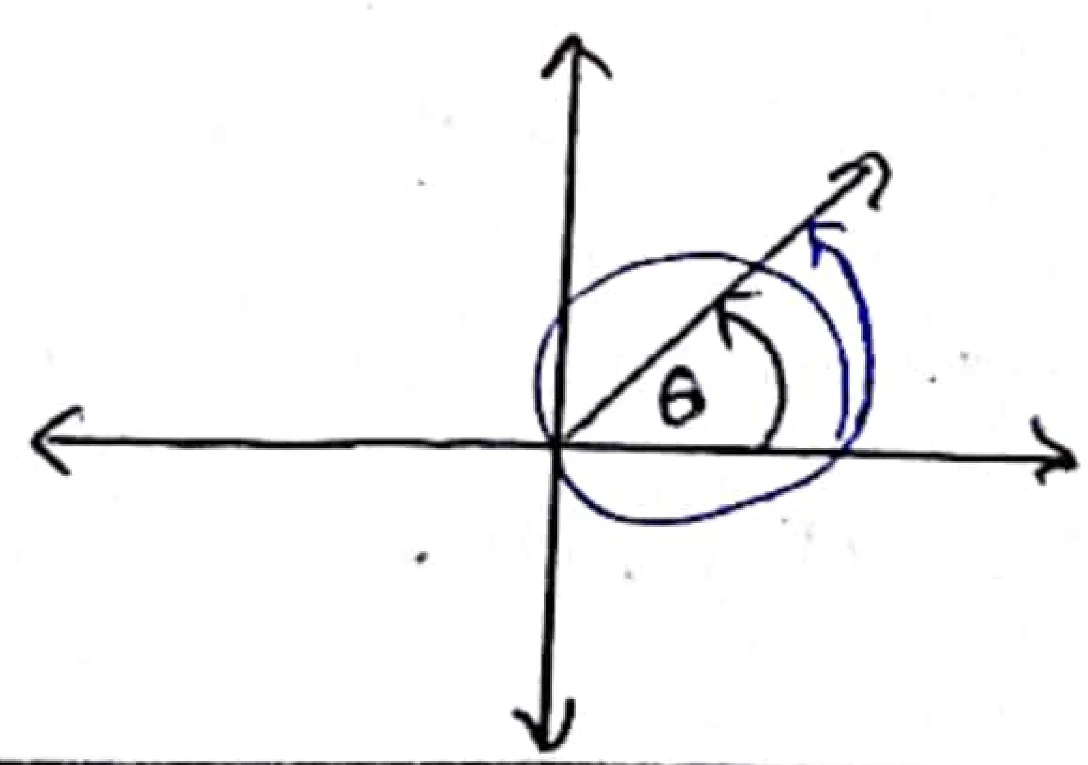
الربع	الزاوية
الأول	٠° < θ < ٩٠° أو]٠°، ٩٠°[
الثاني	٩٠° < θ < ١٨٠° أو]٩٠°، ١٨٠°[
الثالث	١٨٠° < θ < ٢٧٠° أو]١٨٠°، ٢٧٠°[
الرابع	٢٧٠° < θ < ٣٦٠° أو]٢٧٠°، ٣٦٠°[

الزاوية التي يقع ضلعها النهائي على محاور الإحداثيات تسمى زاوية ربعية

٠°، ٩٠°، ١٨٠°، ٢٧٠°، ٣٦٠°

الزوايا المتكافئة

هي الزوايا الموجهة في الوضع القياسي التي لها نفس الضلع النهائي.

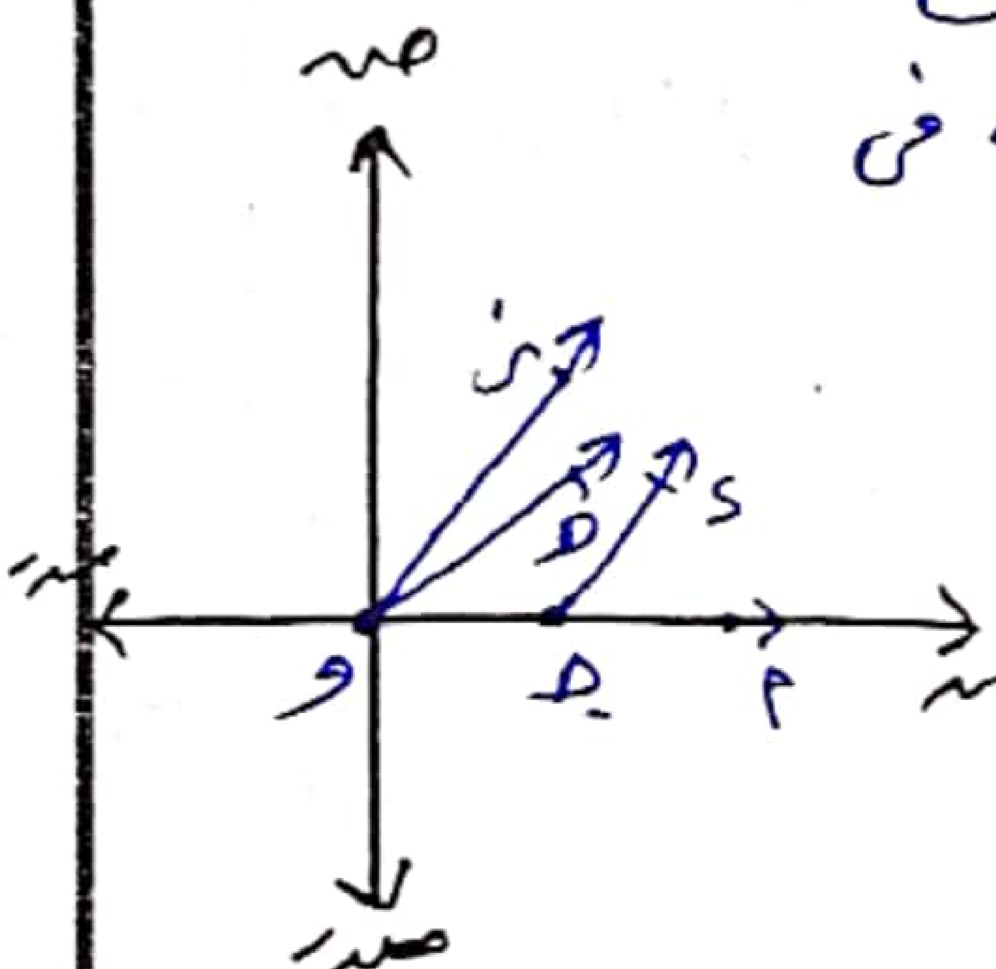


$$\boxed{\theta \equiv \theta \pm (ن \times ٣٦٠)}$$

حيث ن ∈ ص+

المسائل

(١) في الشكل المقابل: أي الأزواج المرتبة في الوضع القياسي



١) (و ج، هـ د) ✗

٢) (و م، و هـ) ✓

٣) (و هـ، و م) ✗

٤) (و م، و ن) ✓

(٢) أكمل ما يأتي

(١) إذا كانت θ أصغر قياس موجب للزاوية الموجهة فإن القياس السالب θ − ٣٦٠°

(٢) قياس الزاوية الربعية يكون أحد مضاعفات ٩٠°

(٣) الزاوية التي قياسها ٦٠° تكافئ في الوضع القياسي زاوية قياسها ٤٢٠°

٦٠ + ٣٦٠ = ٤٢٠°

③ الزاوية التي قياسها ٩٥٠° تقع في الربع الثالث

٩٥٠ − (٣٦٠ × ٢) = ٩٥٠ − ٧٢٠

= ٢٣٠ ⟸ الربع الثالث

---

④ الزاوية التي قياسها (−٨٥٠) تقع في الربع الثالث

−٨٥٠ + (٣٦٠ × ٣)

= −٨٥٠ + ١٠٨٠ = ٢٣٠ الثالث

---

⑤ إذا كان أ ، −أ قياس زاويتين متكافئتين فإن إحداهما هي ١٨٠°

∵ أ ، −أ متكافئتين

|أ| + |−أ| = ٣٦٠°

٢|أ| = ٣٦٠ ⟸ |أ| = ١٨٠°

∴ أ = ١٨٠°

---

⑥ إذا كان الضلع النهائي لزاوية موجهة في وضعها القياسي يمر بـ (−١ ، ٠) فإن قياسها يكون ______

زاوية ربعية

الدرس الثاني
القياس الستيني والقياس الدائري للزاوية

أولاً: القياس الستيني للزاوية (الدرجات)

تقاس فيه الزاوية بالدرجات (س°)

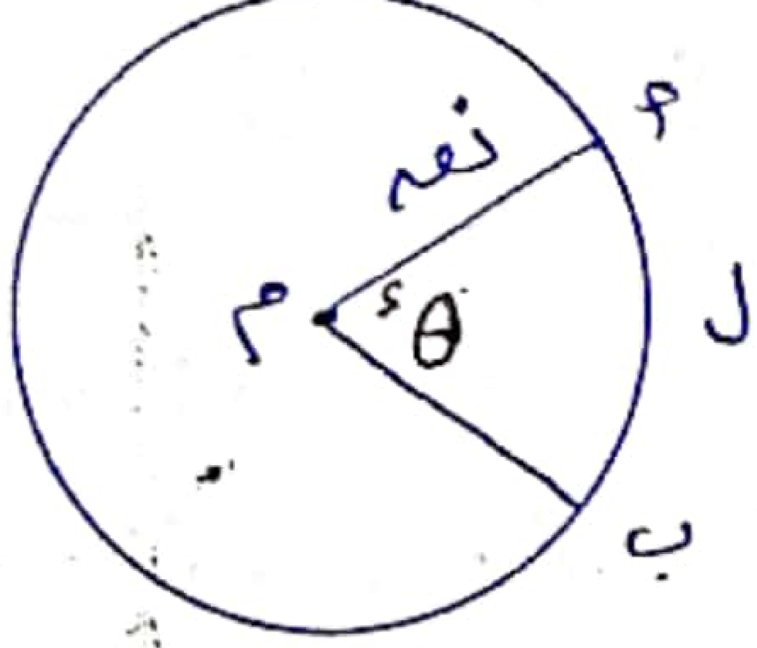
١ درجة = ٦٠ دقيقة   ١° = ٦٠′

١ دقيقة = ٦٠ ثانية   ١′ = ٦٠″

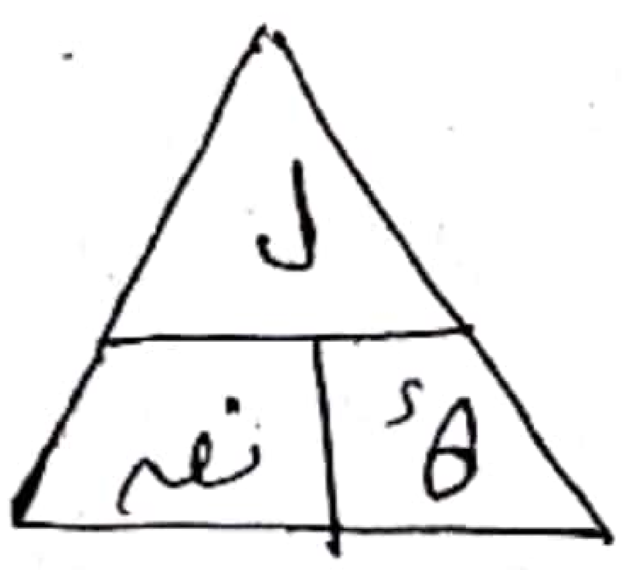
نستخدم مفتاح الدرجات [° ′ ″]

ثانياً: القياس الدائري (الراديان)

$$\theta^{د} = \frac{ل}{نق}$$



هو خارج قسمة طول القوس ÷ نصف قطر الدائرة للزاوية المركزية.



$$\theta^{د} = \frac{ل}{نق}$$

$$ل = \theta^{د} \times نق$$

$$نق = \frac{ل}{\theta^{د}}$$

أوجد القياس الدائري لزاوية مركزية تحصر قوساً طوله ١٤ سم في دائرة طول نصف قطرها ٧ سم.

ل = ١٤ سم   نق = ٧ سم

$\theta^{د} = \frac{ل}{نق} = \frac{١٤}{٧} = ٢^{د}$

أوجد طول نصف قطر دائرة مرسوم بها زاوية مركزية قياسها ٠,٧٦٧ د وطول القوس المقابل لها ٣٨,٣٥ سم.

$\theta^{د} = ٠,٧٦٧^{د}$ ل = ٣٨,٣٥ سم

$نق = \frac{ل}{\theta^{د}} = \frac{٣٨,٣٥}{٠,٧٦٧} = ٥٠$ سم

أوجد لأقرب جزء من عشرة طول قوس من دائرة طول نصف قطرها = ٢٠ سم ويقابل زاوية مركزية قياسها ٢,٤٣ د

الحل

نق = ٢٠ سم ، $\theta^{د} = ٢,٤٣^{د}$

$ل = \theta^{د} \times نق$

$= ٢٠ \times ٢,٤٣$

$= ٤٨,٦$ سم.

العلاقة بين القياسين الستيني والدائري

س° الستيني $\theta^{د}$ الراديان

$$\boxed{\frac{س^{\circ}}{١٨٠^{\circ}} = \frac{\theta^{د}}{\pi}}$$

$$\theta^{د} = س^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠}$$

$$س^{\circ} = \theta^{د} \times \frac{١٨٠}{\pi}$$

زاوية مركزية قياسها = ٦٠° أوجد قياسها الدائري بدلالة π.

