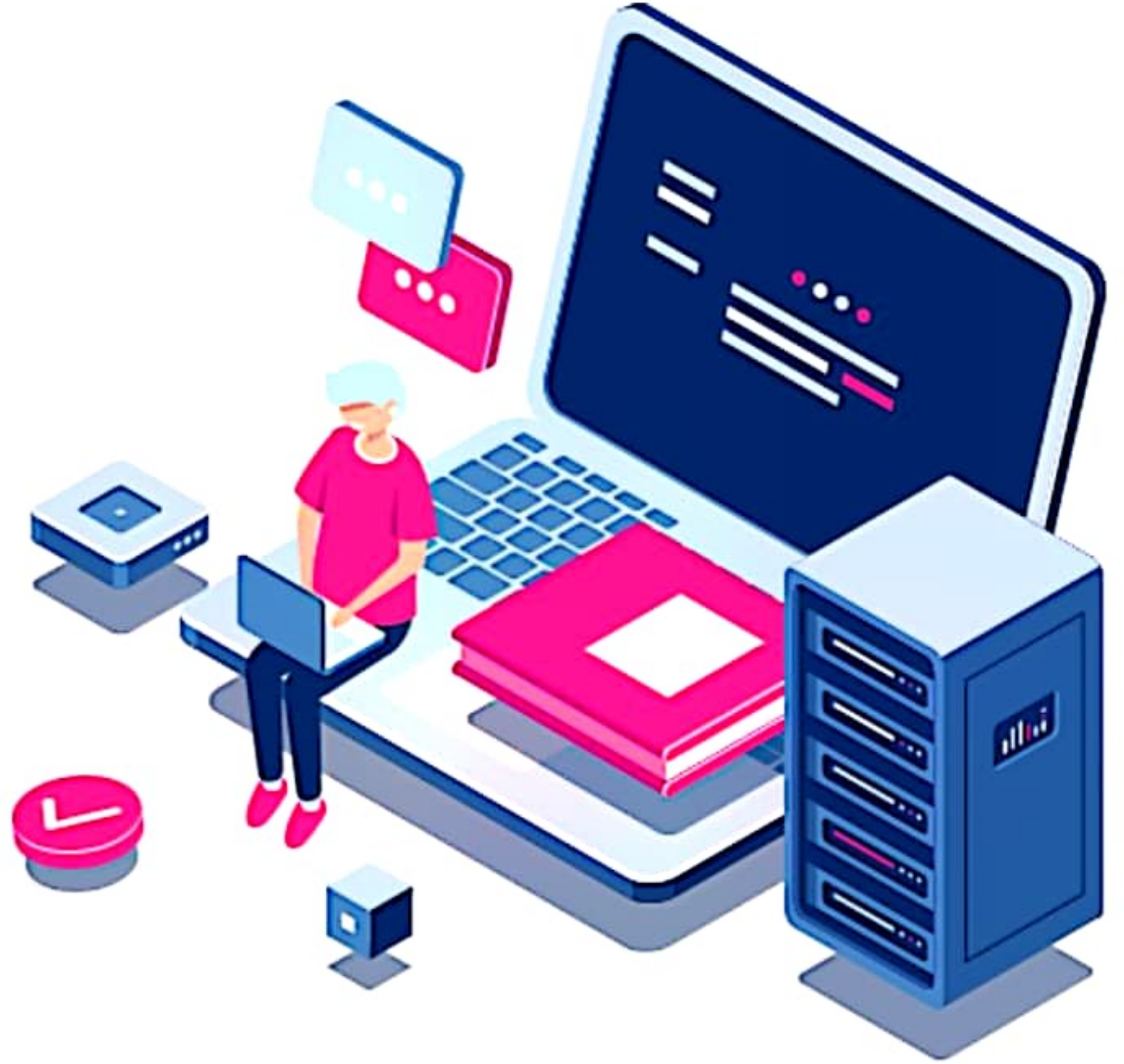


سلسلة

التجمع التعليمي



التجمع التعليمي



القناة الرئيسية: t.me/BAK111

بوت التواصل: [@BAK1117_bot](https://t.me/BAK1117_bot)

مسألة

المسألة (1) -

$$P(x) = \frac{x^2 - 1}{x} \quad \text{و} \quad D =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

$$\Delta: y = x \quad (1)$$

هنا تكون Δ مماساً للمكان Δ في C هو $-\infty, +\infty$ حيث
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (P(x) - y) = 0$ أنه يتحقق:

$$P(x) - y = \frac{x^2 - 1}{x} - \frac{x}{1} = \frac{x^2 - 1 - x^2}{x} = \frac{-1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (P(x) - y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{x} \right) = 0$$

(2) الوضع ليس بين C و Δ :

$$P(x) - y = \frac{-1}{x}$$

ندرس إشارة الفرق:

نشكل جدول:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$P(x) - y$	+		-
الوضع ليس	C فوق Δ		C تحت Δ

(3) لتقارب Δ مائل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} P(x) = \frac{0 - 1}{0} = -\frac{1}{0}$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0^+} P(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$x = 0$ مقام ساقولي، C يقع بين Δ وتقارب

$$* \lim_{x \rightarrow 0^-} P(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$x = 0$ مقام ساقولي، C يقع يسار Δ وتقارب

٤) صف يكون P تابع فردى - يجب أن تكون حقيقة "فككت"

$$①) x \in D \Rightarrow -x \in D$$

$$②) P(-x) = -P(x)$$

$$P(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{-x} = \frac{x^2 - 1}{-x} = -\left(\frac{x^2 - 1}{x}\right)$$

$$= -P(x)$$

إذاً: P تابع فردى و C متساوية النسبة للبدا 0.

٥) P صنف مستمر ارتقاقي على المجالين $]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right) = +\infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} P(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} P(x) = +\infty$$

$$P'(x) = \frac{2x \cdot x - 1 \cdot (x^2 - 1)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2} > 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$P'(x)$	+	+	+
$P(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

الرسم لا يتغير

٦) الرسم:

x	y	نقطة
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
-1	-1	(-1, -1)

المعادلة: $x = 0$ معادلتان متوازيان $\Delta: y = x$

المسألة (2) -

$$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{في } D_f =]-\infty, +\infty[$$

① متى يكون f فردية - يجب أن تتحقق الشرطين:
 "حقيقة" $x \in D \Rightarrow -x \in D$ (a)

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{(b)}$$

$$f(-x) = -x + \frac{-x}{\sqrt{(-x)^2+1}} = -x - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= - \left(x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) = -f(x)$$

إذاً: f فردية.
 * البرهان لثباتية: C متناظرة بالنسبة للمبدأ O .

② $\Delta: y = x+1$
 • شكل الفرق: $f(x) - y_{\Delta} = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - (x+1)$

$$= x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - x - 1$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{المبرقة}$$

$$= \frac{(x - \sqrt{x^2+1})(x + \sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}(x + \sqrt{x^2+1})}$$

$$= \frac{x^2 - x^2 - 1}{\sqrt{x^2+1}(x + \sqrt{x^2+1})} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}(x + \sqrt{x^2+1})}$$

• نذهب لفرق في جوار $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y_{\Delta}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}(x + \sqrt{x^2+1})} \right) = 0$$

إذاً: $\Delta: y = x+1$ متانظرة لـ C في جوار $+\infty$.

الموضع البيني: ندرس استقامة الفرق:

$$P(x) - y_{\Delta_1} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}(x+\sqrt{x^2+1})} < 0$$

إذاً: Δ_1 تحت C .

$$P(x) - y_{\Delta_2} = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - (x-1) \quad \Delta_2: y = x-1 \quad \text{شكل الفرق:}$$

$$= x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - x + 1$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1$$

(A)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (P(x) - y_{\Delta_2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}} + 1 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{|x| \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{-x \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} + 1 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} + 1 \right) = \frac{-1}{\sqrt{1+0}} + 1 = -1 + 1 = 0$$

إذاً: Δ_2 مماس للـ C في $-\infty$.

الموضع البيني: ندرس استقامة الفرق:

$$P(x) - y_{\Delta_2} = \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} + 1 = \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} > 0$$

إذاً: Δ_2 فوق C .

٤) معرف ومصرفا متناقض على $[-\infty, +\infty]$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) = +\infty$$

لذلك كانت

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) = -\infty$$

$$P'(x) = 1 + \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+1} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot x}{\sqrt{x^2+1}^2}$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}^2}$$

$$= 1 + \frac{\frac{x^2+1 - x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= 1 + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0$$

والتي لا يوجد $+\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
$P'(x)$		+
$P(x)$	$-\infty$	$+\infty$

$$\Delta_1: y = x + 1$$

٥) لاسم لا يتكافئ

$$x=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow (0,1)$$

$$x=1 \Rightarrow y=2 \Rightarrow (1,2)$$

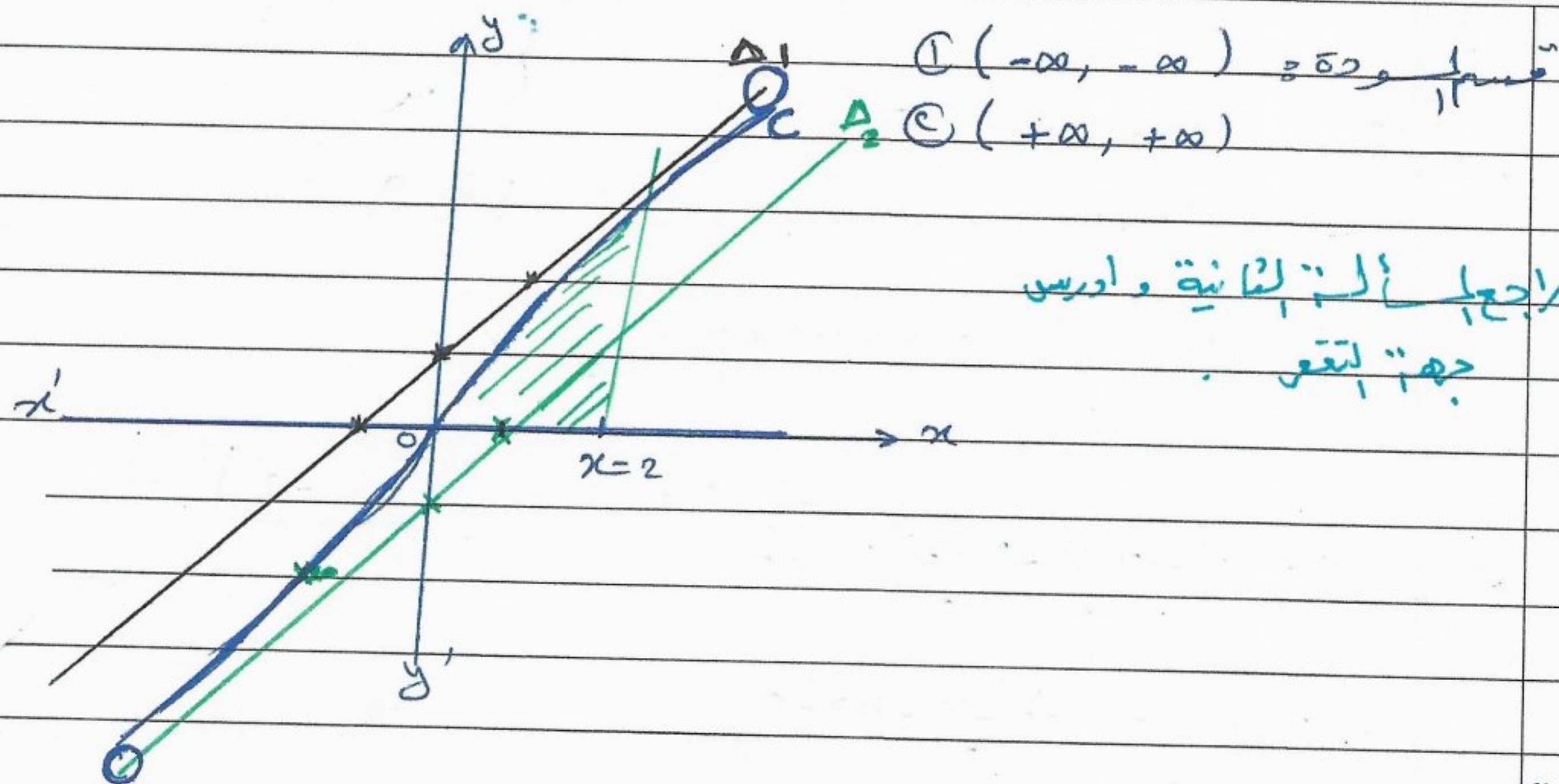
$$x=-1 \Rightarrow y=0 \Rightarrow (-1,0)$$

$$\Delta_2: y = x - 1$$

$$x=0 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow (0,-1)$$

$$x=1 \Rightarrow y=0 \Rightarrow (1,0)$$

$$x=-1 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow (-1,-2)$$



* ارجع إلى الثانية وادرس
جهة التقعر .

⑤ من 0 إلى 2 : $x=0, x=2$

$$S = \int_0^2 P(x) dx$$

* ادرس في حال كانت

بين $x=-1$ و $x=+1$.

$$= \int_0^2 \left(x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(x + \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(x + x \cdot (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(x + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x \cdot (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}+1} \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+1)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right]_0^2 = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^2$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \sqrt{x^2+1} \right]_0^2 = \frac{4}{2} + \sqrt{5} - (0+1)$$

$$= 2 + \sqrt{5} - 1 = \sqrt{5} + 1$$

مسألة (3) -

$$f(x) = \frac{2x}{(x-1)^2}$$

$$D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

① النهاية

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{(x-1)^2} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{(x-1)^2} = \frac{2}{0}$$

$$* \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty \quad * \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

ليس للتابع نهاية عند $x=1$

$$x=1$$

النهاية

②

عندما $x \rightarrow 1^+$ فإن C يقع بين 1 و x عندما $x \rightarrow 1^-$ فإن C يقع بين x و 1 الفاصل Δ مفتوح : $y=0$

ندرس إشارة الفرق :

$$f(x) - y = \frac{2x}{(x-1)^2} - 0$$

$$= \frac{2x}{(x-1)^2}$$

نستخدم الفرق :

$$f(x) - y = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x) - y$	$-$	0	$+$	$+$
الموقع لـ Δ	فوق Δ	تحت Δ	فوق Δ	فوق Δ

P معرف مستمر ما عدا في $]-\infty, 1[$ و $]1, +\infty[$

③

$$f'(x) = \frac{2 \cdot (x-1)^2 - 2(x-1) \cdot 1 \cdot 2x}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)(2(x-1) - 4x)}{(x-1)^4}$$

$$P'(x) = \frac{2x - 2 - 4x}{(x-1)^3} = \frac{-2x - 2}{(x-1)^3}$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow -2x - 2 = 0$$

$$2x = -2$$

$$\boxed{x = -1}$$

$$P(-1) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	-1		$+\infty$
P'(x)	-	0	+	-
P(x)	0	$\searrow -\frac{1}{2}$	$\nearrow +\infty$	$\searrow 0$

$$P(-1) = -\frac{1}{2} \text{ قيمة حرجية}$$

$x = 1$ شاقولي

① الرسم: انقلا ت:

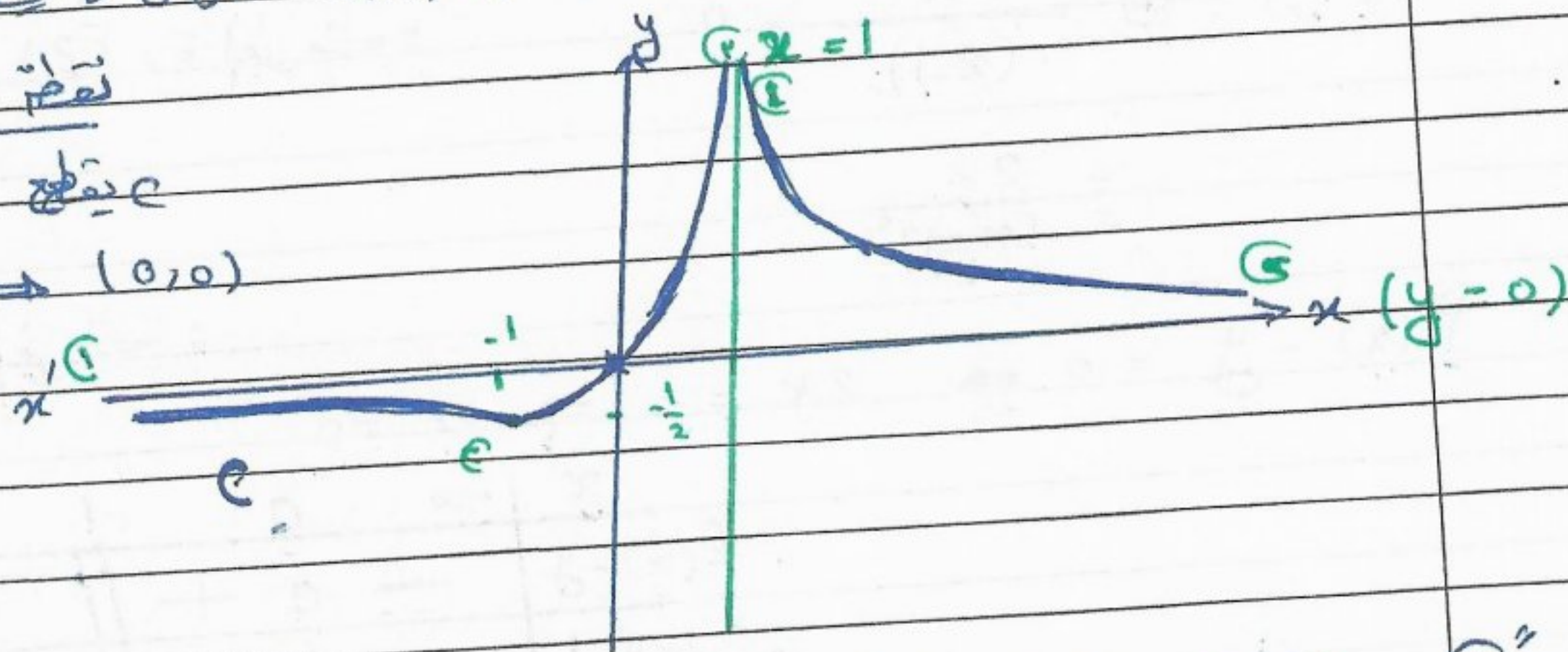
$y = 0$ أفقي

قسم الصورة: $(-\infty, 0)$, $(-1, -\frac{1}{2})$, $(1, +\infty)$ فرع اول
 $(+\infty, 0)$, $(1, +\infty)$ فرع ثاني

نقطة مساس عدة:

$P(x) = 0$ نقطة تقاطع مع المحاور

$$2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 0)$$



لنا قسمة:

$$m \in]-\infty, -\frac{1}{2}[\quad (*)$$

$$m = -\frac{1}{2} \quad (*)$$

$$m \in]-\frac{1}{2}, 0[\quad (*)$$

$$m = 0 \quad (*)$$

$$m \in]0, +\infty[\quad (*)$$

$$m(x^2 - 2x) - 2x + m = 0 \quad (2)$$

$$mx^2 - 2mx - 2x + m = 0$$

$$m(x^2 - 2x + 1) = 2x$$

$$m = \frac{2x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{2x}{(x-1)^2}$$

$$m = P(x)$$

مسألة (4) -

$$g(x) = \frac{x^2 + bx + a}{x-1}$$

$g(0) = 2$ $\left. \begin{array}{l} g'(0) = 0 \end{array} \right\} 2$ عند $x=0$ $\frac{x-1}{0-1}$ g يُقبل قيمة حالية

$$g(0) = 2 \Rightarrow \frac{0 + b(0) + a}{0 - 1} = 2$$

$$g'(x) = \frac{(2x+b) \cdot (x-1) - 1 \cdot (x^2 + bx + a)}{(x-1)^2}$$

$$\frac{a}{-1} = 2 \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x + bx - b - x^2 - bx - a}{(x-1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{x^2 - 2x - b - a}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow g'(0) = 0 \Rightarrow \frac{0 - 2(0) - b + 2}{(0-1)^2} = 0 \Rightarrow -b + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{b = 2}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{x-1}$$

$$D_P =]-\infty, +1[\cup]1, +\infty[, P(x) = x + 3 + \frac{1}{x-1}$$

$$\Delta = y = x + 3 \quad (1)$$

$$P(x) - y_\Delta = x + 3 + \frac{1}{x-1} - (x+3) = \frac{1}{x-1}$$

نذهب لفرق في جوار $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (P(x) - y_\Delta) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x-1} \right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

إذاً Δ متقارب مطلق في جوار $+\infty$

نذهب لفرق في جوار $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (P(x) - y_\Delta) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x-1} \right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$P(x) - y = \frac{1}{x-1}$$

إذاً Δ مقامات Δ للـ C في جوار $-\infty$:
 * الموضع لـ Δ : ندرس إشارة الفرق Δ

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$P(x) - y$	—		+
الموضع لـ Δ	$\Delta < 0$		$\Delta > 0$

⑤ أيضا يأتي : $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x+3 + \frac{1}{x-1} \right) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1} P(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(x+3 + \frac{1}{x-1} \right) = \frac{1}{0}$

* $\lim_{x \rightarrow 1^+} P(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

* $\lim_{x \rightarrow 1^-} P(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

⑥ P معرف وصغر واستقامتي على $]-1, +\infty[$ و $]-\infty, 1[$
 $P'(x) = 1 + \frac{0 \cdot (x-1) - 1 \cdot 1}{(x-1)^2}$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2}$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow (x-1)^2 - 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 1$$

الحل $x-1 = 1 \Rightarrow \boxed{x=2}$

$P(2) = 5$

الحل $x-1 = -1 \Rightarrow \boxed{x=0}$

$P(0) = 2$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$P'(x)$	+	0	-	0
$P(x)$	$-\infty \rightarrow 2$		$5 \rightarrow +\infty$	

حقبة يتغير x كل البريد للمعادلة $P(x) = 0$ الى $[-3, -2]$ Δ Δ

$$\text{بجاء أنه يتحقق: } P(-3) \cdot P(-2) < 0$$

$$P(-3) = -\frac{1}{4} \quad \& \quad P(-2) = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow P(-3) \cdot P(-2) < 0$$

④ الرسم : لما كانت $x=1$ مقام شاذ

$$\Delta: y = x + 3 \quad \text{مقام مائل}$$

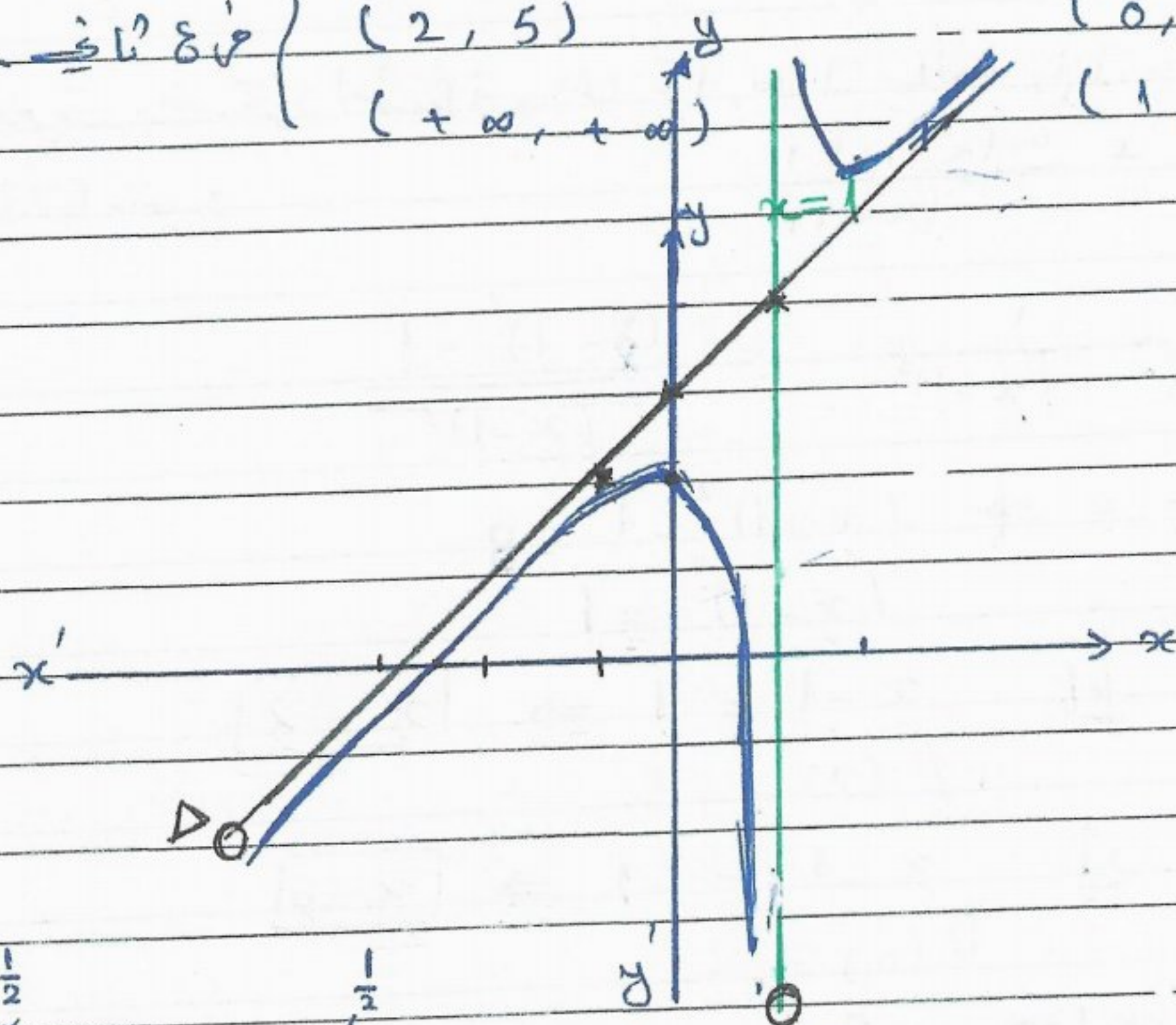
$$x=0 \Rightarrow y=3 \Rightarrow (0, 3)$$

$$x=-1 \Rightarrow y=2 \Rightarrow (-1, 2)$$

قسم الوحدة :

$$\left. \begin{array}{l} (-\infty, -\infty) \\ (0, 2) \\ (1, -\infty) \end{array} \right\} \text{ فرع أول}$$

$$\left. \begin{array}{l} (1, +\infty) \\ (2, 5) \\ (+\infty, +\infty) \end{array} \right\} \text{ فرع ثاني}$$



$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} P(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x + 3 + \frac{1}{x-1} \right) dx \quad \text{⑤}$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 3x + \ln |x-1| \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} + \frac{3}{2} + \ln \left| -\frac{1}{2} \right| - (0)$$

$$= \frac{13}{8} - \ln 2$$

- مسألة (5) -

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

في $D =]0, +\infty[$
 : $]0, +\infty[$ على f مستمرة

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) = 0 + \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) = +\infty + 0 = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{0 \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} \cdot 2}{\sqrt{x}^2}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{x}} + \frac{-1}{x\sqrt{x}}$$

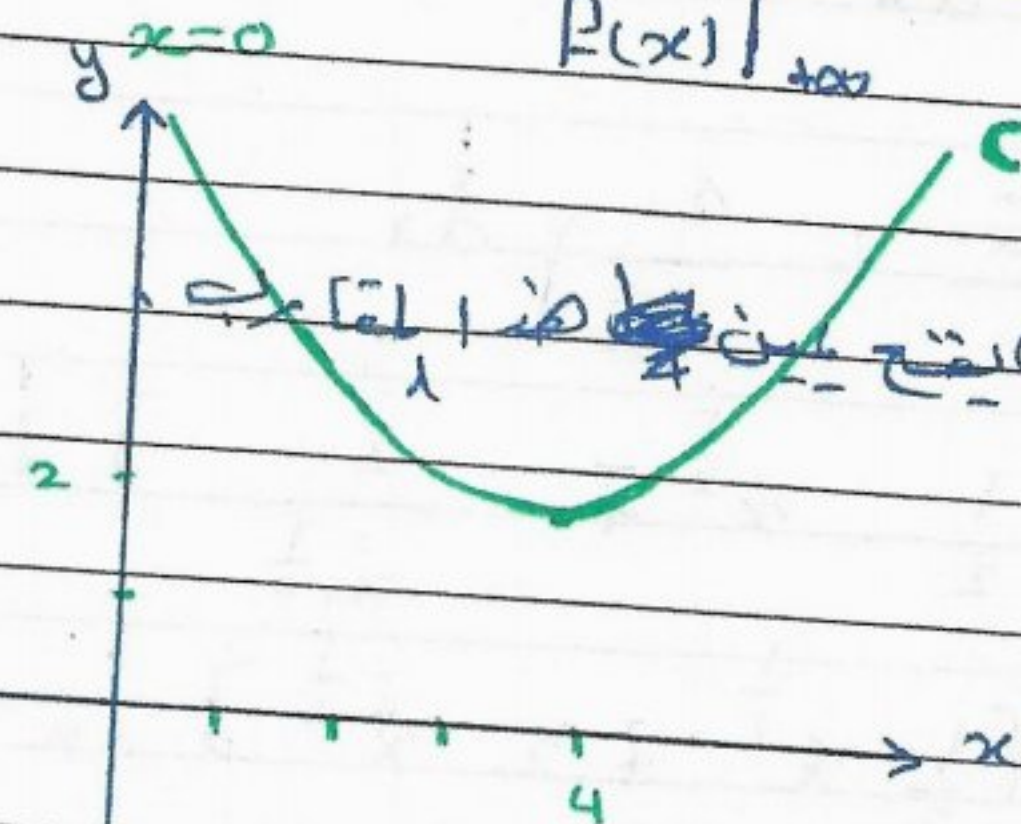
$$= \frac{x - 4}{4x\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$f(4) = 2$$

نقطة حرجية

x	0	4	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$



نقطة حرجية
 : $x=0$ و $x=4$

$$V = \pi \int_1^2 P(x) dx \quad \text{نقطة ١, ٢} \quad (٢)$$

$$= \pi \int_1^2 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$= \pi \int_1^2 \left(\frac{x}{4} + 2 \cdot \frac{\sqrt{x}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x} \right) dx$$

$$= \pi \int_1^2 \left(\frac{x}{4} + 2 + \frac{4}{x} \right) dx$$

$$= \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{4}x + 2 + 4 \cdot \frac{1}{x} \right) dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{2} + 2x + 4 \ln x \right]_1^2$$

$$= \pi \left[\frac{1}{8} \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 4 \ln 2 - \left(\frac{1}{8} \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 4(0) \right) \right]$$

$$= \left[\frac{4}{8} + 4 + 4 \ln 2 - \frac{1}{8} - 2 \right] \pi$$

$$= \left[\frac{3}{8} + 2 + 4 \ln 2 \right] \pi = \left[\frac{19}{8} + 4 \ln 2 \right] \pi$$

$$S = \int_1^2 P(x) dx \quad \text{نقطة ١, ٢} \quad (٣)$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} \right) dx$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} + 2 x^{-\frac{1}{2}} \right] dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 2 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_1^2$$

$$= \left[\frac{1}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + 4 \cdot x^{\frac{1}{2}} \right]^2$$

$$= \left[\frac{1}{3} \sqrt{x^3} + 4 \sqrt{x} \right]^2 = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{8} + 4\sqrt{2} - \left(\frac{1}{3} + 4 \right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{2} + \frac{4\sqrt{2}}{1} - \frac{1}{3} - \frac{4}{1} = \frac{14\sqrt{2} - 13}{3}$$

$$P(9.1)$$

⑤ "قانون التقريبية"

$$a = 9 \quad h = 0.1$$

$$P(9) = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6}$$

نسب

$$P'(9) = \frac{9-4}{4 \times 9 \times 3} = \frac{5}{108}$$

$$\Rightarrow P(a+h) \sim P(a) + P'(a) \cdot h \quad \text{"قانون التقريبية"}$$

$$P(9+0.1) \sim P(9) + P'(9) \cdot (0.1)$$

$$P(9.1) \sim \frac{13}{6} + \frac{5}{108} \cdot \frac{1}{10}$$

$$\sim \frac{13}{6} + \frac{1}{216} \sim \frac{469}{216}$$

- المسألة (6) -

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$D =]-\infty, +\infty[$$

①) يجب أن يكون f تابعاً فردياً - يجب أن تكون دالة زوجية

$$x \in D \Rightarrow -x \in D \quad (a)$$

$$f(-x) = -f(x) \quad (b)$$

$$f(-x) = \frac{-x}{\sqrt{(-x)^2+1}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = -f(x)$$

إذاً f تابع فردي.

الصفة التناظرية: C متناظر بالنسبة للمبدأ O .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}} \right) \quad (c)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{|x| \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{+x \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1$$

$y = b$ مقارب أفقي

②) الوضع لنسبة: ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$

$$f(x) - y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{(x - \sqrt{x^2+1})(x + \sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}(x + \sqrt{x^2+1})}$$

$$= \frac{x^2 - x^2 - 1}{\sqrt{x^2+1}(x + \sqrt{x^2+1})} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}(x + \sqrt{x^2+1})} < 0$$

إذاً C $\bar{C}$ $\bar{C}$ $\bar{C}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{-x \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \right) = \frac{-1}{1} = -1$$

1- $y = 1$ مقام للخط المماس في C بواسطة x

* لم نجد المماس في C (الفرقة 3)

$$P(x) - y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{1} = \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} > 0$$

C فوق الخط

(2) P معرف ومستمرة واستمرارية على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +1$$

النهايات

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -1$$

الاستمرارية

$$P'(x) = 1 \cdot \sqrt{x^2+1} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot x$$

$$= \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{x^2+1 - x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$P'(x)$		
$P(x)$	-1	$+1$

+

↗

(3) m هو ميل المماس في A

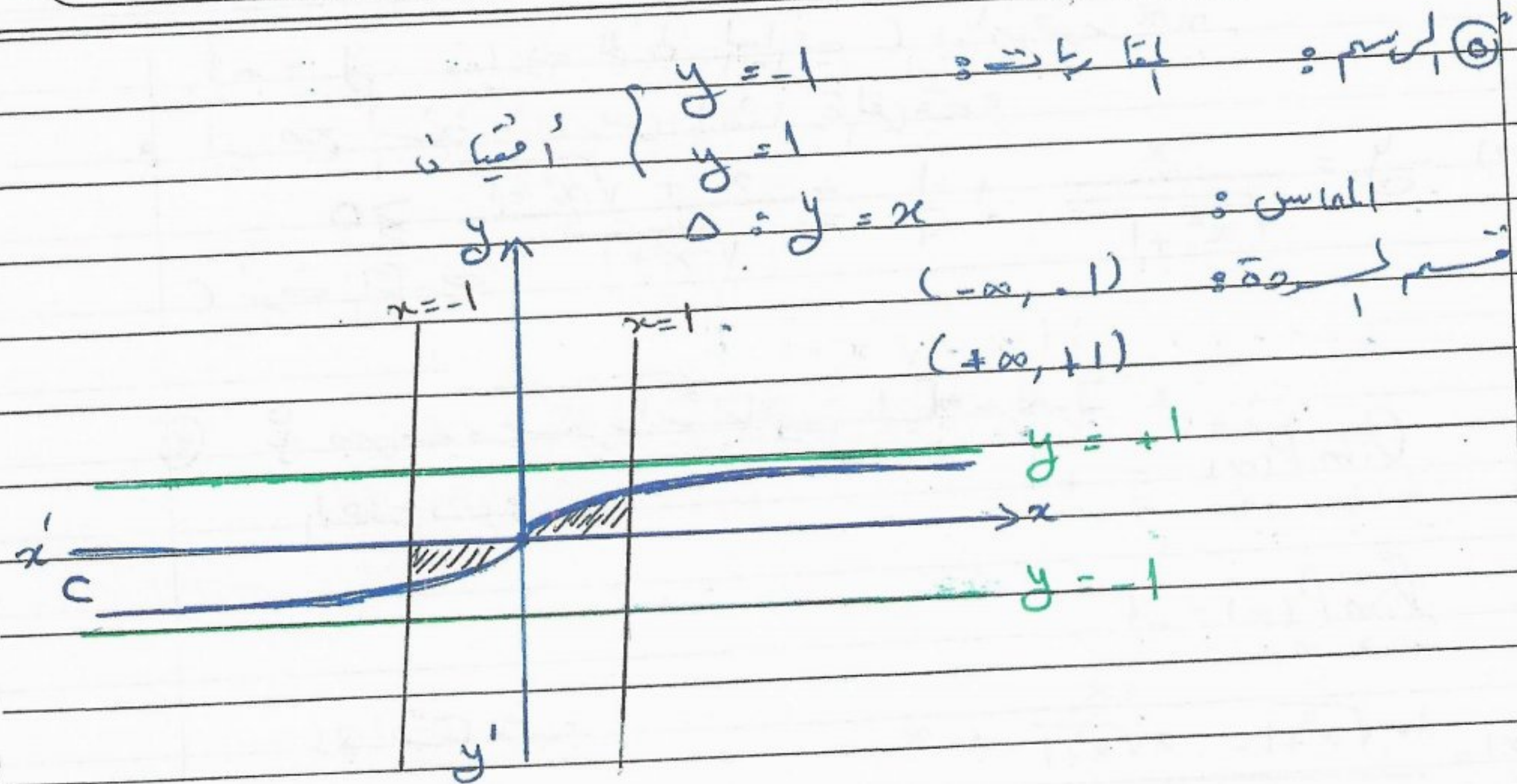
$$m = P'(0) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\Delta: y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\Delta: y - 0 = 1(x - 0)$$

$$\Delta: y = x$$

→ منحنى P يقع فوق الخط Δ



⑥ المساحة : $y = x$ $y = 1$ $y = -1$

بالنسبة للمماس $y = x$ وأحد هاتين $y = 1$ و $y = -1$ xx' xx'

ناتنا نقوم بحساب مساحة $y = x$ $y = 1$ $y = -1$ $[0, 1]$ ونضرب الناتج بـ 2.

$$S = 2 \int_0^1 f(x) dx$$

$$= 2 \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$= 2 \cdot \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} dx$$

$$= 2 \cdot \int_0^1 \frac{\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^1 = 2 \cdot [\sqrt{x^2+1}]_0^1$$

$$= 2(\sqrt{2} + 1) = 2\sqrt{2} + 2$$

مسألة (7) -

$$P(x) = \frac{ax^2 + bx + 1}{x-1}$$

$$P =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$P(-1) = 0$$

$$P'(-1) = 0$$

أولاً:

$$P(-1) = 0 \Rightarrow \frac{a - b + 1}{-2} = 0 \Rightarrow a - b + 1 = 0$$

$$a = b - 1 \quad (1)$$

$$P'(x) = \frac{(2ax + b)(x-1) - 1 \cdot (ax^2 + bx + 1)}{(x-1)^2} = \frac{2ax^2 - 2ax + bx - b - ax^2 - bx - 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{ax^2 - 2ax - b - 1}{(x-1)^2}$$

$$P'(-1) = 0 \Rightarrow \frac{a + 2a - b - 1}{4} = 0 \Rightarrow 3a - b - 1 = 0 \quad (2)$$

نعوّض (1) في (2):

$$3(b-1) - b - 1 = 0$$

$$3b - 3 - b - 1 = 0$$

$$2b - 4 = 0 \Rightarrow b = 2$$

$$a = 2 - 1 = 1$$

نعوّض في (1):

$$\Rightarrow P(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x-1}$$

$$\begin{array}{r} x+3 \\ x-1 \overline{) x^2 + 2x + 1} \\ \underline{+ x^2 + x} \\ 3x + 1 \\ \underline{+ 3x + 3} \\ 4 \end{array}$$

ثانياً:

$$P(x) = x + 3 + \frac{4}{x-1}$$

$$d: y = x + 3 \quad (3)$$

$$P(x) - y = x + 3 + \frac{4}{x-1} - (x+3) = \frac{4}{x-1}$$

نشكل البسط:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (P(x) - y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x-1} \right) = 0 \quad \text{تذهب البقية في جوار +\infty}$$

إذاً: d مقارب حائل للخط C .

* لم وضع البنية: ندرس بواسطة البقية:

$$P(x) - y = \frac{4}{x-1}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$P(x) - y$		—		+	
الوضع البنية	C تحت المقارب			C فوق المقارب	

④ معرفة مستمرة واستباقية على $]1, +\infty[$ و $] -\infty, 1[$
إنها بديهية:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x-1} \right) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} P(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(x + 3 + \frac{4}{x-1} \right) = \frac{4}{0}$$

$$* \lim_{x \rightarrow 1^+} P(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$x=1$ مقارب رأسي، C يقع بين المقارب

$$* \lim_{x \rightarrow 1^-} P(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$x=1$ مقارب رأسي، C يقع يسار المقارب.