$\theta^{د} = ٦٠^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠} = \frac{\pi}{٣}^{د}$

زاوية مركزية قياسها ١٢٠° ١٩′ ١٦″ أوجد لأقرب رقم عشري واحد قياسها بالراديان

$\theta^{د} = ١٢٠^{\circ}\ ١٩'\ ١٦'' \times \frac{\pi}{١٨٠} \simeq ٢,١^{د}$

زاوية مركزية قياسها ٨٠° ٢٥′ أوجد قياسها بالراديان لأقرب ثلاثة أرقام

$\theta^{د} = ٨٠^{\circ}\ ٢٥' = ١,٤٠٤^{د}$

أوجد بالدرجات قياس زاوية مركزية قياسها بالراديان كالآتي

① $٣,٧$ ء

$س^\circ = ٣,٧ \times \frac{١٨٠}{\pi} = ٤٠''\ ٥٩'\ ٢١١^\circ$

② $\frac{٣\pi}{٤}$ ء

$س^\circ = \frac{٣\pi}{٤} \times \frac{١٨٠}{\pi} = ١٣٥^\circ$

③ $-٣\frac{١}{٢}$ ء

$س^\circ = -٣\frac{١}{٢} \times \frac{١٨٠}{\pi} = -(٧''\ ٣٢'\ ٢٠٠^\circ)$

أكمل ما يأتي:

① الزاوية التي قياسها $\frac{٣١\pi}{٦}$ تقع في الربع الثالث

$س^\circ = \frac{٣١\pi}{٦} \times \frac{١٨٠}{\pi} = ٩٣٠^\circ$

$س^\circ = ٩٣٠^\circ - (٣٦٠ \times ٢) = ٢١٠^\circ$

∴ $س^\circ$ في الربع الثالث

② الزاوية التي قياسها $\frac{-٩\pi}{٤}$ تقع في الربع الرابع

$س^\circ = \frac{-٩\pi}{٤} \times \frac{١٨٠}{\pi} = -٤٠٥^\circ$

$س^\circ = -٤٠٥^\circ + (٣٦٠ \times ٢)$

$= ٣١٥^\circ$ الربع الرابع

③ طول القوس من دائرة طول قطرها ١٢ سم ويقابل زاوية مركزية قياسها ٦٠° = ... π

الحل

$\theta^{ء} = ٦٠ \times \frac{\pi}{١٨٠} = \frac{\pi}{٣}$ ء

$ل = \theta^{ء} \times نق = \frac{\pi}{٣} \times ٦ = ٢\pi$ سم

④ إذا كانت إحدى زوايا مثلث ٧٥° والزاوية الثانية $\frac{\pi}{٣}$ فإن الثالثة بالراديان = ...

الزاوية الثانية $= \frac{\pi}{٣} \times \frac{١٨٠}{\pi} = ٦٠^\circ$

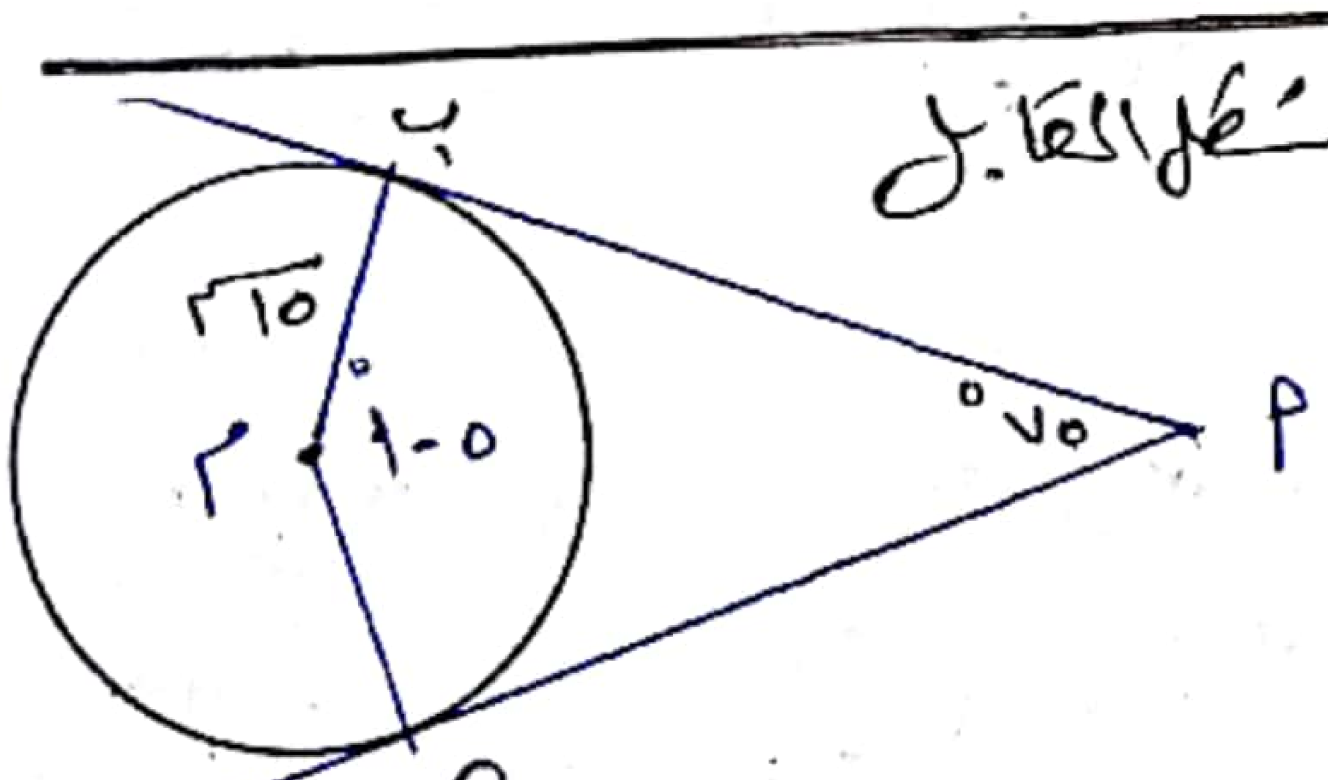
∴ الثالثة $= ١٨٠ - (٦٠ + ٧٥) = ٤٥^\circ$

$\theta^{ء} = ٤٥^\circ \times \frac{\pi}{١٨٠} = \frac{\pi}{٤}$ ء

⑤ في الدائرة التي طول نصف قطرها الوحدة يكون قياس الزاوية المركزية بالراديان = ...

$\theta^{ء} = \frac{ل}{نق} = ل =$ طول قوسها

⑥ في الشكل المقابل



$ق(\overset{\frown}{ب جـ}) = ١٠٥^\circ \times \frac{\pi}{١٨٠} \times ١٥ \simeq ٢٧,٤٩$ سم

الزوايا الخاصة بالراديان

$\frac{\pi}{3}^{ء} = 60 \times \frac{\pi}{180} = 60^\circ$

$\frac{\pi}{6}^{ء} = 30 \times \frac{\pi}{180} = 30^\circ$

$\frac{\pi}{4}^{ء} = 45 \times \frac{\pi}{180} = 45^\circ$

الزوايا الربعية بالراديان

$0^{ء} = 0 \times \frac{\pi}{180} = 0^\circ$

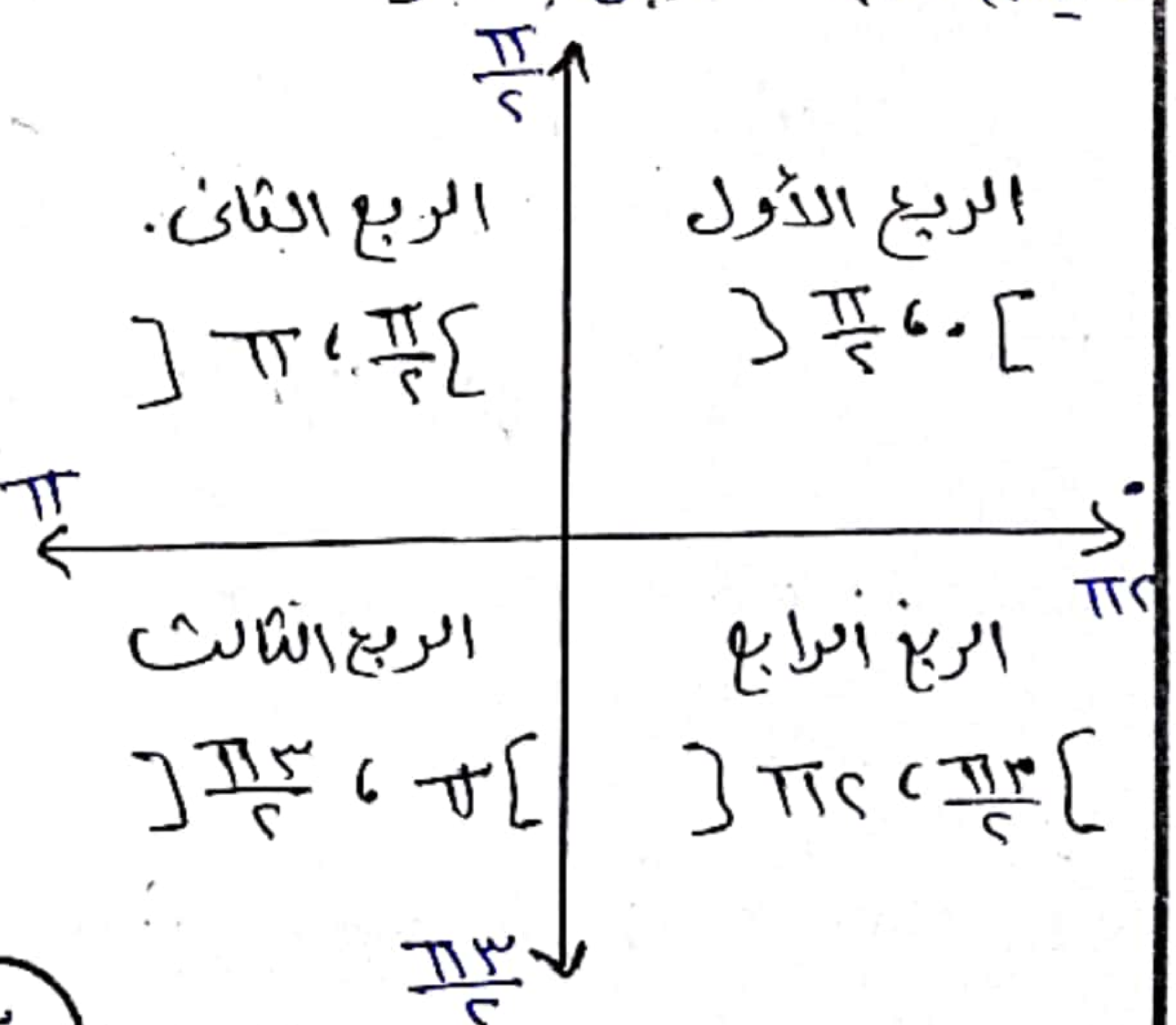
$\frac{\pi}{2}^{ء} = 90 \times \frac{\pi}{180} = 90^\circ$

$\pi^{ء} = 180 \times \frac{\pi}{180} = 180^\circ$

$\frac{3\pi}{2}^{ء} = 270 \times \frac{\pi}{180} = 270^\circ$

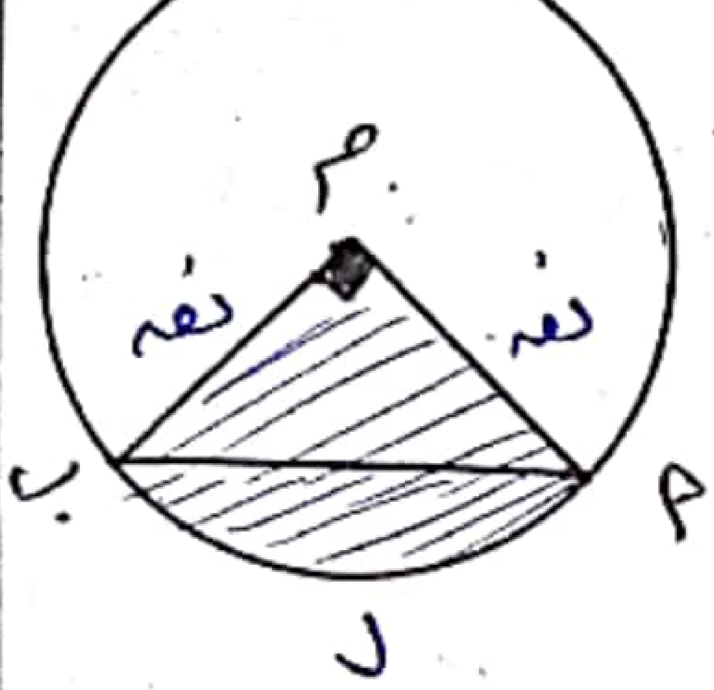
$2\pi^{ء} = 360 \times \frac{\pi}{180} = 360^\circ$

ويمكن كتابة الأرباع بالدائري كالآتي



إذا كانت مساحة △ م أ ب = 32 سم²
أوجد محيط الشكل المظلل لأقرب رقمين

الحل



مساحة △ م أ ب $= \frac{1}{2}$ نق × نق

$\frac{1}{2}$ نق² = 32

نق² = 64 ⟸ نق = 8 سم

ق(∠م) = $90^\circ = \frac{\pi}{2}^{ء}$

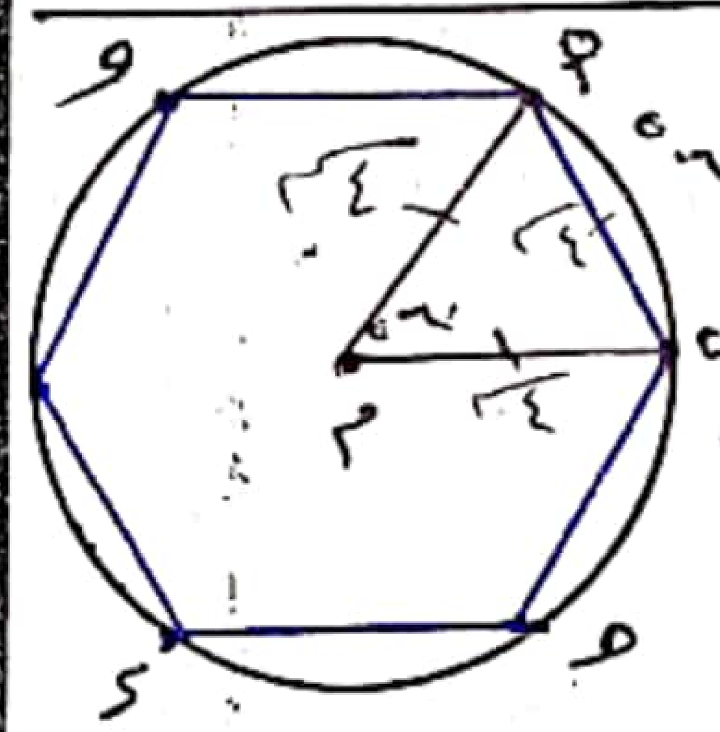
ل = $\theta^{ء}$ × نق = $\frac{\pi}{2} \times 8 = 4\pi$ سم

∴ المحيط = 2نق + ل

$= 16 + 4\pi \simeq 28.57$ سم

في الشكل المقابل
أ ب جـ د هـ و سداسي منتظم
طول ضلعه 4 سم
مرسوم داخل دائرة
فإن طول $\overset{\frown}{أب}$ = ...

الحل



∵ الشكل منتظم ∴ ق($\overset{\frown}{أب}$) $= \frac{360}{6} = 60^\circ$

∴ ق(∠أ م ب) $= 60^\circ = \frac{\pi}{3}^{ء}$

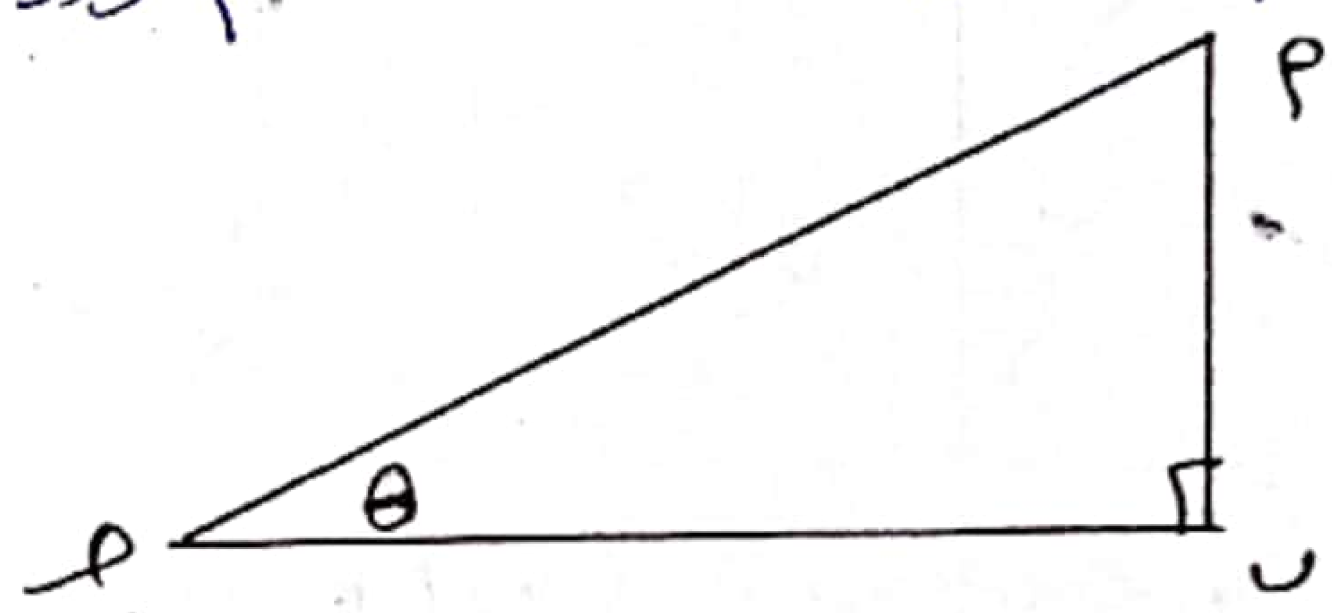
∵ △ أ م ب متساوي الأضلاع ⟸ نق = 4 سم

طول $\overset{\frown}{أب}$ = ل = $\theta^{ء}$ × نق

$= \frac{\pi}{3} \times 4 = \frac{4\pi}{3}$ سم

الدرس الثالث
الدوال المثلثية

نعلم أنه من Δ أ ب جـ القائم الزاوية في ب



$$\text{جا}\,\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$$

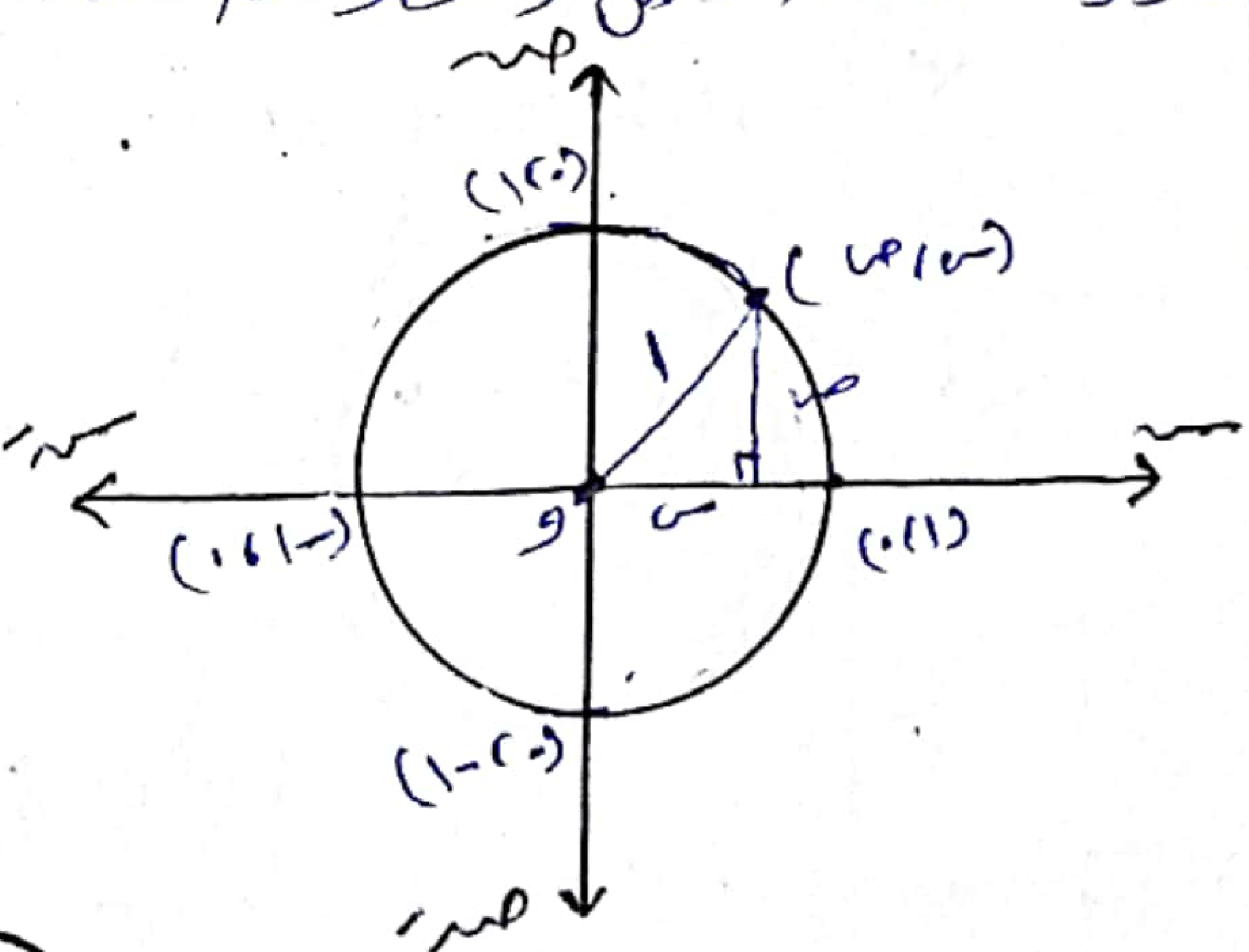
$$\text{جتا}\,\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$$

$$\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$$

تسمى هذه النسب بالدوال المثلثية

دائرة الوحدة

مركزها نقطة الأصل و طول نصف قطرها = الوحدة

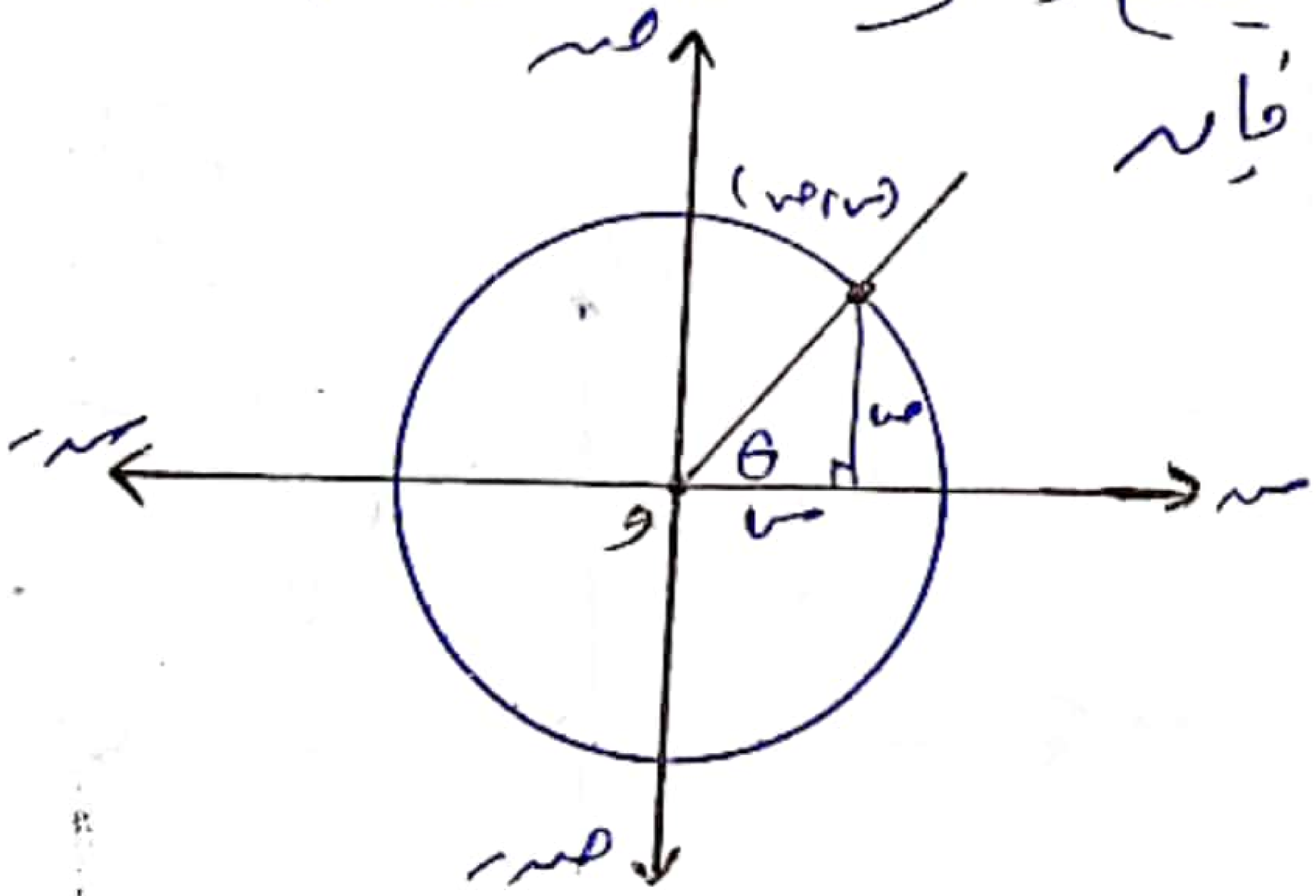


نلاحظ أي نقطة على دائرة الوحدة (س ، ص) يكون

$$\boxed{\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 1}$$ فيثاغورث

الدوال المثلثية الأساسية

اذا رسمت الزاوية الموجهة في وضعها القياسي θ وكان ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في أ (س ، ص) فإنه

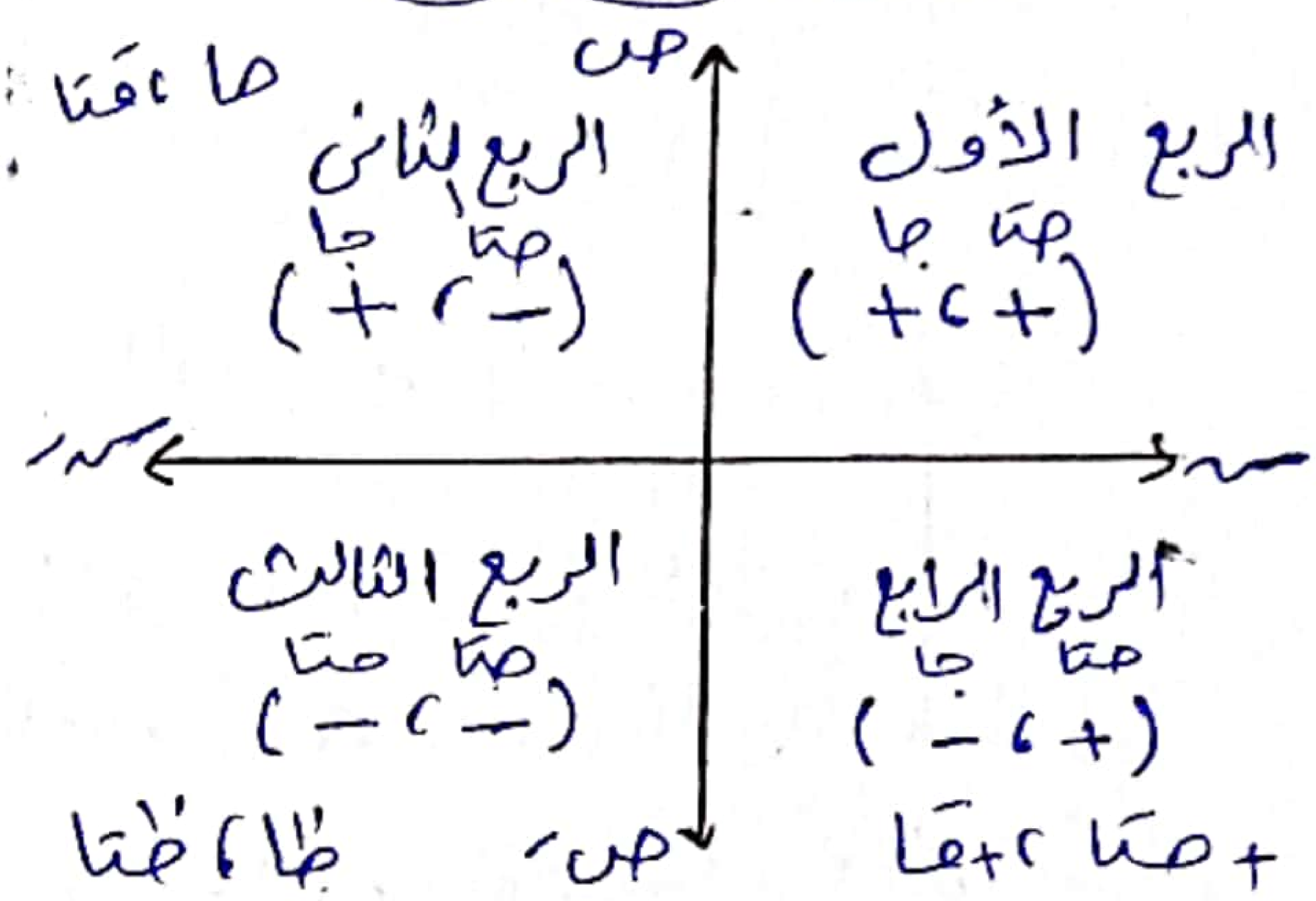


الدوال	المقلوبات
$\text{جا}\,\theta = \text{ص}$	$\text{قتا}\,\theta = \frac{1}{\text{جا}\,\theta} = \frac{1}{\text{ص}}$
$\text{جتا}\,\theta = \text{س}$	$\text{قا}\,\theta = \frac{1}{\text{جتا}\,\theta} = \frac{1}{\text{س}}$
$\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$	$\text{ظتا}\,\theta = \frac{1}{\text{ظا}\,\theta} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$