الاستباقية:

$$P'(x) = \frac{(2x+2) \cdot (x-1) - 1 \cdot (x^2+2x+1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x + 2x - 2 - x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0$$

$$P(3) = 8$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \quad \text{أما:}$$

$$P(-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{أو:}$$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$P'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow 0$	$\searrow -\infty$	$\nearrow +\infty$

④ متى يكون مركز تناظر لـ C يجب أن يتحقق $I(1, 4)$ و $b, 2$

$$P(x_0 + h) + P(x_0 - h) = 2y_0 \quad (*)$$

$$P(1-h) + P(1+h) = 8$$

$$P(1+h) = 1+h+3 + \frac{4}{1+h-1} = 4+h + \frac{4}{h}$$

$$P(1-h) = 1-h+3 + \frac{4}{1-h-1} = 4-h - \frac{4}{h}$$

نجمع:

$$P(1+h) + P(1-h) = 8 = 2y_0$$

إذاً: I مركز تناظر لـ C

⑤ الرسم: معادلات:

$$\Delta: y = x + 3$$

$$x=0 \Rightarrow y=3 \Rightarrow (0, 3)$$

$$y=0 \Rightarrow x=-3 \Rightarrow (-3, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{قسم الوجود} \\ \text{خارجة} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (-\infty, -\infty) \\ (-1, 0) \\ (1, -\infty) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{خارجة} \\ \text{خارجة} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1, +\infty) \\ (3, 8) \\ (+\infty, +\infty) \end{array}$$

نقطة مساعمة: C يقع فوق $y' = 0$ $x=0$
 $P(0) = -1 \Rightarrow (0, -1)$

$$\int P(x) dx$$

$$= \int \left(x + 3 + \frac{4}{x-1} \right) dx$$

$$= \int \left(x + 3 + 4 \cdot \frac{1}{x-1} \right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x + 4 \ln|x-1| + C$$

⑤ طلب إضافي: ناقش بياناً حول المعادلات
المتناظرة:

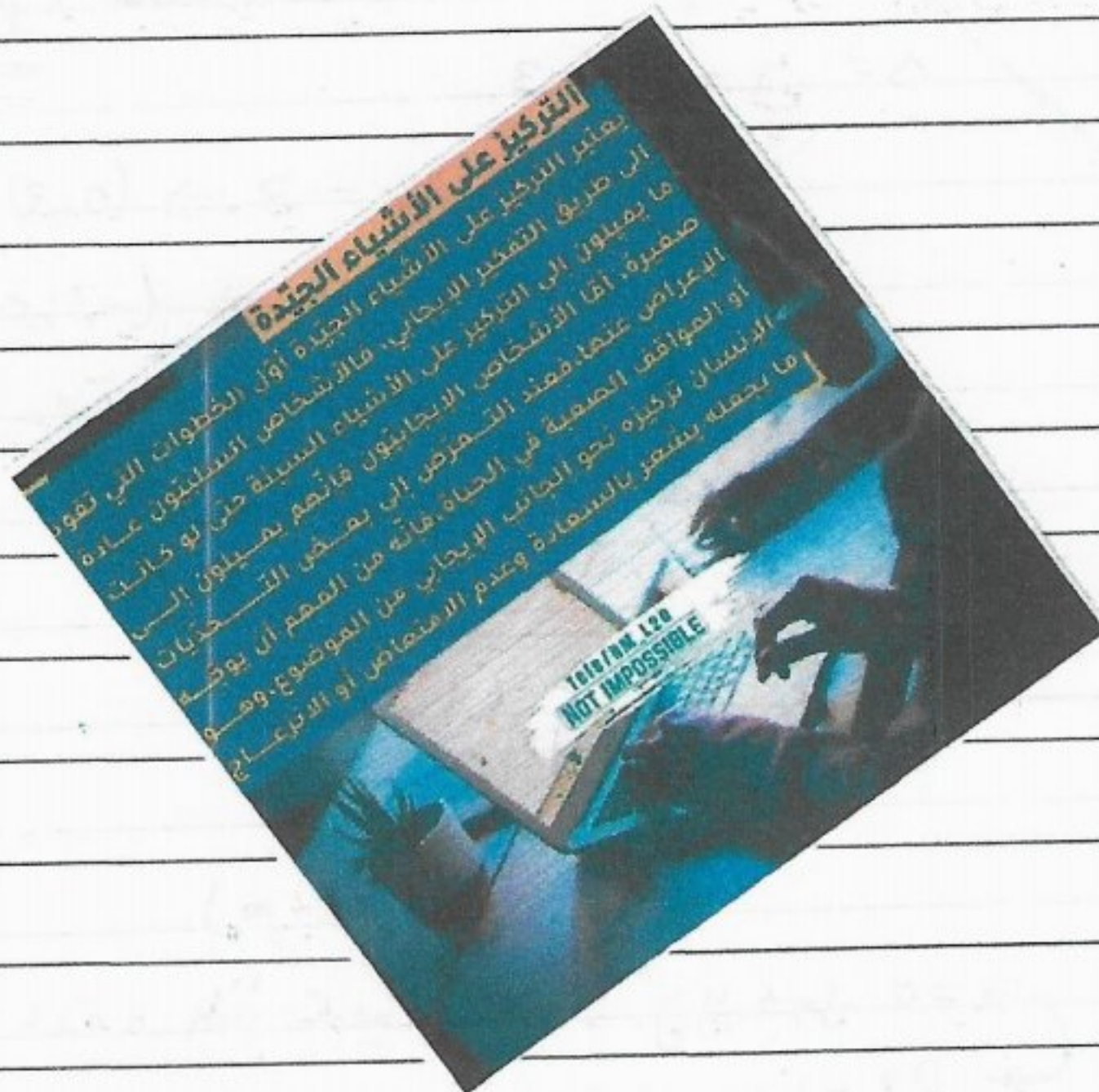
⑥ للمعادلة حلين $m \in]-\infty, 0[$

⑦ للمعادلة حل واحد $m = 0$

⑧ للمعادلة صيغة الحل $m \in]0, 8[$

⑨ للمعادلة حلين $m = 8$

⑩ للمعادلة حلين $m \in]8, +\infty[$



مسألة (8) -

$$P(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 10x - 11}{(x-1)^2}$$

$$D =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - 3x^2 + 10x - 11}{(x-1)^2} \right) = +\infty$ نقطة

$\lim_{x \rightarrow 1} P(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 - 3x^2 + 10x - 11}{(x-1)^2} \right) = \frac{-3}{0}$

* $\lim_{x \rightarrow 1^+} P(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty$

$x=1$ مقام، $x=1$ اقولي، C يقع بين 1 و 1

* $\lim_{x \rightarrow 1^-} P(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty$

$x=1$ مقام، $x=1$ اقولي، C يقع بين 1 و 1

الاشتقاق: $P'(x) = \frac{(3x^2 - 6x + 10)(x-1)^2 - 2(x-1) \cdot 1 \cdot (x^3 - 3x^2 + 10x - 11)}{(x-1)^4}$

$$= \frac{(x-1) [(3x^2 - 6x + 10)(x-1) - 2(x^3 - 3x^2 + 10x - 11)]}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{3x^3 - 6x^2 + 10x - 3x^2 + 6x - 10 - 2x^3 + 6x^2 - 20x + 22}{(x-1)^3}$$

$$P'(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{(x-1)^3}$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$$

$$x^2(x-3) - 4(x-3) = 0$$

$$(x-3)(x^2 - 4) = 0$$

$$(x-3)(x-2)(x+2) = 0$$

الحل: $x=3 \Rightarrow P(3) = \frac{19}{4}$

$x=2 \Rightarrow P(2) = 5$

$x=-2 \Rightarrow P(-2) = -\frac{17}{3}$

x	$-\infty$	-2	1	2	3	$+\infty$
$P'(x)$	$+$	0	$-$	$+$	0	$+$
$P(x)$	$-\infty$	$\rightarrow \frac{-17}{3}$	$-\infty$	$-\infty \rightarrow 5$	$\rightarrow \frac{19}{4}$	$+\infty$

$$P(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 10x - 11}{(x-1)^2}$$

$$d: y = x - 1 \quad (5)$$

$$P(x) = x - 1 + \frac{7x - 10}{(x-1)^2}$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x + 1 \overline{) x^3 - 3x^2 + 10x - 11} \\ \underline{+ x^3 + 2x^2 + x} \\ -x^2 + 9x - 11 \\ \underline{+ x^2 + 2x + 1} \\ 7x - 10 \end{array}$$

* لنشكل الفرق :

$$P(x) - y_d = x - 1 + \frac{7x - 10}{(x-1)^2} - (x - 1)$$

$$= \frac{7x - 10}{(x-1)^2}$$

* نرى الفرق في $+\infty$ و $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (P(x) - y_d) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{7x - 10}{(x-1)^2} \right) = 0$$

إذاً d مماس على المنحنى C في $+\infty$ و $-\infty$

(٧) الوضوح ليس :

لنرى أيضاً الفرق :

$$P(x) - y_d = \frac{7x - 10}{(x-1)^2}$$

نخدم الفرق :

$$P(x) - y_d = 0 \Rightarrow 7x - 10 = 0 \Rightarrow 7x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{7}$$

x	$-\infty$	1	$\frac{10}{7}$	$+\infty$
$P(x) - y_d$	-	-	0	+
الوضع، لسنه	د كته	د كته	د كته	د كته

الرسم : اقارب : $x=1$ مناقوص

$$d: y = x - 1$$

$$x=0 \rightarrow y=-1 \Rightarrow (0, -1)$$

$$y=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1, 0)$$

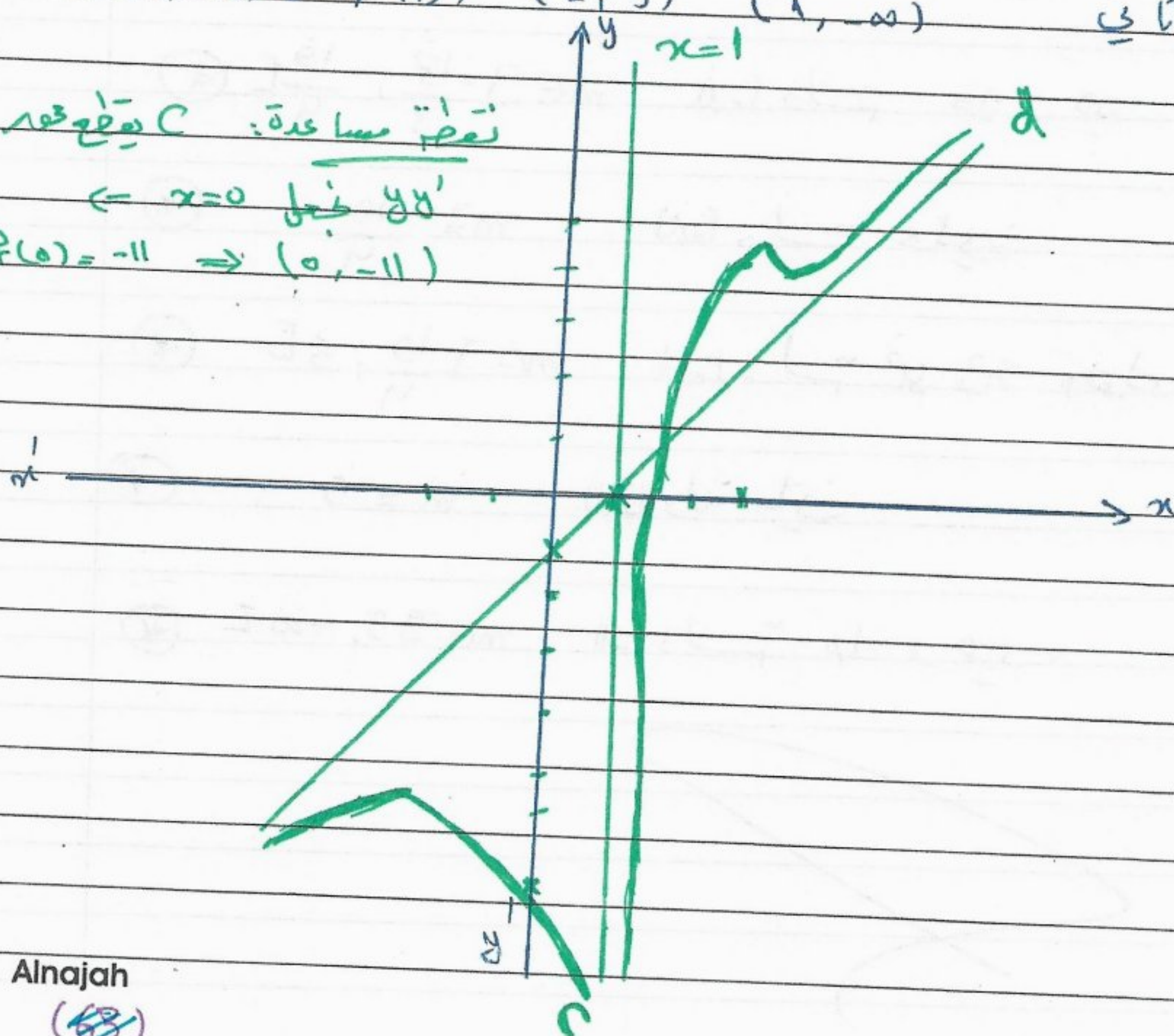
قسم السود : $(-\infty, -\infty)$ $(-2, -5.9)$ $(1, -\infty)$ $(1, -\infty)$ $(1, -\infty)$

قسم ثاني : $(1, -\infty)$ $(2, 5)$ $(3, 4.9)$ $(+\infty, +\infty)$

نقطة مساعدة : C نقطة

$$y' \text{ قبل } x=0 \leftarrow$$

$$P(0) = -11 \Rightarrow (0, -11)$$



$$x^3 - (m+3)x^2 + (2m+10)x - 11 - m = 0 \quad (*)$$

$$x^3 - mx^2 - 3x^2 + 2mx + 10x - 11 - m = 0$$

$$x^3 + 10x - 11 - 3x^2 - m(x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$x^3 - 3x^2 + 10x - 11 = m(x-1)^2$$

$$\Rightarrow m = \frac{x^3 - 3x^2 + 10x - 11}{(x-1)^2} = f(x)$$

* للمعادلة

$$m \in]-\infty, -\frac{17}{3}] \quad (*)$$

$$m = -\frac{17}{3} \quad (*)$$

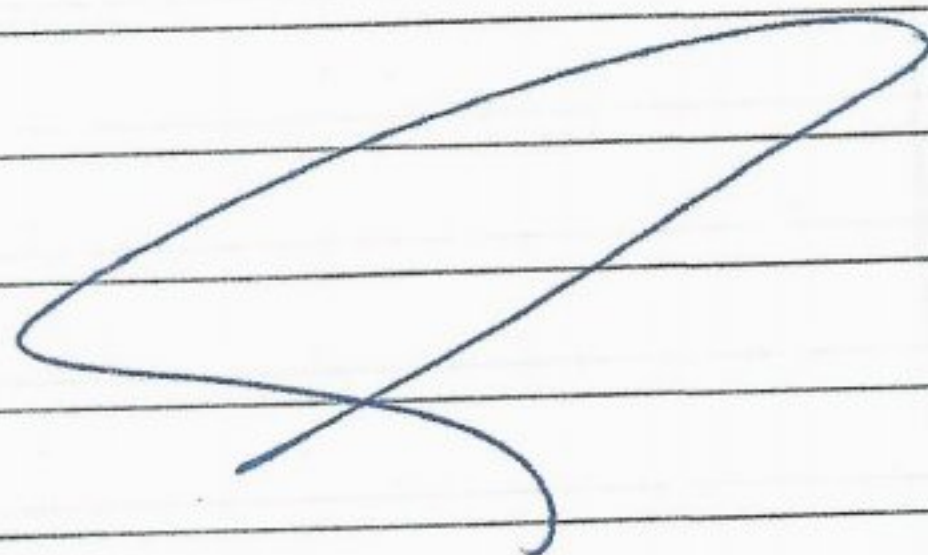
$$m \in]-\frac{17}{3}, \frac{19}{4}] \quad (*)$$

$$m = \frac{19}{4} \quad (*)$$

$$m \in]\frac{19}{4}, 5] \quad (*)$$

$$m = 5 \quad (*)$$

$$m \in]5, +\infty[\quad (*)$$



مسألة (9) -

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

$$D_f =]-\infty, +1[\cup]1, +\infty[$$

① f معرفة مستمرة ما عدا نقطة $x=1$ و $]-\infty, 1[$ و $]1, +\infty[$

نفاية ∞

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2}{x-1} \right) = \frac{1}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

أي x مقارب لـ 1 من أي جانب.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x-1) - 1 \cdot x^2}{(x-1)^2}$$

أي x مقارب لـ 1 من أي جانب.

$$= \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$$

$$f(0) = 0 \quad \leftarrow x=0 \quad \text{أول}$$

$$f(2) = 4 \quad \leftarrow x=2 \quad \text{ثاني}$$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$P'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow 0$	$\searrow -\infty$	$+\infty$	$\searrow 4$	$\nearrow +\infty$

$f(0) = 0$ كبرى

$f(2) = 4$ صغرى

$$f(x) = x+1 + \frac{1}{x-1}$$

$$a=1, b=1, c=1$$

$$\frac{x+1}{x-1} \sqrt{x^2}$$

$$\frac{\sqrt{x^2} + x}{x}$$

$$\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$$

Note : في حالة تابع كسري يكون المقام 0 لكل هـ فإننا نستخدم

الموضوع

③ $\Delta: y = x + 1$

نشكل الفرق : $P(x) - y = x + 1 + \frac{1}{x-1} - (x+1)$

$= \frac{1}{x-1}$: -∞ و +∞ في هـ

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (P(x) - y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x-1} \right) = 0$

إذاً Δ مقارب مائل في هـ و -∞ و +∞

* الموضوع الثاني : ندرس إشارة الفرق :

	x	-∞	1	+∞
$P(x) - y = \frac{1}{x-1}$	$P(x) - y$	-		+
	الموضع لـ	C حدة Δ		C فوق Δ

④ $I(1,2)$ هي تكون I ممكن تناظر للوحدة C يجب أن نتحقق :

$P(1+h) + P(1-h) = 4$ (*)

$P(1+h) = 1+h+1+\frac{1}{1+h-1} = 2+h+\frac{1}{h}$ } نتحقق

$P(1-h) = 1-h+1+\frac{1}{1-h-1} = 2-h-\frac{1}{h}$

$P(1+h) + P(1-h) = 4$

إذاً : C متناظر بالنسبة للنقطة $I(1,2)$

⑤ الرسم : النقاط : $x=1$ هنا نقطة

C بين المقارب : $x \rightarrow 1^+$

C بين المقارب : $x \rightarrow 1^-$

$\Delta: y = x + 1$ مائل

$x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0,1)$

$y = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow (-1,0)$

८

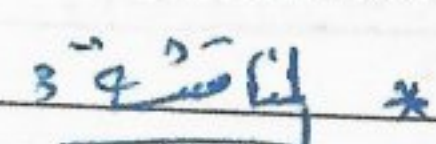
८

5

2020/1/1

4

$(1, +\infty)$



⑦

Ex $m \in]-\infty, 0[$ ①

up, down $m=0$ (c)

مستطیل کُل $m \in]0, 4[$ (۴)

up, down

حلین

(n)

20

$$-4x$$

11

$$l_2 = \frac{(-1)^2 \cdot 2!}{(x-1)^{2+1}} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$$l_1 = l_2$$

$$P^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-1)^{n+1}}$$

نثبت دالة لاجانج من أجل $n+1$

$$P^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)!}{(x-1)^{n+2}} \quad (*)$$

$$l_1 = P^{(n+1)}(x) = (P^{(n)}(x))'$$

$$= \left[\frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-1)^{n+1}} \right]'$$

$$= \frac{0 \cdot (x-1)^{n+1} - (n+1) \cdot (x-1)^n \cdot (-1)^n n!}{((x-1)^{n+1})^2}$$

$$= \frac{-(n+1) \cdot n! \cdot (x-1)^n \cdot (-1)^n}{(x-1)^{2n+2}}$$

$$= \frac{(-1) \cdot (n+1)! \cdot (x-1)^n \cdot (-1)^n}{(x-1)^n \cdot (x-1)^{n+2}}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)!}{(x-1)^{n+2}}$$

$$= l_2$$

فالدالة لاجانج من أجل $n+1$

ما سبقت به أن الدالة لاجانج من أجل $n \geq 2$

- الحسنة (10) -

$$F(x) = x^3 - 3x$$

$$D_F =]-\infty, +\infty[$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x) = (-\infty)^3 = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x) = (+\infty)^3 = +\infty$$

⑤ F معرف ومستمرة وناظرة على $]-\infty, +\infty[$
الناظرة

$$F'(x) = 3x^2 - 3$$

$$F'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$$

$$\text{الحل} \quad x = -1 \Rightarrow F(-1) = 2$$

$$\text{الحل} \quad x = 1 \Rightarrow F(1) = -2$$

$$F(-1) = 2 \text{ كبري}$$

$$F(1) = -2 \text{ صغرى}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$F'(x)$		+	-	+
$F(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$

$$(0,0) \text{ نقطة انحناء}$$

$$\leftarrow y_0 = F(0) = 0 \leftarrow x_0 = 0 \quad \text{⑥}$$

$$m = F'(x_0) = F'(0) = -3$$

$$\Delta : y - F(0) = F'(0)(x - 0)$$

$$\Delta : y = -3x$$

$$F(x) = 0$$

$$x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0 \quad \text{⑦}$$

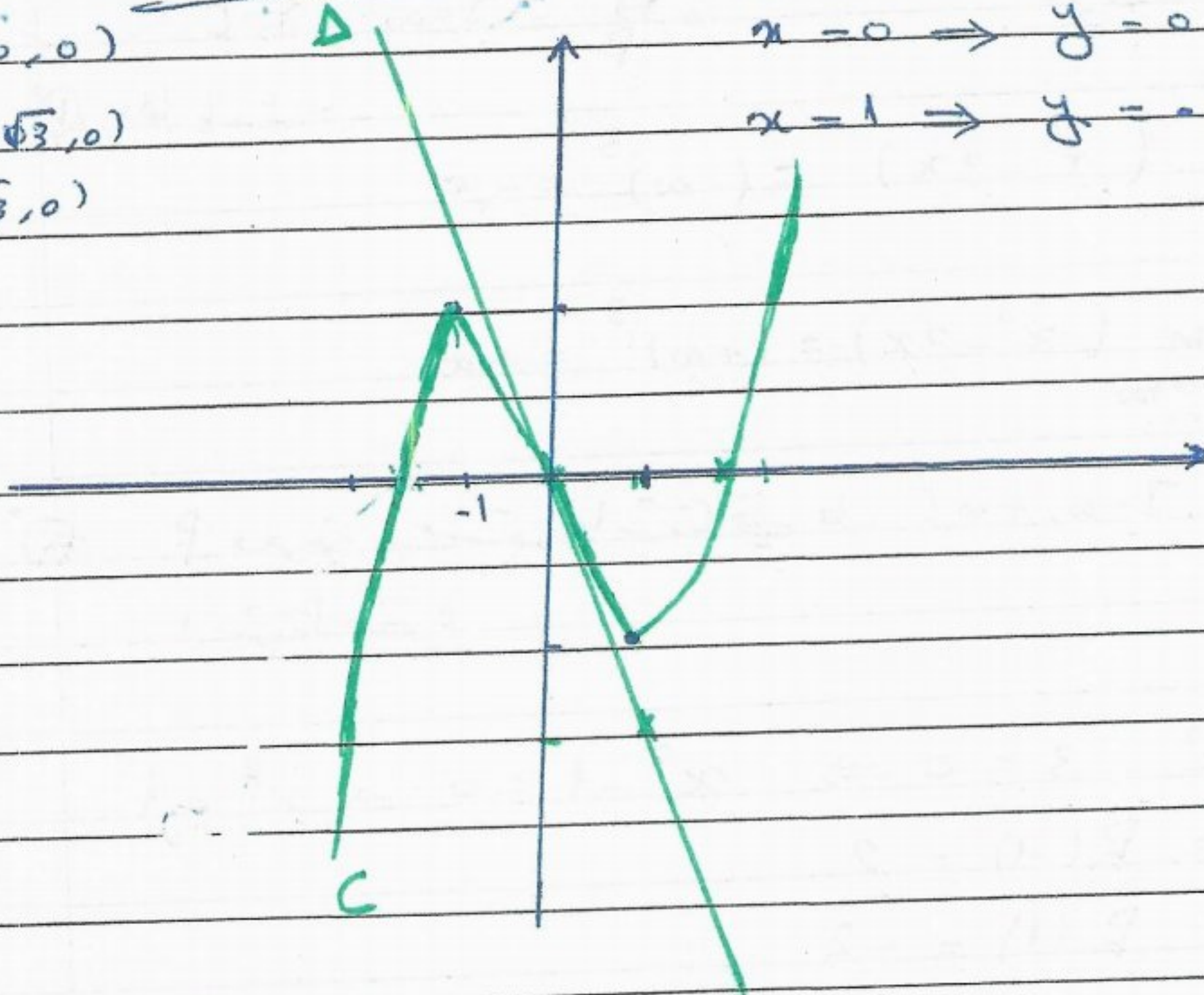
$$A(0,0) \leftarrow x = 0 \quad \text{الحل}$$

$$B(\sqrt{3},0) \leftarrow x = \sqrt{3} \quad \text{الحل}$$

$$C(-\sqrt{3},0) \leftarrow x = -\sqrt{3} \quad \text{الحل}$$

⑤ رسم : المعادلة $\Delta : y = -3x$

نقاط مارة : $(0,0)$
 $(-\sqrt{3},0)$
 $(\sqrt{3},0)$



نقاط : $(-\infty, -\infty)$
 $(-1, 2)$
 $(1, 2)$
 $(+\infty, +\infty)$

$P(x) = m$

المعادلة :

① $m \in]-\infty, -2[$ للمعادلة حل واحد

② $m = -2$ للمعادلة حلين

③ $m \in]-2, 2[$ للمعادلة ثلاثة حلول

④ $m = 2$ للمعادلة حلين

⑤ $m \in]2, +\infty[$ للمعادلة حل واحد



مسألة (11) -

$$P(x) = \frac{x^3}{x^2-1} \quad D_P =]-\infty, -1[\cup]-1, +1[\cup]+1, +\infty[$$

① متى يكون P تابعاً فردياً؟ يجب أن تكون دالة فردية.

② "دالة فردية" $x \in D_P \Rightarrow -x \in D_P$ (a)

(b) $P(-x) = -P(x)$

$$P(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = \frac{-x^3}{x^2-1} = -\frac{x^3}{x^2-1} = -P(x)$$

إذاً: P تابع فردي.
دالة فردية: تتناظر بالنسبة للمبدأ 0.

③

$$P(x) = x + \frac{x}{x^2-1}$$

$$\begin{array}{r} x \\ x^2-1 \overline{) x^3} \\ \underline{+x^3 + x} \\ x \end{array}$$

④ $\Delta = y = x$
نشكل الفرق:

$$P(x) - y_\Delta = x + \frac{x}{x^2-1} - x$$

$$= \frac{x}{x^2-1}$$

نذهب لفرق $x \rightarrow +\infty$ و $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [P(x) - y_\Delta] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2-1} \right) = 0$$

إذاً: Δ متناهي.

لم نضع أسية: ندرس إشارة الفرق:

$$P(x) - y_\Delta = \frac{x}{x^2-1}$$

نعدم الفرق:

$$P(x) - y_\Delta = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$P(x) - y_0$	$-$	$+$	0	$-$	$+$
الوضع كوني	Δ قبة	Δ قبة	Δ قبة	Δ قبة	Δ قبة

④ معرفة ومبررة واستجابة على $[-1, 1]$ و $[-\infty, -1]$ و $[1, +\infty]$ لنهايات:

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} \right) = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow 1} P(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} \right) = \frac{1}{0}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} P(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} P(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow -1} P(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} \right) = \frac{-1}{0}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} P(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^-} P(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

الاستجابة:

$$P'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 1) - 2x \cdot x^3}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow x^4 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 3) = 0$$

$$P(0) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$$

$$\underline{\underline{x^2 - 3 = 0}}$$

~~$$\text{2) } x = -\sqrt{3} \Rightarrow f(-\sqrt{3}) = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$$~~

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	2	$+\infty$	
$F'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$	$-\infty$	$\nearrow -\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow -\infty$	$+\infty$	$\searrow 0$	$\nearrow +\infty$	$+\infty$	$\searrow \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow +\infty$

$$P(-\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}$$

$$P(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$$

~~Ex 2~~ Ex 2: $I =]0, 1[$ up & down at a , & up & down $P(x) = -1 \quad x \in]0, 1[$

$$-1 \in P(]0, 1[) \Rightarrow -1 \in]-\infty, 0[$$

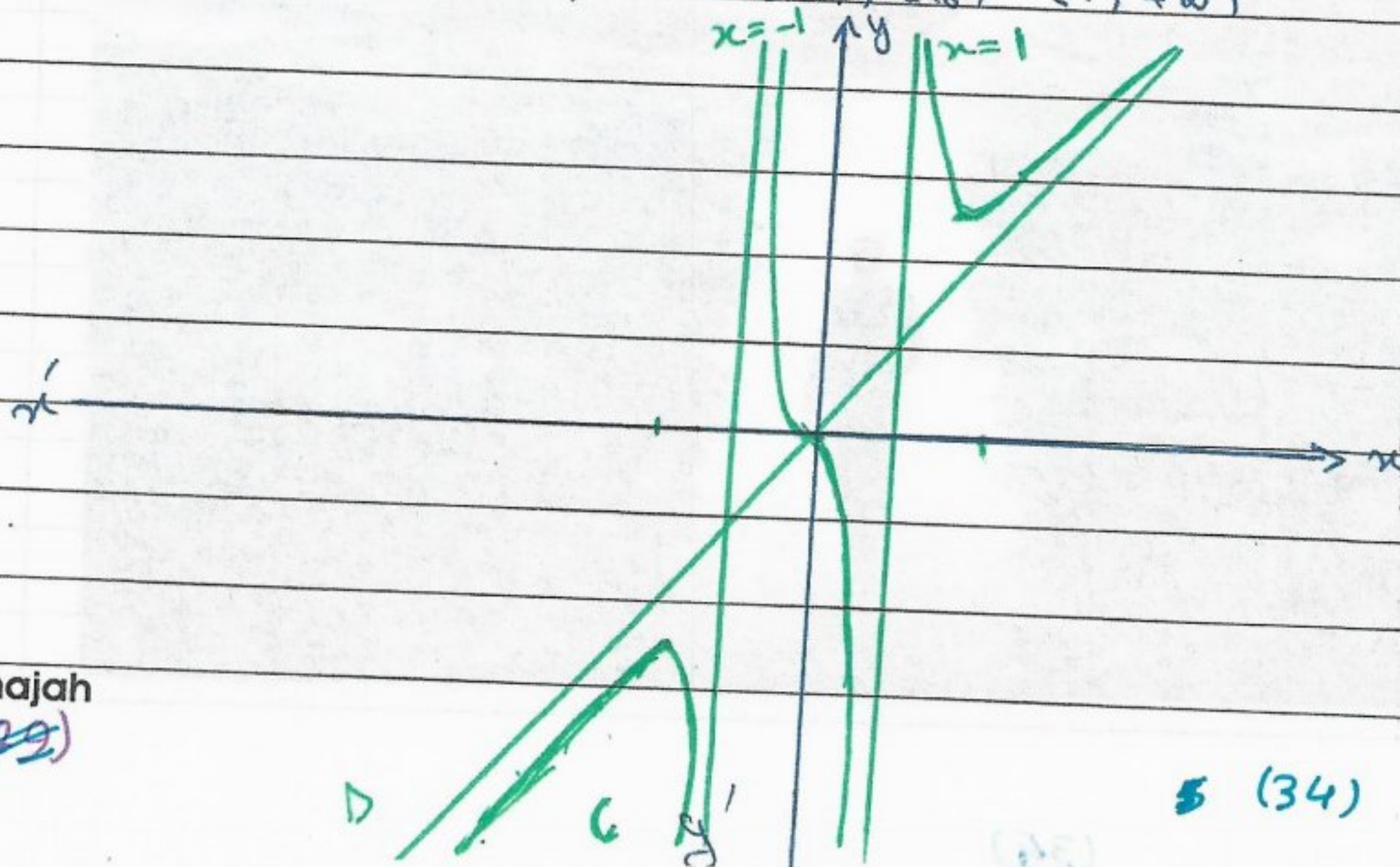
والتابع على هذا الحال مقنا مض ومكر

(7) اسماء : انا لـ : $x = -1$
 $x = 1$ شاطئ

$\Delta: y = x$ "منصف الربيعين الأول والثاني"

من البؤرة ∞

$(-\infty, -\infty)$	$(-1.7, -2.6)$	$(-1, -\infty)$	فرع أول
$(-1, +\infty)$	$(0, 0)$	$(1, -\infty)$	فرع ثاني
$(1, +\infty)$	$(1.7, 2.6)$	$(+\infty, +\infty)$	فرع ثالث



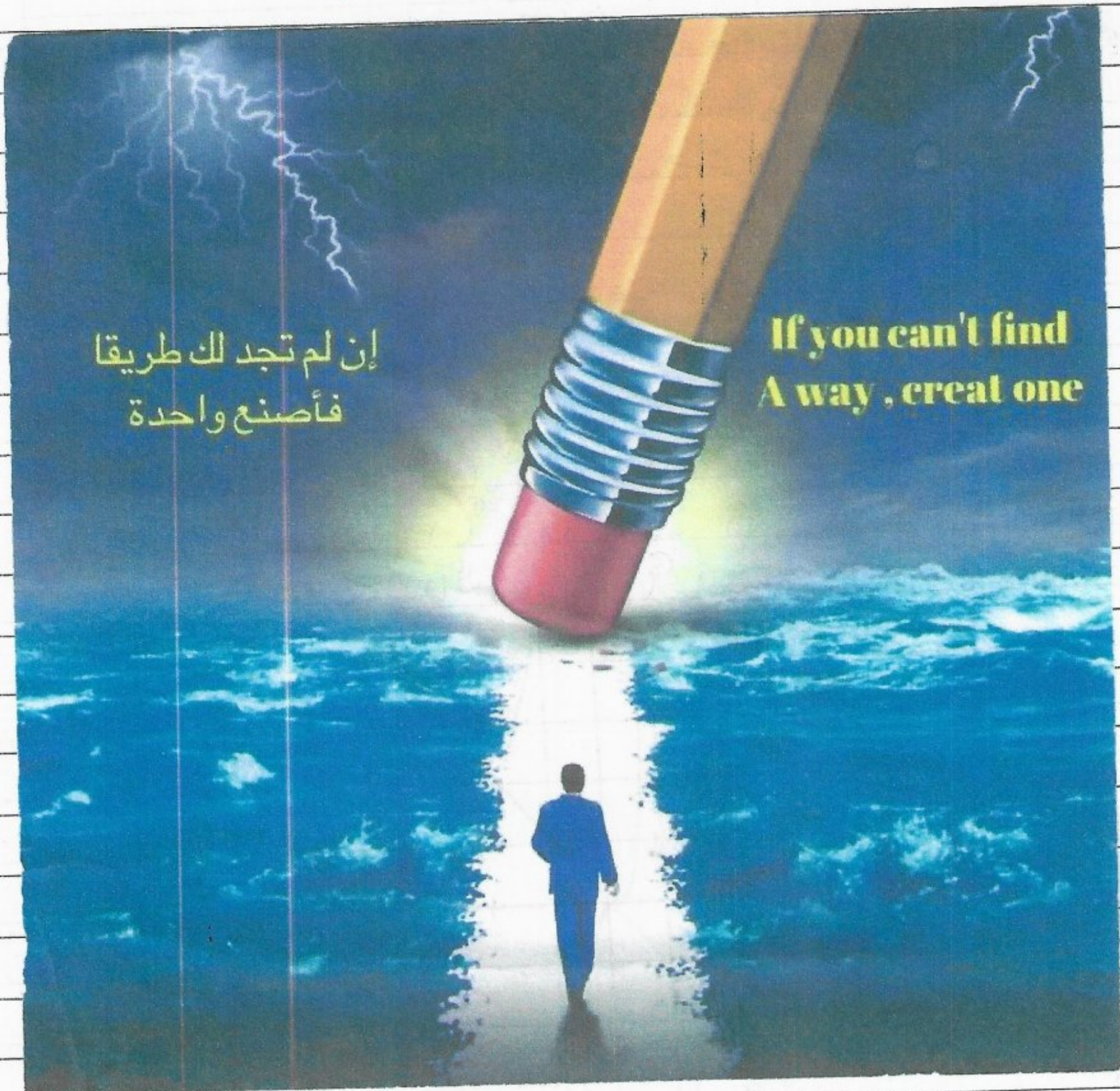
$$\int f(x) dx$$

$$= \int \left(x + \frac{x}{x^2-1} \right) dx$$

$$= \int \left(x + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2-1} \right) dx$$

$\xrightarrow{g}$ $\xrightarrow{g'}$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln |x^2-1| + C$$



$$f(x) = |x+1| + \frac{x}{x^2-1}$$

- المسألة (12) -

$$D =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 + \frac{x}{x^2-1} & ; x < -1 \\ x+1 + \frac{x}{x^2-1} & ; x > -1, x \neq +1 \end{cases} \quad \text{a) } (12)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x-1 + \frac{x}{x^2-1} \right) = +\infty \quad \text{بـ } \frac{\infty}{\infty}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x+1 + \frac{x}{x^2-1} \right) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(|x+1| + \frac{x}{x^2-1} \right) = \frac{1}{0}$$

$$\ast \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\ast \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(|x+1| + \frac{x}{x^2-1} \right) = \frac{-1}{0}$$

$$\ast \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{-1}{0^+} = +\infty$$

$$\ast \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{-1}{0^-} = -\infty$$

c) f معرفة ومستمرة على $]1, +\infty[$, $] -1, 1[$, $] -\infty, -1[$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 - \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} & ; x < -1 \\ \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} & ; x > -1, x \neq +1 \end{cases}$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow -1 - \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$$

إذا أردنا إتمام المسألة:

الفرع الأول:

$$\frac{-x^4 + 2x^2 - 1 - x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-(x^4 + x^2 + 2)}{(x^2 - 1)^2} < 0$$

$$P'(x) = \frac{x^2(-x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^2}$$

الفرع الثاني:

$$P'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow P(0) = 1$$

$$x^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3 = 0$$

$$x = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow P(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3} + 2}{2}$$

$$x = -\sqrt{3}$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$P'(x)$	—		— 0 —		— 0 —	+
$P(x)$	$+\infty$	$\rightarrow -\infty$	$+\infty$	$\rightarrow -\infty$	$+\infty$	$\frac{3\sqrt{3}+2}{2} \rightarrow +\infty$

$$\Delta_1: y = x + 1$$

نشكل الفرق:

$$P(x) - y_{\Delta_1} = x + 1 + \frac{x}{x^2 - 1} - (x + 1)$$

$$= \frac{x}{x^2 - 1}$$

نتحقق لفرقة في $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (P(x) - y_{\Delta_1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2 - 1} \right) = 0$$

النتيجة: Δ متوازي مع C في $+\infty$

* ارضع لنسبة في إشارة الفرق =

$$P(x) - y_{\Delta_1} = \frac{x}{x^2 - 1}$$

نعدم الفرق =

$$P(x) - y_{\Delta_1} = 0 \Rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$P(x) - y_{\Delta_1}$	—	+	0	-	+
الوضع لنسبة	Δ_1 تحت C	C فوق Δ_1	C تحت Δ_1	C فوق Δ_1	Δ_1 تحت C

$\Delta_2: y = -x - 1$ في جوار $-\infty$

نشكل الفرق =

$$P(x) - y_{\Delta_2} = -x - 1 + \frac{x}{x^2 - 1} - (-x - 1)$$

$$= \frac{x}{x^2 - 1}$$

نقضي الفرق في جوار $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (P(x) - y_{\Delta_2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x^2 - 1} \right) = 0$$

إذاً Δ_2 متوازي مع المثلث C في جوار $-\infty$.

* ارضع لنسبة: // قد دراسة Δ_1 //

④ معادلة التماس عند $x = 0$:

$$y = P(0) = 1$$

$$m = P'(0) = 0$$

$\Rightarrow \Delta: y = 1$ / مماس أفقي.

⑤ الرسم: العلاقات:

$$\begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

مواضع

$$\Delta_1: y = x + 1$$

$$y = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow (-1, 0)$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0, 1)$$

$$\Delta_2: y = -x - 1$$

$$x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (0, -1)$$

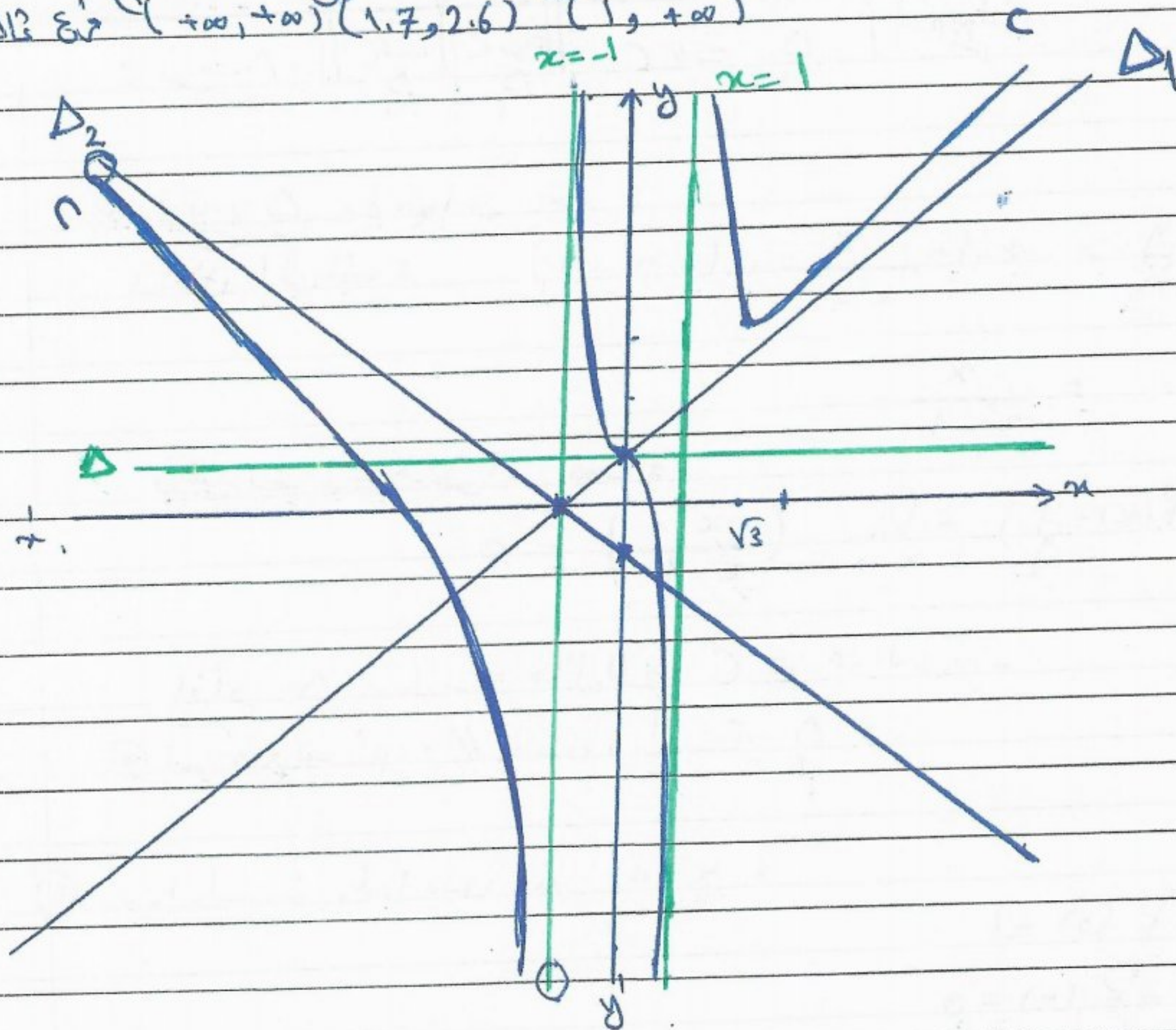
$$y = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow (-1, 0)$$

$$(-1, -\infty) \quad (-\infty, +\infty)$$

$$(1, -\infty) \quad (0, 1) \quad (-1, +\infty)$$

$$(+\infty, +\infty) \quad (1.7, 2.6) \quad (1, +\infty)$$

قسم الوحدة:



٦) P مقروء متناقص تماماً على المجال $]1, 1[$ ويغير إشارته عليه
فالحا دلته $P(x) = 0$ حلوه هيد x فيتي الى المجال $]1, 1[$

$$P\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{28} \quad \left\{ \begin{array}{l} P\left(\frac{3}{4}\right) \cdot P\left(\frac{4}{5}\right) < 0 \\ P\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{-19}{45} \end{array} \right. \quad x_1 = \frac{3}{4} \text{ و } x_2 = \frac{4}{5}$$

$$P\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{-19}{45}$$

$$x \in \left] \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \right[$$

- المسألة (13) -

$$f(x) = \frac{-2x+1}{x+3}$$

$$; P =]-\infty, -3[\cup]-3, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2x+1}{x+3} \right) = -2$$

(1)

$$f(x) \in]-2.05, -1.95[\text{ si } x > A$$

(2)

$$-2.05 < f(x) < -1.95$$

(b)

$$-2.05 + 2 < f(x) + 2 < -1.95 + 2$$

$$-0.05 < f(x) + 2 < 0.05$$

$$|f(x) + 2| < 0.05$$

$$\left| \frac{-2x+1}{x+3} + 2 \right| < \frac{5}{100}$$

$$\left| \frac{-2x+1+2x+6}{x+3} \right| < \frac{5}{100}$$

$$\frac{7}{x+3} < \frac{5}{100}$$

$$\frac{x+3}{7} > 20$$

$$x+3 > 140$$

$$x > 137$$

$$A = 137$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right) = f(-2) = 5$$

$$; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = 5$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2x+1}{x+3} \right) = -2$$

نهاية

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{-2x+1}{x+3} \right) = \frac{7}{0}$$

$$* \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \frac{7}{0^+} = +\infty$$

$x = -3$ من الجانب الموجب و C يقع بين الجدارين

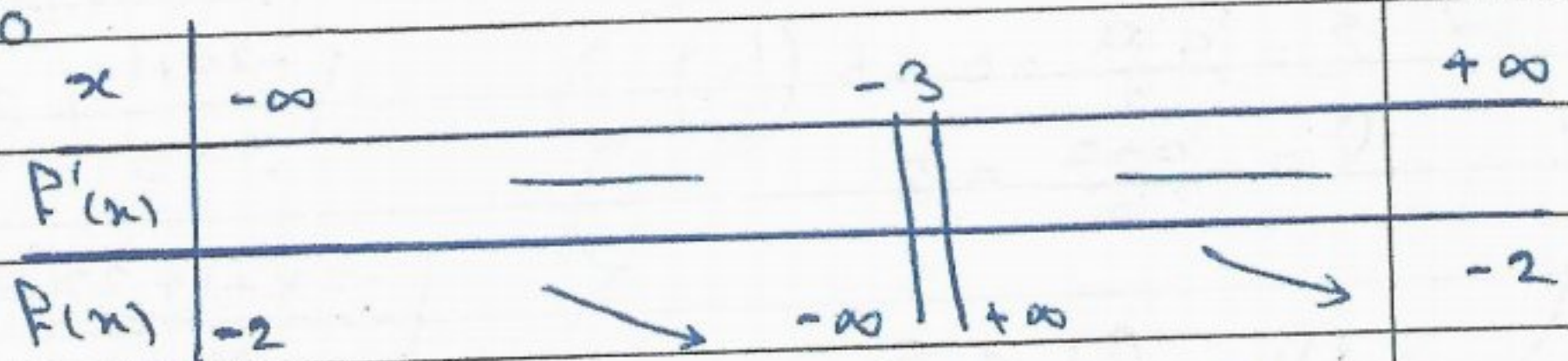
$$* \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \frac{7}{0^-} = -\infty$$

$x = -3$ من الجانب السالب و C يقع بين الجدارين

الأسبقية

$$f'(x) = \frac{-2(x+3) - 1 \cdot (2x+1)}{(x+3)^2} = \frac{-2x-6+2x-1}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{-7}{(x+3)^2} < 0$$

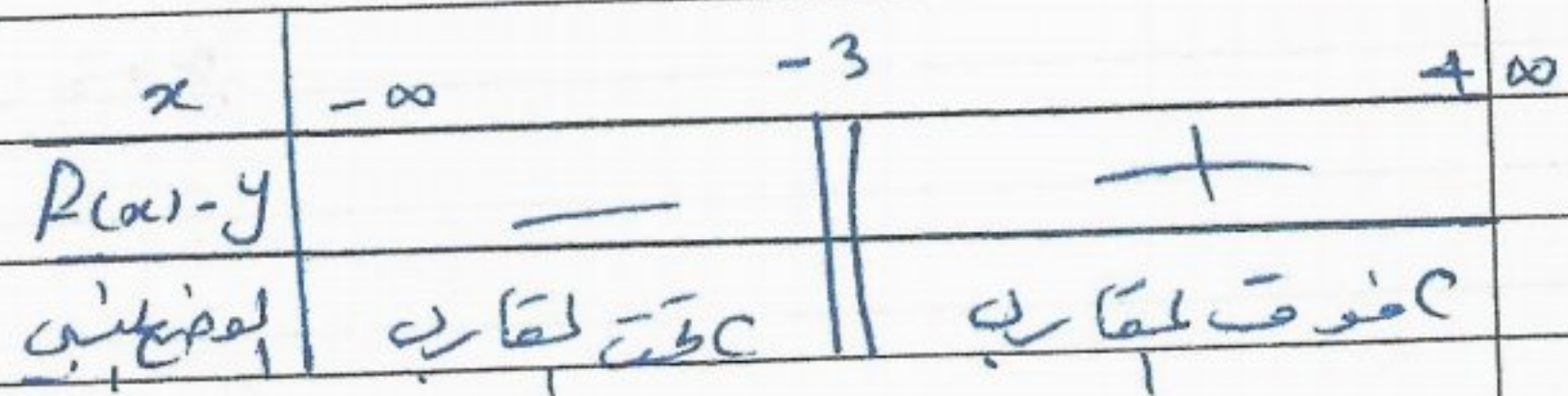


الجدار الأفقي $y = -2$

ندرس الأسبقية الفرق

$$f(x) - y = \frac{-2x+1}{x+3} + \frac{2}{1}$$

$$= \frac{-2x+1+2x+6}{x+3} = \frac{7}{x+3}$$



⑤ قيمة تقريبية لـ 0.9 :

$$x = 0.9$$

$$a = 0 \quad h = 0.9$$

$$f(0) = \frac{1}{3}, \quad f'(0) = \frac{-7}{9}$$

نحوه من الجدران :

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a) \cdot h$$

$$P(0+0.9) \sim f(0) + f'(0) \cdot (0.9)$$

$$f(0.9) \sim \frac{1}{3} + \left(-\frac{7}{9}\right) \times \frac{9}{10}$$

$$\sim \frac{1}{3} - \frac{7}{10} \sim -\frac{11}{30}$$

(10) (3)

$$m = f'(1) = -\frac{7}{16}, \quad y_0 = f(1) = -\frac{1}{4} \leftarrow x_0 = 1 \text{ نقطة على } \Delta \quad \textcircled{7}$$

$$\Delta: y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y + \frac{1}{4} = -\frac{7}{16}(x - 1)$$

$$y = -\frac{7}{16}x + \frac{7}{16} - \frac{1}{4}$$

$$\Delta: y = -\frac{7}{16}x + \frac{3}{16}$$

$$y = -2 \text{ أفقي}$$

$$x = -3 \text{ عمودي}$$

$$\textcircled{8} \text{ نقطة التقاط: } x = -3, y = -2$$

$$\Delta: y = -\frac{7}{16}x + \frac{3}{16}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{16} \Rightarrow (0, \frac{3}{16})$$

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{7} \Rightarrow (\frac{3}{7}, 0)$$

نقطة التقاط بين الدالة والخط المماس
منه انفراسد عمل $P(x) = 0$

$$-2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$I = \int f(x) dx$$

$$= \int \frac{-2x+1}{x+3} dx$$

$$= \int \left[-2 + \frac{7}{x+3} \right] dx$$

$$\begin{array}{r} -2 \\ \hline x+3 \overline{) -2x+1} \\ \underline{+2x+6} \\ 7 \end{array}$$

$$= \int \left[-2 + 7 \cdot \frac{1}{x+3} \right] dx$$

$$\begin{array}{c} g' \\ \rightarrow \\ \frac{1}{x+3} \\ \leftarrow \\ g \end{array}$$

$$= -2x + 7 \ln |x+3| + C$$



لنحقق طلبنا
فإننا نعلم
أننا نعلم
أننا نعلم

المسألة (14) -

$$f(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2} ; D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$$

① فيها 3 أجزاء :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{(x+1)^2} \right) = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x+2}{(x+1)^2} \right) = \frac{1}{0}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

ليس للتابع نهاية حقيقية عند $x = -1$

② $y = 0$ متى ب أمتي .

* لمضع لنسبي = ندرس إشارة لفرقة

$$f(x) - y = \frac{x+2}{(x+1)^2} - 0 = \frac{x+2}{(x+1)^2}$$

• نحدد لفرقة

$$f(x) - y = 0 \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+	+
الموضع لنسبي	المنطقة	المنطقة	المنطقة	المنطقة

③ f معرف وحتماً متناقص على $]-\infty, -1[$ و $]-1, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+1)^2 - 2(x+1) \cdot 1 \cdot (x+2)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)(x+1-2x-4)}{(x+1)^4}$$

$$P'(x) = \frac{-x-3}{(x+1)^3}$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow -x-3=0 \Rightarrow x = -3$$

$$P(-3) = -\frac{1}{4}$$

قيمة "مغري"

x	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$
$P'(x)$	-	0	+	-
$P(x)$	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$	$-\infty$

$$x_0 = -2$$

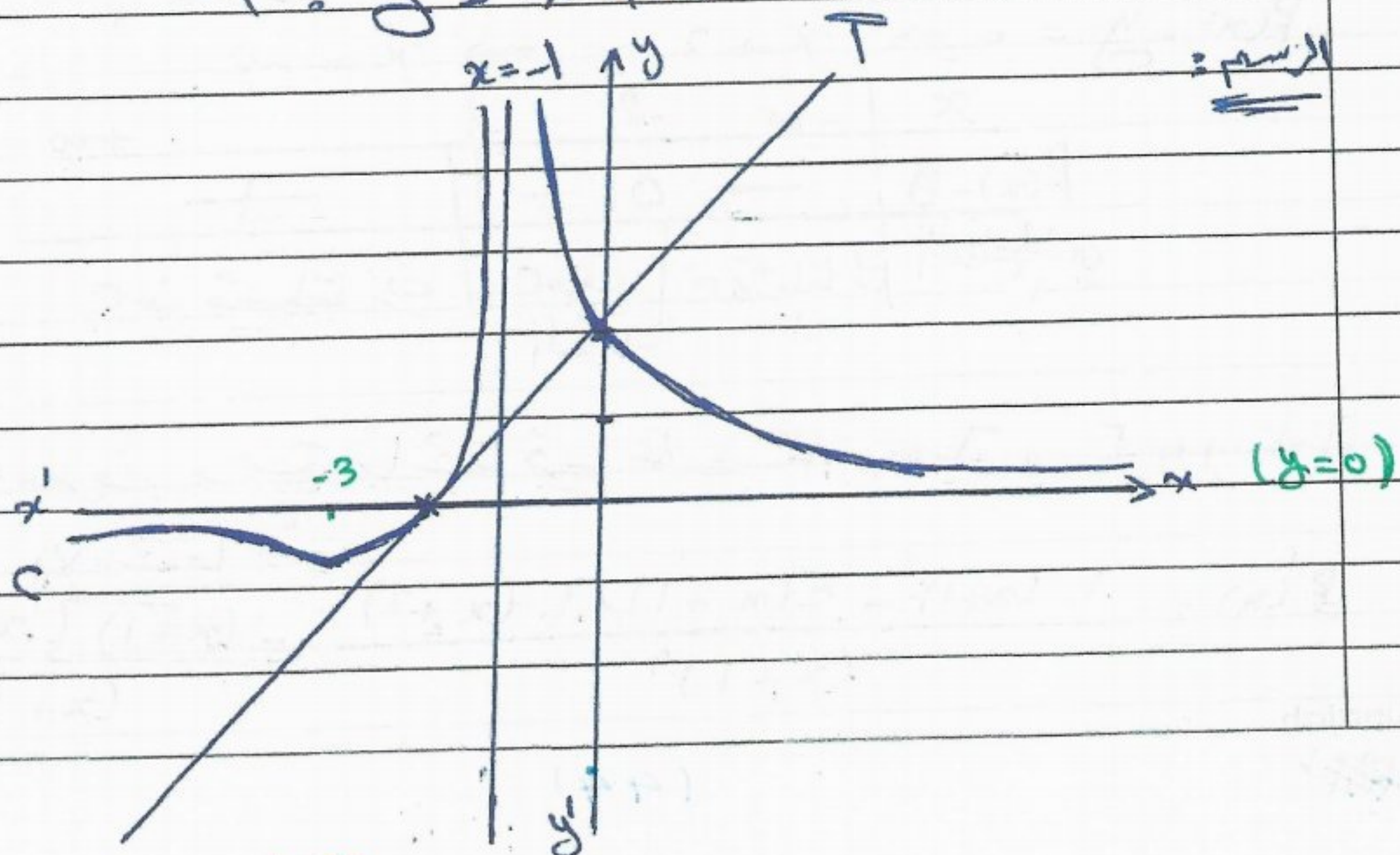
$$y_0 = P(-2) = 0$$

$$m = P'(-2) = +1$$

$$T: y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$T: y = 1(x + 2)$$

$$T: y = x + 2$$



المعادلة: $y = 0$ أفقي
 $x = -1$ عمودي

بما سب: $T = y = x + 2$
 $x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (0, 2)$

$y = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow (-2, 0)$

نقسم المساحة إلى قسمين:
 فرع أول: $(-1, +\infty)$ $(-3, -\frac{1}{4})$ $(-\infty, 0)$
 فرع ثاني: $(+\infty, 0)$ $(-1, +\infty)$

نقطة تقاطع $y' = 0$ مع $x' = 0$
 $P(x) = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$
 $A(-2, 0)$

نقطة تقاطع $y' = 0$ مع $x' = 0$
 $P(x) = 2 \Rightarrow$
 $B(0, 2)$

$mx^2 + 2mx - 2 = m - m$ (*)

$mx^2 + 2mx + m = x + 2$

$m(x^2 + 2x + 1) = x + 2$

$m = \frac{x+2}{(x+1)^2} = P(x)$

المعادلة: $m \in]-\infty, -\frac{1}{4}[$ (*)

أو $m = -\frac{1}{4}$ و $m = 0$ (*)

أو $m \in]-\frac{1}{4}, 0[$ (*)

أو $m \in]0, +\infty[$ (*)

- مسألة (15) -

$$f(x) = \frac{x-2}{x} \quad ; \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-2}{x} \right) = 1$$

$y = 1$ مقارب أفقي للخط C .

$$f(x) - y = \frac{x-2}{x} - 1 = \frac{x-2-x}{x} = \frac{-2}{x}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$		$+$	$-$
الوضع لـ $f(x)$	C فوق الخط y	C تحت الخط y	C فوق الخط y

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x-2}{x} \right) = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$x = 0$ مقارب عمودي و C تقع أسفل الخط y .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x-2}{x} \right) = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

$x = 0$ مقارب عمودي و C تقع أعلى الخط y .

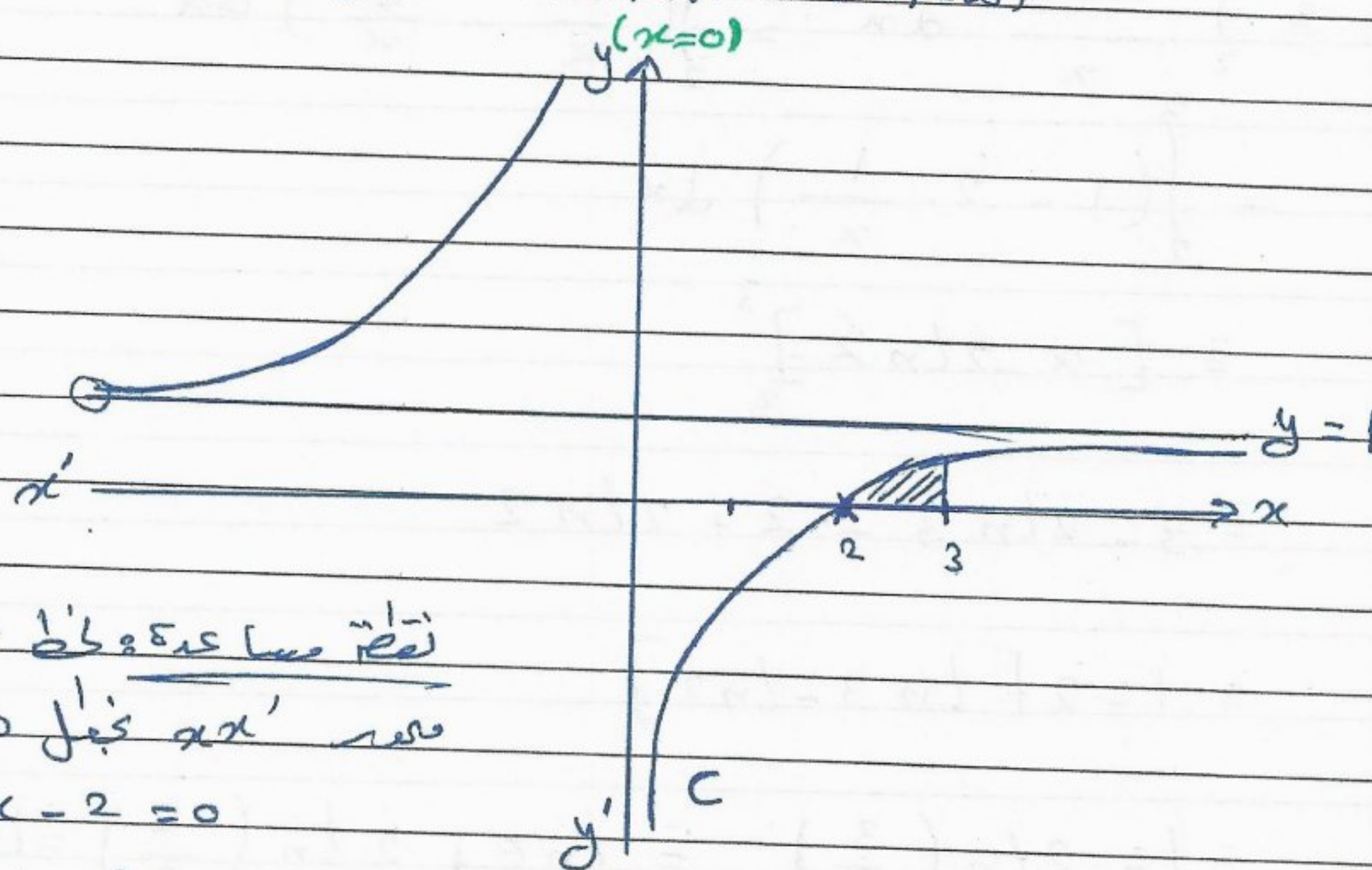
2) f معرف ومستمر وامتداد على $]0, +\infty[$ و $] -\infty, 0[$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot x - 1 \cdot (x-2)}{x^2} = \frac{x - x + 2}{x^2} = \frac{2}{x^2} > 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	1	$+\infty$ / $-\infty$	1

3] لرسم: لقطات $x=0$ ساقولي

$y=1$ أفقي
قسم المسودة: $(-\infty, 1)$ $(0, +\infty)$ منزع أول
 $(0, -\infty)$ $(+\infty, 1)$ منزع ثاني.



نقطة مسطرة كط C قطع

مع $P(x) = 0$ نحل xx'

$$x - 2 = 0$$

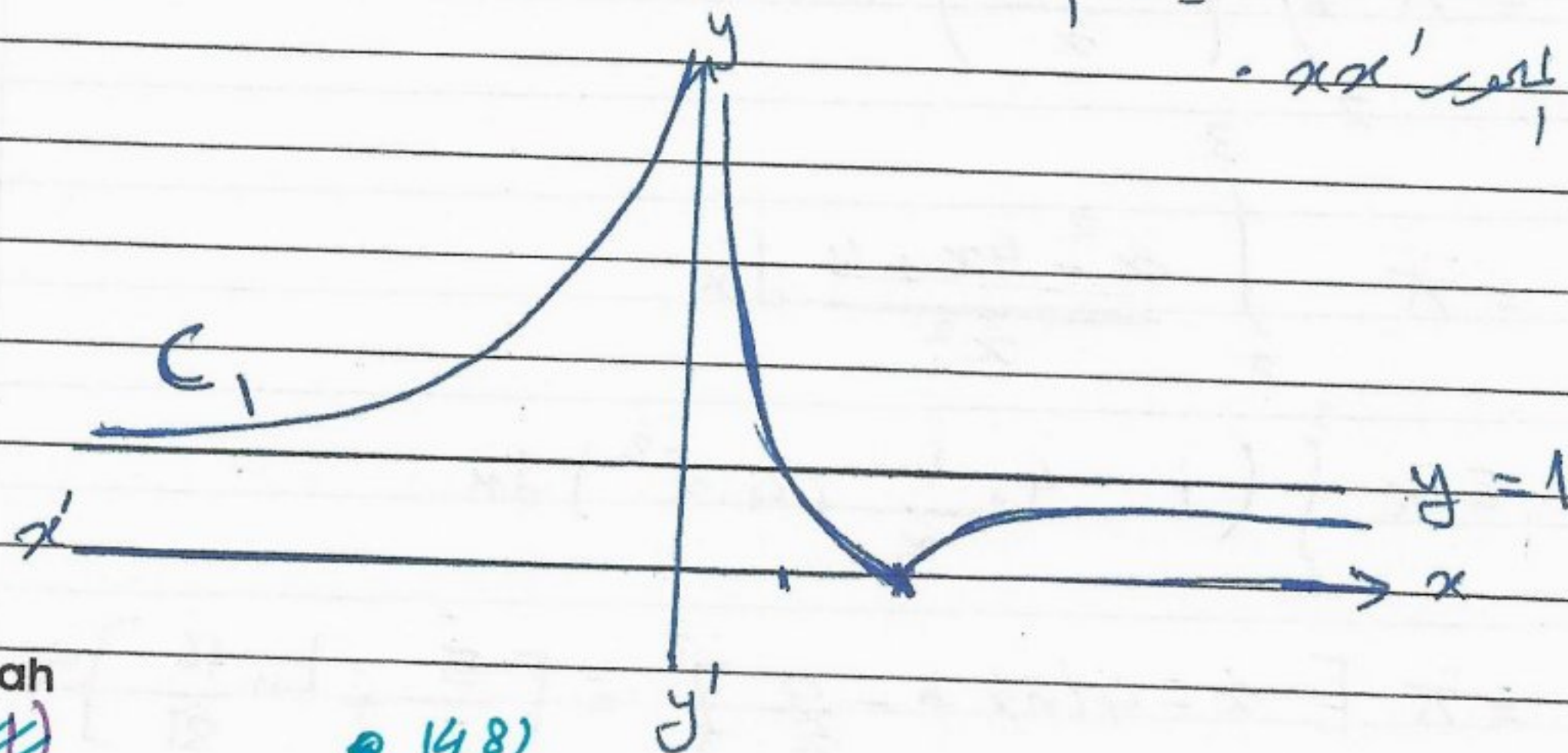
$$x = 2$$

$$A(2, 0)$$

$$P_1(x) = \left| \frac{x-2}{x} \right|$$

4] C:

فصل على C للدالة P_1 بأن نأخذ على النقاط من C التي ترتبها
موجب وناخذ نظير النقاط من C التي ترتبها سالب بالنسبة
إلى المحور xx' .



$$S = \int_2^3 f(x) dx$$

$$= \int_2^3 \frac{x-2}{x} dx = \int_2^3 \left(\frac{x}{x} - \frac{2}{x} \right) dx$$

$$= \int_2^3 \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{x} \right) dx$$

$$= [x - 2 \ln x]_2^3$$

$$= 3 - 2 \ln 3 - 2 + 2 \ln 2$$

$$= 1 - 2 [\ln 3 - \ln 2]$$

$$= 1 - 2 \ln \left(\frac{3}{2} \right) = \ln e + 2 \ln \left(\frac{2}{3} \right) = \ln e + \ln \frac{4}{9}$$

$$= \ln \left(e \times \frac{4}{9} \right) = \ln \left(\frac{4e}{9} \right)$$

$$V = \pi \int_2^3 f(x)^2 dx$$

$$= \pi \int_2^3 \left(\frac{x-2}{x} \right)^2 dx$$

$$= \pi \int_2^3 \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2} dx$$

$$= \pi \int_2^3 \left(1 - 4 \cdot \frac{1}{x} + 4 \cdot x^{-2} \right) dx$$

$$= \pi \left[x - 4 \ln x - \frac{4}{x} \right]_2^3 = \left[\frac{5}{3} + \ln \frac{16}{81} \right] \pi$$

* اوضح ان $f(x) = \frac{4}{x}$ تدرس باستمرارية لفرقة $f(x) - y_d = \frac{4}{x} > 0$ إذاً C فوق d .

$$f(x) = x$$

(٢)

$$\frac{x}{2} + \frac{4}{x} = \frac{x}{1}$$

$$\frac{x^2 + 8}{2x} = \frac{x}{1}$$

$$x^2 + 8 = 2x^2$$

$$2x^2 - x^2 - 8 = 0$$

$$x^2 - 8 = 0$$

$$x^2 = 8$$

$$x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n) = \end{cases}$$

(٣)

$$u_1 = \frac{1}{2} \left(u_0 + \frac{4}{u_0} \right) = \frac{5}{2} \quad a$$

$$u_2 = \frac{1}{2} \left(u_1 + \frac{4}{u_1} \right) = \frac{41}{20}$$

$$E(n) : 2 < u_{n+1} < u_n \quad - b$$

* ثبتت صحة المقضية من أول $n=0$

$$u_0 = 4$$

$$u_1 = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$\left. \begin{matrix} u_0 = 4 \\ u_1 = \frac{5}{2} = 2.5 \end{matrix} \right\} 2 < u_1 < u_0$$

$$E(0) \text{ صحيحة}$$

* نفس من صحة المقضية من أول n

$$E(n) : 2 < u_{n+1} < u_n \quad \text{صحيحة}$$

المسألة (16) -

$$P(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{4}{x} \right)$$

$$D =]0, +\infty[$$

① معرفة واستمرارية P على $]0, +\infty[$

النهاية اليمنى

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} P(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{2} \left(x + \frac{4}{x} \right) \right] = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \left(x + \frac{4}{x} \right) \right] = +\infty$$

$$P'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{4}{x^2} \right)$$

النهاية اليسرى

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 - 4}{x^2} \right)$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2$$

$$P(2) = \frac{1}{2} (2 + 2) = 2$$

x	0	2	$+\infty$
$P'(x)$	-	0	+
$P(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

$$d: y = \frac{1}{2}x \quad \text{②}$$

$$P(x) - y_d = \frac{x}{2} + \frac{4}{x} - \frac{x}{2} = \frac{4}{x}$$

نشكل الفرق

نهي الفرق في هو $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (P(x) - y_d) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x} \right) = 0$$

إذاً: d مماسية للحنى C عند $+\infty$

* اوضح ان $f(x) = \frac{4}{x}$ دالة متناقصة في $(0, \infty)$ (٢)

$$f(x) = \frac{4}{x}$$

$$\frac{x}{2} + \frac{4}{x} = \frac{x}{1}$$

$$x^2 + 8 = 2x^2$$

$$2x^2 - x^2 - 8 = 0$$

$$x^2 - 8 = 0$$

$$x^2 = 8$$

$$x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$u_0 = 4$$

$$u_{n+1} = f(u_n) =$$

$$u_1 = \frac{1}{2} \left(u_0 + \frac{4}{u_0} \right) = \frac{5}{2} \quad -a$$

$$u_2 = \frac{1}{2} \left(u_1 + \frac{4}{u_1} \right) = \frac{41}{20}$$

$$E(n) : 2 \leq u_{n+1} \leq u_n \quad -b$$

* نثبت صحة المقضية من أجل $n=0$

$$u_0 = 4$$

$$u_1 = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$\left. \begin{array}{l} u_0 = 4 \\ u_1 = \frac{5}{2} = 2.5 \end{array} \right\} 2 \leq u_1 \leq u_0$$

$$E(0) \text{ صحيحة}$$

* نفس من صحة المقضية من أجل n

$$E(n) : 2 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

صحيحة

* نثبت صحة الفرضية من أجل $n+1$:

$$2 < u_{n+2} < u_{n+1} \\ 2 < u_{n+1} < u_n \quad \text{من الفرضية السابقة} \\ f(2) < f(u_{n+1}) < f(u_n) \\ \text{لا يتابع متزايد على } [2, +\infty[$$

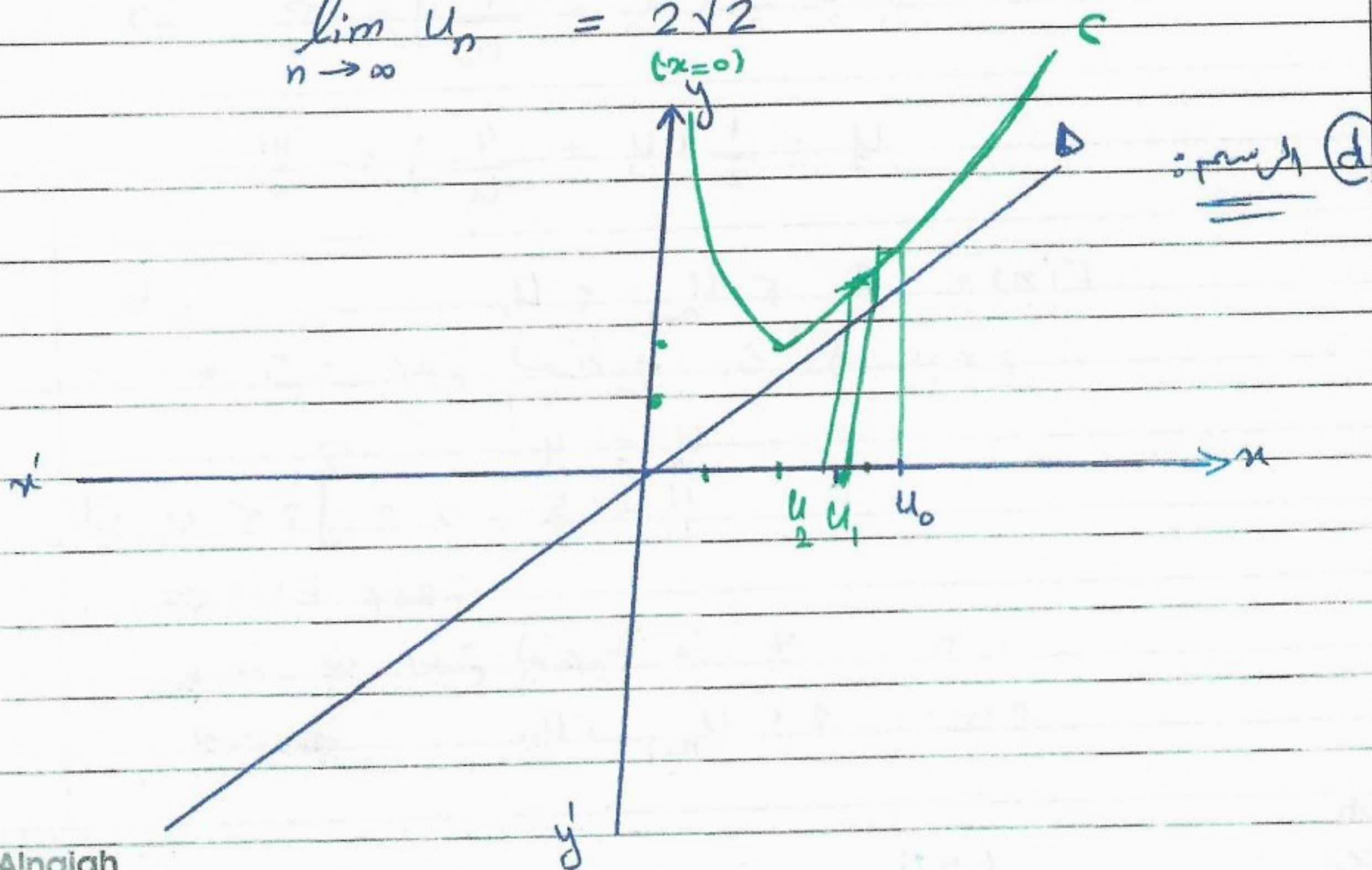
$$E(n+1) \Leftrightarrow 2 < u_{n+2} < u_{n+1} \\ \text{حاصلت جذاً أن } E(n+1) \text{ صحيحة}$$

بما أن المتتالية متناقصة ($u_{n+1} < u_n$)
وحدودة من الأسفل ($2 < u_n$)
فهي متقاربة.

* زعمنا أنها : هي حل المعادلة

$$f(x) = x \\ x = 2\sqrt{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2\sqrt{2} \quad (x=0)$$



مسألة (17) -

$$f(x) = x\sqrt{3-x} \quad \text{في } D_f =]-\infty, 3]$$

قابلية الاستمرارية عند $x=3$ من اليسار:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x\sqrt{3-x} - 0}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x\sqrt{3-x}}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x \cdot \sqrt{3-x}}{\sqrt{3-x} \cdot \sqrt{3x}} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-x}{\sqrt{3-x}} = \frac{-3}{0^-} = +\infty \end{aligned}$$

إذن: f غير متصلة في $x=3$ من اليسار

f معرفة ومستمرة على $] -\infty, 3]$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x\sqrt{3-x}) = -\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = f(3) = 3\sqrt{3-3} = 0$$

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{3-x} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}} \cdot x$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2(3-x) - x}{2\sqrt{3-x}} = \frac{6 - 2x - x}{2\sqrt{3-x}} \\ &= \frac{6 - 3x}{2\sqrt{3-x}} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6 - 3x = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$f(2) = 2$$

قيمة "كبرى"

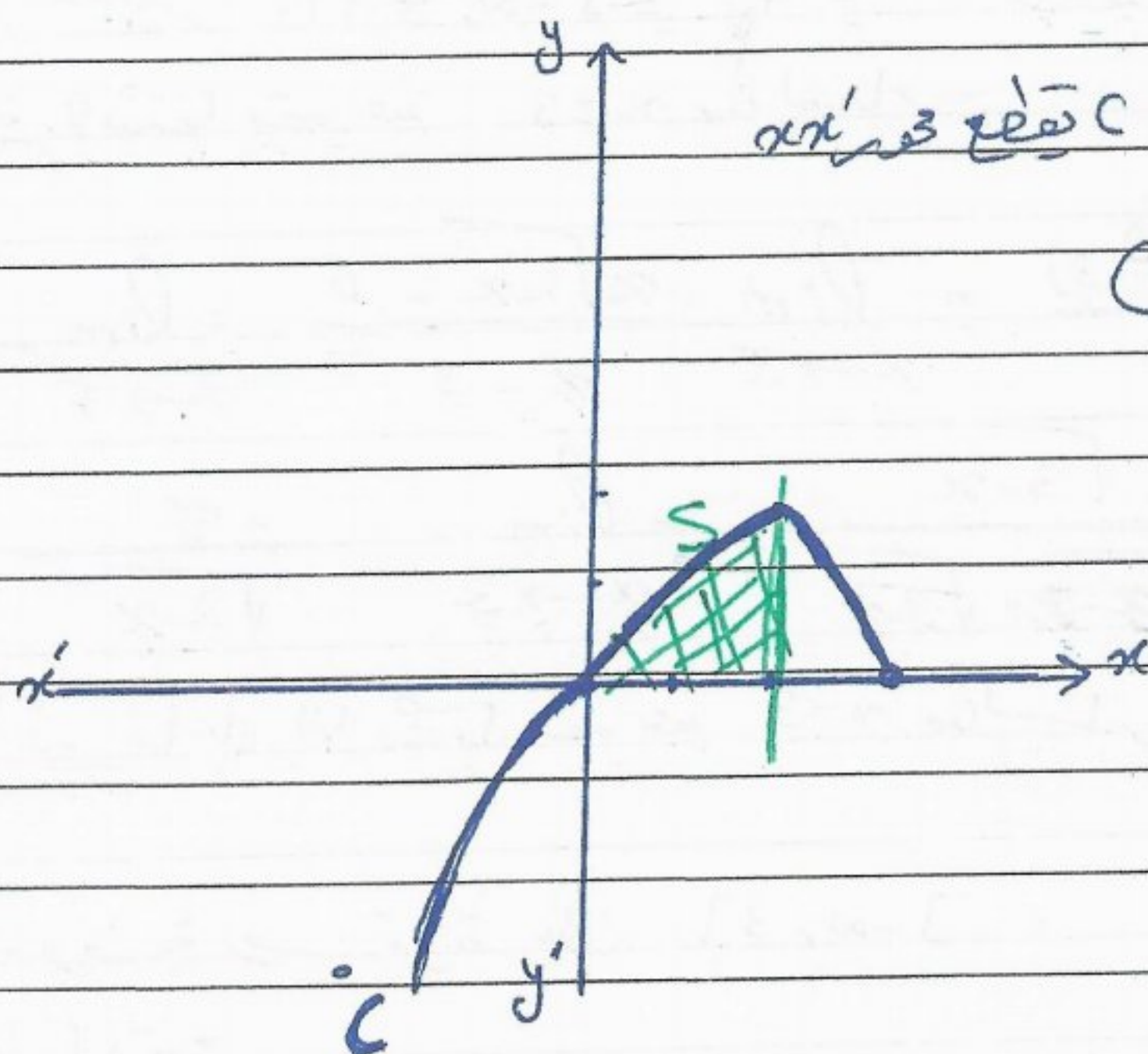
x	$-\infty$	2	3
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	2	0

(3, 0)

(2, 2)

(-∞, -∞)

الرسم : قسم المسودة

نقطه مساهمة: $x \sqrt{3-x}$ تقع في

$$f(x) = 0$$

$$x \sqrt{3-x} = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow (0, 0)$$

$$\Rightarrow 3-x = 0$$

$$x = 3$$

$$\Rightarrow (3, 0)$$

$$g(x) = \frac{2}{5} (x^2 - x - 6) \sqrt{3-x}$$

$$g'(x) = \frac{2}{5} \left[(2x-1) \cdot \sqrt{3-x} + \frac{-1}{2\sqrt{3-x}} \cdot (x^2 - x - 6) \right]$$

$$= \frac{2}{5} \left[\frac{2(2x-1)(3-x) - (x^2 - x - 6)}{2\sqrt{3-x}} \right]$$

$$= \frac{2}{5} \left[\frac{-4x^2 + 12x - 6 + 2x - x^2 + x + 6}{2\sqrt{3-x}} \right]$$

$$= \frac{2}{5} \left[\frac{-5x^2 + 15x}{2\sqrt{3-x}} \right]$$

$$= \frac{2}{5} \left[\frac{+5x(-x+3)}{2\sqrt{3-x}} \right]$$

$$= x \sqrt{3-x} = f(x)$$

فرض $f(x) = \frac{2}{5}(x^2 - x - 6)\sqrt{3-x}$ و $g'(x) = f(x)$ و $g(0) = 0$

$$S = \int_0^2 f(x) dx$$

مساحة سطح

$$= [g(x)]_0^2 = \left[\frac{2}{5}(x^2 - x - 6)\sqrt{3-x} \right]_0^2$$

$$= \frac{2}{5}(4 - 2 - 6)\sqrt{3-2} - \left(\frac{2}{5}(0 - 0 - 6)\sqrt{3-0} \right)$$

$$= \frac{2}{5}(-4) - \left(-\frac{12\sqrt{3}}{5} \right) = \frac{12\sqrt{3} - 8}{5}$$

$$V = \pi \int_0^2 f^2(x) dx$$

حجم

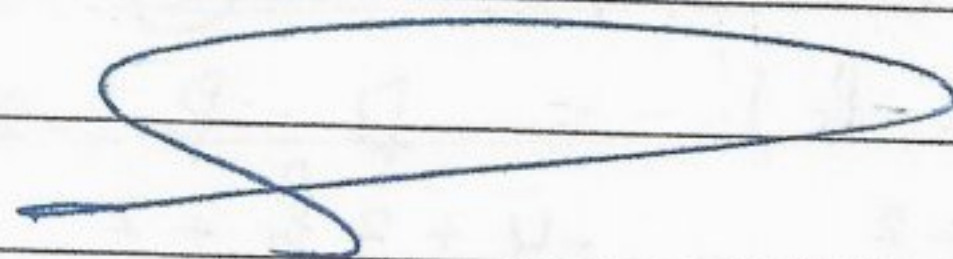
$$= \pi \int_0^2 (x \cdot \sqrt{3-x})^2 dx$$

$$= \pi \int_0^2 (x^2 \cdot (3-x)) dx$$

$$= \pi \int_0^2 (3x^2 - x^3) dx$$

$$= \pi \left[\frac{3x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^2$$

$$= \pi \left[8 - \frac{16}{4} - 0 \right] = 4\pi$$



مسألة (118) -

$$f(x) = \frac{2x+2}{x+2} \quad \text{و} \quad D_f =]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$$

① مقاربات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+2}{x+2} \right) = 2$$

$y = 2$ مقارب أفقي

* لم يقع لدينا: ندرس إشارة الفرق:

$$f(x) - y = \frac{2x+2}{x+2} - \frac{2}{1} = \frac{2x+2 - 2x-4}{x+2} = \frac{-2}{x+2}$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x) - y$	$\leftarrow$	$\parallel$	$\rightarrow$
	أدنى	فوق	أدنى

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{2x+2}{x+2} \right) = \frac{-2}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$x = -2$ مقارب عمودي للأعلى. C يقع بين المقارب.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

$x = -2$ مقارب عمودي للأسفل. C يقع بين المقارب.

② $A(-2, 2)$

حتى نكون A مركز تناظر لـ C يجب أن نثبت:

$$f(-2+h) + f(-2-h) = 4 \quad (*)$$

حيث $f(-2-h)$ و $f(-2+h)$

$$f(-2+h) = \frac{2(-2+h)+2}{-2+h+2} = \frac{-4+2h+2}{h} = \frac{-2+2h}{h}$$

$$P(-2-h) = \frac{2(-2-h)+2}{-2-h+2} = \frac{-4-2h+2}{-h} = \frac{2h+2}{h}$$

$$P(-2+h) + P(-2-h) = \frac{2h-2}{h} + \frac{2h+2}{h} = \frac{4h}{h} = 4$$

$$P(-2+h) + P(-2-h) = 4$$

إذاً: $A(2, 2)$ مركز تناظر لـ C .

④ P معرف مستمرًا حيث $x \in]-2, +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} P(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = 2$$

$$P'(x) = \frac{2(x+2) - 1 \cdot (2x+2)}{(x+2)^2} = \frac{2x+4-2x-2}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2}$$

$$P'(x) > 0$$

x	-2	$+\infty$
$P'(x)$	$ $	$+$
$P(x)$	$-\infty$	2

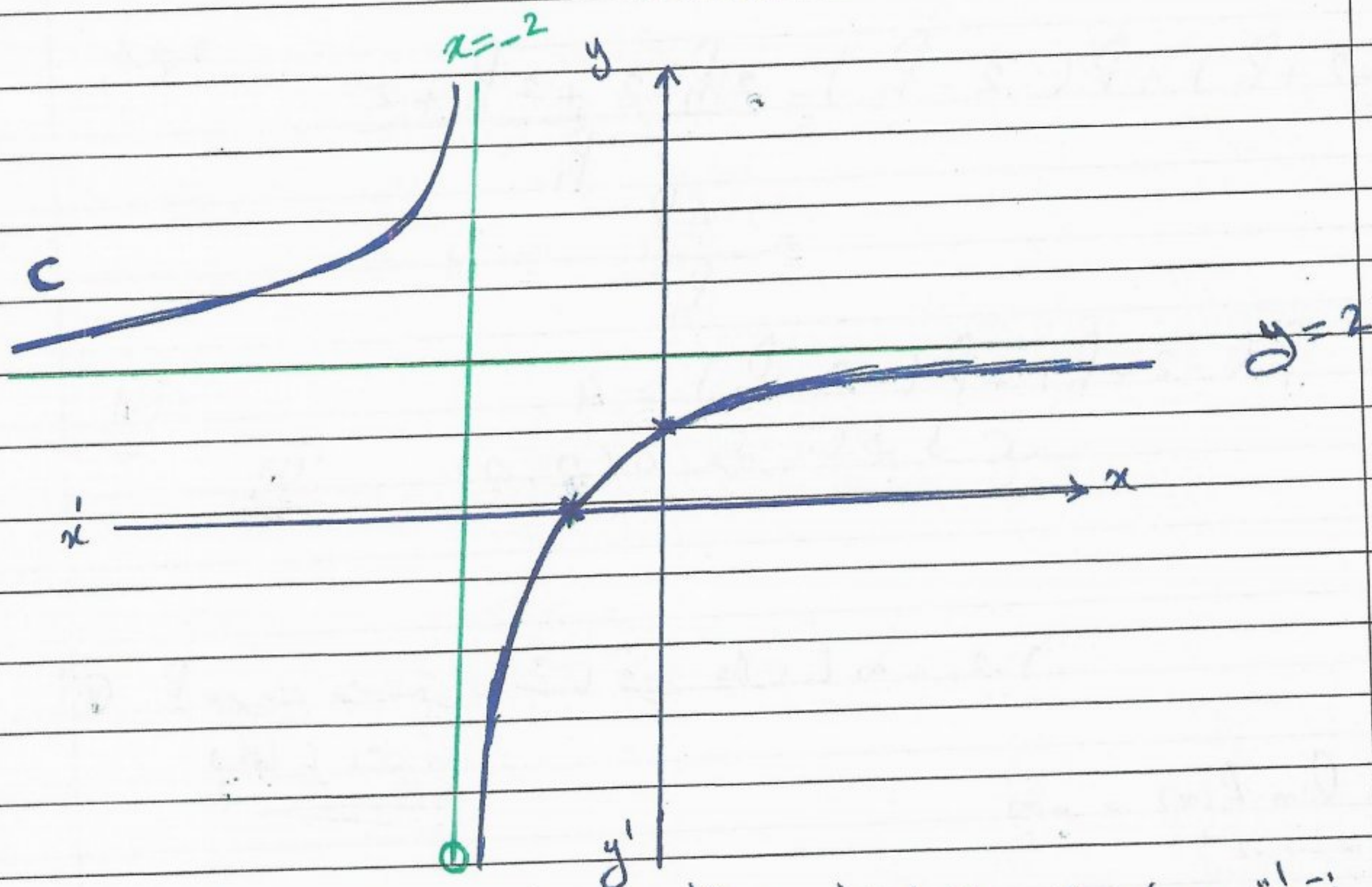
$$P''(x) = \frac{-2(x+2) \cdot 1 \cdot 2}{(x+2)^4} = \frac{-4}{(x+2)^3} < 0$$

جهد ليعبر: C متوجّه ليعبر.