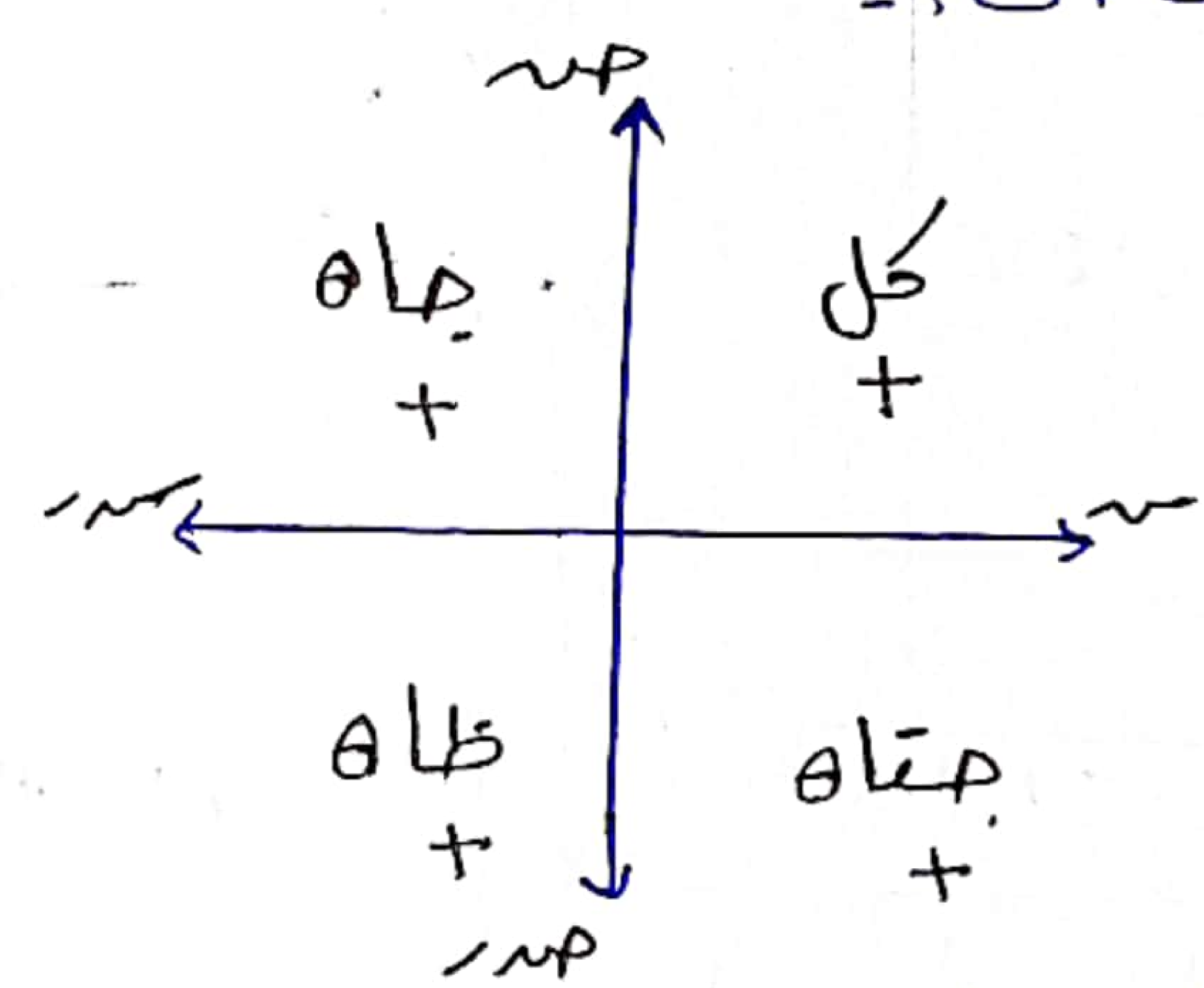
أي أنه

$$\text{أ (س ، ص)} = (\text{جتا}\,\theta \text{ ، } \text{جا}\,\theta)$$

إشارة الدوال المثلثية



أي أن :-



كل جبار ظالم جتا داهية

اذا كان الضلع النهائي للزاوية موجبة θ في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب فاوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية θ اذا كانت

① ب ($\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٤}{٥}$)

الحل

جتا θ ، جا θ

($\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٤}{٥}$)

جا θ = $\frac{٤}{٥}$ قتا θ = $\frac{٥}{٤}$

جتا θ = $\frac{٣}{٥}$ قا θ = $\frac{٥}{٣}$

ظا θ = $\frac{٤}{٣}$ ظتا θ = $\frac{٣}{٤}$

---

② ب (س ، ٠,٨) حيث س > ٠

الحل

∵ س² + ص² = ١

س² + (٠,٨)² = ١

س² = ١ − ٠,٦٤ = ٠,٣٦

س = ± $\sqrt{٠,٣٦}$ = ± ٠,٦

∵ س > ٠ ∴ س = ٠,٦

∴ ب (٠,٦ ، ٠,٨)

جتا θ ، جا θ

جا θ = ٠,٨ قتا θ = $\frac{١٠}{٨}$ = $\frac{٥}{٤}$

جتا θ = ٠,٦ قا θ = $\frac{١٠}{٦}$ = $\frac{٥}{٣}$

ظا θ = $\frac{٨}{٦}$ = $\frac{٤}{٣}$ ظتا θ = $\frac{٣}{٤}$

---

③ (س ، − س) س > ٠

الحل

س² + س² = ١

٢ س² = ١ س² = $\frac{١}{٢}$

س = ± $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

$\overset{\text{جتا}\theta}{}$ ، $\overset{\text{جا}\theta}{}$

ب $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} ، -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

جا$\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، قتا$\theta = -\sqrt{2}$

جتا$\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، قا$\theta = \sqrt{2}$

ظا$\theta = -1$ ، ظتا$\theta = -1$

④ $\left(\frac{3}{2} م ، -2م \right)$ ، $\theta \in]\frac{3\pi}{2} ، 2\pi[$

الحل

$س^2 + ص^2 = 1$

$\left(\frac{3}{2} م\right)^2 + (-2م)^2 = 1$

$\frac{9}{4} م^2 + 4 م^2 = 1$

$\frac{25}{4} م^2 = 1 \Leftarrow م^2 = \frac{4}{25}$

$م = \pm \frac{2}{5}$ ∵ θ تقع في الربع الرابع

∴ $س > ٠$ ، $ص < ٠ \Leftarrow م > ٠$

∴ $م = \frac{2}{5}$

∴ ب $\left(\frac{3}{2} \times \frac{2}{5} ، -2 \times \frac{2}{5} \right)$

ب $\left(\frac{3}{5} ، \frac{-4}{5} \right)$

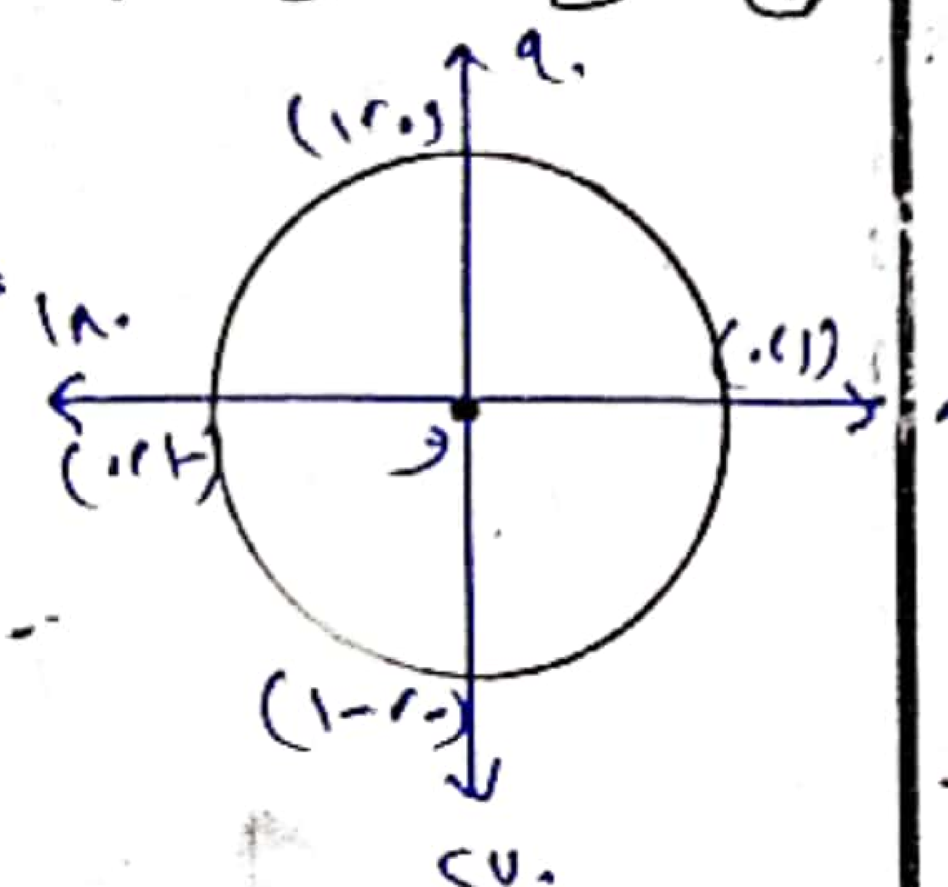
جا$\theta = \frac{-4}{5}$ ، قتا$\theta = \frac{-5}{4}$

جتا$\theta = \frac{3}{5}$ ، قا$\theta = \frac{5}{3}$

ظا$\theta = \frac{-4}{3}$ ، ظتا$\theta = -\frac{3}{4}$

النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

① الزوايا الربعية



	جتاθ ، جاθ
٠	(١ ، ٠)
٩٠	(٠ ، ١)
١٨٠	(-١ ، ٠)
٢٧٠	(٠ ، -١)

س°	$\theta^د$	جا	جتا	ظا	قتا	قا	ظتا
٠	٠	٠	١	٠	غير معرف	١	غير معرف
٩٠	$\frac{\pi}{2}$	١	٠	غير معرف	١	غير معرف	٠
١٨٠	π	٠	-١	٠	غير معرف	-١	غير معرف
٢٧٠	$\frac{3\pi}{2}$	-١	٠	غير معرف	-١	غير معرف	٠
٣٠°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	٢	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
٦٠°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	٢	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
٤٥	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	١	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	١

ملاحظة

الدوال المثلثية للزوايا المتكافئة لها نفس الإشارة.

أكمل ما يأتي

(١) إذا كان جا $\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن $\theta =$ ٤٥°

---

(٢) إذا كان جا $\theta = -1$ ، جتا $\theta =$ ٠

فإن $\theta =$ ٢٧٠°

(جتا ، جا) = (٠ ، −١) ⇐ ٢٧٠°

---

(٣) قتا $\theta =$ ٢ حيث θ زاوية حادة موجبة

فإن $\theta =$ ٣٠°

قتا $\theta =$ ٢ ⇐ جا $\theta = \frac{1}{2}$ ⇐ $\theta =$ ٣٠°

---

(٤) ظتا² ٣٠ − قا² ٦٠ + قتا² ٤٥ = ١

الحل

$= (\sqrt{3})^2 - (2)^2 + (\sqrt{2})^2$

= ٣ − ٤ + ٢ = ١

---

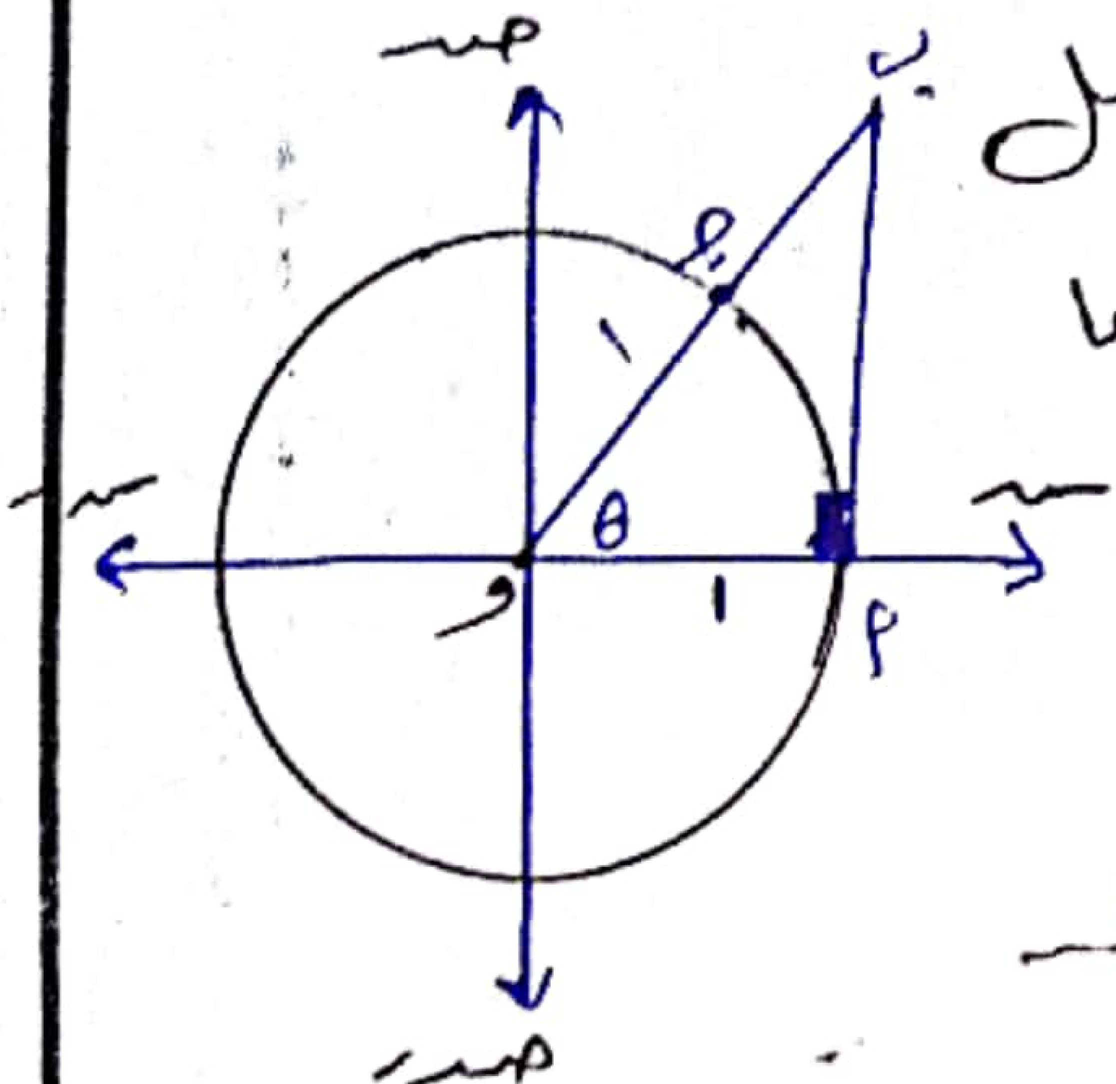
(٥) ٣ جا ٣٠ جا² ٦٠ − جتا ٠ قا ٦٠ + جا ٢٧٠ جتا² ٤٥