④ الرسم: الخطوط:

$$y = +2$$

$$x = -2$$

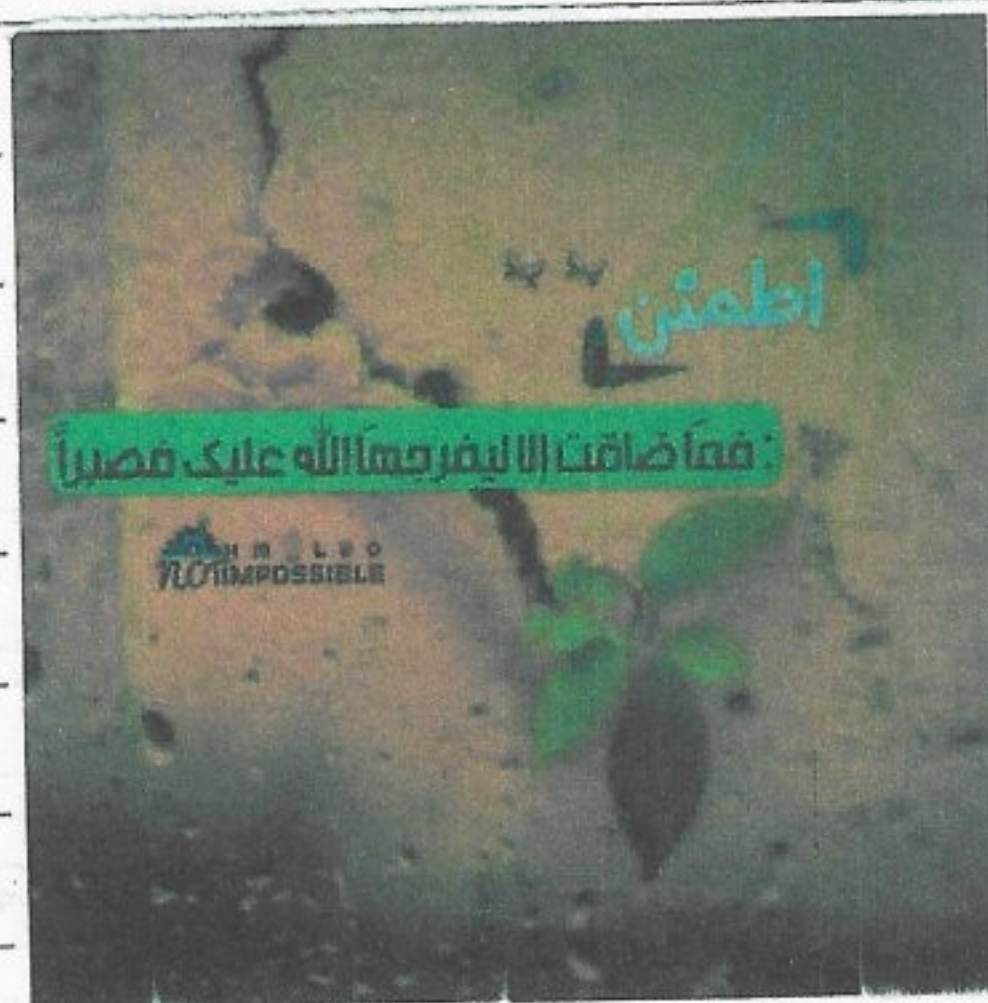


نقطة: مساعدة: خط لبياني C يقع عند x, x' حيث $P(x) = 0$

→ $2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow B(-1, 0)$

الخط C يقع عند x, y' حيث $x = 0$

→ $P(0) = 1 \Rightarrow C(0, 1)$



مسألة (١٩) -

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-4} \quad ; \quad D_f =]-\infty, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, +\infty[$$

مقاربات:

$$* \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x-1}{x^2-4} \right) = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي للخط C .

الموضع المستقيم: ندرس استقامة الفرجة:

$$f(x) - y = \frac{x-1}{x^2-4} - 0 = \frac{x-1}{x^2-4}$$

لعدم الفرجة:

$$f(x) - y = 0 \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x=1$$

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$f(x) - y$	—		+ 0 -		+
الموضع المستقيم	لوقت لكان	لوقت لكان	لوقت لكان	لوقت لكان	لوقت لكان

$$* \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x-1}{x^2-4} \right) = \frac{-3}{0}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

$x = -2$ مقارب رأس أفقي. C يقع بين لكان

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

$x = -2$ مقارب رأس أفقي. C يقع بين لكان

$$* \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-1}{x^2-4} \right) = \frac{1}{0}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$x = 2$ مقارب رأس أفقي. C يقع بين لكان

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$x = 2$ مقارب رأس أفقي. C يقع بين لكان

5] معرفة واستمرارية f على $]-\infty, -2[$ و $]2, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{1 \cdot (x^2 - 4) - 2x(x-1)}{(x^2 - 4)^2} \\
 &= \frac{x^2 - 4 - 2x^2 + 2x}{(x^2 - 4)^2} \\
 &= \frac{-x^2 + 2x - 4}{(x^2 - 4)^2} \\
 &= -\frac{(x^2 - 2x + 4)}{(x^2 - 4)^2} \\
 &= -\frac{(x^2 - 2)^2}{(x^2 - 4)^2} < 0
 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$	—	—	—	—
$f(x)$	0	$-\infty$	$+\infty$	0

$x = -2$ $x = 2$

الرسم

نقطتي تقاطع f مع x'

$f(x) = 0$ نجد x'

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$A(1, 0)$

نقطتي تقاطع f مع y'

$$f(0) = \frac{1}{4}$$

$B(0, \frac{1}{4})$

$$S = \int_0^1 P(x) dx$$

المساحة

$$= \int_0^1 \frac{x-1}{x^2-4} dx \quad (*)$$

كسور جزئية

$$\frac{x-1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \quad (*)$$

(1) (x+2) (x-2)

$$\frac{x-1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A(x+2) + B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$x-1 = Ax+2A+Bx-2B$$

$$x-1 = (A+B)x + (2A-2B)$$

نظام معادلات

$$A+B = 1 \quad [1]$$

$$2A-2B = -1 \quad [2]$$

من (1) نجد

$$B = 1 - A \quad (*)$$

نعوض في (2)

$$2A - 2(1-A) = -1$$

$$2A - 2 + 2A = -1$$

$$4A = 3 \Rightarrow A = \frac{3}{4}$$

نعوض في (*)

$$B = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$B = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow P(x) = \frac{\frac{3}{4}}{x-2} + \frac{\frac{1}{4}}{x+2}$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+2}$$

$$= \frac{1}{4} \left(3 \cdot \frac{1}{x-2} + 1 \cdot \frac{1}{x+2} \right)$$

$$\Rightarrow S = \int_0^1 P(x) dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 \left(3 \cdot \frac{1 \rightarrow g'}{x-2} + 1 \cdot \frac{1 \rightarrow g'}{x+2} \right) dx$$

$\downarrow g$ $\downarrow g$

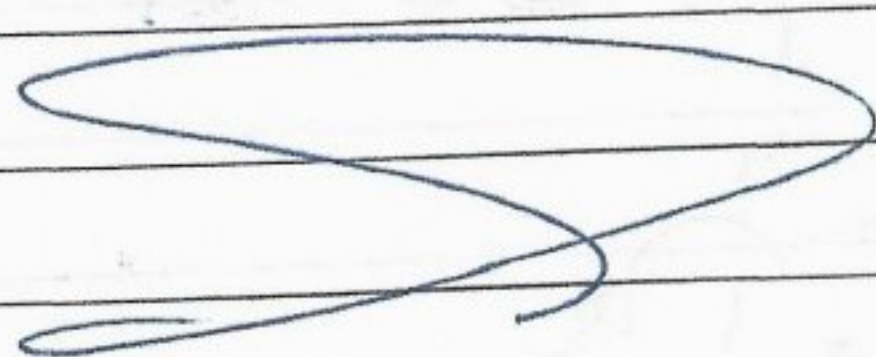
$$= \frac{1}{4} \left[3 \ln |x-2| + 1 \cdot \ln |x+2| \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4} \left(3 \ln |-1| + \ln |3| - 3 \ln |-2| - \ln |2| \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(3(0) + \ln 3 - 3 \ln 2 - \ln 2 \right)$$

$$= \frac{1}{4} (\ln 3 - 4 \ln 2)$$

$$= \frac{1}{4} (\ln 3 - \ln 16) = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{3}{16} \right)$$



المسألة (20) -

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x^2} \text{ و } D_f = \mathbb{R}^*$$

$$\Delta : y = 2x - 1 \quad \square$$

نشكل الفرق :

$$f(x) - y_D = 2x - 1 + \frac{1}{x^2} - (2x - 1)$$

$$= \frac{1}{x^2}$$

الفرق يقترب من $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y_D) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right) = 0$$

إذًا Δ مماس للـ f في C .

2. f معرف ومستمرة متتالية على $]0, +\infty[$ و $] -\infty, 0[$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - 1 + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x - 1 + \frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$\Delta' : y = 0$ مماس في C في $x=0$.

$$f'(x) = 2 + \frac{0 \cdot x^2 - 2x \cdot 1}{x^4} = 2 - \frac{2}{x^3} = \frac{2x^3 - 2}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 2 = 0 \Rightarrow x^3 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = 2$$

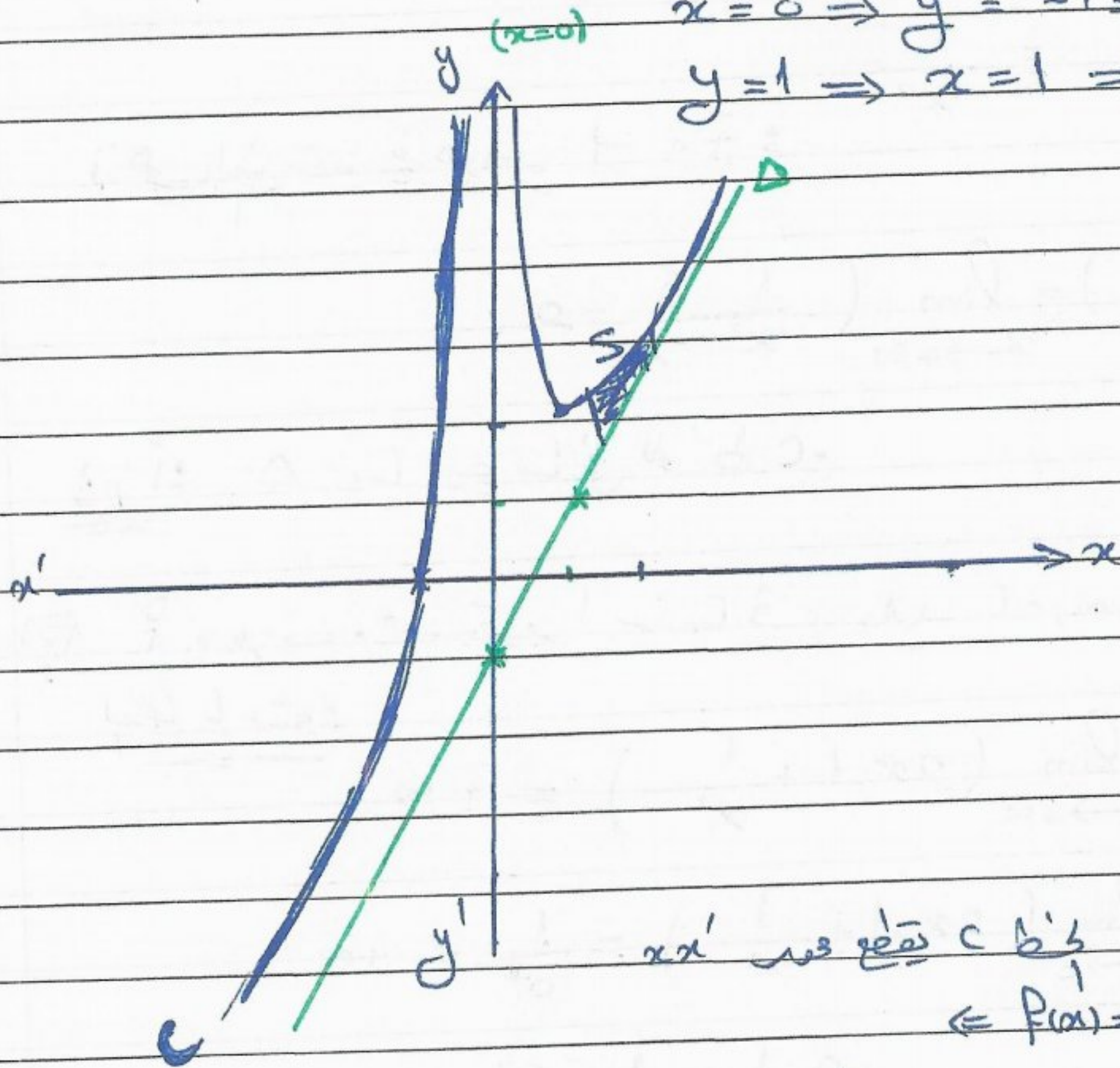
x	$-\infty$		0	1	$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	$+$
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	$+\infty$

(3) المماس : Δ : $x=0$: $y=1$: $x=1$: $y=1$

$$\Delta: y = 2x - 1$$

$$x=0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (0, -1)$$

$$y=1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1, 1)$$



نقطة التقاطع بين Δ و C : $P'(x) = 0$: $x=0$: $y=1$: $x=1$: $y=1$

$$2x - 1 + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\frac{2x^3 - x^2 + 1}{x^2} = 0$$

$$2x^3 - x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$A(-1, 0)$$

$$S = \int_0^2 (f(x) - y_0) dx$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$= \int_1^2 x^{-2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$2x^3 - (1 + \lambda)x^2 + 1 = 0$$

$$2x^3 - x^2 - \lambda x^2 + 1 = 0$$

$$2x^3 - x^2 + 1 = \lambda x^2$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2x^3 - x^2 + 1}{x^2} = \frac{2x^3}{x^2} - \frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}$$

$$\lambda = 2x - 1 + \frac{1}{x^2} = P(x)$$

$$\text{لـ } \lambda \in]-\infty, 2[\text{ دالة متزايدة و } \lambda$$

نقطة قصوى
*

$$\text{لـ } \lambda = 2 \text{ دالة ثابتة}$$

*

$$\text{لـ } \lambda \in]2, +\infty[\text{ دالة متناقصـة و } \lambda$$

*

مسألة (21) -

$$f(x) = x + \frac{2}{\sqrt{x}} - 4 \quad ; \quad D =]0, +\infty[$$

① f معرف ومستمرة، اوجدنا في f على المجال $]0, +\infty[$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{2}{\sqrt{x}} - 4 \right) = \frac{2}{0^+} = +\infty$ النهاية تتعدى

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{2}{\sqrt{x}} - 4 \right) = +\infty + 0 = +\infty$

الاشتقاق :

$$f'(x) = 1 + \frac{0 \cdot \sqrt{x} - \frac{2}{2\sqrt{x}} \cdot 2}{x}$$

$$= 1 - \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x} - 1}{x\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x\sqrt{x} - 1 = 0 \Rightarrow x\sqrt{x} = 1$$

$$x^2 \cdot x = 1$$

$$x^3 = 1$$

$$x = 1$$

$$f(1) = 1 + \frac{2}{1} - 4 = -1$$

$f(1) = -1$ قيمة صغرى.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

② $D : y = x - 4$

$$f(x) - y_D = x + \frac{2}{\sqrt{x}} - 4 - (x - 4)$$

نشكل الفرق :

$$= \frac{2}{\sqrt{x}}$$

نتهي الفرق في جواب $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{x}} \right) = 0$$

إذًا: Δ متناهي مائل للمحور C في $+\infty$

② الموضع النسبي بين C و Δ :
 ندرس إشارة الفرق $f(x) - y = \frac{2}{\sqrt{x}} > 0$
إذًا: C فوق Δ

③ المعادلة $f(x) = 0$ قابلة للحل أم لا:
 $0 < x_1 < 1$ لا

$$f(0) = f(1) < 0$$

$$2 < x_2 < 3 \quad \text{وكل شيء}$$

$$f(2), f(3) < 0$$

④ معادلة T المماس عند $x=1$:
 المماس أفقي لا يوجد
 عند $x=1$

$$T: y = -1$$

⑤ النقطة التي Δ تقطع T :
 $\Delta: y = x - 4$

$$x = 4 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (4, 0)$$

$$x = 2 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow (2, -2)$$

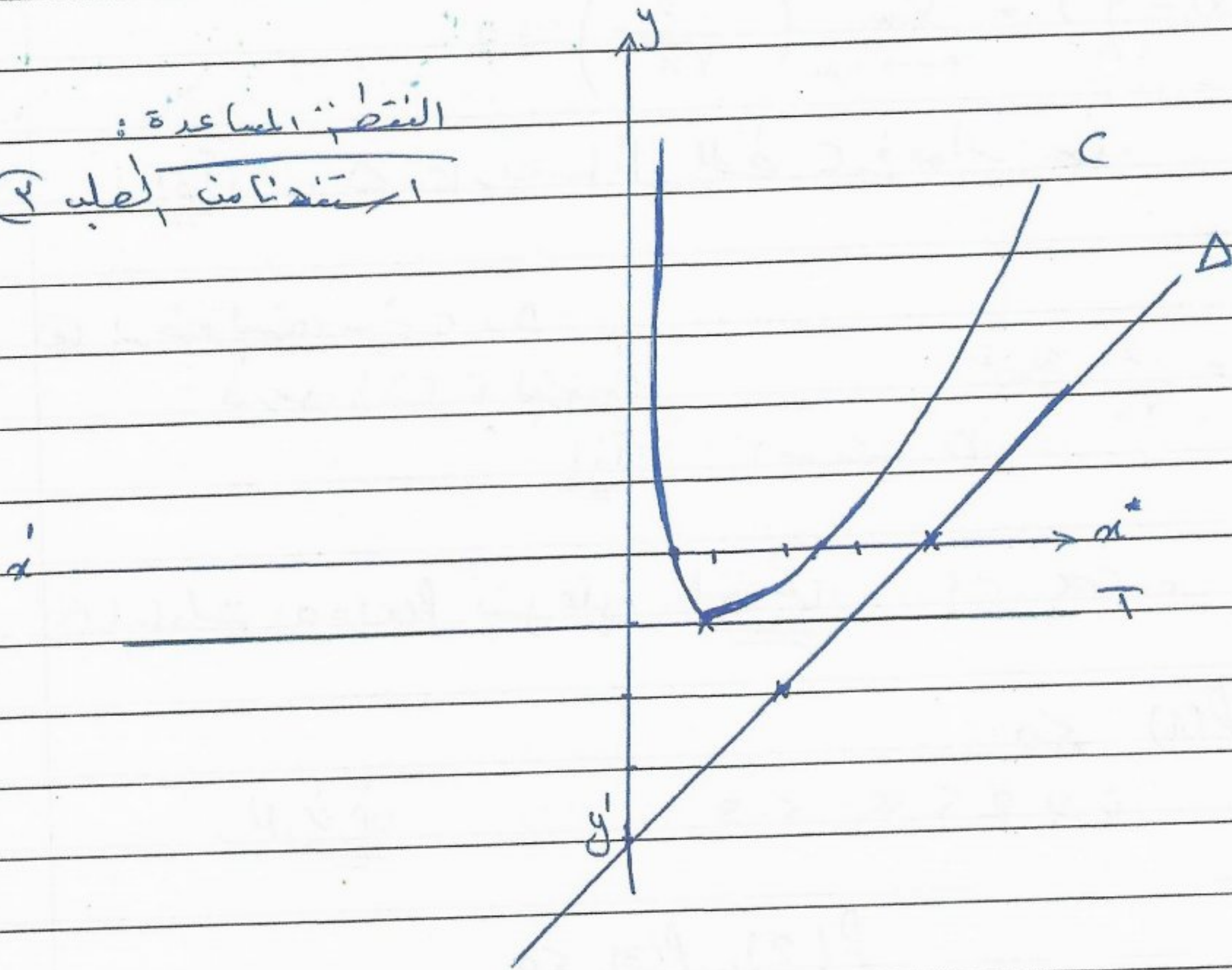
$$(-2, +\infty)$$

$$(1, -1)$$

$$(+\infty, +\infty)$$

نقطة التقاطع

النقطة المساعدة :
استخدامات (أ) (ب) (ج)



5. لنا مشقة :
 $P(x) = \lambda$
 $\lambda \in]-\infty, -1[$ *
 $\lambda = -1$ *
 $\lambda \in]-1, +\infty[$ *



- مسألة (22) -

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 + 8}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 + 8}) = -\infty - \infty = -\infty \quad \text{① (نقطة بارية)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 8}) = +\infty - \infty \quad (\text{نقطة بارية})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(x - \sqrt{x^2 + 8})(x + \sqrt{x^2 + 8})}{x + \sqrt{x^2 + 8}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x^2 - 8}{x + \sqrt{x^2 + 8}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-8}{x + \sqrt{x^2 + 8}} \right) = 0$$

$y = 0$ مقامات أصح.

$$f(x) - y = \frac{-8}{x + \sqrt{x^2 + 8}} \quad \text{نقطة بارية}$$

C نقطة بارية

$$y = 2x \quad \text{② (نقطة بارية)}$$

$$f(x) - y = x - \sqrt{x^2 + 8} - 2x = -\sqrt{x^2 + 8} - x$$

$$= \frac{-(\sqrt{x^2 + 8} - x)(\sqrt{x^2 + 8} + x)}{\sqrt{x^2 + 8} + x} = \frac{x^2 + 8 - x^2}{\sqrt{x^2 + 8} + x} = \frac{8}{\sqrt{x^2 + 8} + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{8}{\sqrt{x^2 + 8} + x} \right) = 0$$

* لموضع لستيف: ندرس (است) لستيف:

$$f(x) = y = \frac{8}{\sqrt{x^2+8} + x}$$

د. ك. د.

٢) P معرفة مستمرة و (است) صفة على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

الاستيفات:

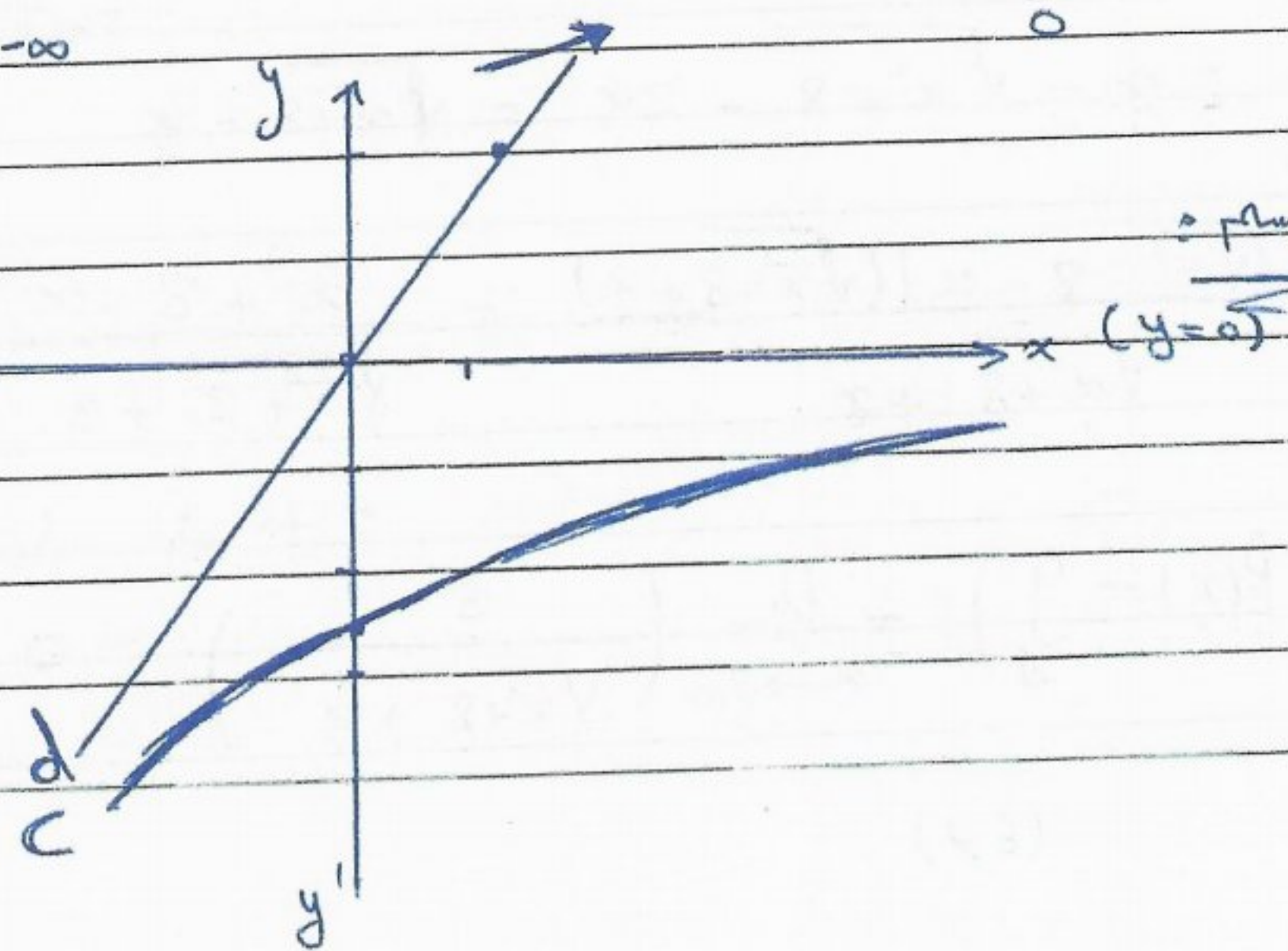
$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+8}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+8}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+8} - x}{\sqrt{x^2+8}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+8} - x = 0$$

مستقيم: كل
من (است) لستيف

x	$-\infty$	$+\infty$
f'(x)		+
f(x)	$-\infty$	0



المسار:

المسار المستقيم: (است) لستيف

نحس $xy' = 0$ لستيف

$$f(0) = -\sqrt{8}$$

$$\Rightarrow A(0, -2.7)$$

Alnajah
(168)

(70)

مسألة (23) -

$$P(x) = x - 1 + \frac{1}{x-1}$$

$$D_P =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

II) معرفة دالة مستمرة واستاتيقي على $]-\infty, 1[$ و $]1, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 1 + \frac{1}{x-1} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} P(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(x - 1 + \frac{1}{x-1} \right) = \frac{1}{0}$$

$$* \lim_{x \rightarrow 1^+} P(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$x=1$ مقام متناهي، 0 يقع بين المقارب.

$$* \lim_{x \rightarrow 1^-} P(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$x=1$ مقام متناهي، 0 يقع بين المقارب.

$$P'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$$

الاستاتيقي:

$$= \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2}$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow (x-1)^2 - 1 = 0$$

$$[x-1-1] \cdot [x-1+1] = 0$$

$$[(x-2)(x)] = 0$$

$$\begin{cases} x=2 \Rightarrow f(2) = 2 \\ x=0 \Rightarrow f(0) = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \Rightarrow f(2) = 2 \\ x=0 \Rightarrow f(0) = -2 \end{cases}$$

$$P(0) = -2$$

كبرى

$$f(2) = 2$$

صغرى

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$P'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0
$P(x)$	$-\infty$	-2	$-\infty$	$+\infty$	2

$$\Delta = y = x - 1 \quad [2]$$

$$f(x) - y_\Delta = x - 1 + \frac{1}{x-1} - (x-1) \quad \text{نشكل الفرق}$$

$$\Rightarrow f(x) - y_\Delta = \frac{1}{x-1}$$

نذهب لفرقة في جوار $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y_\Delta) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x-1} \right) = 0$$

إذاً: Δ متناهي لانه C في جوار $+\infty, -\infty$

(*) اوضح لسببي: ندرس اشارة الفرق:

$$f(x) - y_\Delta = \frac{1}{x-1}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y_\Delta$	$-$	$\parallel$	$+$
الموضع لسببي	C تحت Δ	$\parallel$	C فوق Δ

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow f(x) - 3 = 0 \quad [3]$$

للمعادلة $f(x) = 3$ حلان في $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ لان:

* $x_1 \in]1, 2[$ حيث f متزايدة على هذا المجال

وكان لك $3 \in f(]1, 2[)$

* $x_2 \in]2, +\infty[$ حيث f متزايدة على هذا المجال

وكان لك $3 \in f(]2, +\infty[)$

$$A(1, 0)$$

حيث نكو A هي تقاطع C حيث A هي نقطة:

$$f(1+h) + f(1-h) = 0 \quad (*)$$

$$f(1+h) + f(1-h) = 0 \quad \text{بحسب}$$

$$\begin{aligned} \bullet f(1+h) &= 1+h - 1 + \frac{1}{1+h-1} = h + \frac{1}{h} \\ \bullet f(1-h) &= 1-h - 1 + \frac{1}{1-h-1} = -h - \frac{1}{h} \end{aligned} \quad \text{بحسب}$$

$$\rightarrow P(1+P) + P(1-P) = 0$$

إذاً: $A(1,0)$ مركز تناظر القطع

$x=1$ محاور

المحاور:

⑤

$$y = x - 1$$

$$x=0 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow B(0,-1)$$

$$y=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow A(1,0)$$

فرع اول

$(0,-2)$

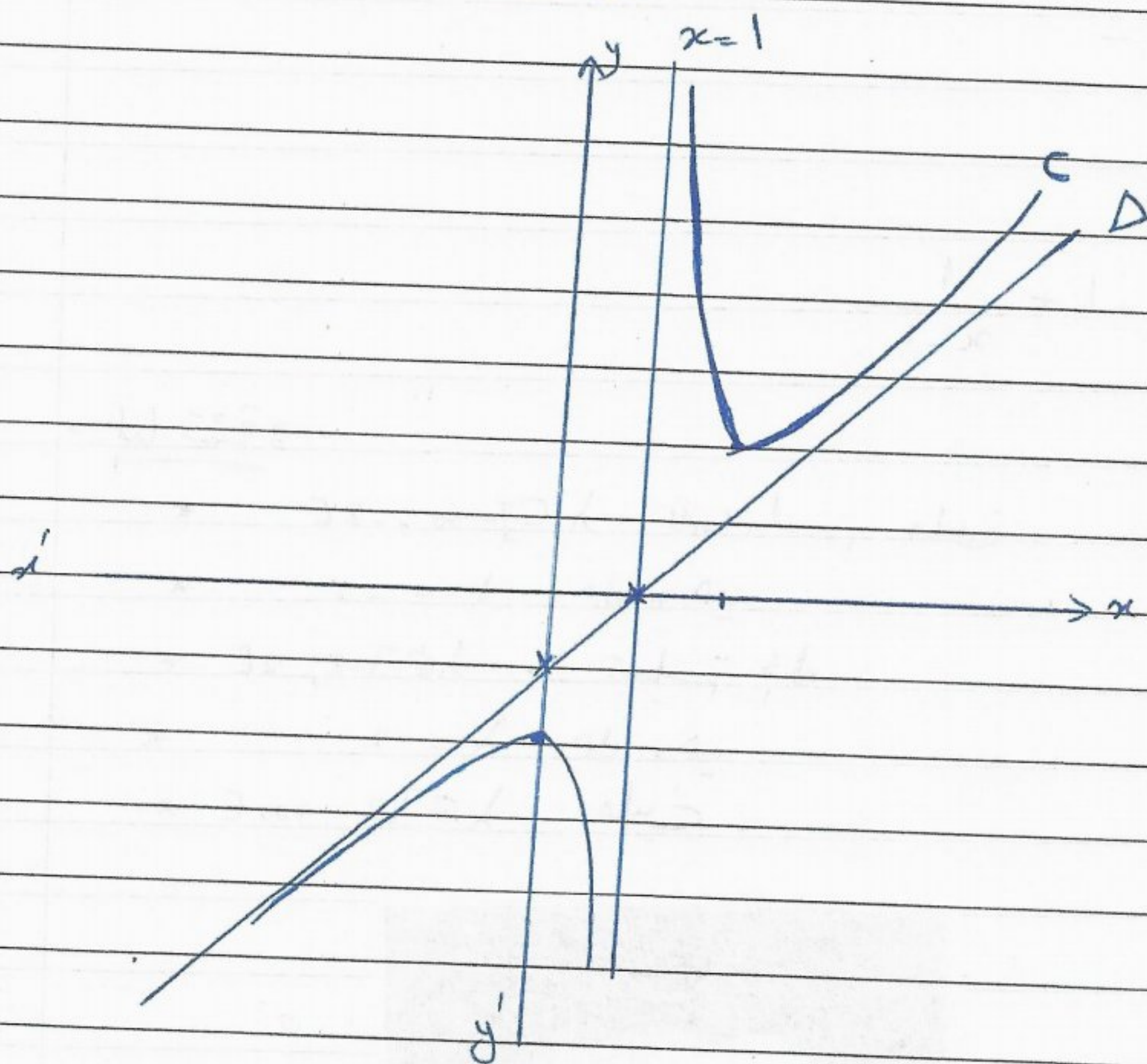
$(-\infty, -\infty)$

فرع ثاني

$(2,2)$

$(1, +\infty)$

قسم اسود



⑥

$$x^2 - (2+\lambda)x + 2+\lambda = 0$$

$$x^2 - 2x - \lambda x + 2 + \lambda = 0$$

$$x^2 - 2x + 2 = \lambda x - \lambda$$

$$x^2 - 2x + 2 = \lambda(x-1)$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$$

$$④ \text{ يمكن لا كما لا بطريقة } = \frac{x^2 - 2x + 1 + 1}{x-1}$$

القسم لا ملية:

$$= \frac{(x-1)^2 + 1}{x-1}$$

$$\begin{array}{r} x-1 \overline{) x^2 - 2x + 2} \\ \underline{-(x^2 - x)} \\ -x + 2 \\ \underline{+x - 1} \\ 1 \end{array} = x-1 + \frac{1}{x-1} = f(x)$$

$$\lambda = f(x) = x-1 + \frac{1}{x-1}$$

لنا مسألة:

$$\lambda \in]-\infty, -2[\text{ ليس } *$$

$$\lambda = -2 \text{ ليس } *$$

$$\lambda \in]-2, 2[\text{ ليس } *$$

$$\lambda = 2 \text{ ليس } *$$

$$\lambda \in]2, +\infty[\text{ ليس } *$$



المسألة (24) -

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$D_f =]-\infty, +\infty[$$

① متى يكون f زوجي-بسيط أم فردي-بسيط؟

"فرض" $x \in D \Rightarrow -x \in D$ (a)

$$f(-x) = -f(x) \quad (b)$$

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{\frac{1}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 1}$$

$$= \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = -\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) = -f(x)$$

$$= -f(x)$$

إذاً: f فردي و صفته لتي نظرية: C متناظر بالنسبة إلى 0 .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right) = \frac{+\infty}{+\infty} \quad (c)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x \left(\frac{1}{e^x} - 1 \right)}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x} \right)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} \right)$$

$$= \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

$y = 1$ متناظر أفقي للأشكال C .

الوضع البسيط: ندرس إذاً $f(x) - y$:

$$f(x) - y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} - \frac{1}{1} = \frac{e^x - 1 - e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{-2}{e^x + 1} < 0$$

إذاً: C تقع تحت Δ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right) = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$$

خط أفقي $y = -1$

• لوضع المنحنى: ندرس إشارة الفرق:

$$f(x) - y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} - (-1) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} + 1 = \frac{e^x - 1 + e^x + 1}{e^x + 1} = \frac{2e^x}{e^x + 1} > 0$$

إذاً: C فوق المقارب.

③ معرفة مستقيمات مقارب على $]-\infty, +\infty[$

لنحسب:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \quad \neq \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot (e^x + 1) - e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2}$$

لا سعة

$$= \frac{e^x(e^x + 1 - e^x + 1)}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	-1	1

④ الرسم: المقاربات: $y = 1$ أفقي

قسم السرد:

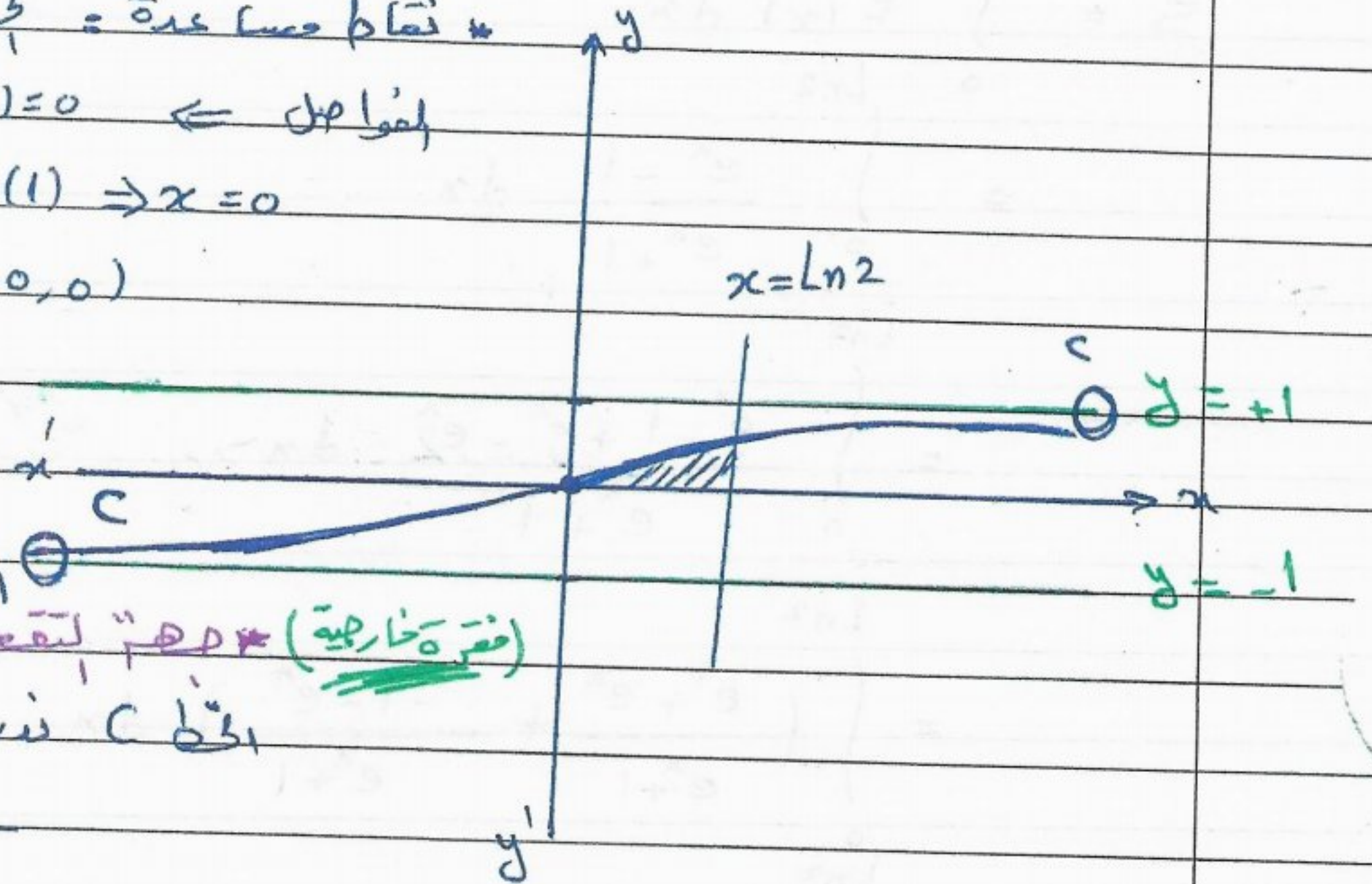
$$\begin{cases} (-\infty, -1) \\ (-1, +\infty) \end{cases}$$

* نعلم من عدة = أن y لها ليا في C تقع في

$$e^x - 1 = 0 \quad \leftarrow F(x) = 0 \quad \leftarrow \text{المعادلة}$$

$$e^x = 1 \Rightarrow x = \ln(1) \Rightarrow x = 0$$

$$(0, 0)$$



(فترة خارجية) * y لها ليا في C معرفة لهما تقع في

التي C ندرس إشارة المشتق الثاني

$$F'(x) = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$F''(x) = \frac{2e^x(e^x + 1)^2 - 2(e^x + 1) \cdot e^x \cdot 2e^x}{(e^x + 1)^4}$$

$$= \frac{2e^x(e^x + 1)^2 - 4e^{2x}(e^x + 1)}{(e^x + 1)^4}$$

$$= \frac{2e^{2x} + 2e^x - 4e^{2x}}{(e^x + 1)^3}$$

$$= \frac{2e^x - 2e^{2x}}{(e^x + 1)^3} = \frac{2e^x(1 - e^x)}{(e^x + 1)^3}$$

$$F''(x) = 0 \Rightarrow 2e^x(1 - e^x) = 0 \Rightarrow 1 - e^x = 0 \Rightarrow e^x = 1$$

$$x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$F''(x)$	$+$	0	$-$
جهة التقعر	مفتوحة لأعلى		مفتوحة لأسفل

$$S = \int_0^{\ln 2} P(x) dx$$

$$= \int_0^{\ln 2} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$$

$$= \int_0^{\ln 2} \frac{e^x - 1 + e^x - e^x}{e^x + 1} dx$$

و نضيف e^x ونطرح e^x

$$= \int_0^{\ln 2} \left(\frac{e^x + e^x}{e^x + 1} + \frac{-1 - e^x}{e^x + 1} \right) dx$$

$$= \int_0^{\ln 2} \left(\frac{2e^x}{e^x + 1} - \left(\frac{e^x + 1}{e^x + 1} \right) \right) dx$$

$$= \int_0^{\ln 2} \left(2 \cdot \frac{e^x}{e^x + 1} - 1 \right) dx$$

$$= \left[2 \cdot \ln |e^x + 1| - x \right]_0^{\ln 2}$$

$$= 2 \ln(e^{\ln 2} + 1) - \ln 2 - (2 \ln(e^0 + 1) - 0)$$

$$= 2 \ln(2 + 1) - \ln 2 - (2 \ln(1 + 1) - 0)$$

$$= 2 \ln 3 - \ln 2 - 2 \ln 2$$

$$= 2 \ln 3 - 3 \ln 2$$

$$= \ln 3^2 - \ln 2^3 = \ln 9 - \ln 8$$

$$= \ln \left(\frac{9}{8} \right)$$

المسألة (25) -

$$P(x) = 3e^x - x - 3 \quad \text{في } D_P =]-\infty, +\infty[$$

$$d: y = -x - 3 \quad (1)$$

$$P(x) - y_d = 3e^x - x - 3 - (-x - 3) = 3e^x$$

نشكل الفرق:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (P(x) - y_d) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3e^x) = 0$$

تتبع الفرق في هوار $-\infty$

$$P(x) - y_d = 3e^x > 0$$

إذا: d متا رب مائل في هوار $-\infty$
* لو وضع لنسب بين C و d
ندرس إشارة الفرق:

إذا: C فوق d
P معرفة مستمرة توافقية على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3e^x - x - 3) = 0 + \infty = +\infty$$

(ن) $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3e^x - x - 3) = +\infty - \infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{3e^x}{x} - 1 - \frac{3}{x} \right) = +\infty (+\infty - 1 - 0) = +\infty$$

$$P'(x) = 3e^x - 1$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow 3e^x - 1 = 0 \Rightarrow 3e^x = 1$$

استنتاج:

$$x = -\ln 3 \leftarrow x = \ln \frac{1}{3} \leftarrow e^x = \frac{1}{3}$$

$$P\left(\ln\left(\frac{1}{3}\right)\right) = 3e^{\ln\frac{1}{3}} + \ln 3 - 3 = 3 \cdot \frac{1}{3} + \ln 3 - 3$$

$$\Rightarrow P(-\ln 3) = \ln 3 - 2$$

x	$-\infty$	$-\ln 3$	$+\infty$
$P'(x)$	—	0	+
$P(x)$	$+\infty$	$\searrow \ln 3 - 2 \nearrow$	$+\infty$

$\rightarrow \ln 3 \approx 1.1$

1 1 1

٤) للعادلة $P(x) = 0$ حلان

أولهما الصفر، لأنه $P(0) = 3e^0 - 0 - 3 = 3 - 3 = 0$

والآخر مدهورين -3 و -2 لأنه يحقق $P(-3) \cdot P(-2) < 0$ حيث

$$P(-2) = \frac{3}{e^2} - 1 < 0$$

$$P(-3) = \frac{3}{e^3} > 0$$

٤) الرسم: الخطا، ياتى $d: y = -x - 3$

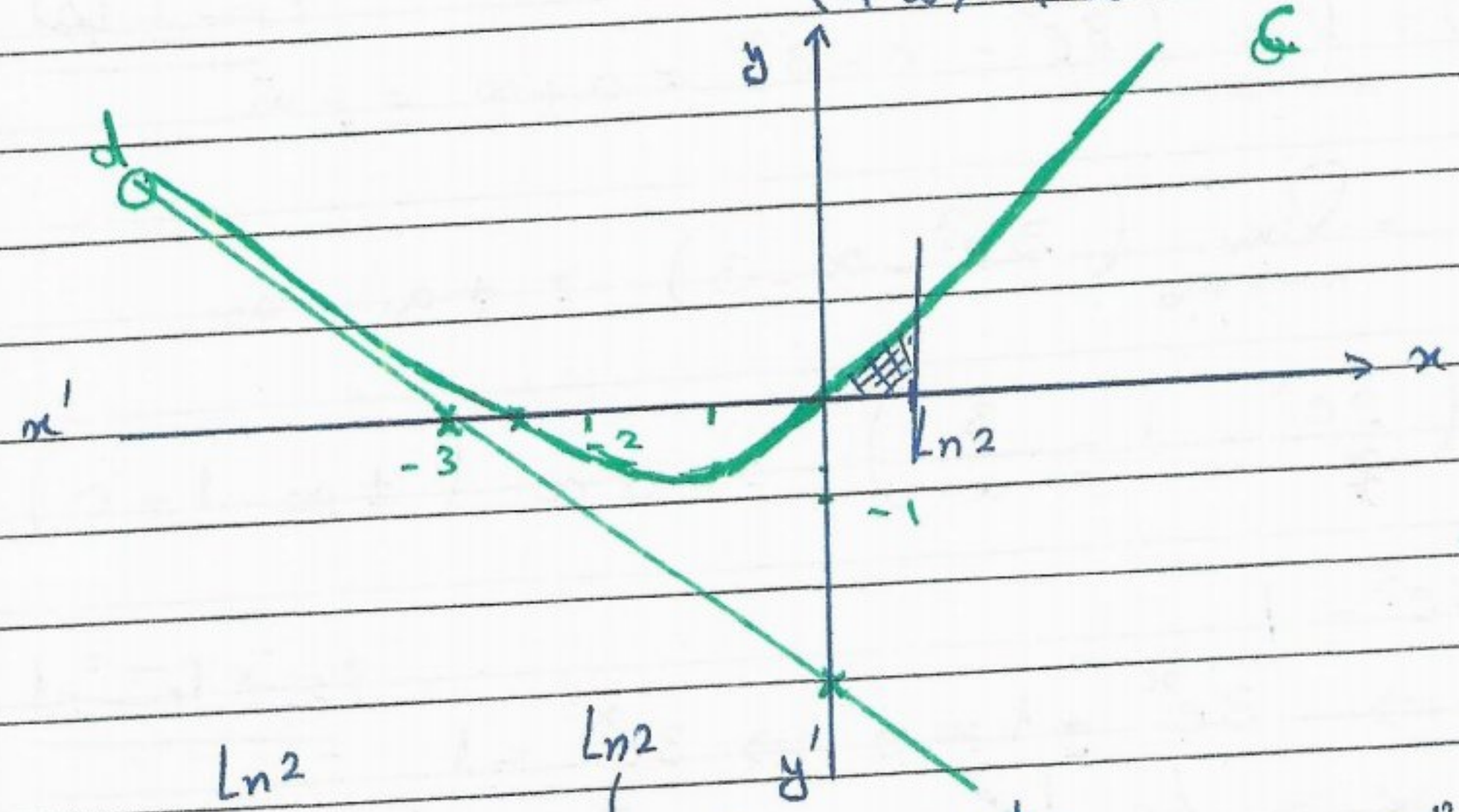
$$x = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow (0, -3)$$

$$y = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow (-3, 0)$$

قسم ١، دة $\mathbb{R}(-\infty, +\infty)$

$$\in (-\ln 3, \ln 3 - 2) \Rightarrow (-1.1, -0.9)$$

$$\mathbb{R}(+\infty, +\infty)$$



$$S = \int_0^{\ln 2} P(x) dx = \int_0^{\ln 2} (3e^x - x - 3) dx$$

٥) $P(\ln 2)$

$$= \left[3e^x - \frac{x^2}{2} - 3x \right]_0^{\ln 2} = 3e^{\ln 2} - \frac{(\ln 2)^2}{2} - 3\ln 2 - 3e^0$$

$$= 3 \times 2 - \frac{2 \ln 2}{2} - 3\ln 2 - 3 = 6 - 4\ln 2 - 3 = 3 - 4\ln 2$$

مسألة (26) -

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$D_f =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$$

① معرف ومستمرة وناشئة في كل مكان في $]-\infty, 0[$ و $]1, +\infty[$.

نقطة ثابتة:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = \ln(1) = 0$$

$y=0$ مقارب أفقي:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \right) = \ln(0) = -\infty$$

$x=0$ مقارب رأسي مقولي: C يقطع y في $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = \ln\left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$$

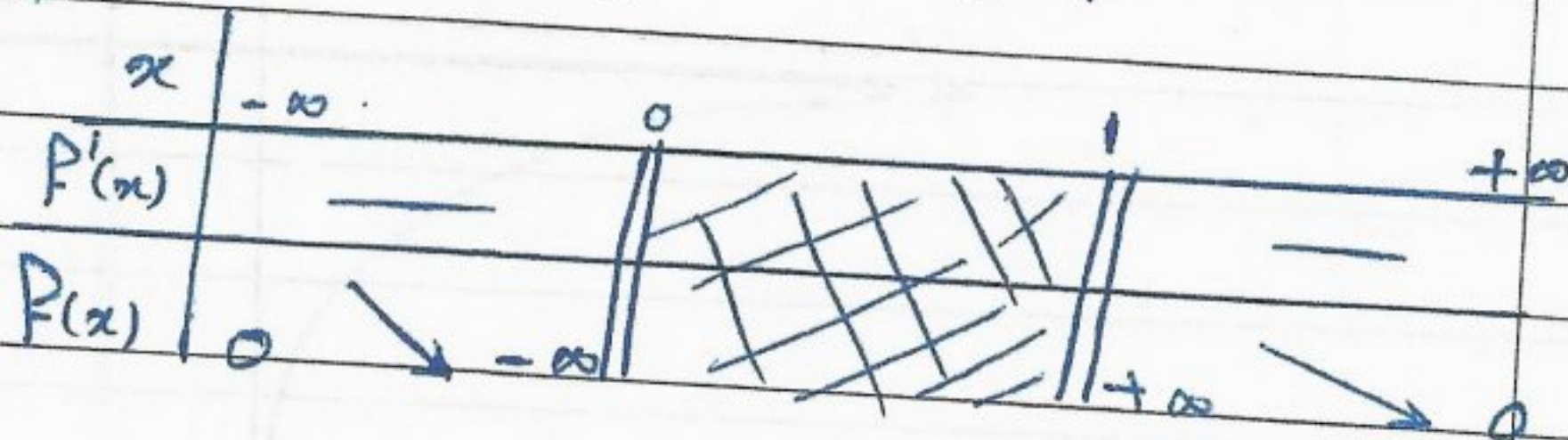
$x=1$ مقارب رأسي مقولي: C يقطع y في $x=1$

الاشتقاق:

$$f'(x) = \dots$$

$$f(x) = \ln(x) - \ln(x-1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-x}{x(x-1)} = \frac{-1}{x(x-1)} < 0$$



② هل يمكن C من أن تكون بالسيطرة للنقطة $A(\frac{1}{2}, 0)$ ؟

$$f\left(\frac{1}{2}+h\right) + f\left(\frac{1}{2}-h\right) \stackrel{?}{=} 0$$

$$= f\left(\frac{1}{2}-h\right) + f\left(\frac{1}{2}+h\right)$$

$$f\left(\frac{1}{2}+h\right) = \ln\left(\frac{\frac{1}{2}+h}{\frac{1}{2}+h-1}\right) = \ln\left(\frac{\frac{1}{2}+h}{h-\frac{1}{2}}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{2}-h\right) = \ln\left(\frac{\frac{1}{2}-h}{\frac{1}{2}-h-1}\right) = \ln\left(\frac{\frac{1}{2}-h}{-\frac{1}{2}-h}\right)$$

نجمع

$$f\left(\frac{1}{2}+h\right) + f\left(\frac{1}{2}-h\right) = \ln\left(\frac{\frac{1}{2}+h}{h-\frac{1}{2}}\right) + \ln\left(\frac{-\left(\frac{1}{2}+h\right)}{-\left(\frac{1}{2}-h\right)}\right)$$

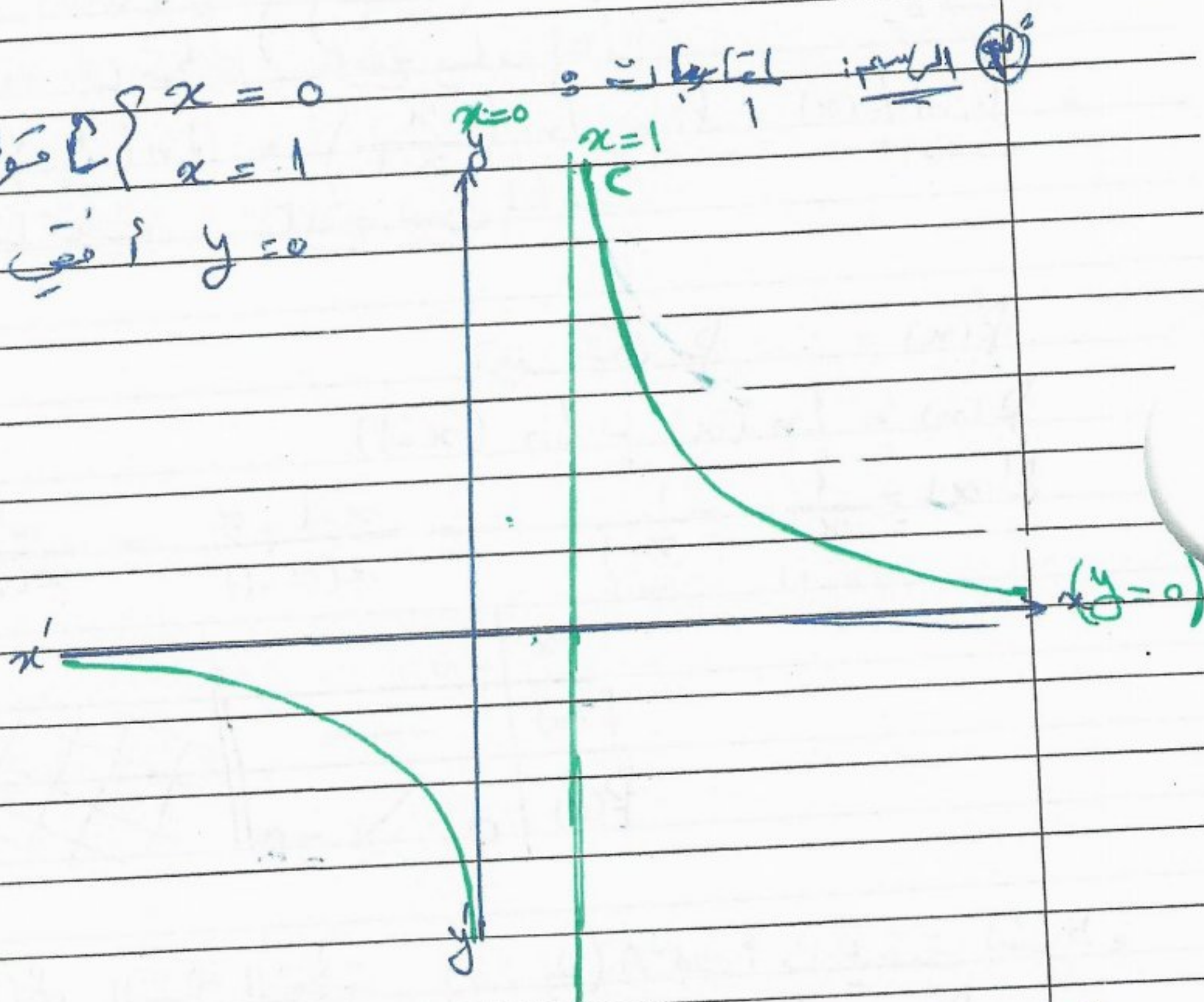
$$= \ln\left(\frac{\frac{1}{2}+h}{h-\frac{1}{2}} \times \frac{h-\frac{1}{2}}{h+\frac{1}{2}}\right) = \ln(1) = 0$$

إذًا: $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ مركز تماثل لـ C

مستقيم التماثل

$x=0$
 $x=1$
 $y=0$ أفقي

$(-\infty, -\infty)$ ∞
 $(0, -\infty)$ ∞
 $(1, +\infty)$
 $(+\infty, 0)$



② تماثل خطي لـ $g(x)$ مع خط التماثل $P(x)$ $\Rightarrow P(x) = g(x)$

$$\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = \ln x$$

$x \in D_f \cap D_g \Rightarrow x \in]1, +\infty[$

$$\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = \ln x \iff \frac{x}{x-1} = x$$

$$x^2 - x = x$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$\underline{x = 0}$$

لا حقيقة شرط الحل / مرفوض

$$\underline{x = 2}$$

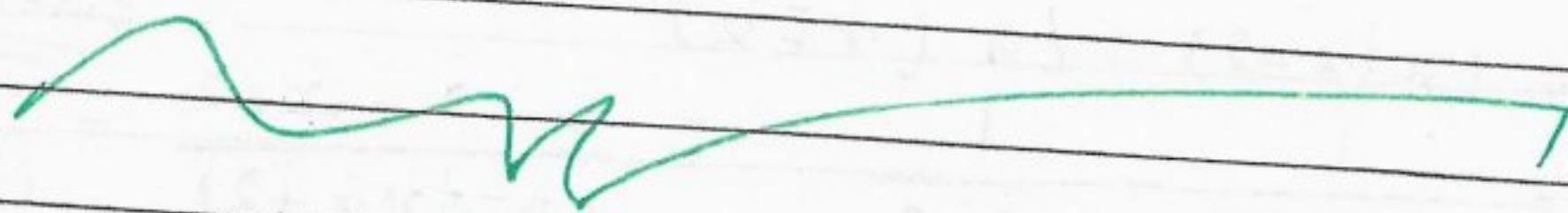
إذًا: نقطة التقاطع هي $(2, \ln 2)$

$$f'(x) = \ln x - \ln(x-1)$$

⑤ رسم C'

$$D_f =]1, +\infty[$$

إذًا: C' هو الجزء من خط C_f والذي يقع ضمن المجال $]1, +\infty[$.



* ندرج: C ليكن C خطًا لبياني. للتابع f المعروف وقت و

$$C: f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{x-1}\right)$$

$$D_f =]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$$

① ادرس تعبيرات f وتنظمها ولا بها وسين طالونا C من عبارات

توانى المعرفين.

② أثبت أن خط C متناظر بالنسبة للنقطة $I(-1, 0)$.

③ ادرس كل من f و f' ثم ارسم C .

④ ادر نقطة تقاطع C مع خط g للتابع $g(x) = \ln x$.

⑤ اصنع رسم C' للتابع $f'(x) = \ln(x+3) - \ln(x-1)$.

- مسألة (27) -

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) ; D =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$$

① f معرفة ومستمرة على D باستثناء $x = -2$ و $x = 2$ لأنها لا تملك

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = \ln(1) = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = \ln(0) = -\infty$$

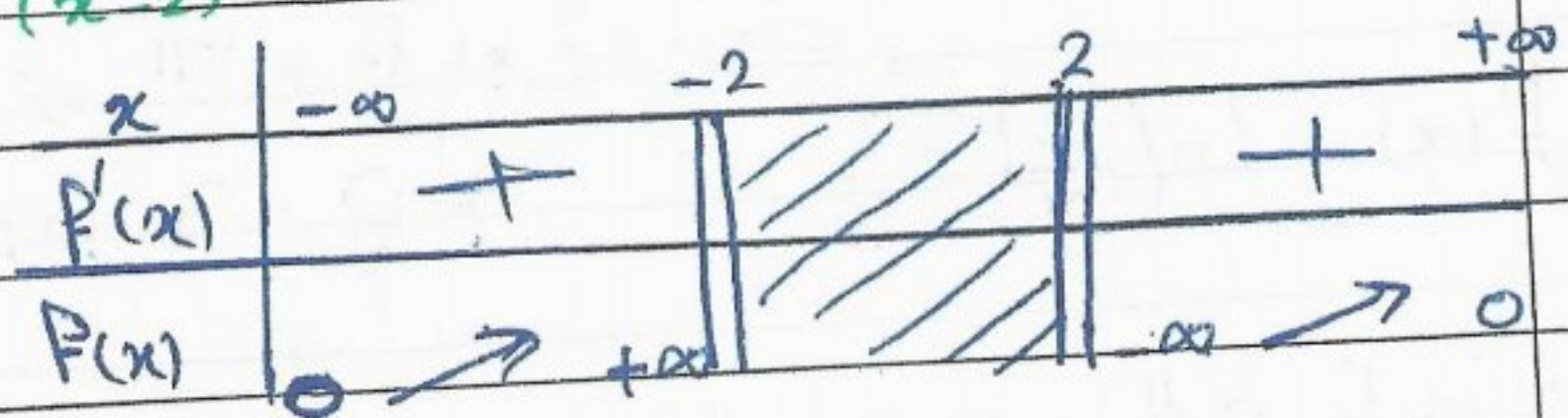
$x = 2$ مقارب عمودي، C يقع بين 2^- و 2^+

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = \ln\left(\frac{-4}{0^-}\right) = +\infty$$

$x = -2$ مقارب عمودي، C يقع بين -2^- و -2^+

$$f(x) = \ln(x-2) - \ln(x+2)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+2 - x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{-4}{(x-2)(x+2)}$$



② f متكون f تابع فردي - يجب أن يحقق الشرطين:

$$x \in D \Rightarrow -x \in D$$

$$f(-x) = -f(x)$$

$$f(-x) = \ln\left(\frac{-x-2}{-x+2}\right) = \ln\left(\frac{-(x+2)}{-(x-2)}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = -\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = -f(x)$$

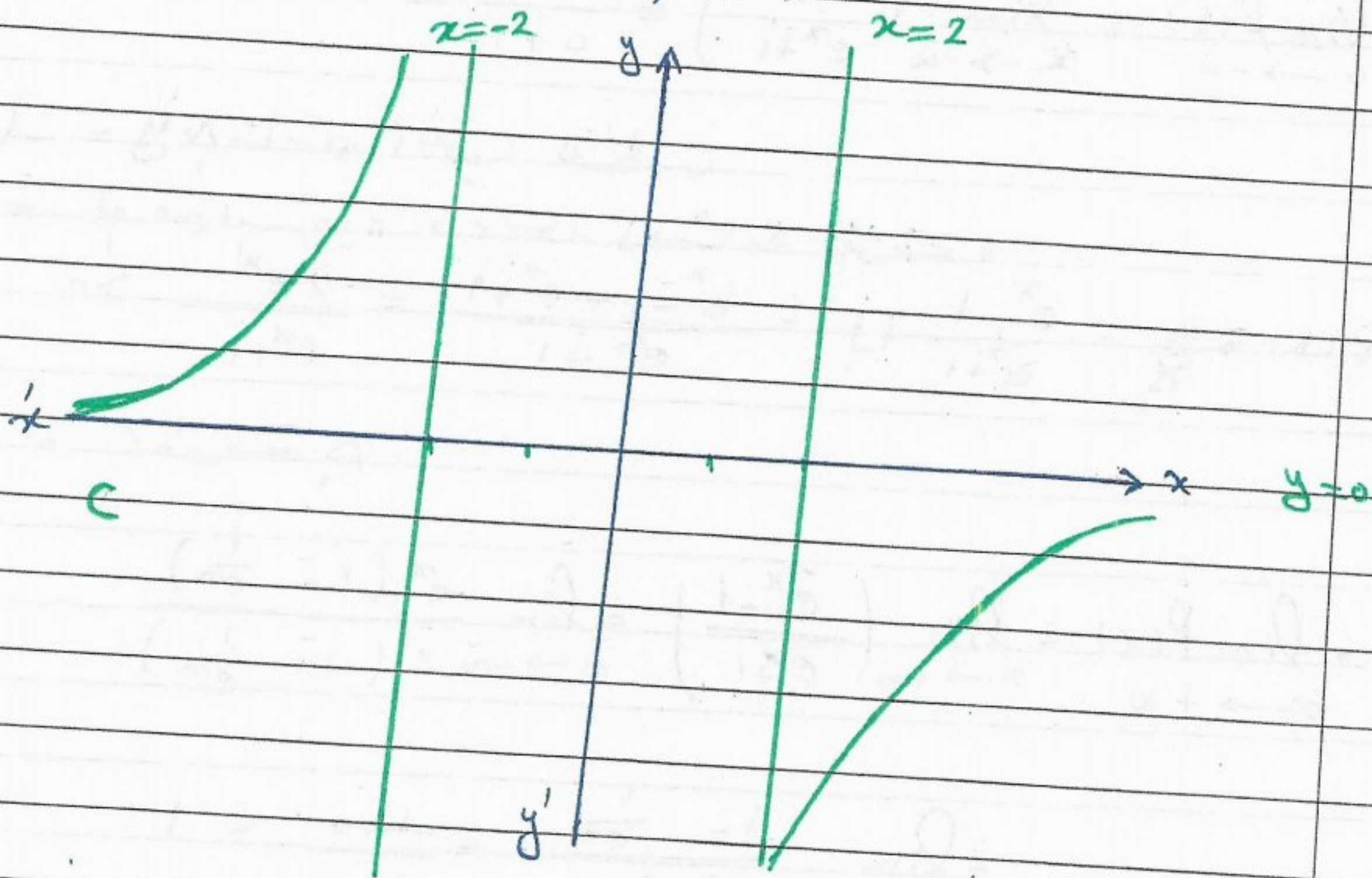
إذاً f فردي و C متناظر بالنسبة للخط O .

الرسم: مقاربات أفقي

$$\left. \begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \end{array} \right\} \text{محاوٍ}$$

مربع أول
مربع ثاني

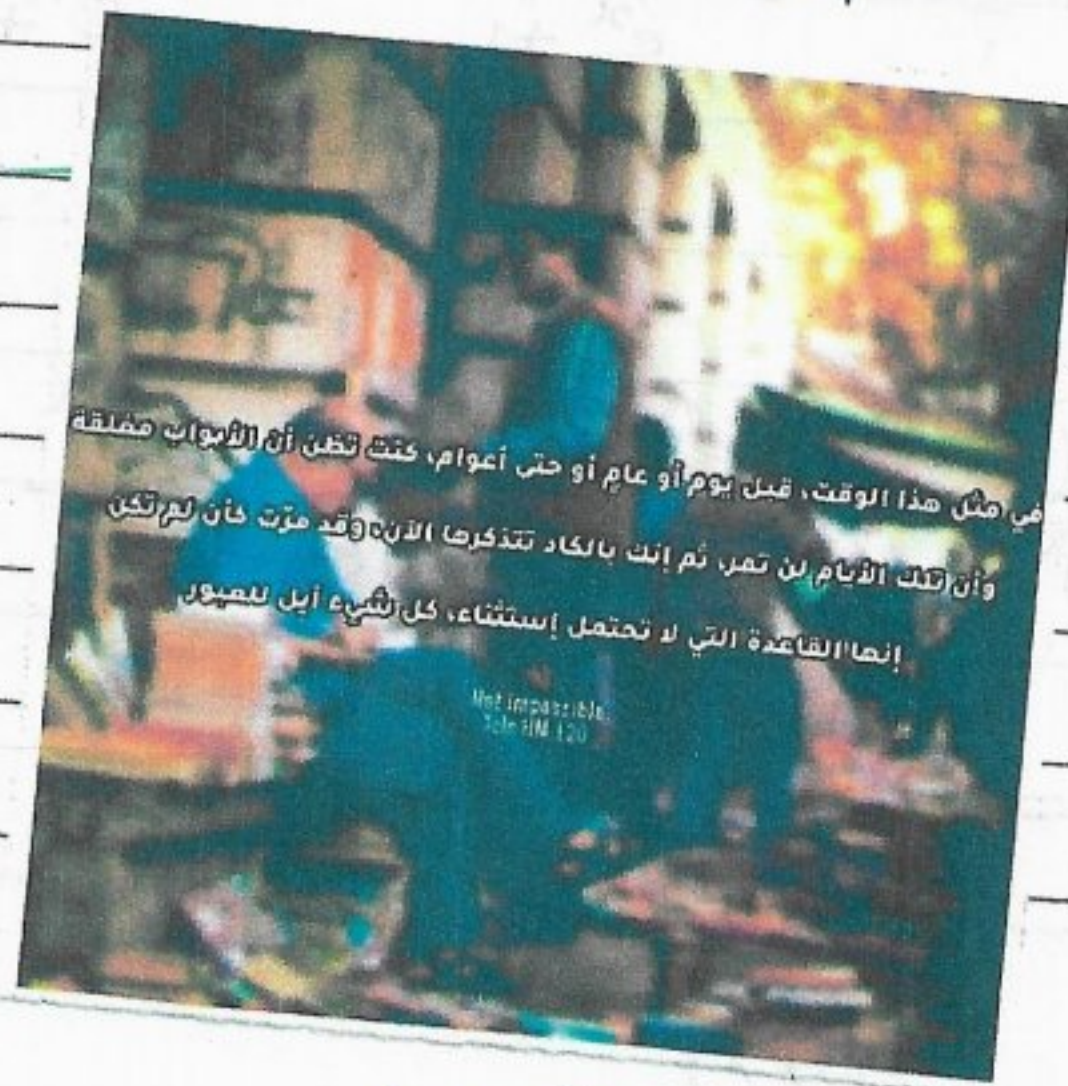
قسم الوحدة



$$g(x) = \ln(x-2) - \ln(x+2)$$

٤

إذا: $D =]2, +\infty[$ هو جزء من C ، C الذي يقع ضمن المجال $]2, +\infty[$



في مثل هذا الوقت، قبل يوم أو عام أو حتى أعوام، كنت تظن أن الأبواب مغلقة وأن تلك الأيام لن تمر، ثم إنك بالكاد تتذكرت الآن وقد مرت كأن لم تكن إنها القاعدة التي لا تحتمل إستثناء، كل شيء أبداً للصور

Met impossible
12h 12u

- مسألة (28) -

① f معرفة ومستمرة وناحيتها في $\mathbb{R}$ هي $]-\infty, +\infty[$ و $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ النهاية:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right) = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$$

$y = -1$ مقارب أفقي لـ C .

* لمضيق ليني: ندرس إشارة الفرق:

$$f(x) - y_1 = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} + 1 = \frac{e^x - 1 + e^x + 1}{e^x + 1} = \frac{2e^x}{e^x + 1} > 0$$

C فوق Δ_1 .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x} \right)}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

$y = 1$ مقارب أفقي لـ C .

* لمضيق ليني: ندرس إشارة الفرق:

$$f(x) - y_2 = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} - 1 = \frac{e^x - 1 - e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{-2}{e^x + 1} < 0$$

C تحت Δ_2 .

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$$

$(-\infty, -1)$

$(+\infty, 1)$

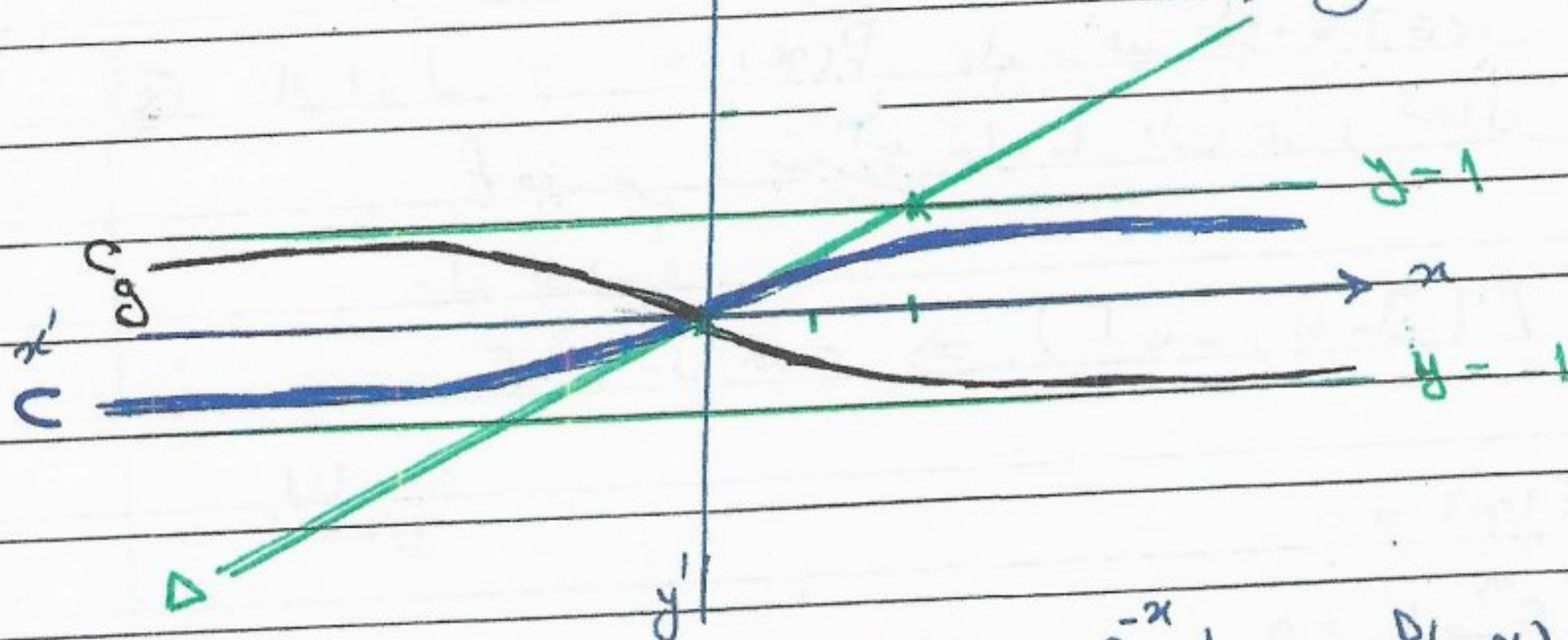
المسوفة:

$$\Delta_2: y = -1$$

$$\Delta: y = \frac{1}{2}x$$

$$x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow (0,0)$$

$$x=2 \Rightarrow y=1 \Rightarrow (2,1)$$



$$f(x) = e^{-x} - 1 = f(-x)$$

C نظير C بالسببة لـ $e^{-x} + 1$ بالحد y'

$$S = \int f(x) dx$$

$$= \int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$$

$$= \int \frac{e^x - 1 + e^x - e^x}{e^x + 1} dx$$

$$= \int \frac{2e^x - (e^x + 1)}{e^x + 1} dx$$

$$= \int \left(\frac{2e^x}{e^x + 1} - 1 \right) dx$$

$$= [2 \ln |e^x + 1| - x]$$

$$= 2 \ln(e^{\ln 3} + 1) - \ln 3 - [2 \ln(e^{\ln 2} + 1) - \ln 2]$$

$$= 2 \ln 4 - \ln 3 - 2 \ln 3 + \ln 2 = \ln 32 - \ln 27 = \ln \left(\frac{32}{27} \right)$$

- المسألة (29) -

$$P(x) = x - 1 - \ln x \quad ; \quad D_P =]0, +\infty[$$

① $\lim_{x \rightarrow 0^+} P(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 1 - \ln x) = 0 - 1 - (-\infty) = +\infty$

* $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1 - \ln x) = +\infty - 1 - \infty = +\infty - \infty$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty (1 - 0 - 0) = +\infty$$

$$P'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

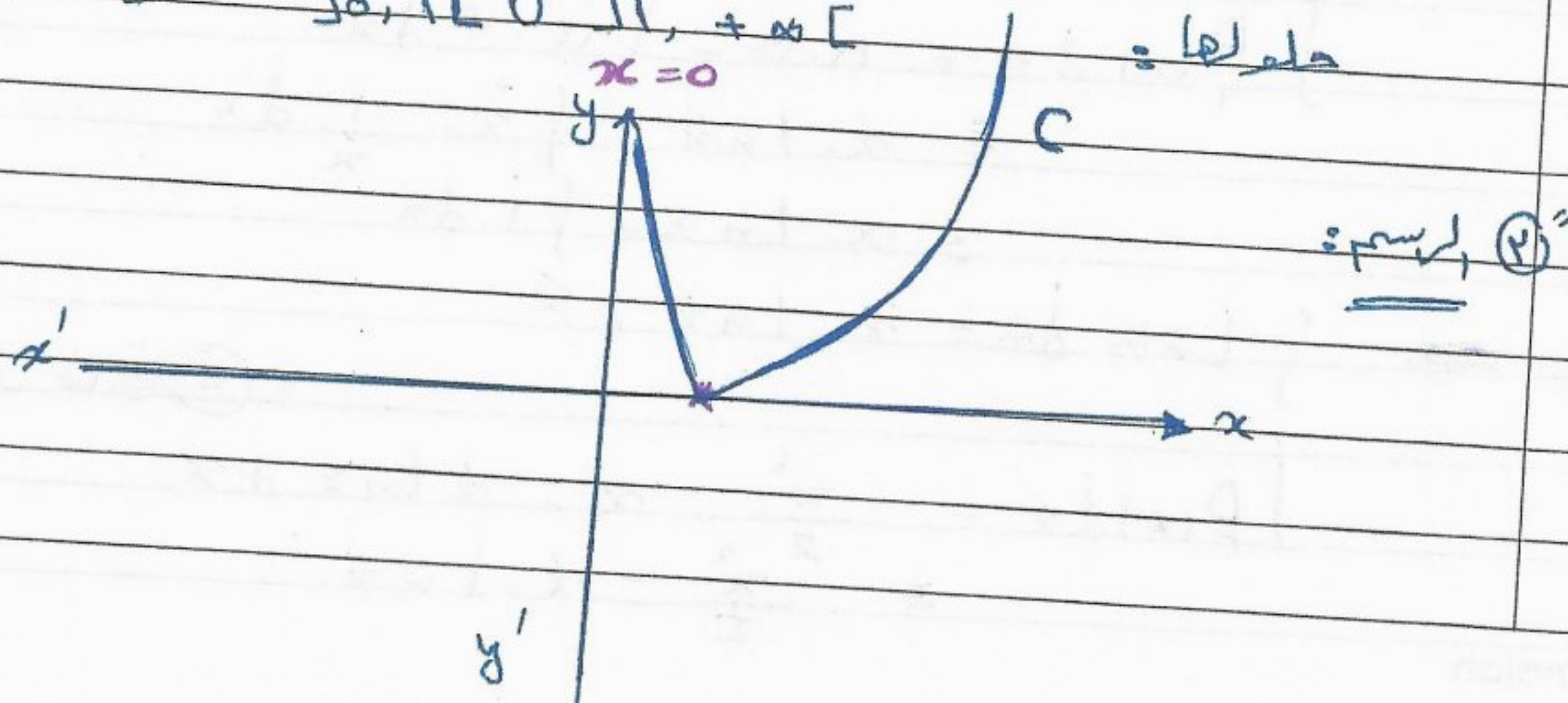
$$P(1) = 1 - 1 - \ln(1) = 0$$

x	0	1	$+\infty$
$P'(x)$		-	+
$P(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

$P(1) = 0$ قيمة صغرى محلية

② $\ln x + x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x < x - 1 \Rightarrow P(x) > 0$

$$E =]0, 1[\cup]1, +\infty[$$



$$g(x) = \frac{x^2}{2} - x \cdot \ln x \quad (*)$$

فإن $g(x)$ هي المشتقة لـ P - يجب أن نتحقق:

$$g'(x) = P(x) \quad (*)$$

$$= g'(x)$$

كيفية

$$g'(x) = \frac{2 \cdot x}{2} - \left[1 \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot x \right]$$

$$= x - \ln x - 1$$

$$= x - 1 - \ln x = P(x)$$

إذاً g هي المشتقة لـ P .

Note لا يجب بدء حساب التكامل فوراً كما قد يكون البغزنت.

$$P(x) = x - 1 - \ln x \quad (*)$$

كيفية التكامل بالجزء $\int \ln x \, dx$:

$$P(x) = 1 \cdot \ln x$$

$$u' = \frac{1}{x}$$

$$v = x$$

$$\Leftarrow u = \ln x$$

$$\Leftarrow v' = 1$$

$$\begin{aligned} \int P(x) \, dx &= u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx \\ &= x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= x \cdot \ln x - \int 1 \, dx \end{aligned}$$

$$\underline{\text{دع}} \rightarrow \int \ln x \, dx = x \cdot \ln x - x$$

لأن $u' = \frac{1}{x}$ (*)

$$\begin{aligned} \int P(x) \, dx &= \frac{x^2}{2} - x - x \ln x + x \\ &= \frac{x^2}{2} - x \cdot \ln x \end{aligned}$$

مسألة (30) -

$$P(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x}$$

$$D_P =]0, +\infty[$$

① $\lim_{x \rightarrow 0^+} P(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1 - \frac{\ln x}{x}) = -\ln(0) = +\infty$

الوضع لنبي: C يقع بين 0 و $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1 - \frac{\ln x}{x}) = +\infty - 0 = +\infty$$

② $\Delta: y = x + 1$

$$P(x) - y = x + 1 - \frac{\ln x}{x} - (x + 1) = -\frac{\ln x}{x}$$

نشكل الفرق:

تبقى الفرق في جواب $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (P(x) - y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\frac{\ln x}{x}) = 0$$

إذاً: Δ مماس للـ C في جواب $+\infty$

* الوضع لنبي: ندرس إشارة الفرق:

$$P(x) - y = -\frac{\ln x}{x}$$

نخدم الفرق:

$$P(x) - y = 0 \Rightarrow -\ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

x	0	1	$+\infty$
$P(x) - y$		$+$	$-$
الوضع لنبي		C فوق Δ	C تحت Δ

③ P معرف ومترد ومتماثل على $]0, +\infty[$

$$P'(x) = 1 - \frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln x$$

$$= 1 - \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 1 - \ln x}{x^2}$$

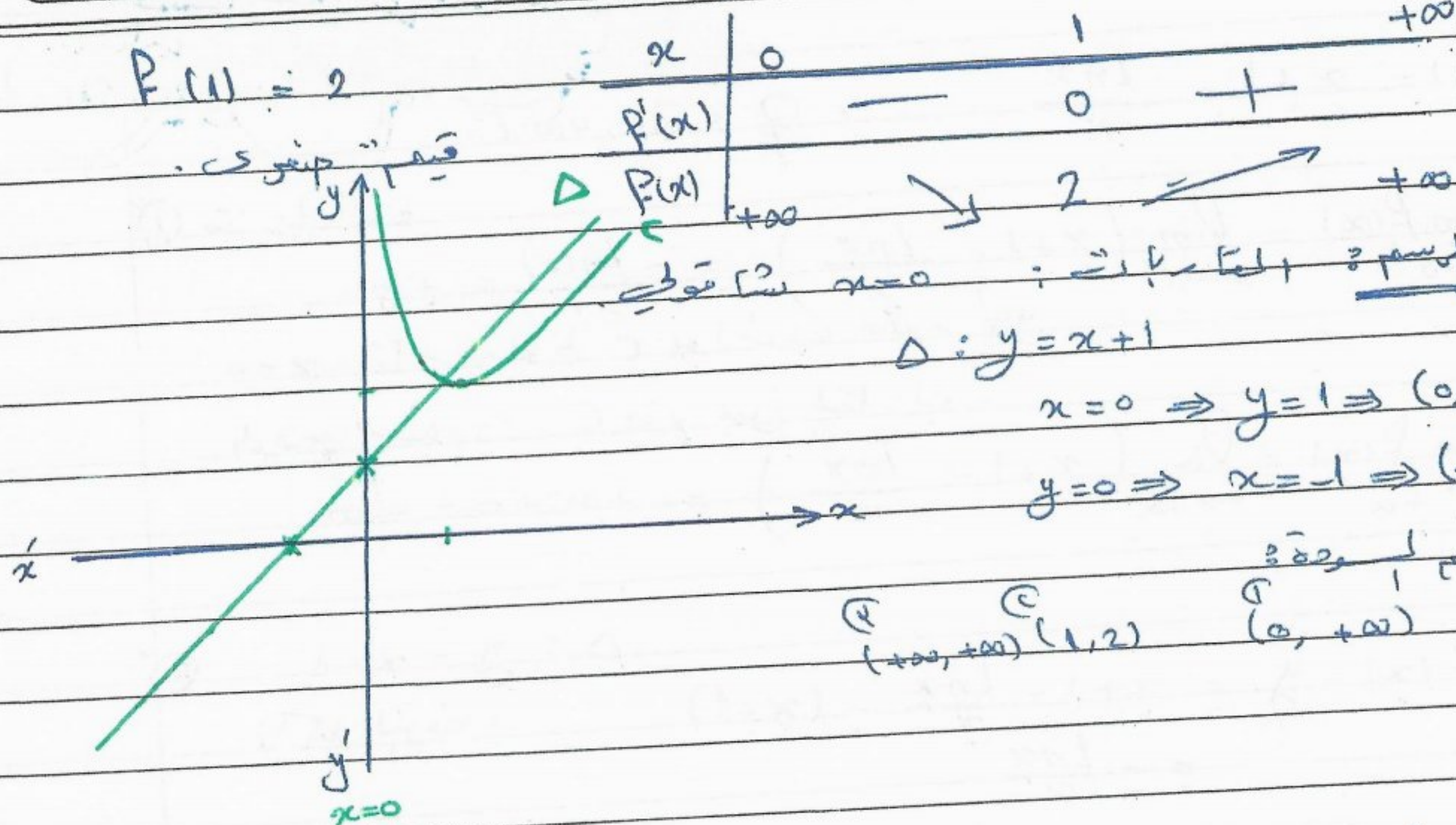
الـ C متماثل:

Alnajah $P'(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x=1}$

(11)

$$P(1) = 2$$

قيمة "مختلطة"



x	0	1	$+\infty$
$P'(x)$	—	0	+
$P(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

④ : $x=0$: $y=1$: $(0,1)$

$$\Delta : y = x + 1$$

$$x=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow (0,1)$$

$$y=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow (-1,0)$$

④ : $(+\infty, +\infty)$ ⑤ : $(1,2)$ ⑥ : $(0, +\infty)$

$$x=e, x=1$$

⑦ : $(1,2)$

$$S = \int_1^e P(x) dx$$

$$= \int_1^e \left(x + 1 - \frac{\ln x}{x} \right) dx$$

$$= \int_1^e \left(x + 1 - \frac{1}{x} \cdot \ln x \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + x - \frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^e$$

$$= \frac{e^2}{2} + e - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + 1 - 0 \right)$$

$$= \frac{e^2}{2} + e - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 = \frac{e^2 + 2e - 4}{2}$$

المسألة (31) -

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$$

①

$$\frac{x-2}{x+2} > 0$$

$$x=2 \Leftarrow x-2=0$$

$$x=-2 \Leftarrow x+2=0$$

x	-∞	-2	2	+∞
x-2	-	-	0	+
x+2	-	0	+	+
$\frac{x-2}{x+2}$	+	//	-	0
$\frac{x-2}{x+2} > 0$	-∞	//	∞	

$$D =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$$

②

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = \ln(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = \ln(0) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = \ln\left(\frac{-4}{0^-}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$$