الحل

$= (3 \times \frac{1}{2} \times (\frac{\sqrt{3}}{2})^2) - (1 \times 2) + (-1 \times (\frac{1}{\sqrt{2}})^2)$

$= \frac{9}{8} - 2 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{-11}{8}}$

في الشكل المقابل



دائرة الوحدة مركزها و ، و أب مماس

أوجد

(١) وب = قا θ

جتا $\theta = \frac{1}{\text{وب}}$ ⇐ وب $= \frac{1}{\text{جتا}\,\theta} =$ قا θ

(٢) ب جـ = (قا θ) − ١

ب جـ = ب و − و جـ = (قا θ) − ١

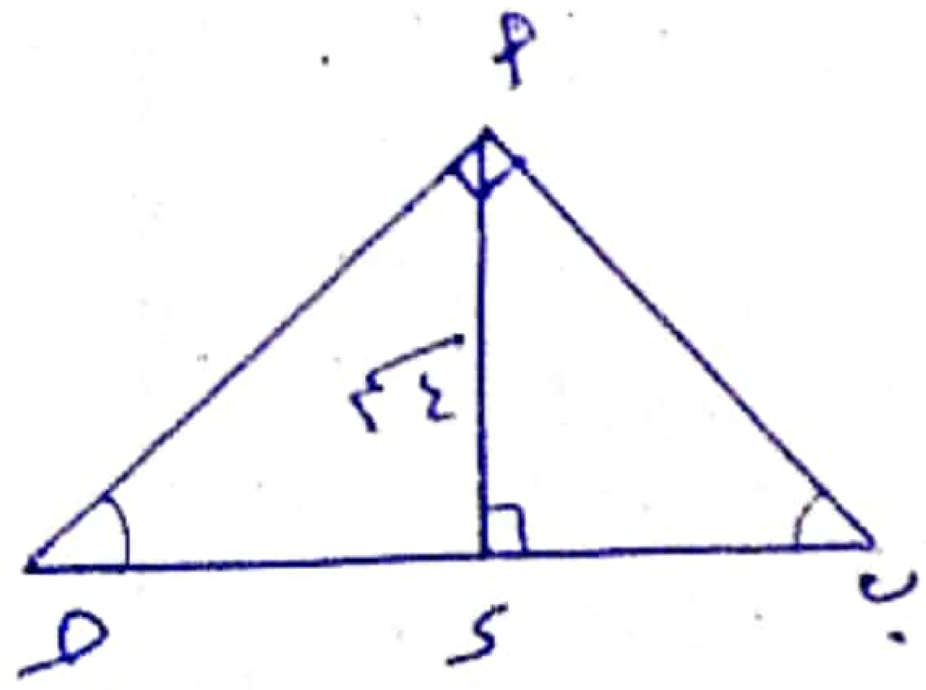
(٣) مساحة △ أ ب و = $\frac{1}{2}$ ظا θ

ظا $\theta = \frac{\text{أب}}{1}$ ⇐ أب = ظا θ

مساحة △ أ ب و = $\frac{1}{2}$ × أ و × أ ب

$= \frac{1}{2} \times 1 \times$ ظا $\theta = \frac{1}{2}$ ظا θ

في الشكل المقابل



ظا ب + ظا جـ = $\frac{5}{2}$

فإن ب جـ = ...

الحل

∵ ظا ب = $\frac{4}{\text{ب د}}$ ، ظا جـ = $\frac{4}{\text{د جـ}}$

ظا ب + ظا جـ = $\frac{4}{\text{ب د}} + \frac{4}{\text{د جـ}} = \frac{5}{2}$

$\frac{4(\text{ب د} + \text{د جـ})}{\text{ب د} \times \text{د جـ}} = \frac{5}{2}$ ⇐ $\frac{4(\text{ب د} + \text{د جـ})}{4^2} = \frac{5}{2}$

∴ ب جـ $= \frac{5}{2} \times 4 = \boxed{10}$

الدرس الرابع
الزوايا المنتسبة

الزاويتان المنتسبتان.
هما اللتان مجموعهما أو الفرق بينهم
عدد من أعداد القوائم (٩٠، ١٨٠، ٢٧٠، ...)

[١] العلاقة بين الزاويتان θ ، (١٨٠ - θ) الثاني

جا (١٨٠ - θ) = جا θ

جتا (١٨٠ - θ) = - جتا θ

ظا (١٨٠ - θ) = - ظا θ

بالمثل المقلوبات

مثال

جا ١٢٠ = جا (١٨٠ - ٦٠) = جا ٦٠ = √٣ / ٢

[٢] الزاويتان θ ، (١٨٠ + θ) الثالث

جا (١٨٠ + θ) = - جا θ

جتا (١٨٠ + θ) = - جتا θ

ظا (١٨٠ + θ) = ظا θ

بالمثل المقلوبات

مثال

جتا ٢٢٥ = جتا (١٨٠ + ٤٥) = - جتا ٤٥ = - ١ / √٢

[٣] الزاويتان θ ، (٣٦٠ - θ) الرابع

جا (٣٦٠ - θ) = - جا θ

جتا (٣٦٠ - θ) = جتا θ

ظا (٣٦٠ - θ) = - ظا θ

بالمثل المقلوبات

مثال

ظا ٣٠٠ = ظا (٣٦٠ - ٦٠) = - ظا ٦٠ = - √٣

[٤] الزاويتان θ ، (٩٠ - θ) الأول

جا (٩٠ - θ) = جتا θ

جتا (٩٠ - θ) = جا θ

ظا (٩٠ - θ) = ظتا θ

بالمثل المقلوبات

مثال

جا ٣٠ = جتا ٦٠ = ١ / ٢

[٥] الزاويتان θ ، (٩٠ + θ) الثاني

جا (٩٠ + θ) = جتا θ

جتا (٩٠ + θ) = - جا θ

ظا (٩٠ + θ) = - ظتا θ

بالمثل المقلوبات

مثال

جا ١٢٠ = جا (٩٠ + ٣٠) = جتا ٣٠ = √٣ / ٢

يمكن تلخيص العلاقات كالآتي

جا	كل
$\boxed{180 - \theta}$	$\boxed{\theta}$
$\boxed{180 + \theta}$	$\boxed{360 - \theta}$
ظا	جتا

تغيير الإشارة فقط

جا	كل
$\boxed{90 + \theta}$	$\boxed{90 - \theta}$
$\boxed{270 - \theta}$	$\boxed{270 + \theta}$
ظا	جتا

تغيير حرف ت والإشارة

بدون الحاسبة أوجد

جا ١٥٠° = جا ٣٠ = $\frac{1}{2}$

قا ٢١٠° = − قا ٣٠ = $-\frac{2}{\sqrt{3}}$

ظتا ٧٨٠° = ظتا ٦٠ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

جتا (−٩٠٠) = جتا (−٩٠٠ + ٣ × ٣٦٠)

= جتا ١٨٠ = −١

٦ الزاويتان θ ، (٢٧٠ − θ) الثالث

جا (٢٧٠ − θ) = − جتا θ

جتا (٢٧٠ − θ) = − جا θ

ظا (٢٧٠ − θ) = ظتا θ

بالمثل المقلوبات

<u>مثال</u>

جا ٢١٠ = جا (٢٧٠ − ٦٠) = − جتا ٦٠ = $-\frac{1}{2}$

٧ الزاويتان θ ، (٢٧٠ + θ) الرابع

جا (٢٧٠ + θ) = − جتا θ

جتا (٢٧٠ + θ) = جا θ

ظا (٢٧٠ + θ) = − ظتا θ

بالمثل المقلوبات

ظا ٣٣٠ = ظا (٢٧٠ + ٦٠) = − ظتا ٦٠

= $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

جتا ٣١٥ = جتا (٢٧٠ + ٤٥)

= جا ٤٥ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

بدون الآلة الحاسبة أوجد قيمة

حا ١٥٠ جتا (−٣٠٠) + جتا ٩٣٠ ظتا ٢٤٠

الحل

حا ١٥٠ جتا ٦٠ + جتا ٢١٠ ظتا ٢٤٠

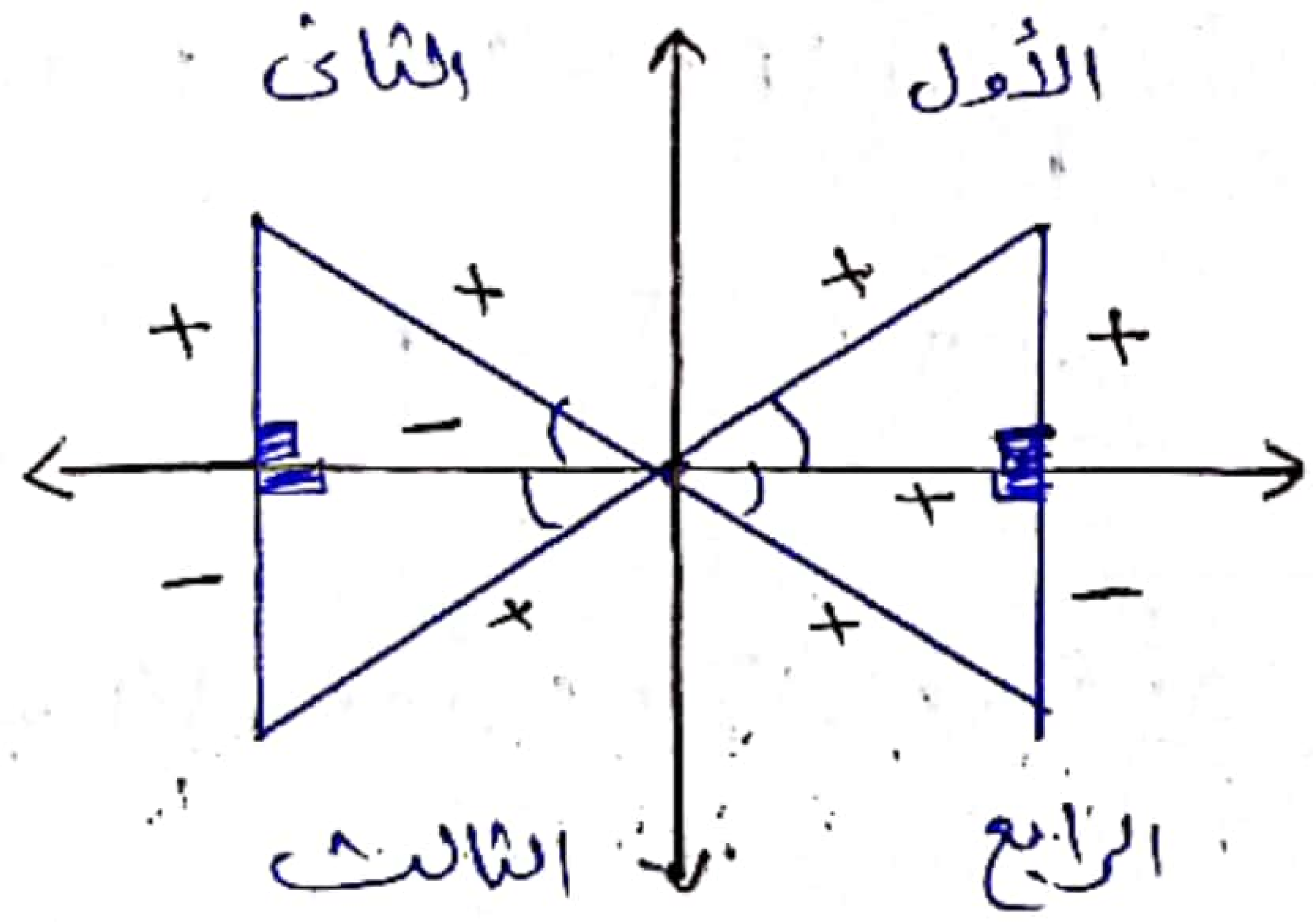
حا ٣٠ جتا ٦٠ + (− جتا ٣٠ ظتا ٦٠)

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}}$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