③

$$f(-x) = -f(x)$$

$$f(-x) = \ln\left(\frac{-x-2}{2-x}\right) = \ln\left(\frac{-(x+2)}{-(x-2)}\right) = \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$$

$$= -\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = -f(x)$$

إذاً: f تابع فردى

٤) دالة f مستمرة متناقصة على $]-\infty, -2[$ و $]2, +\infty[$ ،

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$$

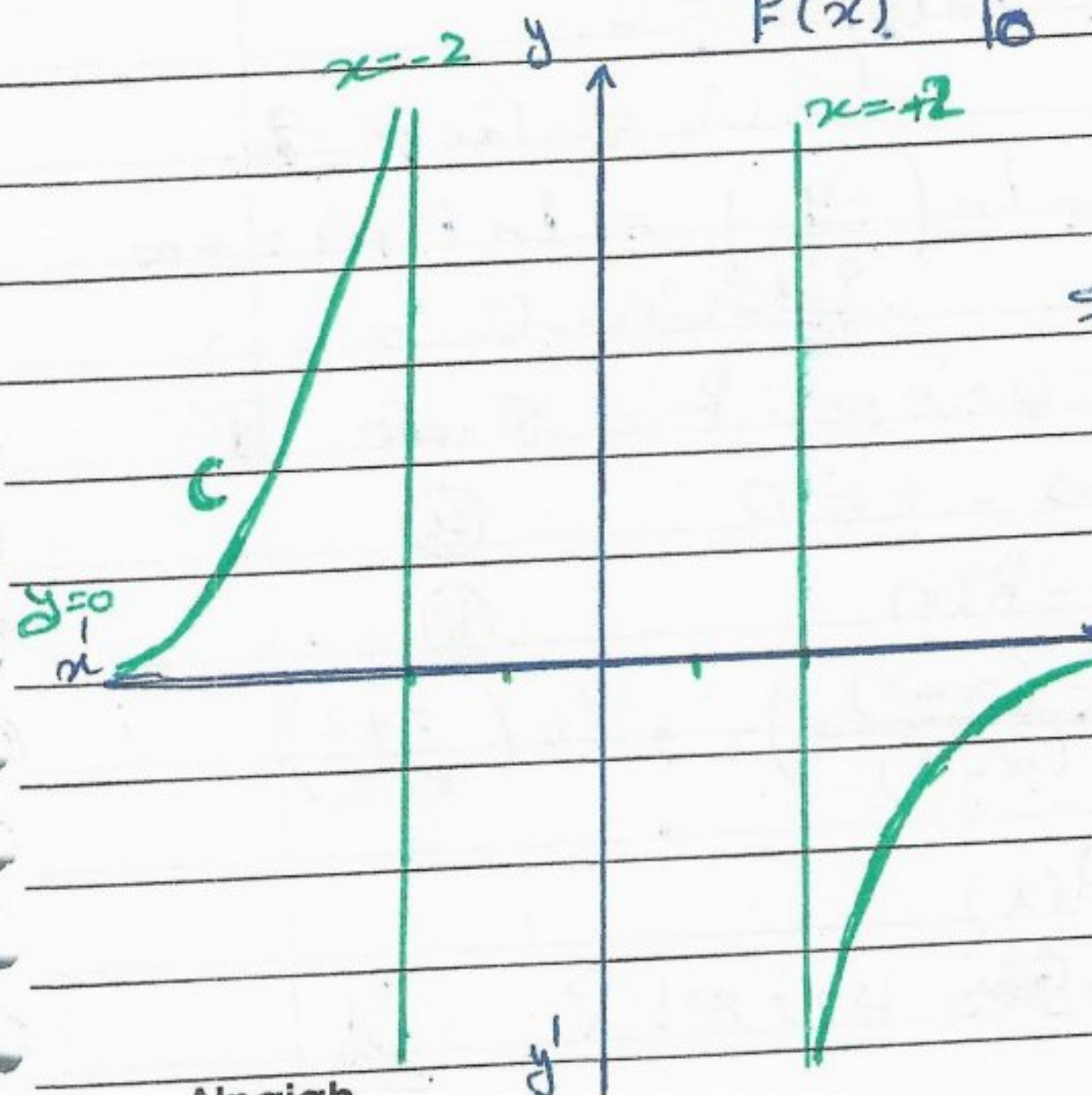
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$

$$f(x) = \ln \left(\frac{x-2}{x+2} \right)$$

$$= \ln(x-2) - \ln(x+2)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} = \frac{x+2 - x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{-4}{(x-2)(x+2)}$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$	$0 \rightarrow +\infty$		$-\infty \rightarrow 0$	



٥) الرسم: المقادير $x = -2$ و $x = 2$
 $y = 0$
 $(-\infty, 0)$
 $(-2, +\infty)$
 $(2, -\infty)$
 $(+\infty, 0)$

المسألة (32) -

$$F(x) = \ln\left(\frac{x}{2-x}\right)$$

$$x > 0$$

①

$$\frac{x}{2-x} > 0$$

$$x = 0$$

$$x = 2 \leftarrow 2 - x = 0$$

كس

لبط

القام

ف

المعرف

x

x

$2-x$

$\frac{x}{2-x}$

$\frac{x}{2-x}$

$-\infty$

0

$+$

0

$///$

$-$

0

$+$

0

$///$

$+$

0

$+$

0

$///$

$+$

0

$+$

0

$///$

$+$

0

$+$

0

$///$

2

$+$

0

$+$

$///$

$+$

0

$+$

0

$///$

$+$

0

$+$

0

$///$

$+$

0

$+$

0

$///$

$+$

0

$+$

0

$///$

$+$

0

$+$

0

$///$

$+$

0

$+$

0

$///$

$+$

0

$+$

0

$///$

$+$

0

$+$

0

$///$

$+$

0

$+$

0

$///$

$$D_F =]0, 2[$$

$$\ast \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{x}{2-x}\right) = \ln(0) = -\infty$$

$$\ast \lim_{x \rightarrow 2^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \ln\left(\frac{x}{2-x}\right) = \ln\left(\frac{2}{0^+}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 2} F(x) = +\infty$$

$$F(x) = \ln\left(\frac{x}{2-x}\right) = \ln x - \ln(2-x)$$

$$F'(x) = \frac{1}{x} - \frac{-1}{2-x} = \frac{2-x+x}{x(2-x)} = \frac{2}{x(2-x)} > 0$$

x	0		2
$P'(x)$		+	
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

الرسم : الخيار ب

نقاط : $x=0$
 $x=2$

قسم : $(0, -\infty)$

$(2, +\infty)$

نقطة : $x=0$: y' : $x=2$: y'

$$P(x) = 0$$

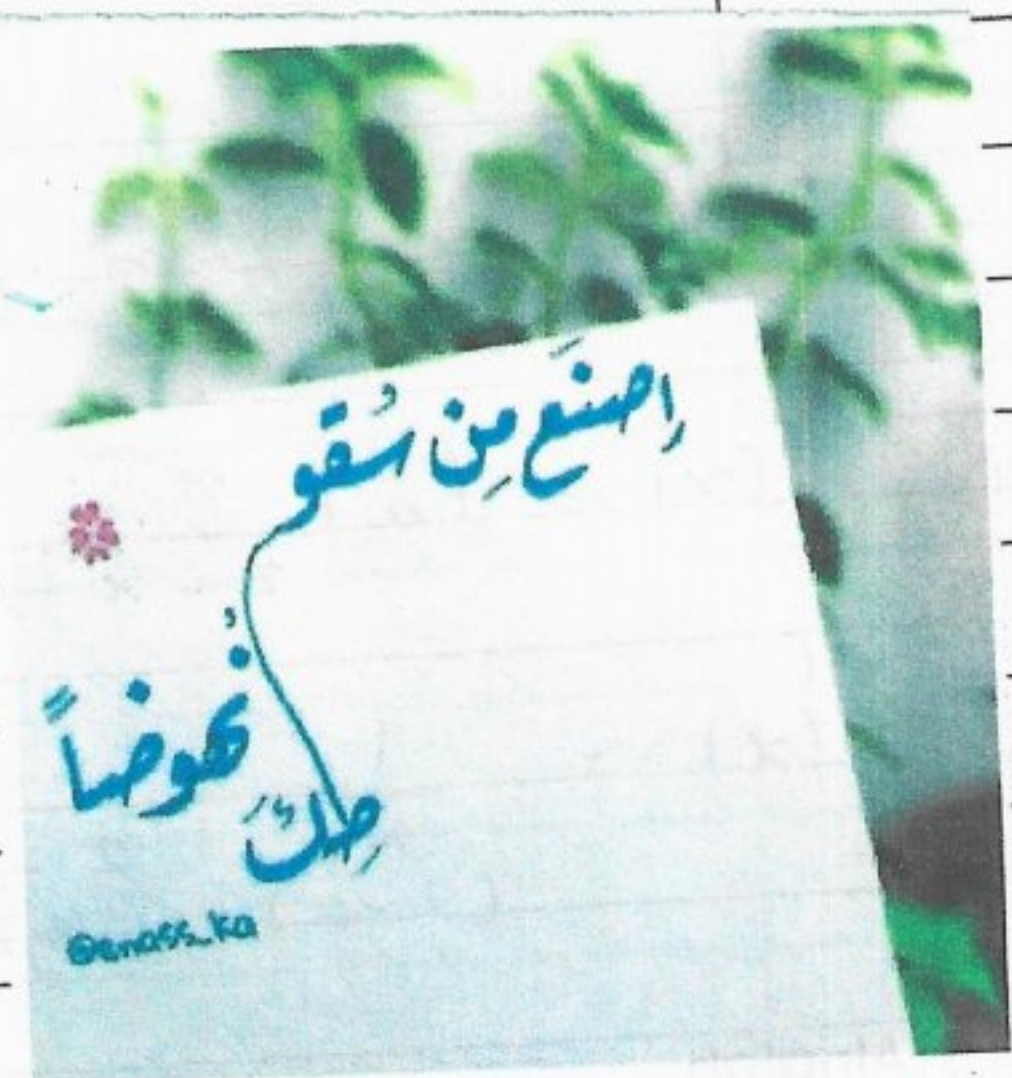
$$\ln\left(\frac{x}{2-x}\right) = 0$$

$$\frac{x}{2-x} = 1$$

$$x = 2-x$$

$$2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$A(1, 0)$$



مسألة (33) -

$$f(x) = \ln(1 + e^{-x})$$

$$1 + e^{-x} > 0 \quad \text{دومّة دالة}$$

$$D_f =]-\infty, +\infty[$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(1 + e^{-x})) = \ln(1 + e^{+\infty})$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^{-x})) = \ln(1 + 0) = 0$$

$$\Delta : y = -x \quad (1)$$

$$f(x) = \ln(1 + e^{-x})$$

$$= \ln(e^{-x} \cdot (e^x + 1))$$

$$= \ln e^{-x} + \ln(e^x + 1)$$

$$= -x + \ln(e^x + 1)$$

$$f(x) - y = -x + \ln(e^x + 1) + x$$

$$= \ln(e^x + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(e^x + 1)) = \ln(0 + 1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$P(x) = \ln(1 + e^{-x})$$

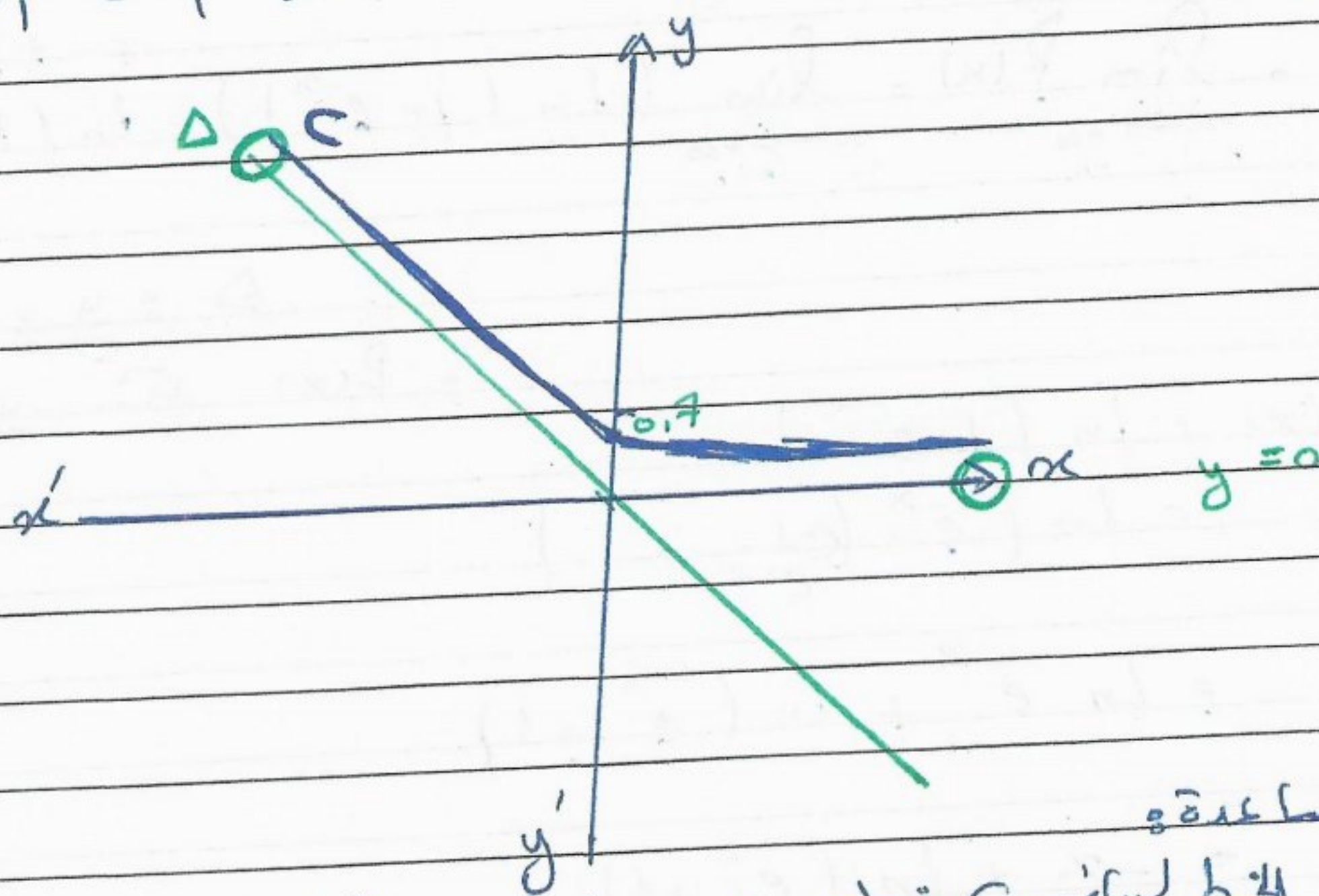
$$P'(x) = \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} < 0$$

$$P'(x)$$

$$P(x)$$

 $-\infty$
 $+\infty$
 $+\infty$
 0

② الرسم : $y = -x$ " منحنى لـ $y = -x$ في الربع الأول "

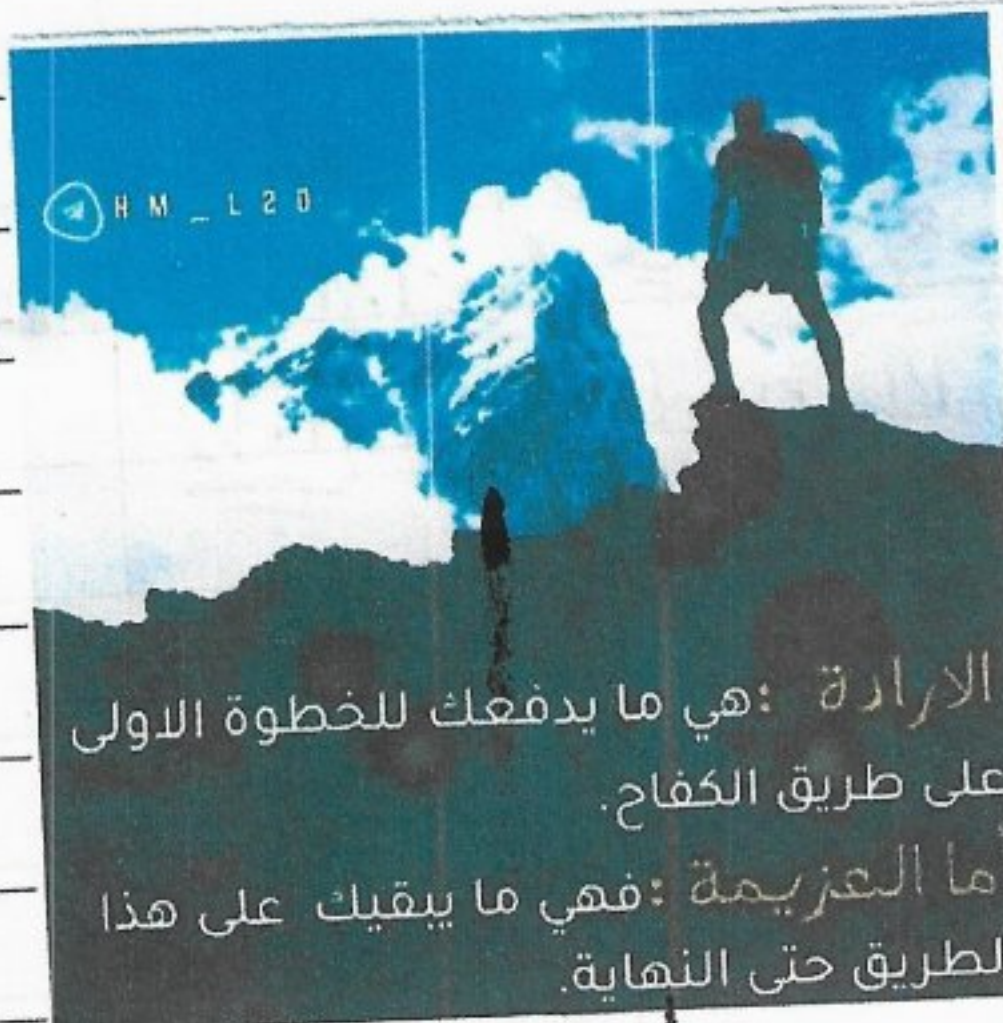


نقاط مسطرة

الخط البياني C يقطع محور y عند $x=0$

$$P(0) = \ln(1 + e^0) = \ln 2 \sim 0.7$$

$$\Rightarrow A(0, 0.7)$$



Amajani
(Mes)

- المسألة (34) -

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

①

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي

$$f(x) - y = \frac{\ln x}{x} - 0 = \frac{\ln x}{x}$$

نستخدم لفترتنا:

$$f(x) - y = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$f(x) - y$	0	1	$+\infty$
	—	0	+
الوضع لنسبة	تحت المقارب	عند المقارب	فوق المقارب

② f معرف ومستمرة اجتماعي على $]0, +\infty[$

انفصالية:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln x}{x^2}$$

الاشتقاق:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1$$

$$x = e$$

$$f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$$

$\frac{1}{e} \rightarrow 0$
 ف (e) = $\frac{1}{e}$

$(x=0)$ $x=0$
 $y \uparrow$ $y=0$

 $(0, -\infty)$
$$(c, \frac{1}{c}) \rightarrow (2.7, 0.5)$$
 ~~$(+\infty, 0)$~~

g. o r e l u s b a i

الحكا لسان في C فصيح

$P(x) = 0$ j's

$$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$
 $A(1,0)$

② संक्षेप

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

$$= \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$$

$$= e \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln x}{x} dx$$

$$= \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^e = \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

- المسألة (35) -

$$f(x) = e^x + e^{-x} + \lambda$$

$$D_f =]-\infty, +\infty[$$

① التابع f متصلة، مفرجة، متصلة = مفرجة.

$$f'(x) = 0 \quad (*)$$

$$f'(x) = e^x - e^{-x}$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = 0 \Rightarrow e^{x_0} - e^{-x_0} = 0$$

$$e^{x_0} = e^{-x_0}$$

$$x_0 = -x_0$$

$$2x_0 = 0$$

$$x_0 = 0$$

$$f(0) = e^0 + e^0 + \lambda$$

$$= 1 + 1 + \lambda$$

$$= 2 + \lambda$$

نحسب قيمة $f(0)$.

$$f(0) = 0 \Rightarrow 2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -2$$

② متى يكون f تابع زوج؟ يجب أن يحقق $f(x) = f(-x)$ لكل $x \in D_f$.

$$x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$$

$$f(-x) = f(x)$$

$$f(-x) = e^{-x} + e^{-(-x)} - 2$$

$$= e^{-x} + e^x - 2$$

$$= e^x + e^{-x} - 2 = f(x)$$

إذاً f تابع زوج. ... متناظر بالنسبة إلى المحور y .

③ معرفة ومستمرة واستقامة على المجال $]-\infty, +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + e^{-x} - 2) = 0 + \infty - 2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + e^{-x} - 2) = +\infty + 0 - 2 = +\infty$$

Alnajah

(4/3)

$$P'(x) = e^x - e^{-x}$$

$$P'(x) = 0 \rightarrow e^x - e^{-x} = 0$$

$$e^x = e^{-x}$$

$$x = -x$$

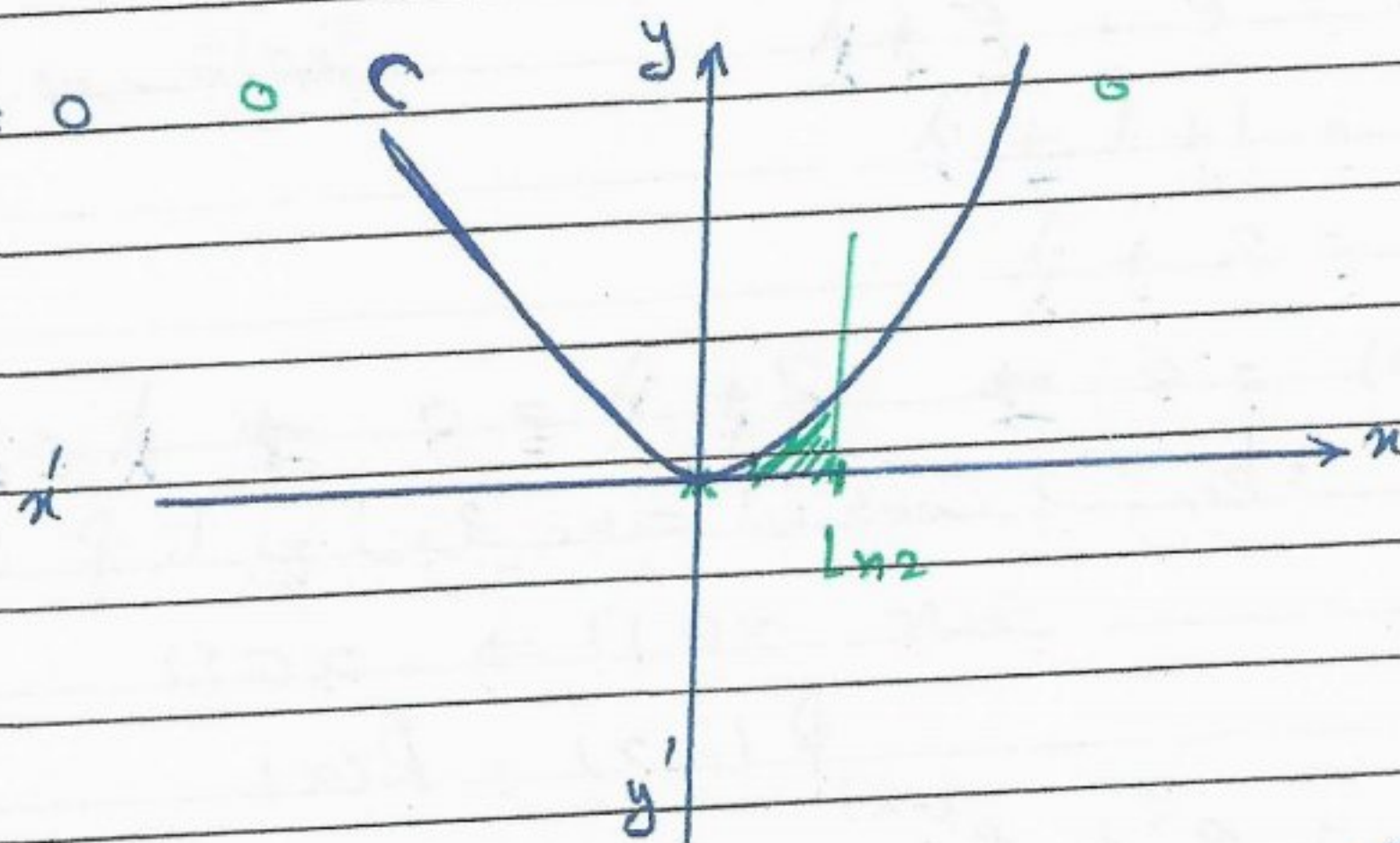
$$2x = 0$$

$$x = 0$$

$$P(0) = e^0 + e^0 - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$P'(x)$	$-$	0	$+$
$P(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

$$P(0) = 0$$



الرسم

$$S = \int_0^{\ln 2} P(x) dx$$

$$= \int_0^{\ln 2} (e^x + e^{-x} - 2) dx$$

$$= \left[e^x - e^{-x} - 2x \right]_0^{\ln 2}$$

$$= e^{\ln 2} - e^{-\ln 2} - 2 \ln 2 - (e^0 - e^0 + 2(0))$$

$$= 2 - \frac{1}{2} - 2 \ln 2$$

$$= \frac{3}{2} - 2 \ln 2$$

المسألة (36) -

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

$$\frac{x+2}{x} > 0$$

$$x = -2 \leftarrow x+2=0$$

D

①'

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$x+2$			$-$	0	$+$	$+$	
x		$-$		$-$		$+$	
$\frac{x+2}{x}$	$+$		0	$-$	$+$	$+$	
$\frac{x+2}{x} > 0$		$+$		0	$-$	$+$	

$$D_f =]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = \ln(1) = 0$

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = \ln(0) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = \ln\left(\frac{2}{0^+}\right) = +\infty$

$$f(x) = \ln(x+2) - \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - 2}{x(x+2)} = \frac{-2}{x(x+2)} < 0$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$		$+\infty$	$\searrow$	0

③ $f(-1+p) + f(-1-p) = 0 \Rightarrow f(x+p) + f(x-p) = 2y$

Alnajah

(4/5)

$$f(-1+h) = \ln\left(\frac{-1+h+2}{-1+h}\right) = \ln\left(\frac{1+h}{h-1}\right)$$

$$f(-1-h) = \ln\left(\frac{-1-h+2}{-1-h}\right) = \ln\left(\frac{1-h}{-(1+h)}\right) = \ln\left(\frac{h-1}{h+1}\right)$$

$$f(-1+h) + f(-1-h) = \ln\left(\frac{1+h}{h-1}\right) + \ln\left(\frac{h-1}{h+1}\right) \quad \text{نجمع}$$

$$= \ln\left(\frac{1+h}{h-1} \times \frac{h-1}{h+1}\right) = \ln(1) = 0$$

إذاً: $A(-1, 0)$ مركز تناظر لـ C .

② رسم: المنحنى $y=0$

$y=0$ أفقي

لنا محاور $\begin{cases} x=-2 \\ x=0 \end{cases}$

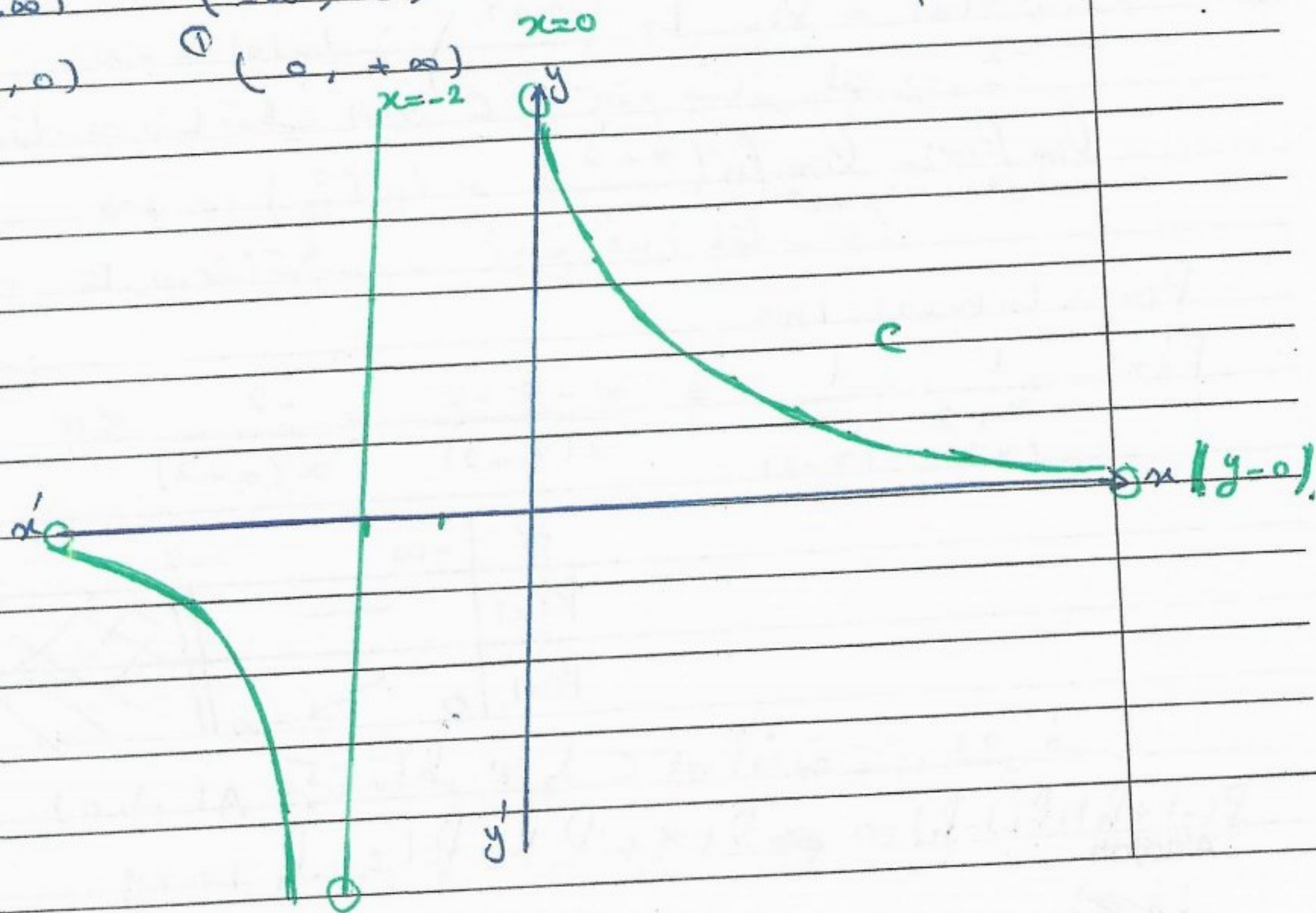
منع اول $(-2, -\infty)$

منع ثاني $(+\infty, 0)$

① $(-\infty, 0)$

② $(0, +\infty)$

قسم الى جزئين



$$u_n = P(n)$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= \ln\left(\frac{1+2}{1}\right) + \ln\left(\frac{2+2}{2}\right) + \ln\left(\frac{3+2}{3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n+2}{n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{3}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{5}{3} \times \dots \times \frac{n+2}{n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right)$$

تدريب: ليكن C كذا ليكن P يعرف بالعلاقة:

$$P(x) = x + 1 - \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$$

- ① عين P
- ② ادرس تعبيرات P وتعلم جوداً بها وحداً مقادير C .
- ③ أثبت أن $P(x) + P(2-x) = 4$ ثم استنتج أن $A(1,2)$ ممكن
- ④ أثبت أن P يتقارب Δ الذي معادلته $y = x + 1$ مقارباً لكل C .
- ⑤ ارسم كل مقارب وحدته ثم ارسم C .

لا شيء يستطيع أن يمد حياتك بالطاقة
مثل تركيزك المطلق
على جملة محددة من الأهداف والغايات

لكن لتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعروفة بـ

$$\begin{cases} u_0 = e^3 \\ u_{n+1} = e\sqrt{u_n} \end{cases}$$

و $(v_n)_{n \geq 0}$ متالية معرفة بالشكل $v_n = \ln(u_n) - 2$

أثبت أن $(v_n)_{n \geq 0}$ هندسية وعين q و v_0

أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

أثبت أن $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = e^2$

* عا u_n و $v_n = \ln(u_n) - 2$

$$\ln(u_n) = v_n + 2$$

$$u_n = e^{v_n + 2} = e^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\rightarrow u_n = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)$$

$$= e^{0+2} = e^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

① مت تكون v_n هندسية - جت أن

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$$

$$v_n = \ln(u_n) - 2 \Rightarrow v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - 2$$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(e\sqrt{u_n}) - 2 \\ &= \ln e + \ln \sqrt{u_n} - 2 \\ &= 1 + \ln(u_n)^{\frac{1}{2}} - 2 \end{aligned}$$

$$= -1 + \frac{1}{2} \ln(u_n)$$

$$= \frac{1}{2} (\ln(u_n) - 2)$$

$$\Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{2} (\ln(u_n) - 2)}{\ln(u_n) - 2} = \frac{1}{2} = q$$

إذاً: v_n هندسية لها $q = \frac{1}{2}$

وحدها v_0 و v_n حسب صيغة لاغرانج

$$v_0 = \ln(u_0) - 2 = \ln e^3 - 2 = 1$$

عنا v_n بدلالة n

$$v_m = v_p \cdot q^{m-p} \Rightarrow v_n = v_0 \cdot q^{n-0}$$

$$\Rightarrow v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

المسألة (37) -

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}$$

$$S: x \cdot \ln x = 0$$

$$D =]0, +\infty[\quad D_f \quad (1)$$

$$\text{مرفوض } x = 0$$

$$\text{لأن } \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow D_f =]0, +\infty[\setminus \{1\} =]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$D_f =]1, +\infty[\cup]0, 1[$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \cdot \ln x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x \cdot \ln x} \right) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{x \cdot \ln x} \right) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x \cdot \ln x} \right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f'(x) = 0 - \left(1 \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot x \right) \cdot 1$$

$$= \frac{-\ln x - 1}{x^2 \cdot \ln x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\ln x - 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$$

$$f(e^{-1}) = \frac{1}{e^{-1} \cdot \ln e^{-1}} = \frac{1}{e^{-1} \cdot (-1)} = -e$$

$$f(e^{-1}) = -e$$

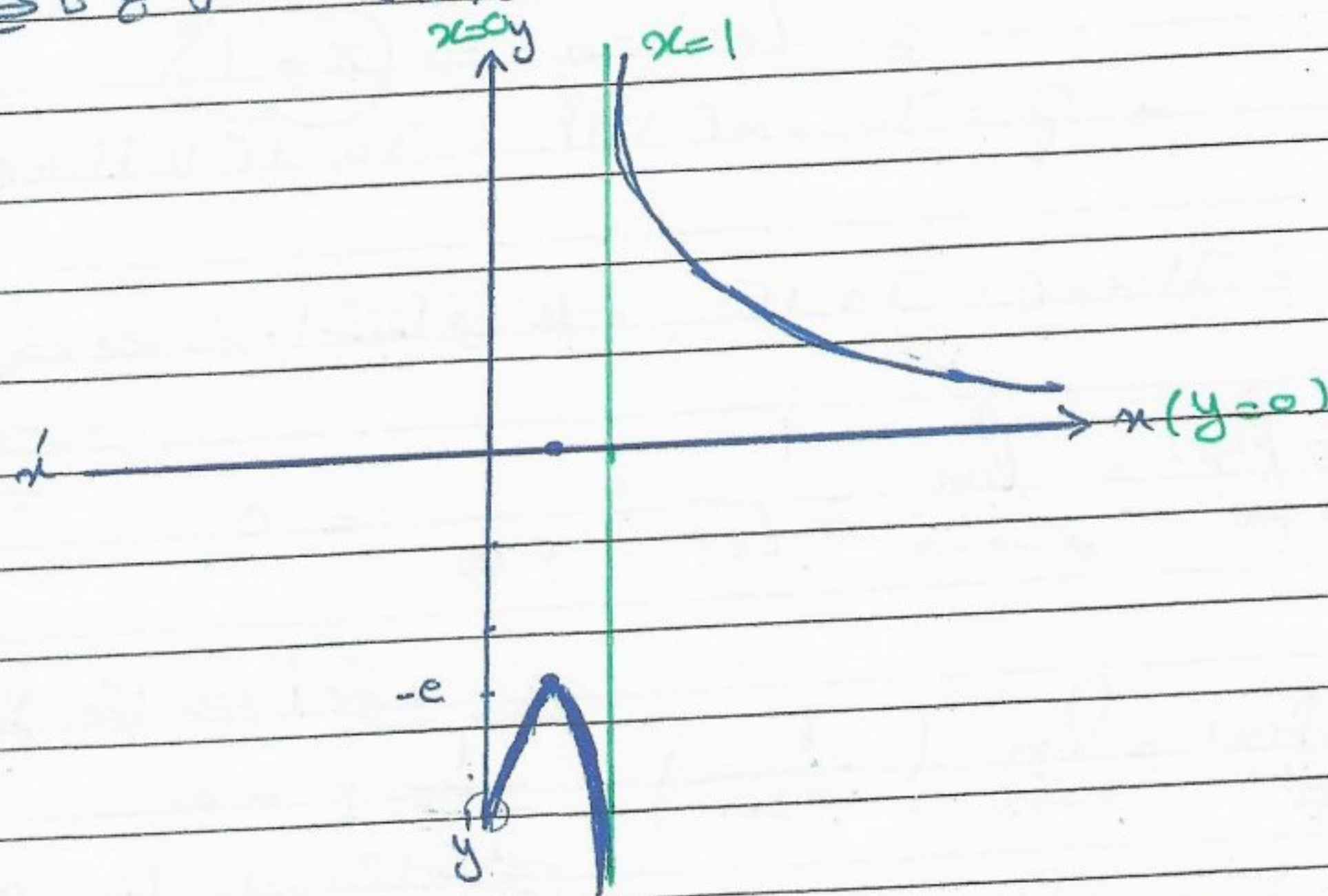
Alnajah

(355)

$\left. \begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \end{array} \right\}$

قسم اربعة :

(A) $(-\infty, -0.5)$ خج اول
(B) $(-0.5, 2.7)$
(C) $(2.7, +\infty)$ خج ثانی



$$S = \int^e P(x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^e \frac{1}{x \cdot \ln x} dx$$

$$= \frac{e}{2} \int \frac{1}{x} dx$$

$$\begin{aligned} &= \left[\ln |\ln x| \right]_2^e = \ln(\ln e) - \ln(\ln 2) \\ &= \ln(1) - \ln(\ln 2) = 0 - \ln(\ln 2) \\ &= -\ln(\ln 2) = -\ln(0.7) = -\ln\left(\frac{7}{10}\right) \\ &= \ln\left(\frac{10}{7}\right) \end{aligned}$$

مسألة (38)

$$P(x) = x \cdot e^{-x}$$

$$D_P =]-\infty, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = ?$$

①

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^{-x} = -\infty \text{ (مباشرة)}$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot e^{-x}) = 0$$

② P مبرزة ومبرزة في $]-\infty, +\infty[$ على المجال $]-\infty, +\infty[$

$$P'(x) = 1 \cdot e^{-x} - 1 \cdot e^{-x} \cdot x$$

$$= e^{-x} (1 - x)$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

$$P(1) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$P(1) = \frac{1}{e} \text{ قيمة كبرى}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$P'(x)$	$+$	0	$-$
$P(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

الرسم و المقاربات:
 المقاربة: $y = 0$
 النقطة: $(1, \frac{1}{e})$
 النقطة: $(-\infty, -\infty)$
 النقطة: $(+\infty, 0)$

نقطة مساعرة:

في الجوانب (نقطة محور)

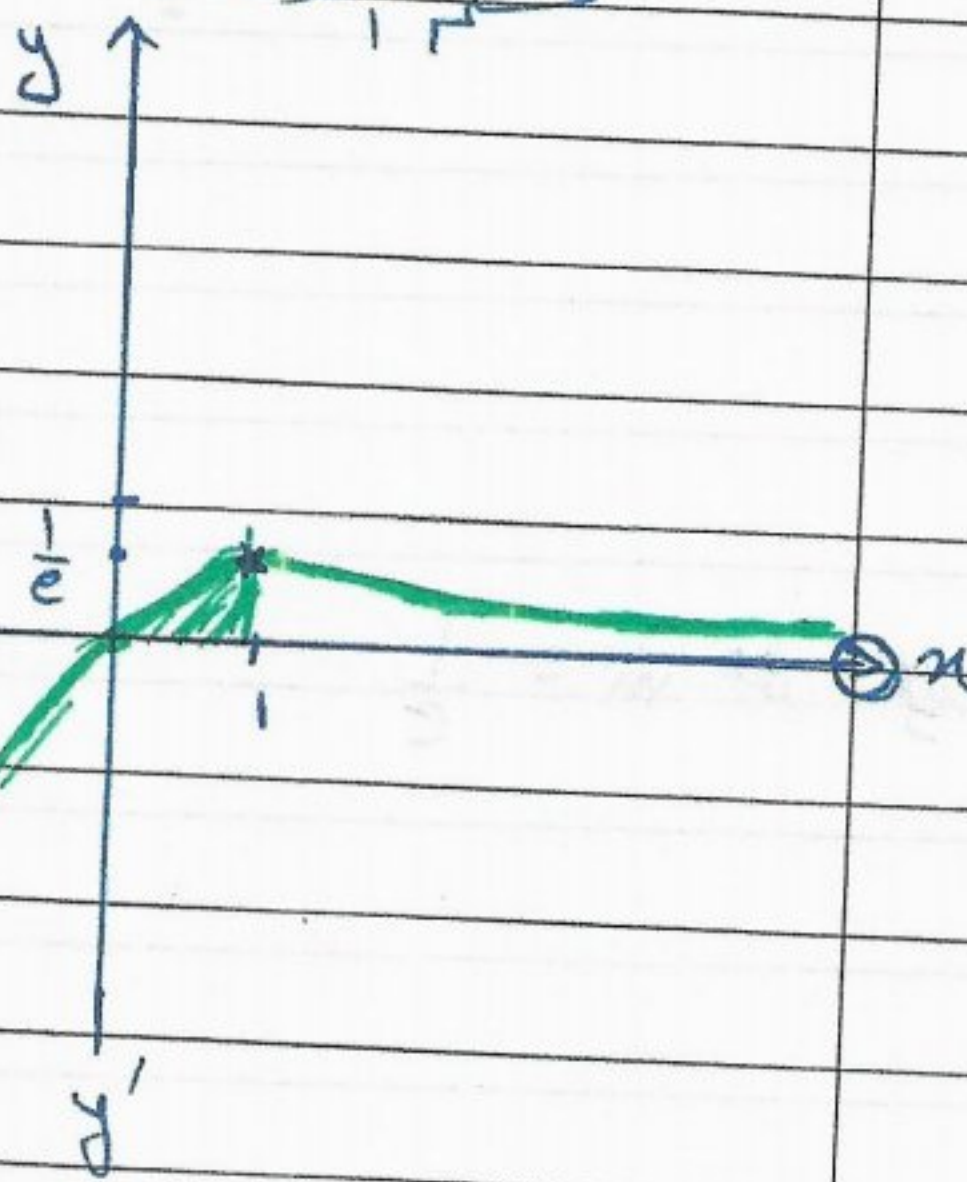
$$P(x) = 0 \Rightarrow x \cdot e^{-x} = 0$$

$$x = 0$$

$$n = 0$$

$$(0, 0)$$

x'



$$S = \int_0^1 P(x) dx$$

$$= \int_0^1 x \cdot e^{-x} dx \quad (*)$$

تكمال بالجزئية : نعرف $u = x$ $\leftarrow u' = 1$
 $v = -e^{-x}$ $\leftarrow v' = e^{-x}$

$$I = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

$$= -x \cdot e^{-x} - \int 1 \cdot (-e^{-x}) dx$$

$$= -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} dx$$

$$= -x \cdot e^{-x} - e^{-x}$$

نعرف في (*) :

$$S = \left[-x \cdot e^{-x} - e^{-x} \right]_0^1$$

$$= -1 \cdot e^{-1} - e^{-1} - (0 - e^0)$$

$$= -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e} = \frac{e-2}{e}$$

$$(*)' \quad f(x) = m, \quad \text{لما صفة :}$$

$$* \quad m \in]-\infty, 0[\quad \text{لما صفة :}$$

$$* \quad m = 0 \quad \text{لما صفة :}$$

$$* \quad m \in]0, \frac{1}{e}] \quad \text{لما صفة :}$$

$$* \quad m \in] \frac{1}{e}, +\infty[\quad \text{لما صفة :}$$

$$* \quad m = \frac{1}{e} \quad \text{لما صفة :}$$

$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = u_n \cdot e^{-u_n}$$

$$E(n): \quad 0 < u_n < 1 \quad (a)$$

* نثبت صحة الفرضية من أجل $n=0$

$$0 < u_0 = 1 < 1 \quad \text{صحيح}$$

* نقر من صحة الفرضية من أجل n

$$0 < u_n < 1 \quad \text{صحيح}$$

* نثبت صحة الفرضية من أجل $n+1$

$$0 < u_{n+1} < 1 \quad (*)$$

$$u_{n+1} = P(u_n)$$

نلاحظ أن: $u_{n+1} = P(u_n)$ حيث $P(u) = u \cdot e^{-u}$
 وبما أنه $0 < u_n < 1$ فإن $0 < P(u_n) < P(u)$
 "نبدأ من العلاقة" $0 < u_n < 1$

$$0 < u_n < 1$$

$$P(0) < P(u_n) < P(1)$$

$$0 < u_{n+1} < \frac{1}{e}$$

$$\text{إذاً:} \quad 0 < u_{n+1} < 1 \quad \text{حيث } n \geq 0$$

إذاً، الفرضية صحيحة من أجل $n+1$
 إذاً، الفرضية صحيحة من أجل n

$$u_{n+1} < u_n \quad (b) \quad \text{حيث تكون المتتالية متناقصة يجب أن نتحقق:}$$

نثبت صحة الفرضية بالاستقراء الرياضي:

$$E(n): \quad u_{n+1} < u_n$$

* نثبت صحة الفرضية من أجل $n=0$

$$u_0 = 1$$

$$u_1 = u_0 \cdot e^{-u_0} = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e} < 1 = u_0$$

إذا: المقضية صحيحة من أجل $n=0$.

* نقر من صحة المقضية من أجل n :

$$u_{n+1} < u_n$$

* ونثبت صحة المقضية من أجل $n+1$:

$$u_{n+2} < u_{n+1}$$

$$u_{n+1} \cdot e^{-u_{n+1}} < u_n \cdot e^{-u_n}$$

$$u_{n+1} < u_n$$

وبما أن f متزايدة $[0,1]$ فإن:

$$f(u_{n+1}) < f(u_n)$$

إذا:

$$u_{n+2} < u_{n+1}$$

فالمقضية صحيحة من أجل $n+1$.

$$\text{إذا: } u_{n+1} < u_n \text{ فالحاصل أن } u_n \text{ متناقص}$$

كما سبق جداً أن u_n متناقص متناقص ومحدودة من الأسفل
بالعدد صفر في متتالية.

نهاية u_n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

$$f(x) = x$$

كل الجاد

$$x \cdot e^{-x} = x$$

$$e^{-x} = 1$$

$$e^{-x} = e^0$$

$$x = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

إذا:

- المسألة (39) -

$$P(x) = \frac{\ln x}{x^2} \quad \text{و} \quad P =]0, +\infty[$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0^+} P(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^2} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \quad (1)$$

$x=0$ مقام ساقوطي للدالة C يقع بين C لكاري.

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

$y=0$ مقام ساقوطي للدالة C .

$$P(x) - y = \frac{\ln x}{x^2} - 0 = \frac{\ln x}{x^2}$$

x الوضع ليني: ندرس إشارة لفرت:

$$P(x) - y = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

x	0	1	$+\infty$
$P(x)-y$	—	0	+
الوضع ليني	قوة لكاري	قوة لكاري	قوة لكاري

P عرضة مستمرة وامتدادية على $]0, +\infty[$:

$$P'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \cdot \ln x}{x^4} = \frac{x - 2x \cdot \ln x}{x^4}$$

$$= \frac{x(1 - 2 \ln x)}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2 \ln x = 0 \Rightarrow 2 \ln x = 1 \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2}$$

$$x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$$P(\sqrt{e}) = \frac{\ln \sqrt{e}}{\sqrt{e}^2} = \frac{1}{2e}$$

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$P'(x)$	—	+	—
$P(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{2e}$	0

$$P(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$$

③ معادلة المماس Δ :

$$\left. \begin{array}{l} x_0 = 1 \\ y_0 = P(1) = 0 \\ m = P'(1) = 1 \end{array} \right\} A(1, 0)$$

معادلة Δ :

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 0 = 1 \cdot (x - 1)$$

$$\Delta: y = x - 1$$

④ المساحة : المحاور :

المحور $y=0$ (مقي)

المحور $x=0$ (مقي)

$$\Delta: y = x - 1$$

$$x=0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (0, -1)$$

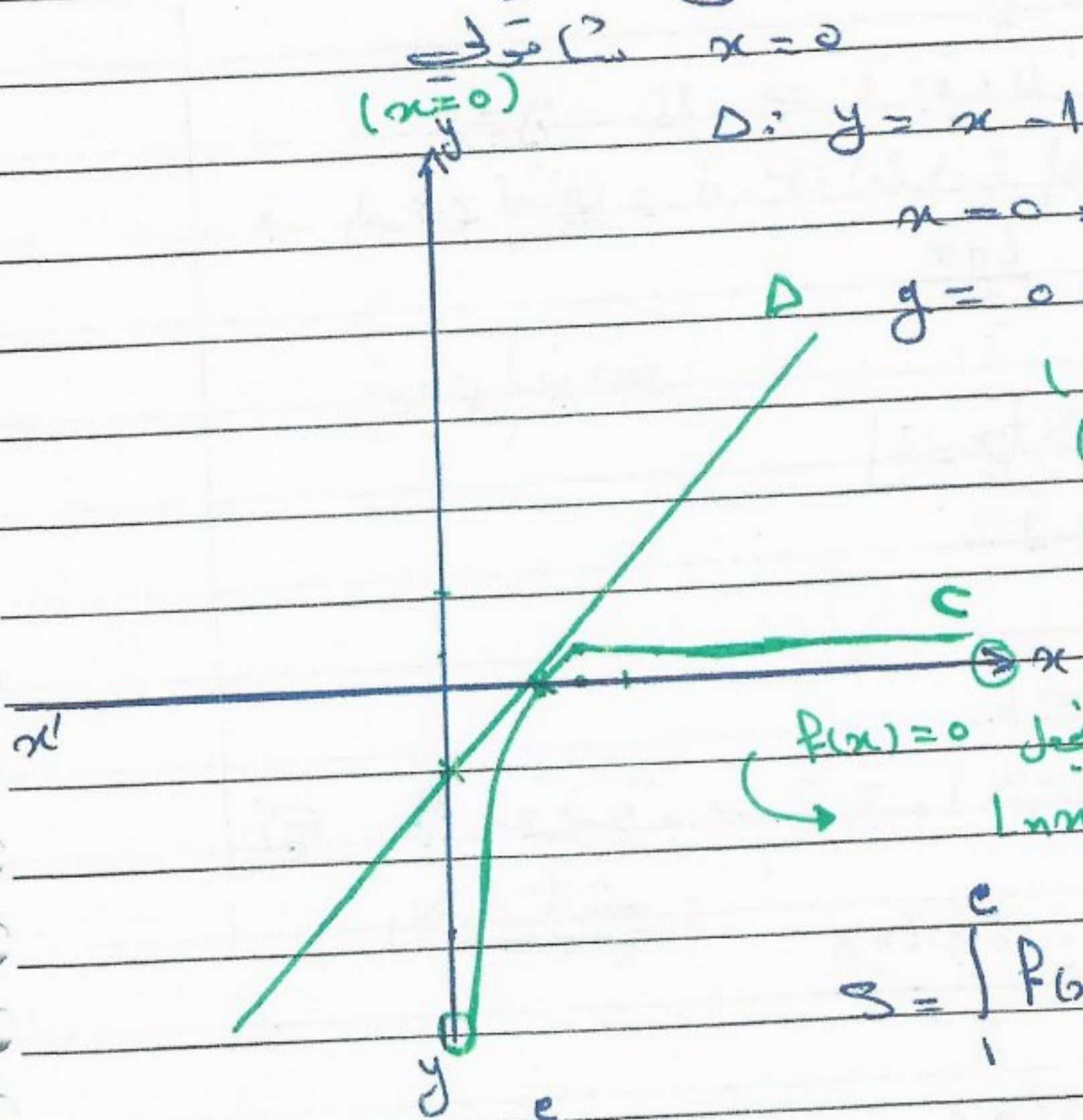
$$y=0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1, 0)$$

نقطة التقاطع :

$$(0, -1)$$

$$(1.6, 0.18)$$

$$(+\infty, 0)$$



نقطة التقاطع : المحاور :

نقطة التقاطع C بين $y=0$ و $x=1$ $\Rightarrow x=1$

$$P(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$S = \int_1^e P(x) dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$= \int_1^e x^{-2} \cdot \ln x dx$$

$u = \ln x$

$u' = \frac{1}{x}$

$v = x^{-2}$

$v' = -\frac{1}{x^3}$

نكامل بالجزءين

$$S = [u \cdot v]_1^e - \int_1^e u' \cdot v dx$$

$$= \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^e - \int_1^e \frac{-1}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^e + \left[\frac{1}{x} \right]_1^e$$

$$S = -\frac{1}{e} - 0 - \frac{1}{e} + 1 = \frac{e-2}{e}$$

المسألة (٤٥) -

$$f(x) = x + x(\ln x)^2 \quad \text{و} \quad D_f =]0, +\infty[$$

$$g(x) = (\ln x + 1)^2$$

① نقاط : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + x(\ln x)^2) = 0$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + x(\ln x)^2) = +\infty$

$$f'(x) = 1 + 1 \cdot (\ln x)^2 + 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x \quad (2)$$

$$= 1 + (\ln x)^2 + 2 \cdot \ln x$$

$$= (\ln x)^2 + 2 \ln x + 1$$

$$= (\ln x + 1)^2$$

$$\Rightarrow f'(x) = g(x)$$

$$(\ln x + 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow g(x) = 0 \quad (3)$$

$$\ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1$$

$$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} + \frac{1}{e} (\ln e^{-1})^2 = \frac{1}{e} + \frac{2}{e}$$

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	0	$\frac{2}{e}$	$+\infty$

② معادلات : $y = \frac{2}{e}$ هي Δ لمسألة $f(x) = y$ (4)

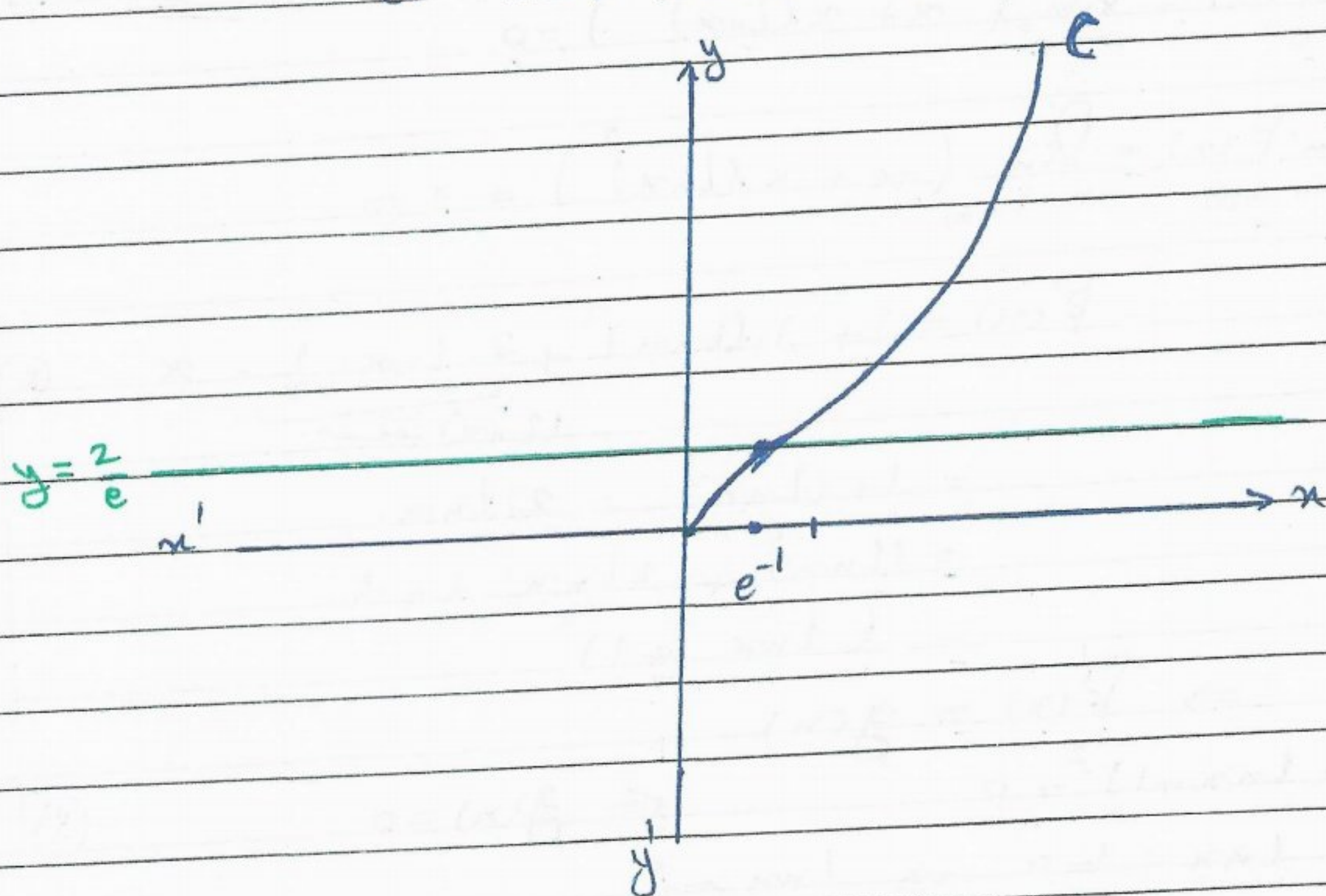
③ حل : $y - f\left(\frac{1}{e}\right) = f'\left(\frac{1}{e}\right) \left(x - \frac{1}{e}\right)$

$$y - \frac{2}{e} = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{e}$$

الرسم، المقاربات

$$\Delta: y = \frac{2}{e}$$

قسم السودة: $(0, 0)$ $(0.5, 0.7)$ $(+\infty, +\infty)$



جاء ليقع: فدرس اسارة ليست الثاني:

$$f'(x) = (\ln x + 1)^2$$

$$f''(x) = 2(\ln x + 1) \cdot \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x + 2}{x}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 2 \ln x + 2 = 0$$

$$\ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$$

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f''(x)$	—	0	+
	جاء ليقع	مقوع	مقوع

- مسألة (42) -

$$f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$$

$$D_f =]-\infty, +\infty[$$

① نهايات:
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^{-x} + 1) = \ln(0+1) = 0$

$y=0$ كما تبين أن $C.D'$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^{-x} + 1) = \ln(+\infty + 1) = +\infty$

②

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(e^{-x} \cdot (1 + \frac{1}{e^x})) \\ &= \ln e^{-x} + \ln(1 + e^x) \\ &= -x + \ln(e^x + 1) \end{aligned}$$

③ $\Delta: y = -x$

$$\begin{aligned} f(x) - y_{\Delta} &= -x + \ln(e^x + 1) + x \\ &= \ln(e^x + 1) \end{aligned}$$

نحسب الفرق في $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - y_{\Delta}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 1) = \ln(0+1) = 0$$

 إذا $\Delta: y = -x$ مقارب $C.D'$

④ f متزايدة ومنتظمة على $]-\infty, +\infty[$
 الكسوف:

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} < 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		
$f(x)$	$+\infty$	0

⑤ الرسم: المعادلات: $y = 0$ و $y = -x$ معادلتان

$\Delta = y = -x$ / منصف المربع الثاني

والأول

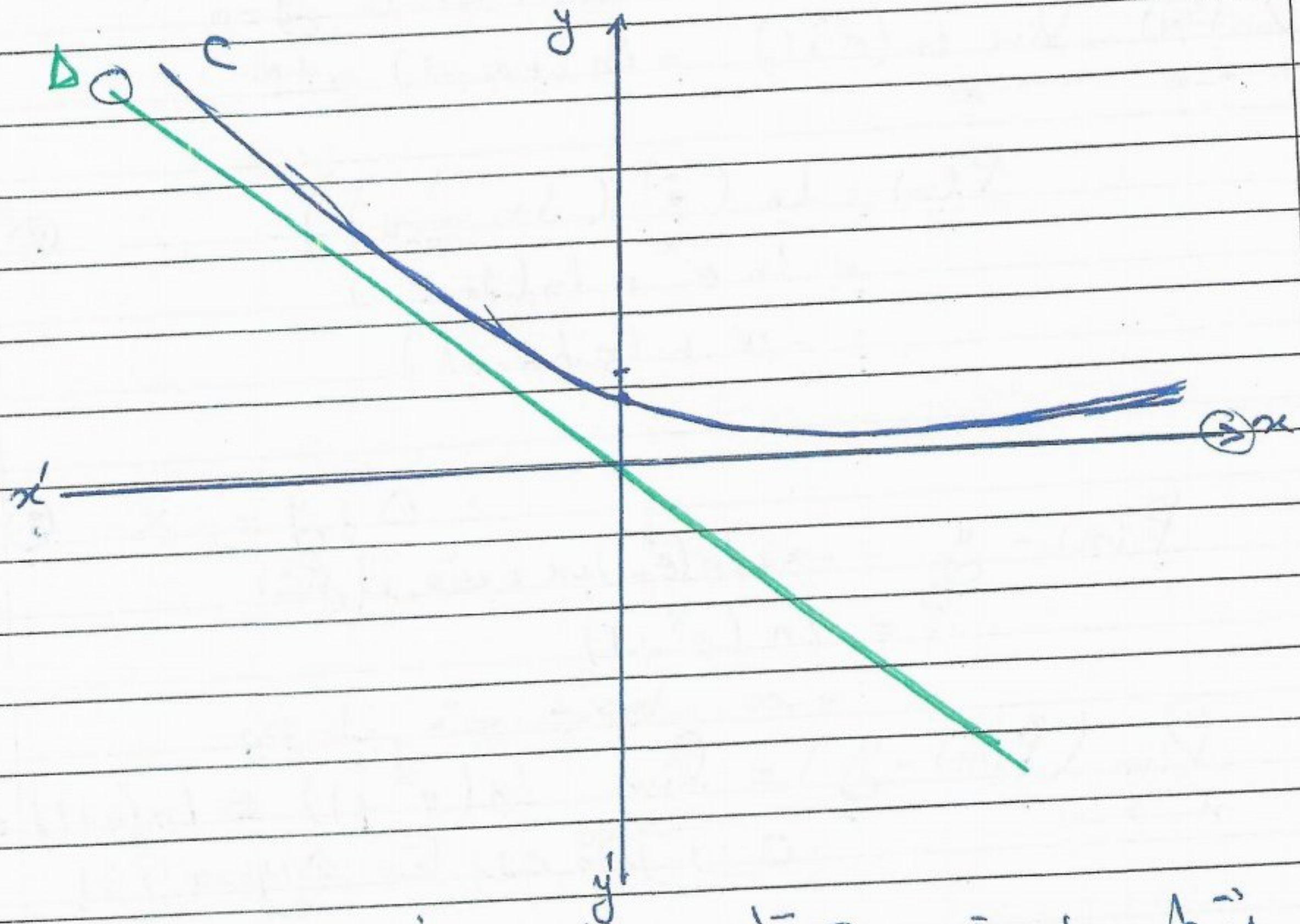
⑥

$(+\infty, 0)$

⑦

$(-\infty, +\infty)$

قسم المسودة



نقطة مساهمة: C يتقاطع مع $y = -x$. فحل $x = 0$
 $\rightarrow f(0) = \ln(1+1) = \ln 2 \approx 0.7$
 $A(0, 0.7)$

السؤال (43) -

$$P(x) = x^2 - \ln x$$

$$D_P =]0, +\infty[$$

① نهايات:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} P(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - \ln x) = 0 - (-\infty) = +\infty$$

$x=0$ مقام غير شاقولي. $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \ln x) = +\infty - \infty$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(x - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty (+\infty - 0) = +\infty$$

② P معرفة ومستمرة و $\lim_{x \rightarrow 0^+} P(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$
الاشتباق:

$$P'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 1 = 0$$

$$2x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{\ln 2 + 1}{2}$$

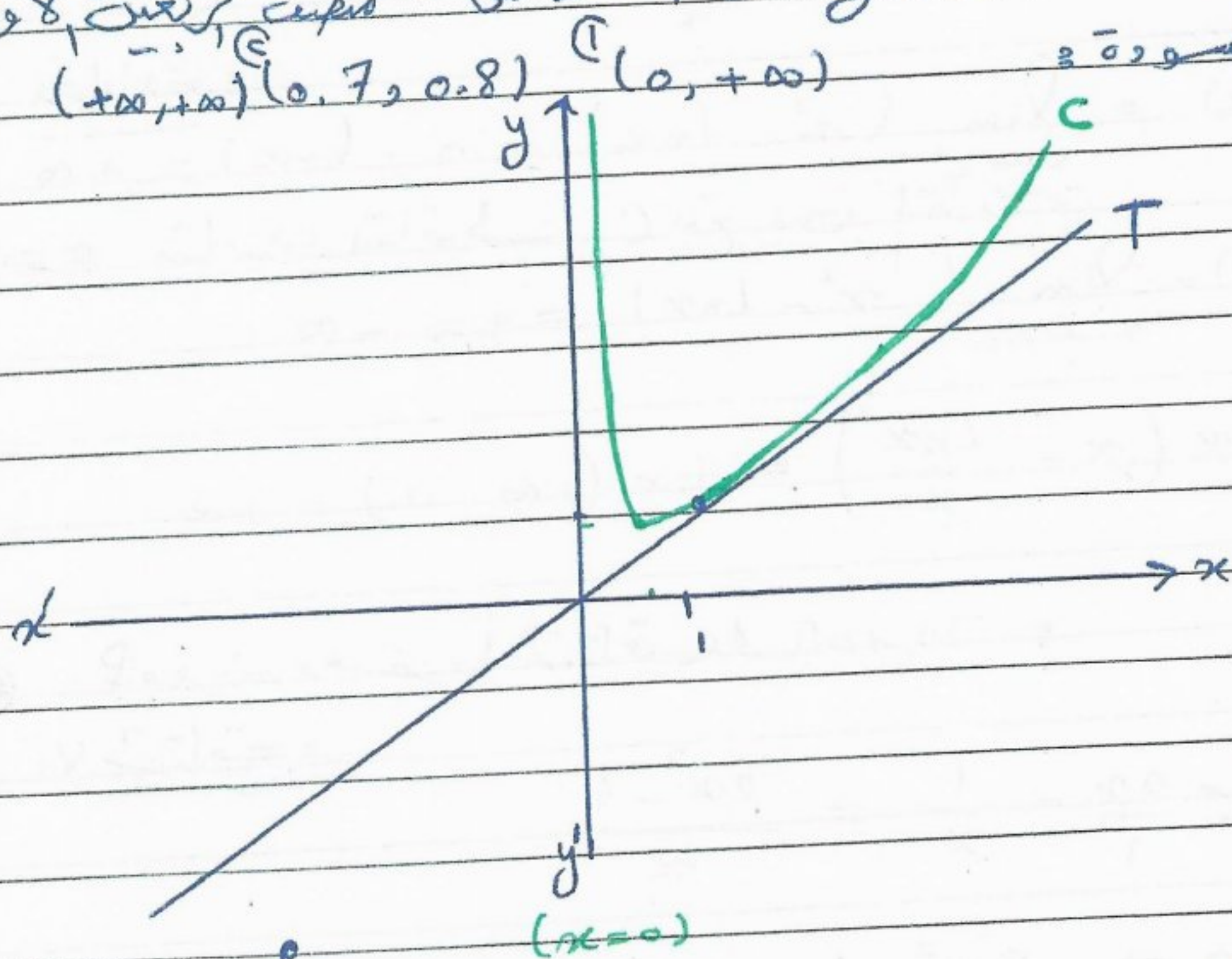
x	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$P'(x)$		—	+
$P(x)$	$+\infty$	$\frac{\ln 2 + 1}{2}$	$+\infty$

③ T كاس $x=1$ $\Leftarrow x_0=1$ $y = P(1) = 1$
 $m = P'(1) = 1$

$$T: y - 1 = 1 \cdot (x - 1)$$

$$T: y = x$$

الرسم: إشارات $x=0$ $y=x$ $T: y=x$ $C: y=x^2$ $(0, +\infty)$ $(0.7, 0.8)$ $(+\infty, +\infty)$



$$S = \int_1^e f(x) dx$$

$$= \int_1^e (x^2 - \ln x) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - (x \cdot \ln x - x) \right]_1^e$$

$$= \frac{e^3}{3} - e + e - \left(\frac{1}{3} - (0 - 1) \right)$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{e^3 + 2}{3}$$

$$u_{n+1} = (n+1)^2 - \ln(n+1) \leftarrow u_n = n^2 - \ln(n)$$

$$u_{n+1} - u_n = n^2 + 2n + 1 - \ln(n+1) - n^2 + \ln(n) = 2n + 1 + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) > 0 \Rightarrow u_n \text{ متزايدة}$$

- المسألة (44) -

$$f(x) = \frac{4}{1+e^x}$$

$$D_f =]-\infty, +\infty[$$

① نظائرات: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{e^x + 1} \right) = \frac{4}{0+1} = 4$

$y = 4$ مقارب أفقي

* الوضع البعيد: ندرس إشارة الفرق:

$$f(x) - y = \frac{4}{1+e^x} - \frac{4}{1} = \frac{4 - 4 - 4e^x}{1+e^x} = \frac{-4e^x}{1+e^x} < 0$$

عند المقارب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{1+e^x} \right) = \frac{4}{+\infty} = 0$

$y = 0$ مقارب أفقي

* الوضع البعيد: ندرس إشارة الفرق:

$$f(x) - y = \frac{4}{1+e^x} - 0 = \frac{4}{1+e^x} > 0$$

عند المقارب:

② معرفة مشتق f' على $]-\infty, +\infty[$ باستخدام قاعدة لوبيتال:

$$f'(x) = \frac{0 - e^x \cdot 4}{(1+e^x)^2} = \frac{-4e^x}{(1+e^x)^2} < 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		
$f(x)$	4	

③ معادلة التماس T : $A(0, 2)$

$$m = f'(0) = \frac{-4}{4} = -1$$

$$T: y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$T: y - 2 = -1(x - 0)$$

$$T: y = -x + 2$$

* أوضح استنتاج T و C من
نقطة استلام الفرق

$$P(x) - y = \frac{4}{1+e^x} + x - 2$$

نعتبر الفرق تابع $P(x)$ من x ندرس $P(x)$ على $-\infty$ و $+\infty$

$$P(x) = \frac{4}{1+e^x} + x - 2$$

$$P'(x) = \frac{-4e^x}{(1+e^x)^2} + 1$$

$$= \frac{-4e^x + e^{2x} + 2e^x + 1}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{(e^x - 1)^2}{(1+e^x)^2}$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow (e^x - 1)^2 = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0$$

$$e^x = 1 \Rightarrow x = \ln(1) \Rightarrow x = 0$$

نشكل جدول لاغرانج

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$P'(x)$	+	0	+
$P(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$
الوضع الكلي	C فوق T // C فوق T		

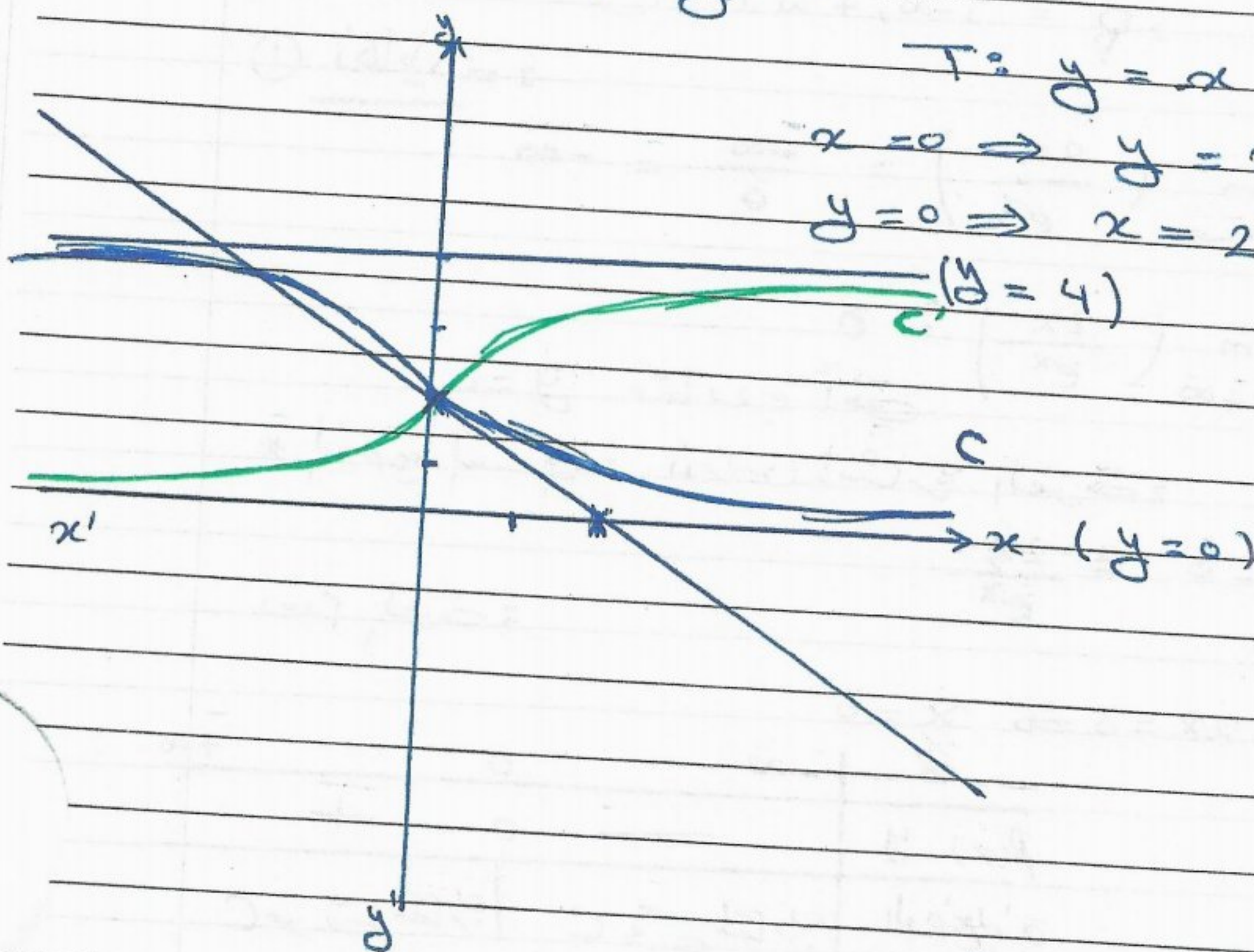
[illegible]

$\left. \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} y = 4 \\ y = 0 \end{matrix}$

~~$T: y = x + 2$~~

~~$x=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow A(0,2)$~~

$$y=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow B(2,0)$$



~~$$g(x) = \frac{4e^x}{1+e^x}$$~~

$$= \frac{e^x (4)}{e^x (e^{-x} + 1)}$$

$$= \frac{4}{e^{-x} + 1}$$

$$= P(-x)$$

c) نظير c بالسنة إلى محور y.

- المسألة (45) -

$$f(x) = \frac{2x}{e^x}$$

$$D_f =]-\infty, +\infty[$$

① نهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x}{e^x} \right) = \frac{-\infty}{0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{e^x} \right) = 0$$

y=0 مقارب أفقي

* الوضع السليم: ندرس باستخدام الفرق:

$$f(x) - y = \frac{2x}{e^x} - 0 = \frac{2x}{e^x}$$

نخدم الفرق:

$$f(x) - y = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	—	0	+
الوضع السليم	C تحت المقارب	C فوق المقارب	C فوق المقارب

② f معرف ومستمرة على $]-\infty, +\infty[$

الحد الأقصى:

$$f'(x) = \frac{2 \cdot e^x - e^x \cdot 2x}{e^{2x}}$$

$$= \frac{2e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{2(1-x)}{e^x}$$

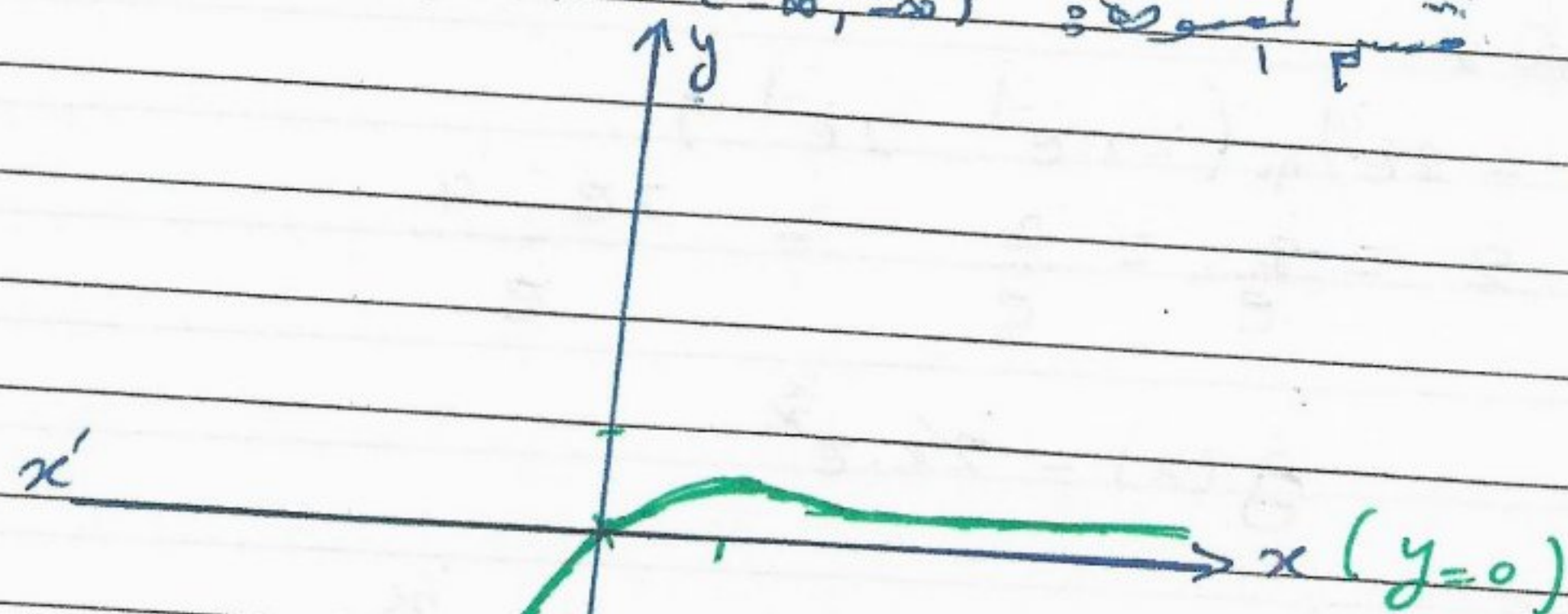
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1-x = 0 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

$$f(1) = \frac{2}{e}$$

قيمة e الكبرى

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	—
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{2}{e}$	0

① الرسم: انظر إلى ت:
 نقطة: $(-\infty, 0)$ $(1, 0.7)$ $(+\infty, 0)$
 $y=0$ x'



نقطة: $(-\infty, 0)$ $(1, 0.7)$ $(+\infty, 0)$
 $y=0$ x'
 $f(x)=0$ $x'=0$
 $2x=0 \Rightarrow x=0$
 $(0, 0)$

$$S = \int_0^1 f(x) dx$$

② $f(x) = \frac{2x}{e^x}$

$$= \int_0^1 \frac{2x}{e^x} dx$$

$$= \int_0^1 2x \cdot e^{-x} dx \quad (*)$$

لنضع $u=2x \Rightarrow u'=2$
 $v=e^{-x} \Rightarrow v'=-e^{-x}$

$$S = [u \cdot v]_0^1 - \int_0^1 u' \cdot v dx$$

$$= [-2x \cdot e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 2e^{-x} dx$$

$$= [-2x \cdot e^{-x} - 2e^{-x}]_0^1$$

$$= \left[-2xe^{-x} - 2e^{-x} \right]_0^1$$

نقوم بتعويض

$$= -(0 - 2e^0) + (-2e^{-1} - 2e^{-1})$$

$$= 2 - \frac{2}{e} - \frac{2}{e} = \frac{2e - 4}{e}$$

$$g(x) = 2x \cdot e^x$$

$$P(-x) = \frac{-2x}{e^{-x}} = -2x \cdot e^x$$

$$-P(x) = 2x \cdot e^x$$

$$-P(-x) = g(x)$$

نقير C بالنسبة إلى 0

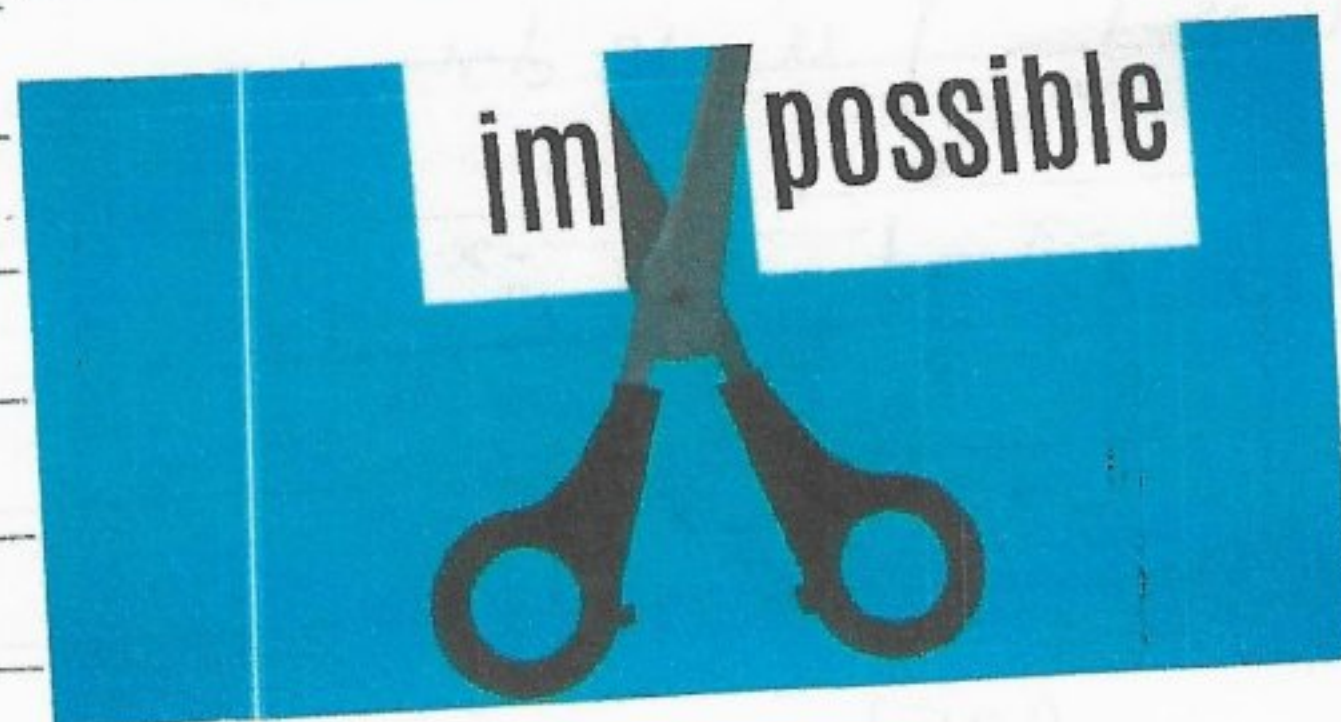
$$y' + y = 2e^{-x}$$

$$y = P(x) = \frac{2x}{e^x}$$

$$y' = P'(x) = \frac{2(1-x)}{e^x}$$

$$y + y' = \frac{2x + 2 - 2x}{e^x} = \frac{2}{e^x} = 2 \cdot e^{-x}$$

إذاً: $P(x)$ حل للمعادلة التفاضلية.



مسألة (46) -

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$$

$$D =]0, +\infty[$$

① نهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) = 0$$

y = 0 مقام أفقي C.B.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty - \infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} (1 + \ln x) = +\infty (1 - \infty) = -\infty$$

x=0 مقام رأسي

② f معرف و متزايدة على]0, +\infty[

المتزايدة:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{-1}{x^2} + \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = 1$$

x	0	1	+\infty
f'(x)		+	-
f(x)	-\infty	1	0

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 + \frac{-\ln 3}{\frac{1}{3}} = 3 - 3\ln 3 < 0$$

③

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + \frac{-\ln 2}{\frac{1}{2}} = 2 - 2\ln 2 > 0$$

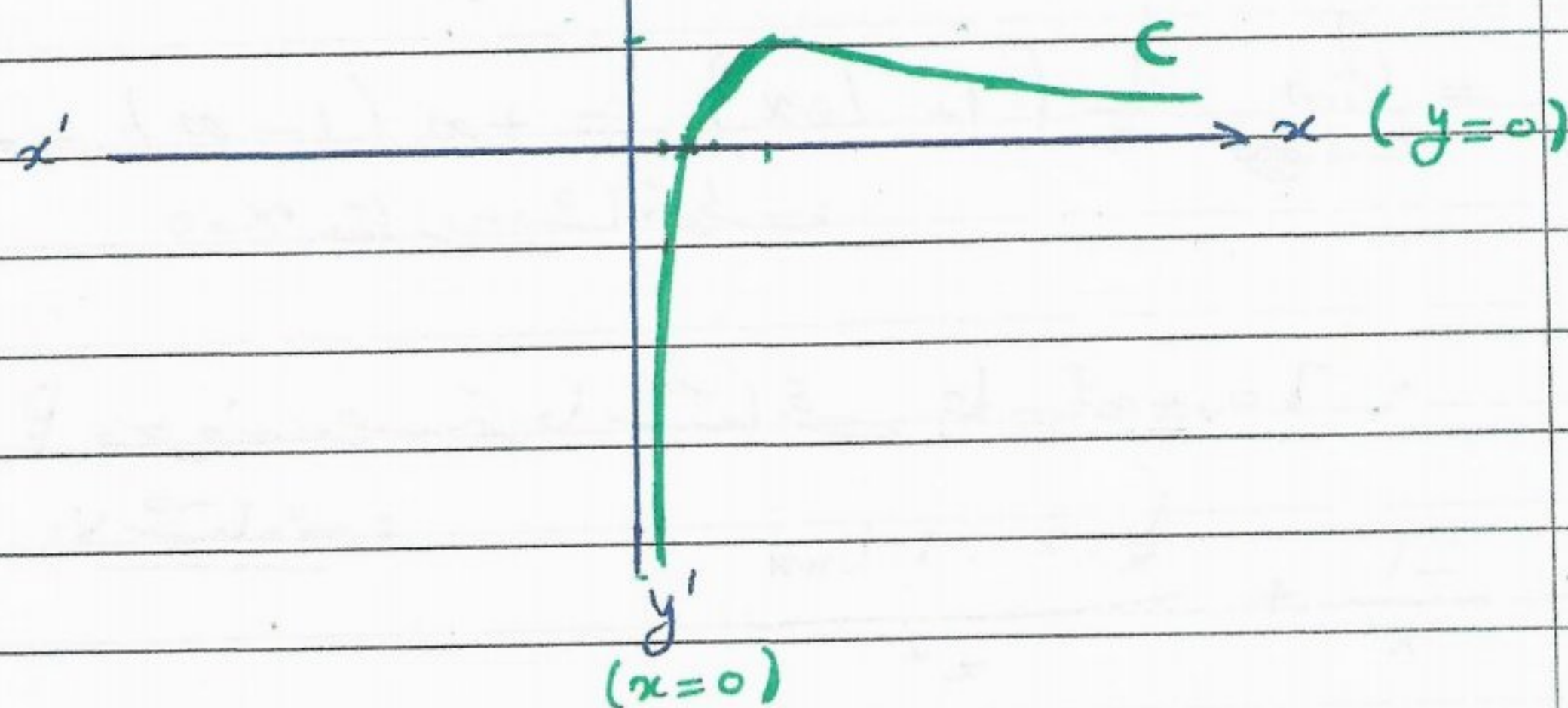
ولتابع متزايد على المجال

$$\left] \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right[$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

إذاً: للمعادلة f(x)=0 حل واحد

④ الرسم: للمقاربات
 $y=0$ أفقي
 $x=0$ عمودي
 قسم المنطقة: $(0, -\infty)$ ①، $(1, 1)$ ②، $(+\infty, 0)$ ③



$$g(x) = \frac{1-x+\ln x}{x} \quad \text{⑤}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{x}{x} + \frac{\ln x}{x}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} - 1$$

$$g(x) = f(x) - 1$$

C' يتبع عن C بانزياح مقدار 1 - سيجده $(0, -1)$ $\vec{C}$.