ملاحظة هامة

يمكن إيجاد قيم الدوال المثلثية مباشرة عند رسم θ في الوضع القياسي كالآتي



مثال

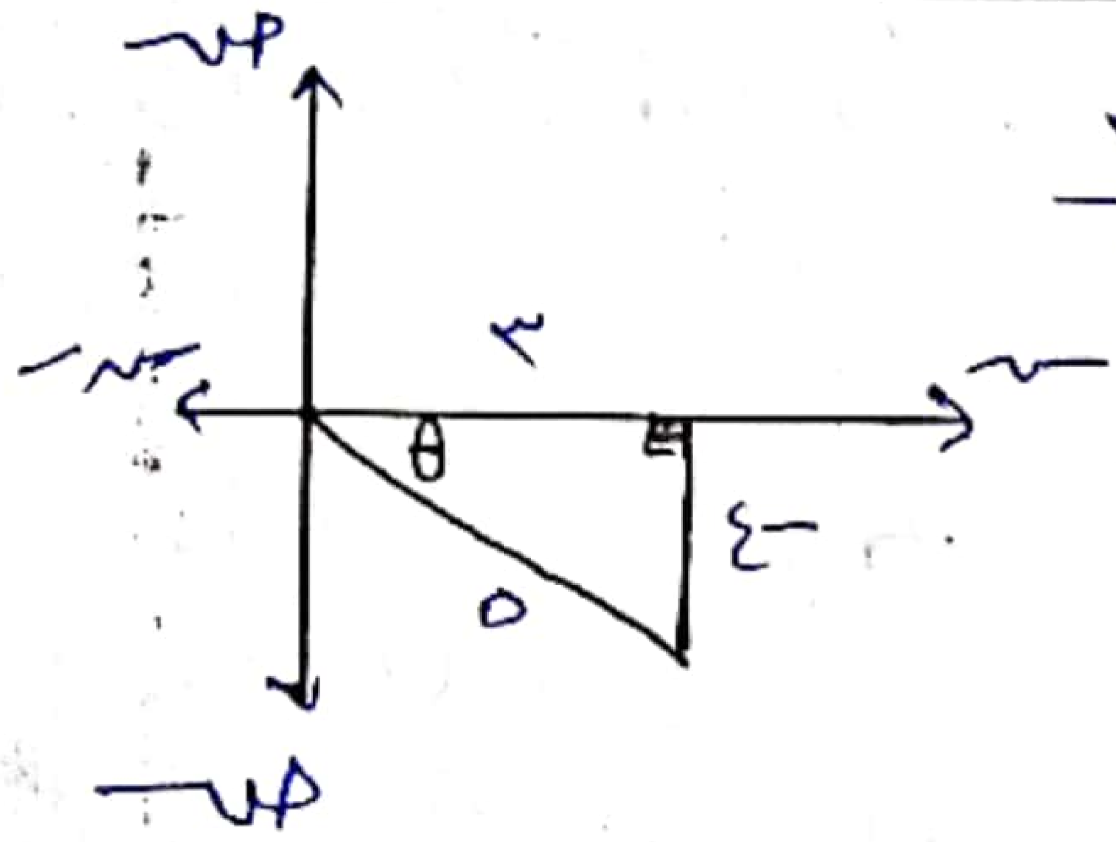
إذا كانت جتا θ = $\frac{3}{5}$ ، θ ∈]٢٧٠ ، ٣٦٠[

فأوجد قيمة المقدار: −

حا(١٨٠ − θ) + ظا(٩٠ − θ) − ظا(٢٧٠ − θ)

الحل

θ تقع في الربع الرابع



جتا θ = $\frac{3}{5}$ = $\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$

المقدار

= حا θ + ~~ظتا θ~~ − ~~ظتا θ~~

= حا θ = $\boxed{\frac{-4}{5}}$

لأي زاويتين α ، β حادتين موجبتين

إذا كان

حا α = جتا β

ظا α = ظتا β

قا α = قتا β

$\boxed{\alpha + \beta = 90^\circ}$

أكمل

① جا ٤٢ = ...جتا ٤٨....

② $\frac{\text{ظا ٥٠}}{\text{ظتا ٤٠}}$ = ...١....

③ قا ٦٨ − قتا ٢٢ = ...صفر....

④ حا α = جتا β فإن

ظا (α + β) = ظا ٩٠ = غير معرف

أوجد قيمة θ حيث $٠^\circ \le \theta < ٩٠^\circ$ التي تحقق

① جا θ = جتا ٢θ

الحل

$\theta + ٢\theta = ٩٠ \Leftarrow ٣\theta = ٩٠$

$\theta = \frac{٩٠}{٣} = \boxed{٣٠^\circ}$

② قا $(\theta + ٢٥)$ = قتا $(\theta + ١٥)$

الحل

$\theta + ٢٥ + \theta + ١٥ = ٩٠$

$٢\theta + ٤٠ = ٩٠ \qquad ٢\theta = ٥٠$

$\theta = \frac{٥٠}{٢} = \boxed{٢٥^\circ}$

③ جتا $\left(\frac{\theta + ٢٠}{٢}\right)$ = جا $\left(\frac{\theta + ٤٠}{٢}\right)$

الحل

$\frac{\theta + ٢٠}{٢} + \frac{\theta + ٤٠}{٢} = ٩٠$

$\frac{٢\theta + ٦٠}{٢} = ٩٠$

$\theta + ٣٠ = ٩٠$

$\theta = ٩٠ - ٣٠ = \boxed{٦٠^\circ}$

الحل العام للمعادلات المثلثية

① جا α = جتا β

$\boxed{\alpha \pm \beta = ٩٠ + ٣٦٠ ن}$

أو $\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$

② قتا α = قا β

$\boxed{\alpha \pm \beta = ٩٠^\circ + ٣٦٠ ن}$

أو $\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$

③ ظا α = ظتا β

$\boxed{\alpha + \beta = ٩٠ + ١٨٠ ن}$

أو $\alpha + \beta = \frac{\pi}{٢} + \pi ن$

أوجد الحل العام للمعادلات الآتية

① جا ٢θ = جتا θ

الحل

$٢\theta + \theta = ٩٠ + ٣٦٠ ن$

$٣\theta = ٩٠ + ٣٦٠ ن$

$\boxed{\theta = ٣٠ + ١٢٠ ن}$

$٢\theta - \theta = ٩٠ + ٣٦٠ ن$

$\boxed{\theta = ٩٠ + ٣٦٠ ن}$

② قا (θ − ٣٠) = قتا (٣θ + ٢٠)

ثم أوجد قيم θ ∈]٠، ٩٠[

الحل

بوضع قتا (٣θ + ٢٠) = قا (θ − ٣٠)

إما

٣θ + ٢٠ + θ − ٣٠ = ٩٠ + ٣٦٠ن

٤θ − ١٠ = ٩٠ + ٣٦٠ن

٤θ = ١٠٠ + ٣٦٠ن

$\boxed{θ = ٢٥ + ٩٠ن}$

أو

٣θ + ٢٠ − θ + ٣٠ = ٩٠ + ٣٦٠ن

٢θ + ٥٠ = ٩٠ + ٣٦٠ن

٢θ = ٤٠ + ٣٦٠ن

$\boxed{θ = ٢٠ + ١٨٠ن}$

بوضع ن = ٠   θ = ٢٥° أو ٢٠°

بوضع ن = ١   θ = ١١٥° أو ٢٠٠
مرفوضة   مرفوضة

∴ قيم θ = {٢٥°، ٢٠°}

③ ظا θ = ظتا ٢θ

ثم أوجد قيم θ حيث θ ∈]٠، π[١٨٠°

الحل

θ + ٢θ = ٩٠ + ١٨٠ن

٣θ = ٩٠ + ١٨٠ن

$\boxed{θ = ٣٠ + ٦٠ن}$

بوضع ن = ٠   θ = ٣٠° تحقق

بوضع ن = ١   θ = ٩٠ تحقق

بوضع ن = ٢   θ = ١٥٠ تحقق

بوضع ن = ٣   θ = ٢١٠ مرفوض

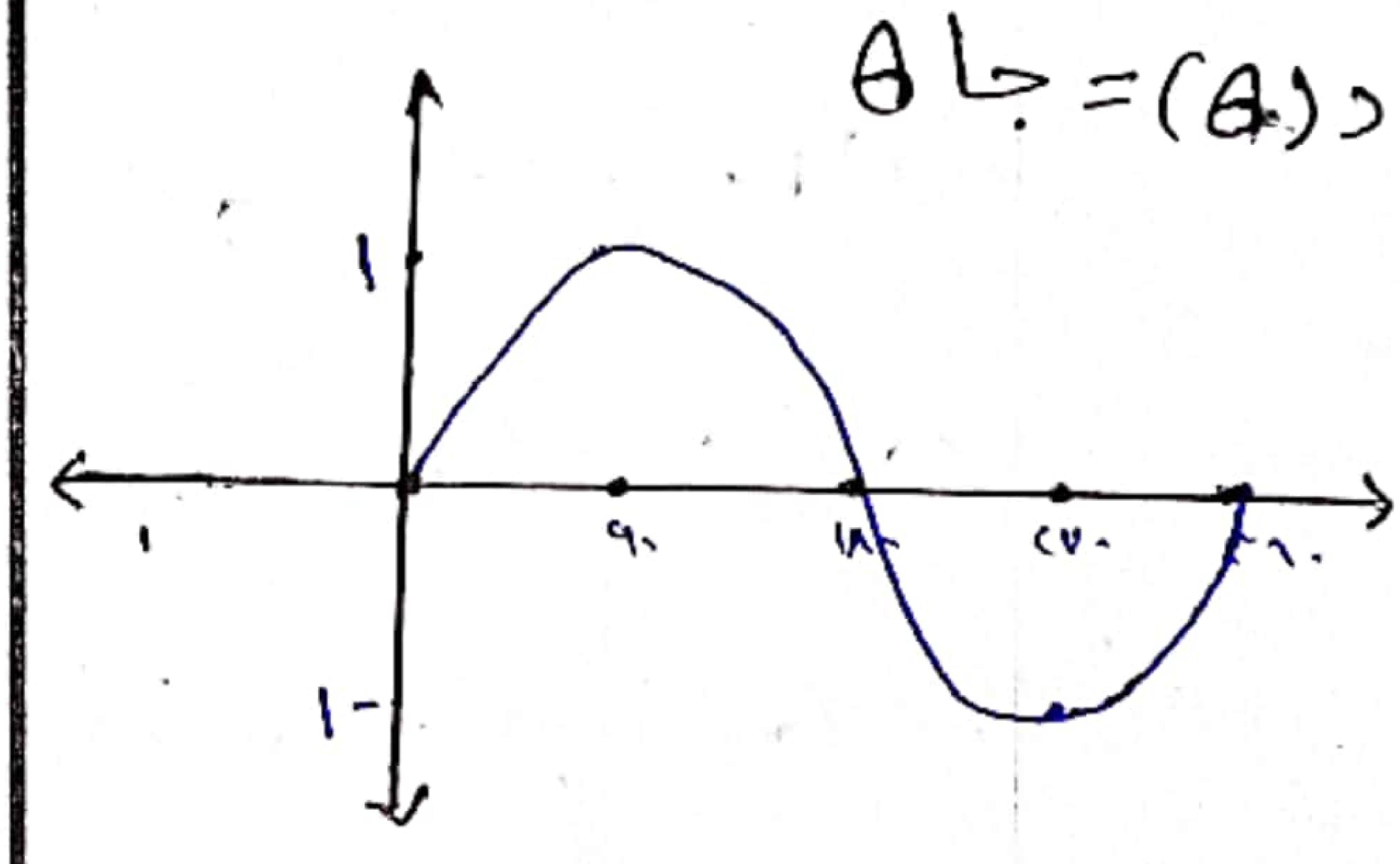
∴ قيم θ التي تحقق هي

{٣٠°، ١٥٠°، ٩٠°}

الدرس الخامس
التمثيل البياني للدوال المثلثية

داله الجيب

د(θ) = جا θ



مجال = ح

مدى = [-١ ، ١]

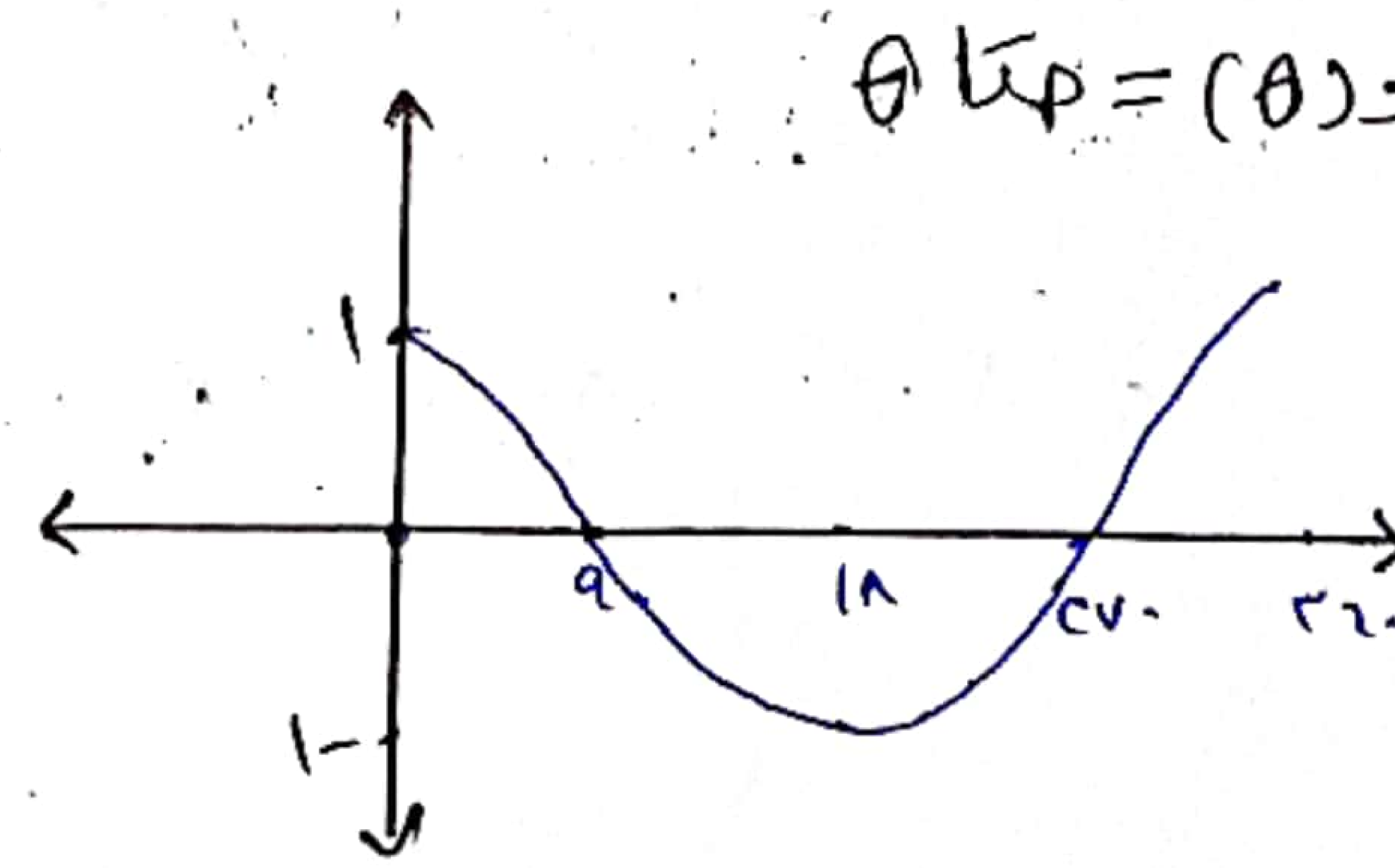
قيمه عظمى = ١

قيمه صغرى = -١

دورتها = ٢π

داله جيب التمام

د(θ) = جتا θ



مجال = ح

المدى = [-١ ، ١]

قيمه عظمى = ١

قيمه صغرى = -١

دورتها = ٢π

ملاحظات هامه

كل رسم الدوال البيانى

د(θ) = أ جا ب θ ، د(θ) = أ جتا ب θ

(١) مداها [-أ ، أ]

صغرى عظمى

(٢) دورتها = $\frac{٢\pi}{|ب|}$

(٣) منحنى جا يمر بنقطه الأصل و

منحنى جتا لا يمر بنقطه الأصل و

أكمل ما يلي

(١) مدى الداله د(θ) = جا θ .

[-١ ، ١]

(٢) مدى الداله د(س) = جتا ٥ س

[-١ ، ١]

(٣) القيمه العظمى للداله د(ع) = ٤ جا ع

= ٤

(٤) د(θ) = ٢ جا ٤ θ

المدى = [-٢ ، ٢]

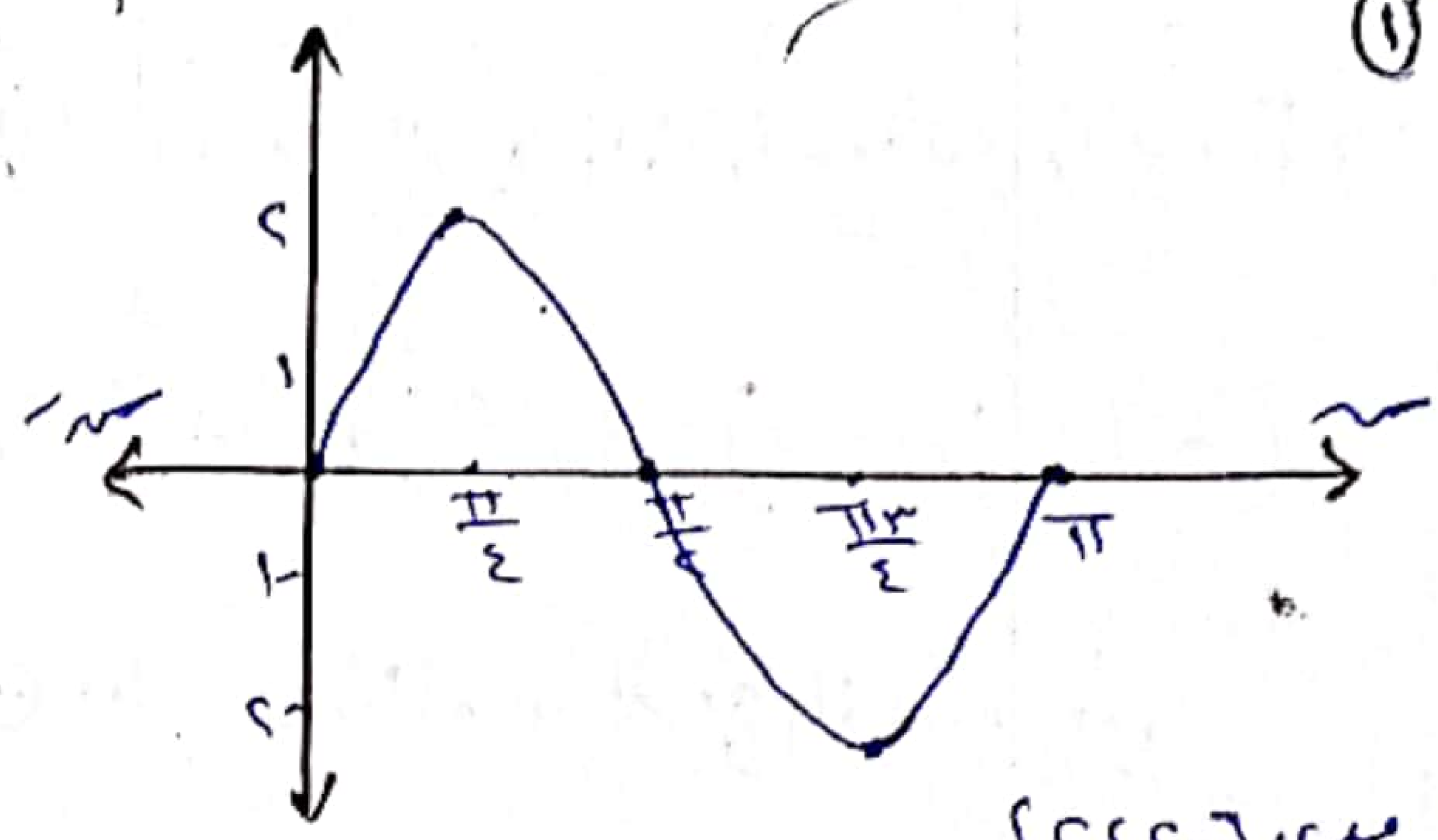
دورتها = $\frac{٢\pi}{|٤|}$

= $\frac{\pi}{٢}$

من الشكل المقابل

منحنى دالة مثلثية دورية اكتب قاعدة الدالة

(1)

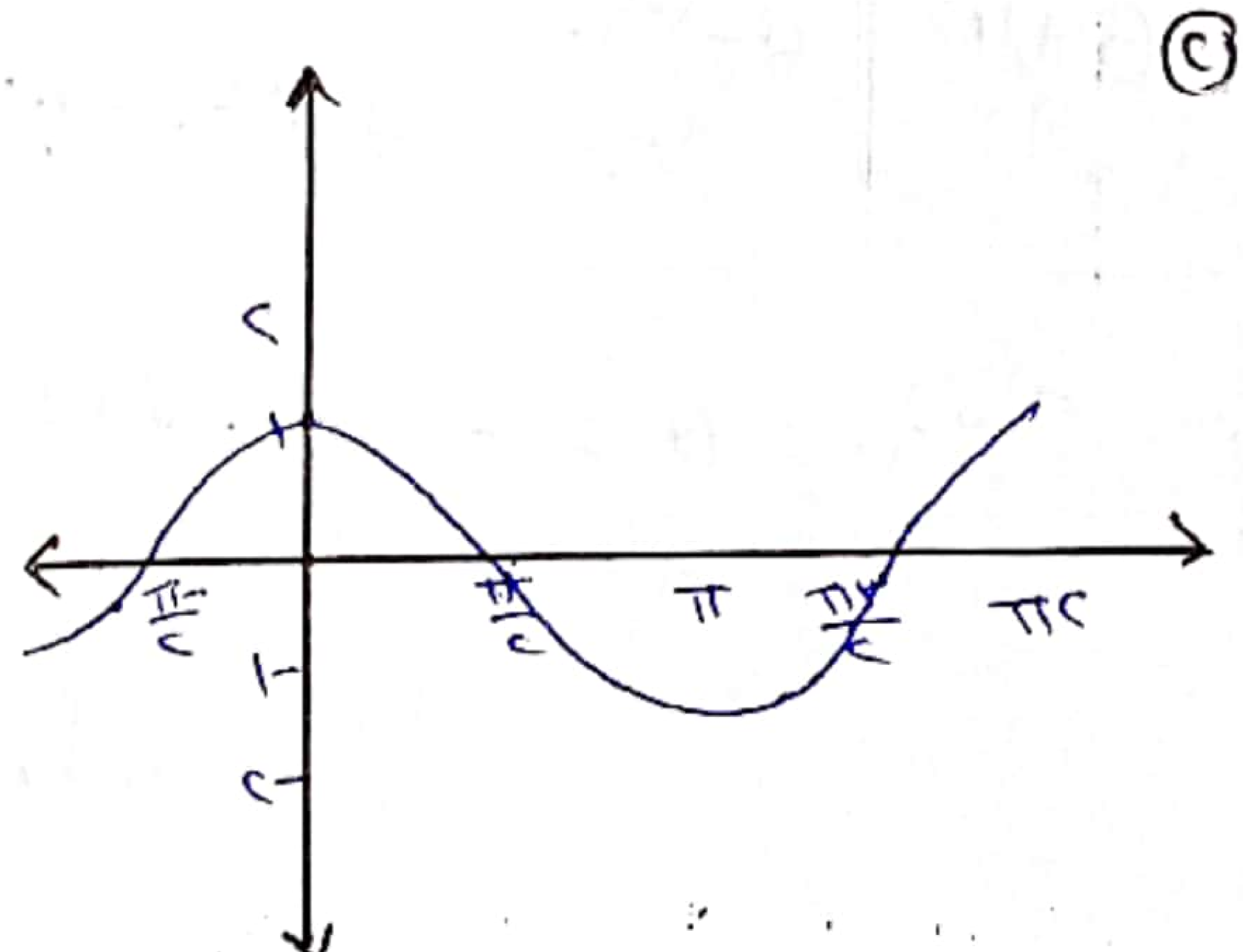


مدى [-2، 2]

دورتها = π = $\frac{2\pi}{|ب|}$ ⟸ ب = 2

د(θ) = 2 جا 2θ

(2)



د(θ) = جتا θ

مدى الدالة [-1، 1]

دورتها = 2π = $\frac{2\pi}{|ب|}$ ب = 1

إذا كانت م = $\frac{2 - جا\,\theta}{3}$

فإن م ∈ ------

الحل

∵ جا θ ∈ [-1، 1]

∴ $-1 \le$ جا θ ≤ 1 (× -1)

$1 \ge$ -جا θ ≥ -1 (+2)

$3 \ge$ 2 - جا θ ≥ 1 (÷ 3)

$1 \ge \frac{2 - جا\,\theta}{3} \ge \frac{1}{3}$

∴ $1 \ge$ م $\ge \frac{1}{3}$

∴ $\frac{1}{3} \le$ م ≤ 1

∴ م ∈ [$\frac{1}{3}$، 1]

إذا كانت د(س) = أ جتا ب س حيث أ، ب ∈ ... والدورية دورتها $\frac{\pi}{2}$ مداها [-1، 1]

فإن $\frac{أ}{ب}$ = ----

مداها [-1، 1] أ = 1

دورتها = $\frac{\pi}{2}$ = $\frac{2\pi}{ب}$ ⟸ ب = 4

∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{1}{4}$

الدرس السادس
إيجاد قياس زاوية بمعلومية إحدى النسب المثلثية

إذا كانت

ص = جا θ ⇐ θ = جا$^{-1}$ ص

تسمى جا$^{-1}$ الدالة العكسية للدالة ص

وتكتب بالآلة الحاسبة

$\boxed{\text{shift}} + \boxed{\sin} = \sin^{-1}(\ \ )$

أولاً إذا كانت θ زاوية حادة موجبة

أي $\theta \in]0 ، \frac{\pi}{2}[$

أوجد قيمة θ إذا كانت $\theta \in]0 ، \frac{\pi}{2}[$

① جا $\theta = \frac{1}{2}$

الحل

θ = جا$^{-1}\frac{1}{2} = 30° = \frac{\pi}{6}$

② ظا $\theta = \sqrt{3}$

الحل

θ = ظا$^{-1}\sqrt{3} = 60° = \frac{\pi}{3}$

③ جتا $\theta = 0.7865$

θ = جتا$^{-1}(0.7865) \simeq 38° \ 8' \ 25''$

نستخدم الآلة الحاسبة العلمية

إذا كانت $\theta \in]0 ، 2\pi[$

نتبع الخطوات الآتية

① تحديد الربع الذي تقع فيه θ حسب الإشارة

② نوجد θ الحادة. (بدون إشارة)

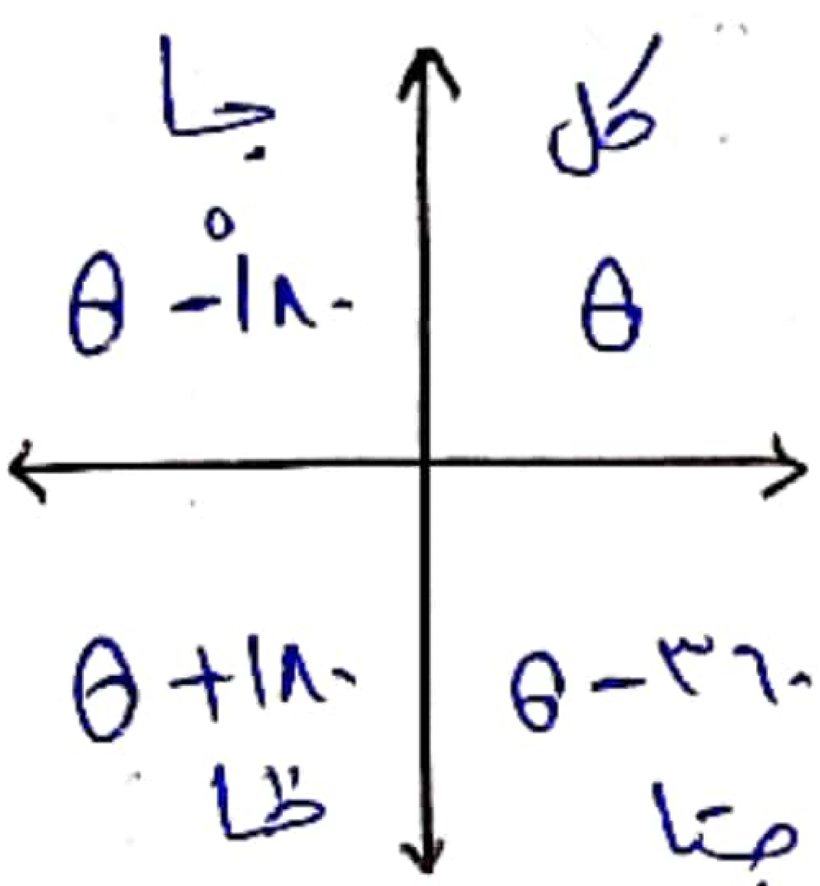
③ ننسب الزاوية للربع الذي تقع فيه

الأول = θ كما هي

الثاني = $180 - \theta$

الثالث = $180 + \theta$

الرابع = $360 - \theta$



إذا كانت $0 < \theta < 360°$

فأوجد θ التي تحقق

جا $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

الحل

جا θ موجبة ∴ تقع في الربع الأول أو الثاني

θ الحادة = $60°$

∴ الربع الأول = $60°$

∴ الثاني = $180 - 60 = 120°$

∴ $\theta \in \{60° ، 120°\}$

② جتا θ = $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

الحل

جتا سالبة في الثاني أو الثالث

θ الحادة = ٤٥° (بدون إشارة)

الثاني: ١٨٠ − ٤٥ = ١٣٥°

الثالث: ١٨٠ + ٤٥ = ٢٢٥°

∴ θ = ١٣٥° أو ٢٢٥°

---

③ ظا θ = $-\sqrt{3}$

الحل

ظا سالبة تقع في الثاني أو الرابع

θ الحادة = ٦٠°

الثاني: ١٨٠ − ٦٠ = ١٢٠°

الرابع: ٣٦٠ − ٦٠ = ٣٠٠

∴ θ = ١٢٠° أو ٣٠٠°

---

④ جتا θ = −٠٫٦٤٢

الحل

جتا سالبة θ في الثاني أو الثالث

θ الحادة ≃ ٥٠° ٣َ ٣١ً

الثاني = ١٨٠ − ٥٠° ٣َ ٣١ً = $\boxed{١٢٩° ٥٦َ ٢٩ً}$

الثالث = ١٨٠ + ٥٠° ٣َ ٣١ً = $\boxed{٢٣٠° ٣َ ٣١ً}$

إذا قطع الضلع النهائي للزاوية θ في الوضع القياسي دائرة الوحدة في ب ($-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{2}}$) (جتا ، جا) فأوجد ق(θ) حيث ٠ < θ < ٣٦٠°

الحل

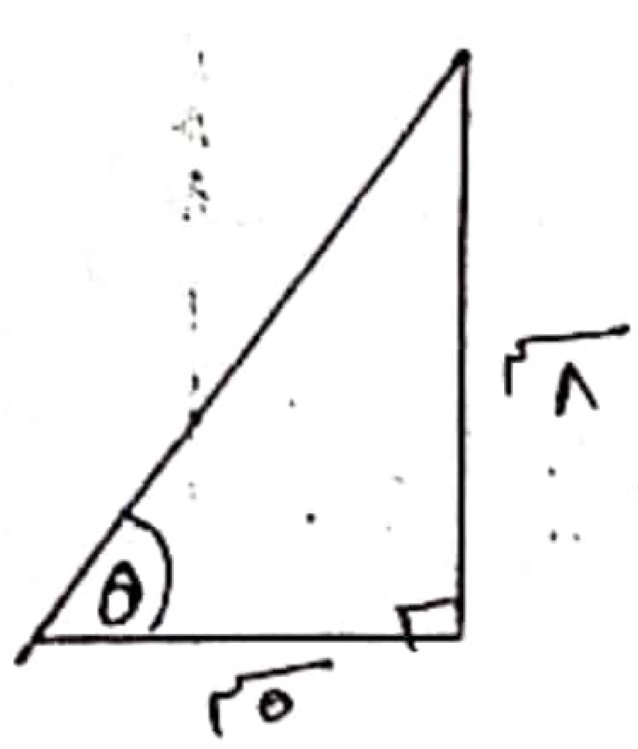
(− ، +) تقع في الربع الثاني

جا θ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ⟸ θ الحادة = ٤٥°

الربع الثاني = ١٨٠ − ٤٥ = ١٣٥°

∴ θ = ١٣٥°

من الأشكال الآتية أوجد قياس θ بالستيني



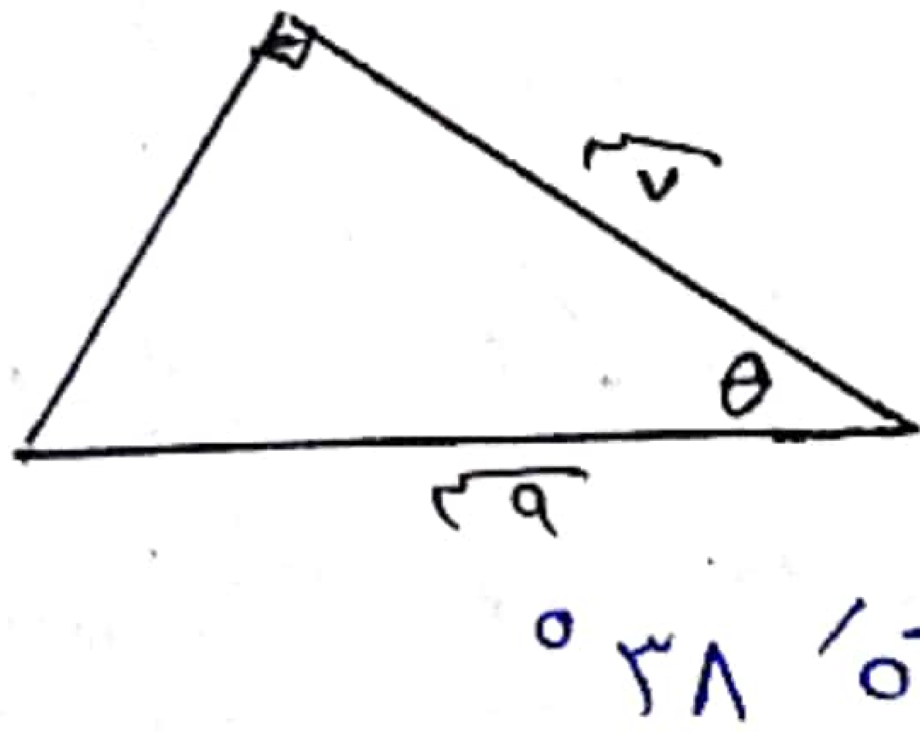
ظا θ = $\frac{٨}{٥}$ = $\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$

∴ θ حادة

∴ θ = ٥٧° ٥٩َ ٤٠ً

جتا θ = $\frac{٧}{٩}$ = $\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$

∴ θ حادة



∴ θ = ٣٨° ٥٦َ ٣٢ً

إذا كانت ظا θ = $\frac{٤}{٣}$ حيث θ أكبر زاوية موجبة ، θ ∈ [٠ ، ٣٦٠[

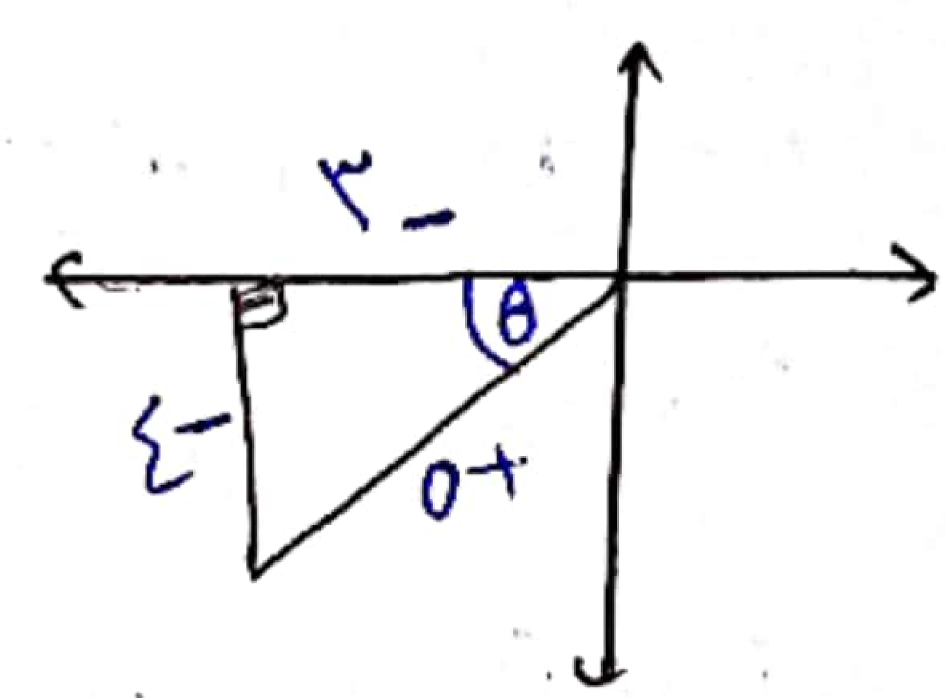
فأوجد قيمة α لأقرب دقيقة إذا كان

جا α = جا ١٥٠ جا (−θ) + $\frac{١}{٥}$ قتا (١٨٠ + θ) ظا ٢٢٥

الحل

ظا θ موجبة تقع الأول أو الثالث

أكبر زاوية موجبة ∴ θ ∈ الربع الثالث



∴ جا α = جا ١٥٠ × −جا θ + $\frac{١}{٥}$ × −قتا θ × ظا ٢٢٥

∴ جا α = جا ٣٠ × −جا θ − $\frac{١}{٥}$ قتا θ × ظا ٤٥

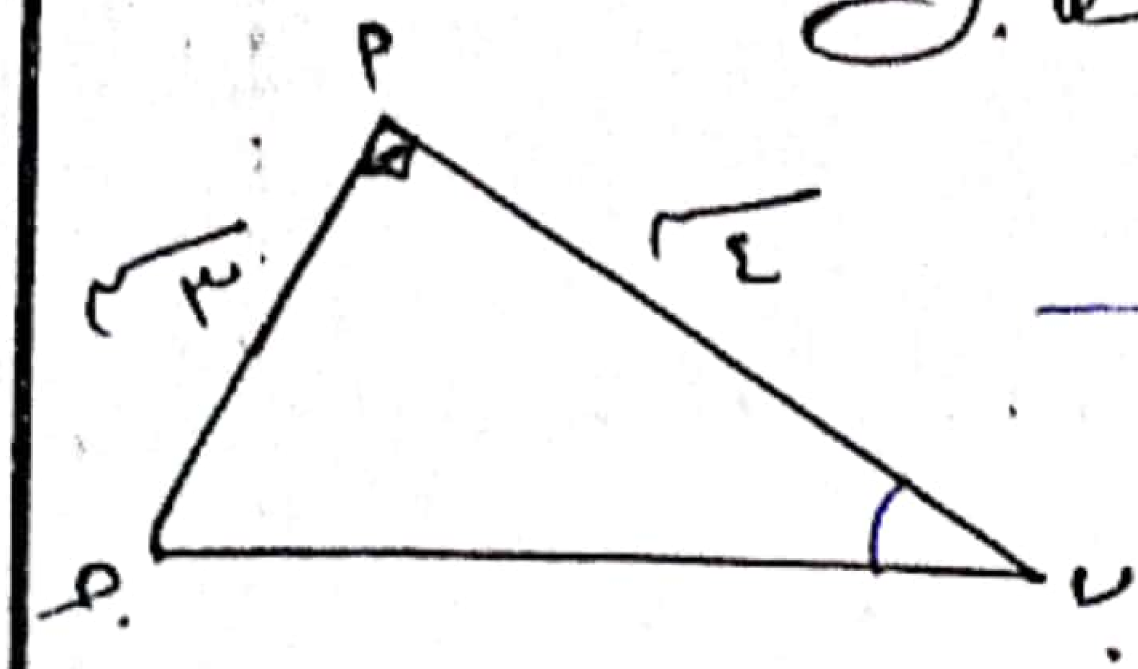
∴ جا α = $\frac{١}{٢}$ × −$\frac{−٤}{٥}$ − $\frac{١}{٥}$ × $\frac{−٥}{٤}$ × ١

جا α = $\frac{٢}{٥}$ + $\frac{١}{٤}$ = $\frac{١٣}{٢٠}$

α بالحاسبة = ٤٠° ٣٢' الأول

الثاني = ١٨٠ − ٤٠° ٣٢' = ١٣٩° ٢٨'

من الشكل المقابل



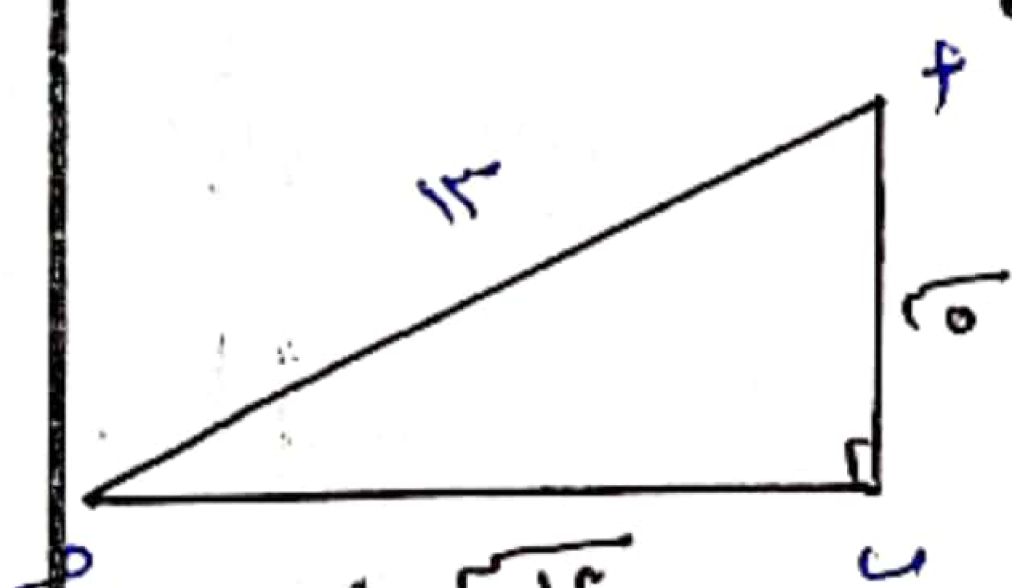
ق (ب̂) = ___

ق (ب̂) = ظا$^{-1}$ ($\frac{٣}{٤}$)

جا (جتا$^{-1}$ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) = ___

جتا$^{-1}$ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٣٠° ∴ جا ٣٠ = $\frac{١}{٢}$

من الشكل المقابل



جا (ظا$^{-1}$ $\frac{٥}{١٢}$) =

ظا$^{-1}$ $\frac{٥}{١٢}$ = ق (ج)

جا ج = $\frac{٥}{١٣}$

ظا$^{-1}$ $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ + ظتا$^{-1}$ $\sqrt{٣}$ = ٣٠° + ٣٠° = ٦٠°

جتا$^{-1}$ س + جا$^{-1}$ س = $\frac{\pi}{٢}$

م/ عبد الله

أ/ محمد عبد السلام