مسألة (47) -

$$P(x) = \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) \quad \text{و} \quad D =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$$

① P معرف و مستمر في D و P متماثل في D : $0, +\infty[$ و $]-\infty, -1[$

$$\ast \lim_{x \rightarrow 0^+} P(x) = \ln(0) = -\infty$$

النهاية السالبة :

$$\ast \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \ln(1) = 0$$

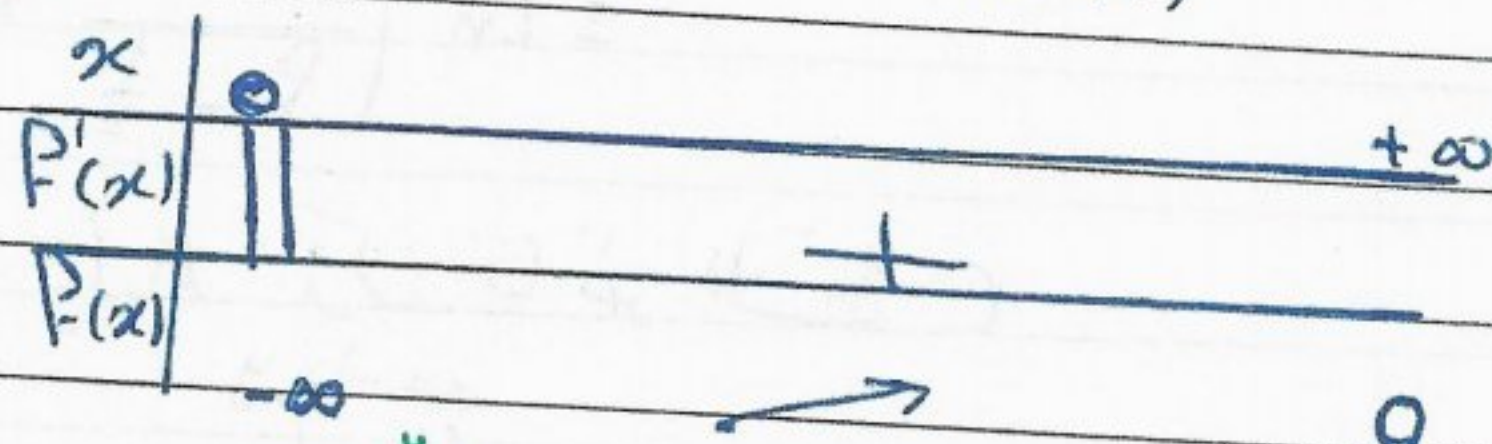
$x=0$ مقام شاذ

$y=0$ مقام أفقي

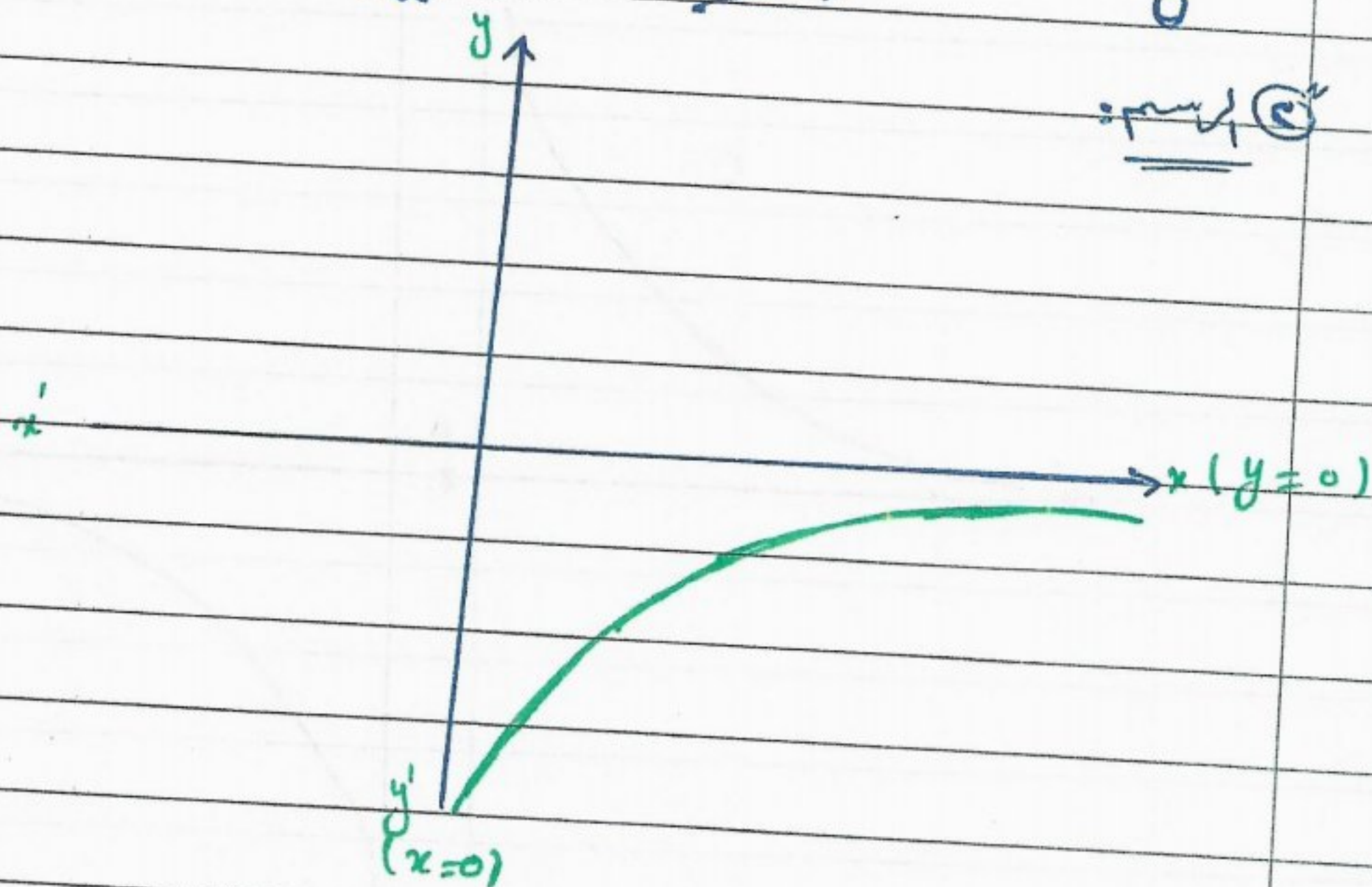
الاستقامة :

$$P(x) = \ln x - \ln(x+1)$$

$$P'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)} > 0$$



② P ليس متماثل



③ $A(-\frac{1}{2}, 0)$ نقطة تقاطع للخط C مع A هي نقطة انحناء :
 متى تكون A مرتبة تنازلياً :
 $P(-\frac{1}{2} + h) + P(-\frac{1}{2} - h) = 0$ (*)

$$F(-\frac{1}{2} + h) = \ln\left(\frac{-\frac{1}{2} + h}{1 + h - \frac{1}{2}}\right) = \ln\left(\frac{h - \frac{1}{2}}{h + \frac{1}{2}}\right) = F(-\frac{1}{2} + h) \text{ حسب}$$

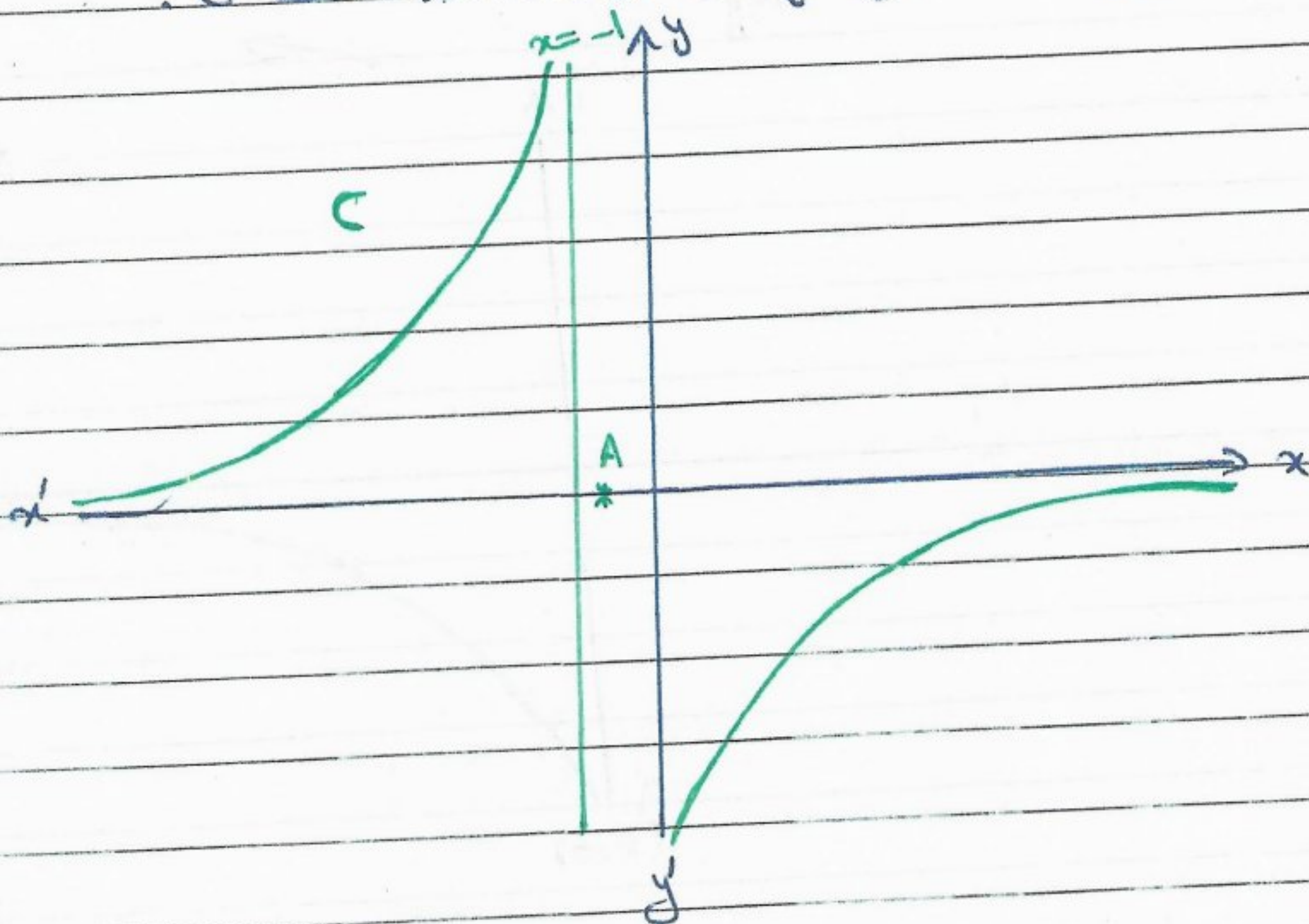
$$F(-\frac{1}{2} - h) = \ln\left(\frac{-\frac{1}{2} - h}{1 - h - \frac{1}{2}}\right) = \ln\left(\frac{-(h + \frac{1}{2})}{-(h - \frac{1}{2})}\right) = F(-\frac{1}{2} - h) \text{ حسب}$$

$$= \ln\left(\frac{h + \frac{1}{2}}{h - \frac{1}{2}}\right)$$

$$F(-\frac{1}{2} + h) + F(-\frac{1}{2} - h) = \ln\left(\frac{h - \frac{1}{2}}{h + \frac{1}{2}}\right) + \ln\left(\frac{h + \frac{1}{2}}{h - \frac{1}{2}}\right) = \text{مجموع}$$

$$= \ln\left(\frac{h - \frac{1}{2}}{h + \frac{1}{2}} \times \frac{h + \frac{1}{2}}{h - \frac{1}{2}}\right) = \ln(1) = 0$$

نلاحظ: $A(-\frac{1}{2}, 0)$ مركز تماثل C



$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

$$= \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$S_n = \ln \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{n}{n+1} \right)$$

$$= \ln \left(\frac{1}{n+1} \right)$$

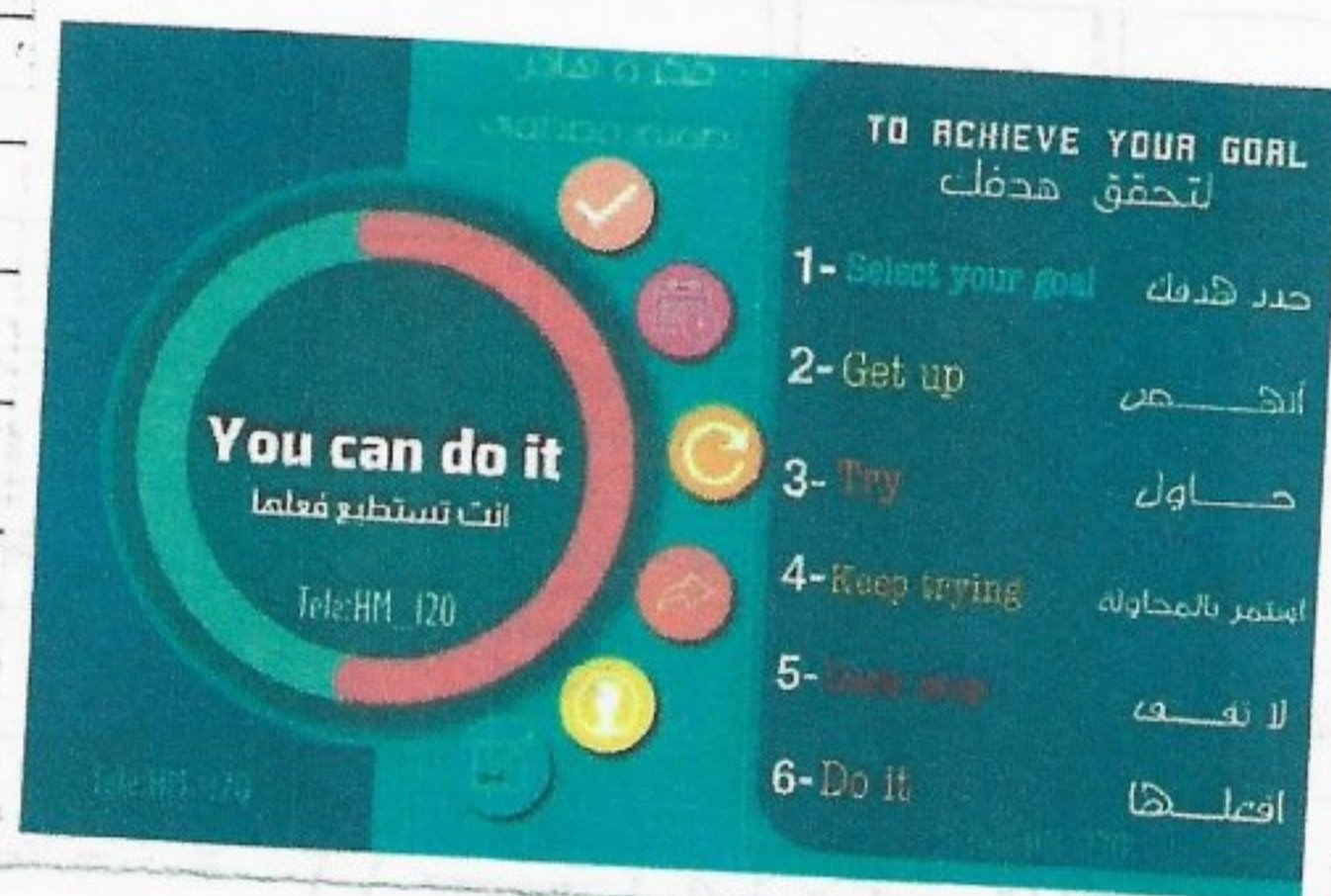
$$S_n = -\ln(n+1)$$

$$* \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{n}{n+1} \right)$$

$$= \ln(1) = 0$$

$$* \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\ln(n+1))$$

$$= -\infty$$



المسألة (48) -

$$P(x) = 2x - 1 - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad \text{و} \quad P =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

$$d: y = 2x - 1 \quad (1)$$

* نشكل الفرق:

$$P(x) - y_d = 2x - 1 - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - (2x - 1)$$

$$= -\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

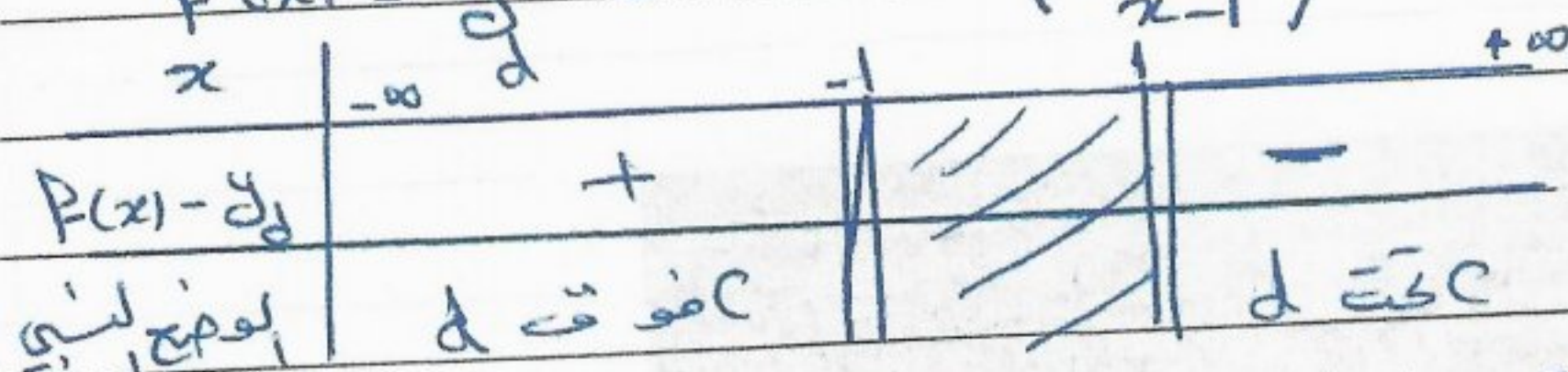
* نلقي الفرق في جوار $+\infty$ و $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (P(x) - y_d) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \right) = 0$$

الذات: d مقارب حاسي للخط C في جوار $+\infty$ و $-\infty$.

* الوضع الحاسي: ندرس أيضا الفرق:

$$P(x) - y_d = -\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$



(2) P معرف وصغروا اشتقاق على $]-\infty, -1[$ و $]1, +\infty[$.

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - 1 - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \right) = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow 1^+} P(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(2x - 1 - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \right) = -\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow -1^-} P(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(2x - 1 - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \right) = +\infty$$

مقابلات متماثلة للخط C $\left\{ \begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array} \right.$

$$F(x) = 2x - 1 - \ln(x+1) + \ln(x-1)$$

$$F'(x) = 2 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$$

الحدود:

$$= 2 + \frac{-x+1+x+1}{(x-1)(x+1)}$$

$$= 2 + \frac{2}{x^2-1} = \frac{2x^2-2+2}{x^2-1} = \frac{2x^2}{x^2-1} > 0$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$F'(x)$		+		+
$F(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$$F(x) + F(-x) \stackrel{?}{=} -2$$

④

$$F(x) = 2x - 1 - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$F(-x) = -2x - 1 - \ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right)$$

⑤

$$F(x) + F(-x) = -2 - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right)$$

$$= -2 - \left[\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \ln\left(\frac{-(x-1)}{-(x+1)}\right) \right]$$

$$= -2 - \left[\ln\left(\frac{x+1}{x-1} \times \frac{x-1}{x+1}\right) \right]$$

$$= -2 - \ln(1) = -2$$

$$F(x) + F(-x) = -2$$

نلاحظ أن $A(0, -1)$ هي نقطة مركز تناظر C و $x \in D \Rightarrow 2x_0 - x \in D$

Alnajah

(109)

"مفتحة"

$$P(x) + P(2x_0 - x) = 2y_0$$

(b)

$$P(x) + P(-x) = 0$$

(c) الرسم: الخواص:

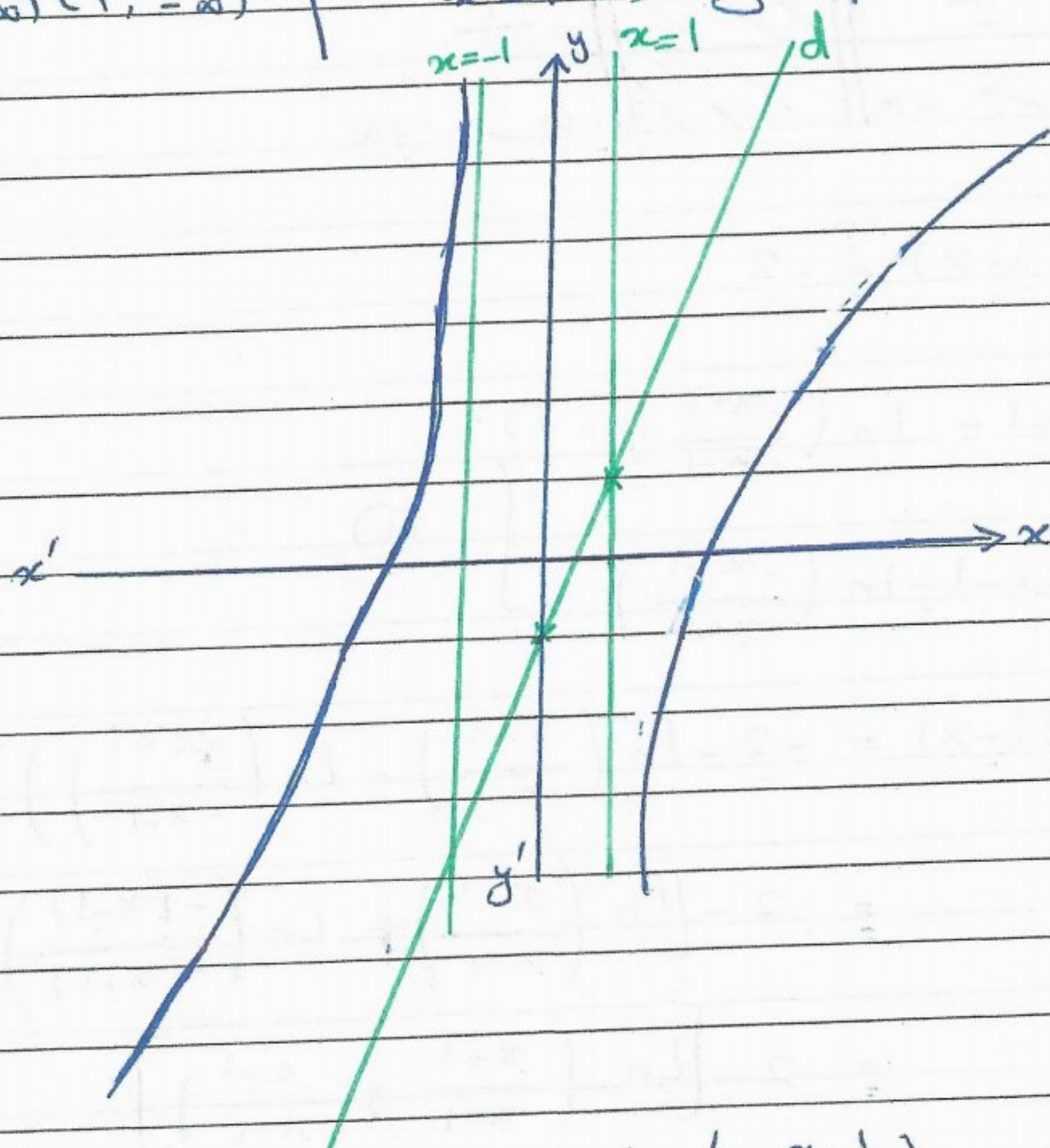
$$\begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \text{ نقاط}$$

$$d: y = 2x - 1$$

$$x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (0, -1)$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (1, 1)$$

قوس مفتوحة:
 $(-1, +\infty)$ و $(-\infty, -1)$ من أجل
 $(+\infty, +\infty)$ و $(1, -\infty)$ من أجل



$$g(x) = -2x + 1 - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

(d)

$$= -\left(2x - 1 + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)$$

$$= -\left(2x - 1 - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right) = -P(x)$$

g تقدير بالنسبة لـ x و x'

- مسألة (49) -

$$P(x) = (ax - b)e^x \quad \text{و} \quad D =]-\infty, +\infty[$$

$$P(0) = -1 \quad x=0$$

$$P'(0) = 0$$

①

$$P(0) = -1$$

$$-b \cdot e^0 = -1 \Rightarrow$$

$$b=1$$

$$P'(x) = a \cdot e^x + e^x(ax - b)$$

$$P'(0) = 0 \Rightarrow a \cdot e^0 + e^0(-b) = 0$$

$$a - 1 = 0 \Rightarrow a=1$$

$$P(x) = (x-1) \cdot e^x$$

$$E(n) : P^{(n)}(x) = (x+n-1) \cdot e^x$$

①

نثبت صحة العلاقة من أجل $n=1$

$$l_1 = P'(x) = 1 \cdot e^x + e^x(x-1) = e^x + xe^x - e^x = x \cdot e^x$$

$$l_2 = (x+1-1) \cdot e^x = x \cdot e^x$$

$$E(1) \Leftarrow l_1 = l_2$$

نقرر صحة العلاقة من أجل n

نستعمل

$$P^{(n)}(x) = (x+n-1) \cdot e^x$$

ولنثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$

$$P^{(n+1)}(x) = (x+n) \cdot e^x$$

$$l_1 = P^{(n+1)}(x)$$

$$= (P^{(n)}(x))'$$

$$= ((x+n-1) \cdot e^x)'$$

$$= 1 \cdot e^x + e^x(x+n-1) = e^x(1+x+n-1)$$

$$= (x+n) \cdot e^x$$

$$= l_2$$

إذاً: $E(n+1)$ صواب
عامة نجد أن الفرضية صوابية يمكن أن تكون $n \in \mathbb{N}^*$

③ f معرف وصلة مستمرة على $]-\infty, +\infty[$
لنحسب النهاية

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1) \cdot e^x = 0 \cdot \infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot e^x - e^x) = 0 - 0 = 0$$

$y=0$ حاربت أختي لأنه c

* لوضع الشيء في ندرس إشارة الفرقته:

$$f(x) - y = (x-1) \cdot e^x - 0 = (x-1) \cdot e^x$$

لعدم الفرقته

$$f(x) - y = 0 \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x=1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y$	—	0	+
الوضع الشيء	في	في	فوق

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) \cdot e^x = +\infty$$

$$f'(x) = x \cdot e^x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

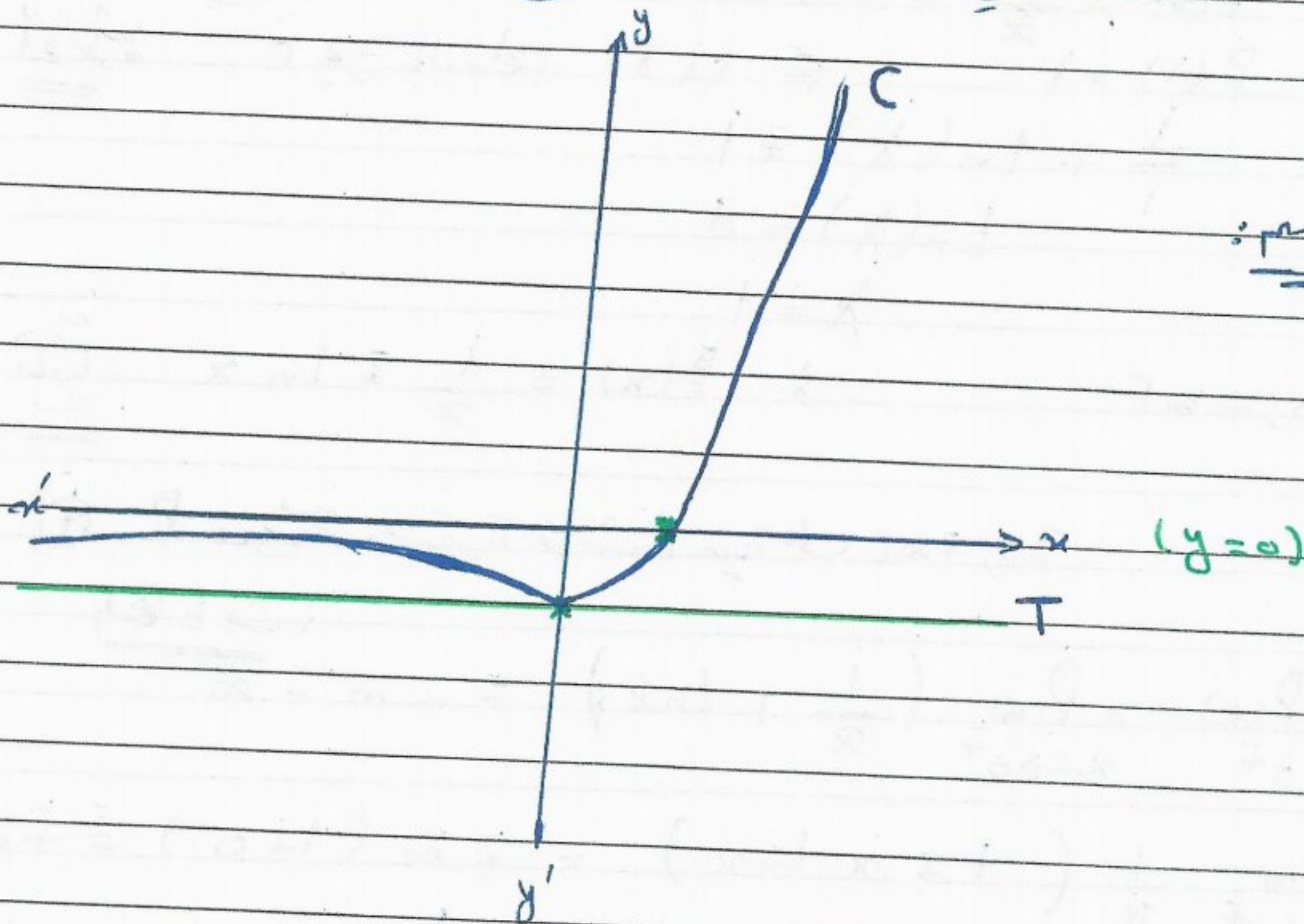
$$f(0) = -1$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	0	-1	$+\infty$

$$m = f'(0) = 0 \quad \text{و} \quad y_0 = f(0) = -1 \quad \alpha_0 = 0$$

$$\Rightarrow T: y = -1$$

في سن اعني /



④ رسم:

⑤ حلول المعادلات

$$P(x) = m$$

كل $m \in]-\infty, -1[$ لا يوجد حل

$m = -1$ حل واحد

$m \in]-1, 0[$ حلين

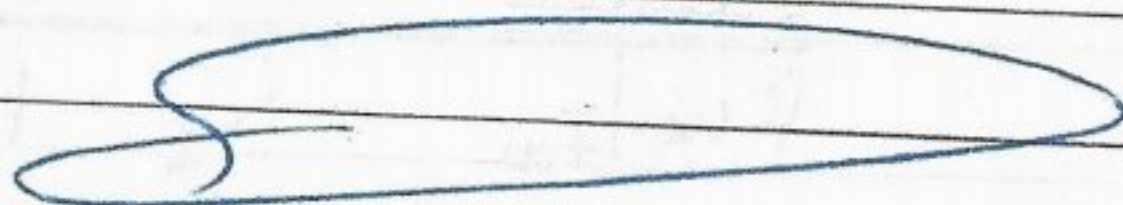
$m = 0$ حل واحد

$m \in]0, +\infty[$ لا يوجد حل

$$P_1(x) = x \cdot e^{x+1}$$

$$P(x) = P(x+1)$$

إذاً: C يتبع عن C باستثناء 0 على محور y فقط عند $(-1, 0)$



- مسألة (152).

$$F(x) = \frac{1}{x} + \ln(\lambda x)$$

$$F(1) = 1 \quad \Leftrightarrow (1, 1) \text{ يمر بالنقطة}$$

$$\frac{1}{1} + \ln(\lambda) = 1$$

$$\ln(\lambda) = 0$$

$$\lambda = 1$$

$$D_F =]0, +\infty[$$

$$F(x) = \frac{1}{x} + \ln x$$

① معرفة ومقارنة دالة F على $]0, +\infty[$.

النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) = +\infty - \infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} (1 + x \ln x) = +\infty (1 + 0) = +\infty$$

$x = 0$ معاً بـ $\ln x$ لا يمكن.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) = 0 + \infty = +\infty$$

الاستنتاج:

$$F'(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-1 + x}{x^2}$$

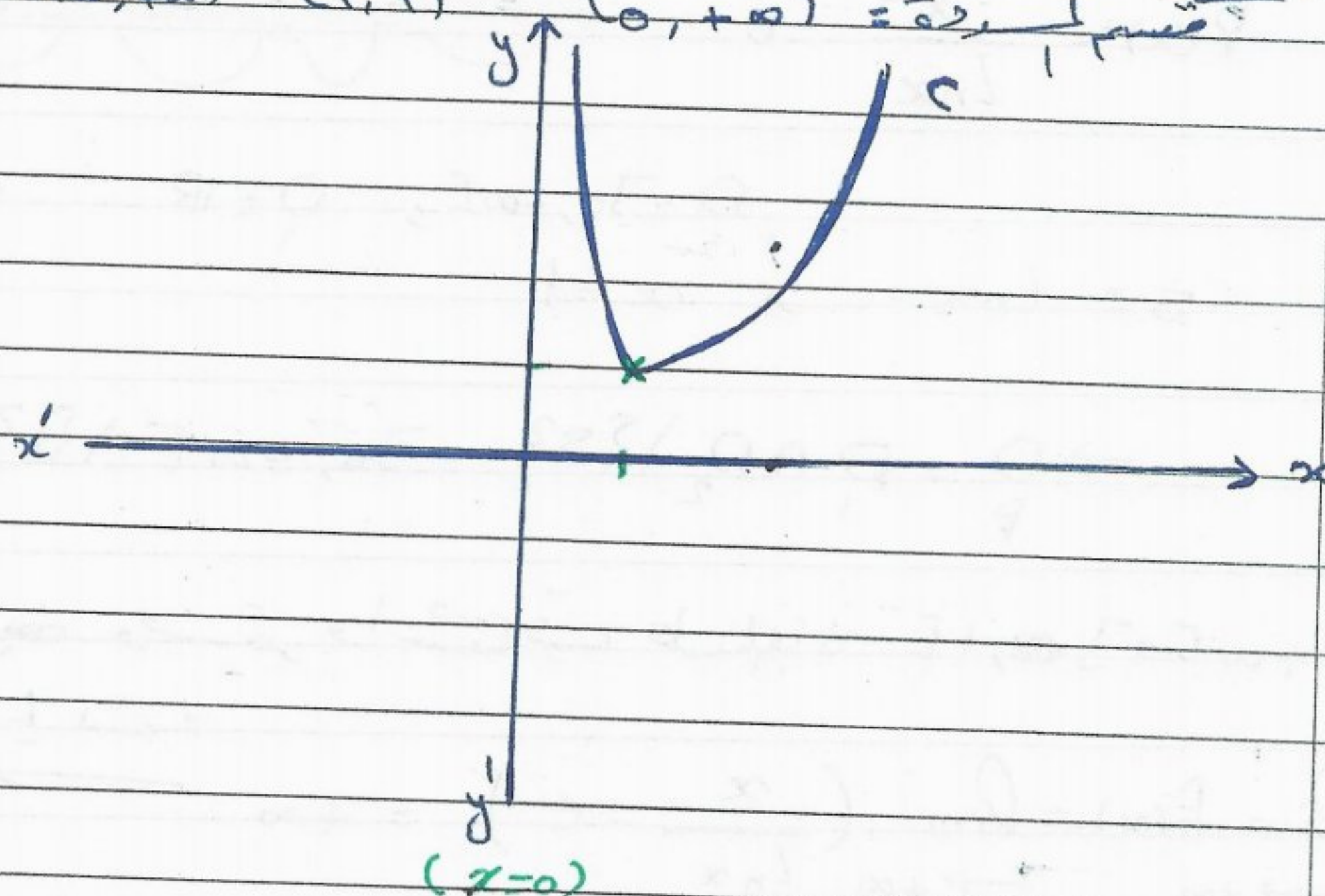
$$F'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$F(1) = \frac{1}{1} + \ln(1) = 1$$

$$F(1) = 1 \text{ قيمة حرجية}$$

x	0	1	$+\infty$
$F'(x)$		0	+
$F(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

الرسم : $x=0$ $y=0$ $(0, +\infty)$ $(+\infty, +\infty)$ $(1, 1)$ $(+\infty, +\infty)$



$$P_1(x) = -\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1}{x}\right) \quad (1)$$

$$= \frac{1}{-x} - \ln(x)$$

$$= -\left(\frac{1}{x} + \ln(x)\right)$$

$$= -P(x)$$

نقطة C بالنسبة إلى محور xx'

$$S = \int_1^2 P(x) dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \ln x\right) dx \quad (2)$$

$$= [\ln|x| + x \cdot \ln x - x]_1^2 = \ln 2 + 2\ln 2 - 2 + 1$$

$$= 3\ln 2 - 1$$

- المسألة (150)

$$P(x) = \frac{x}{\ln x} - e$$

$$D =]0, +\infty[, D_1 = \mathbb{R} = P \quad \square$$

$$S: \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow D = D_1 \cap D_2 \setminus \{S\} =]0, +\infty[\setminus \{1\}$$

• P معرف وصير واستقامت على المجال $]0, +\infty[\setminus \{1\}$
 لنفعل ذلك:

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\ln x} - e \right) = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0^+} P(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{\ln x} - e \right) = 0 - e = -e$$

$$* \lim_{x \rightarrow 1^+} P(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{\ln x} - e \right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow 1^-} P(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x}{\ln x} - e \right) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$P'(x) = \frac{1 \cdot \ln x - \frac{1}{x} \cdot x}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow \ln x - 1 = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$$

$$P(e) = \frac{e}{1} - e = 0$$

x	0	1	e	$+\infty$
$P'(x)$		-	- 0	+
$P(x)$	-e	$\searrow -\infty$	$\nearrow 0$	$\nearrow +\infty$

١٥) أمّا إذا دُعي: $x = 1$ معاً بـ $x \rightarrow 1^+$ فإن C يقع بين x و 1
 أمّا إذا دُعي: $x \rightarrow 1^-$ فإن C يقع بين 1 و x

١٦) حلول المتراجحة $x > e \ln x$

$$\frac{x}{\ln x} > e$$

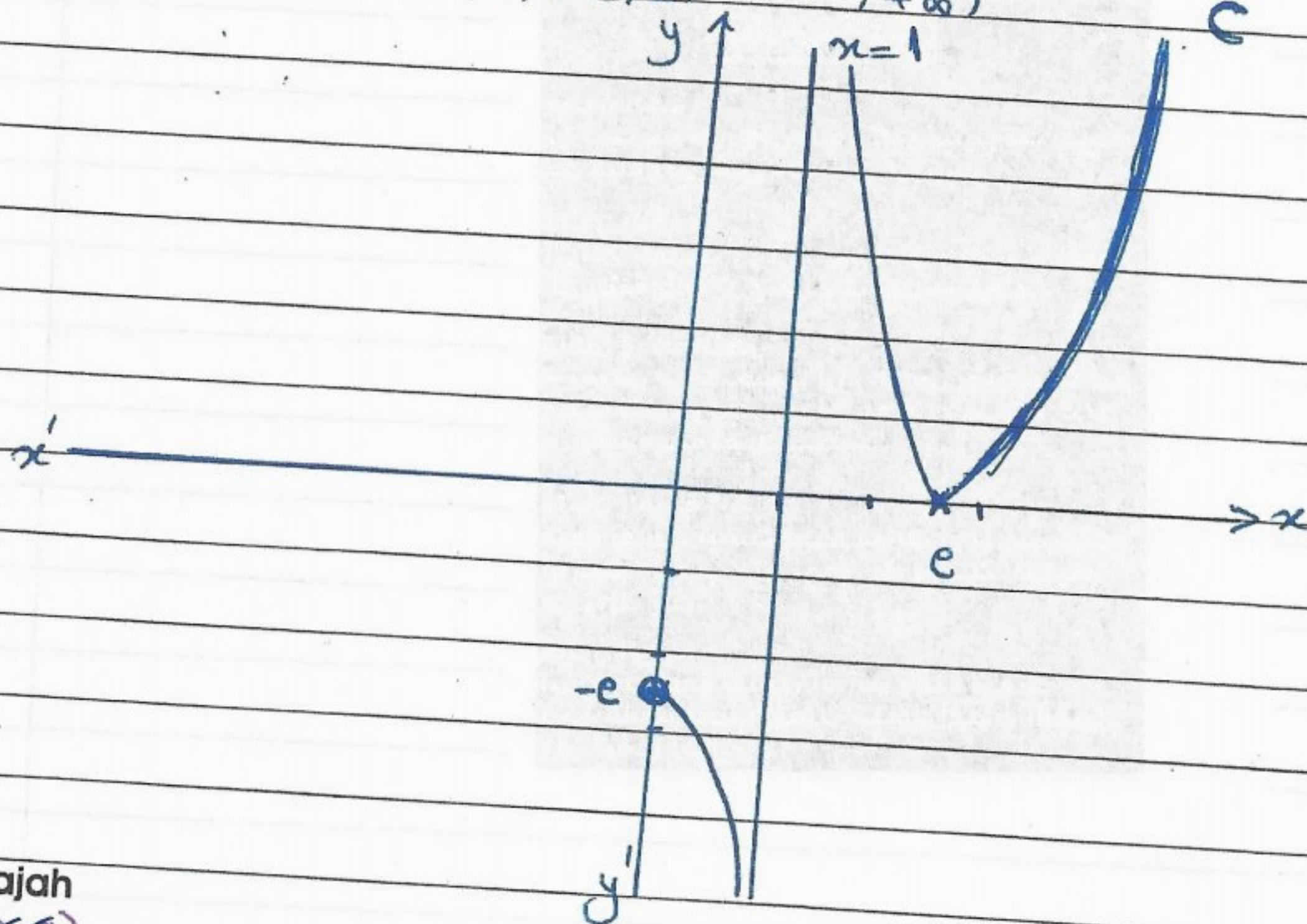
$$\frac{x}{\ln x} - e > 0$$

$$P(x) > 0$$

من أجل حل المتراجحة في جدول التغيرات نجد أن حلول المتراجحة السابقة تقع ضمن
 $E =]1, e[\cup]e, +\infty[$

١٧) لرسم: أمّا إذا دُعي: $x = +1$
 قسم: $(0, -e)$ و $(1, +\infty)$
 قسم: $(1, +\infty)$ و $(e, 0)$
 فرع أول $(1, -\infty)$
 فرع ثاني $(+\infty, +\infty)$

$$e \approx 2.7$$



[9] استنتاج رقم 1:

$$P_1(x) = \frac{x}{\ln(-x)} + e$$

$$P(-x) = \frac{-x}{\ln(-x)} - e$$

$$P(-x) = \frac{x}{\ln(-x)} + e = P_1(x)$$

$$\Rightarrow P(x) = -P(-x)$$

1. تقدير C بالنسبة إلى الجداء 0.

القوانين الخمسة التي ستغير مجرى حياتك
Tele: HM 120

قانون الحب :
أن تحب نفسك ، وفي اليوم الذي سيتوقف أحدهم عن حبك ، لن يقلل ذلك حبك لنفسك.

قانون الثقة :
أن تثق بنفسك ، وفي اليوم الذي سيتوقف أحدهم عن الثقة بك ، لن يقلل ذلك ثقتك بنفسك.

قانون وجهة النظر :
لا تعيش حياتك حسب آراء الناس أو إهتماماتهم عندما تتغير وجهة نظر أحدهم في شخصك فذلك لن يغير وجهة نظرك بنفسك.

قانون القيمة :
قيمة نفسك ليست بحجم منزلك أو نوع سيارتك أو حجم المكتب الذي تعمل به، قيمتك الحقيقية هي ذاتك أنت.

قانون الحياة :
لن يعرف قيمة نفسك إلا أنت وهذه قيمتك الحقيقية فلا تتعب نفسك محاولاً إعجاب الآخرين فلن ترضي أحداً.

- المسألة (51) -

$$P(x) = \frac{1}{x \cdot (1 - \ln x)}$$

$$\mathbb{R} \quad \leftarrow \quad x \cdot (1 - \ln x) \quad \leftarrow \quad]0, +\infty[$$

$$x \cdot (1 - \ln x) = 0$$

$$\text{أو } x = 0$$

$$\text{أو } 1 - \ln x = 0$$

$$\ln x = 1$$

$$x = e$$

$$\rightarrow \underset{P}{D} =]0, +\infty[\setminus \{e\} =]0, e[\cup]e, +\infty[$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x \cdot (1 - \ln x)} \right) = 0 \quad \text{بما أن } x \rightarrow +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0^+} P(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x - x \cdot \ln x} \right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow e} P(x) = \lim_{x \rightarrow e} \left(\frac{1}{x(1 - \ln x)} \right) = \frac{1}{0}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow e^+} P(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow e^-} P(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$P'(x) = \frac{0 - [1 \cdot (1 - \ln x) - \frac{1}{x} \cdot x]}{x^2 (1 - \ln x)^2} = \frac{1 - \ln x - 1}{x^2 (1 - \ln x)^2} = \frac{-\ln x}{x^2 (1 - \ln x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = \frac{1}{1(1-0)} = 1$$

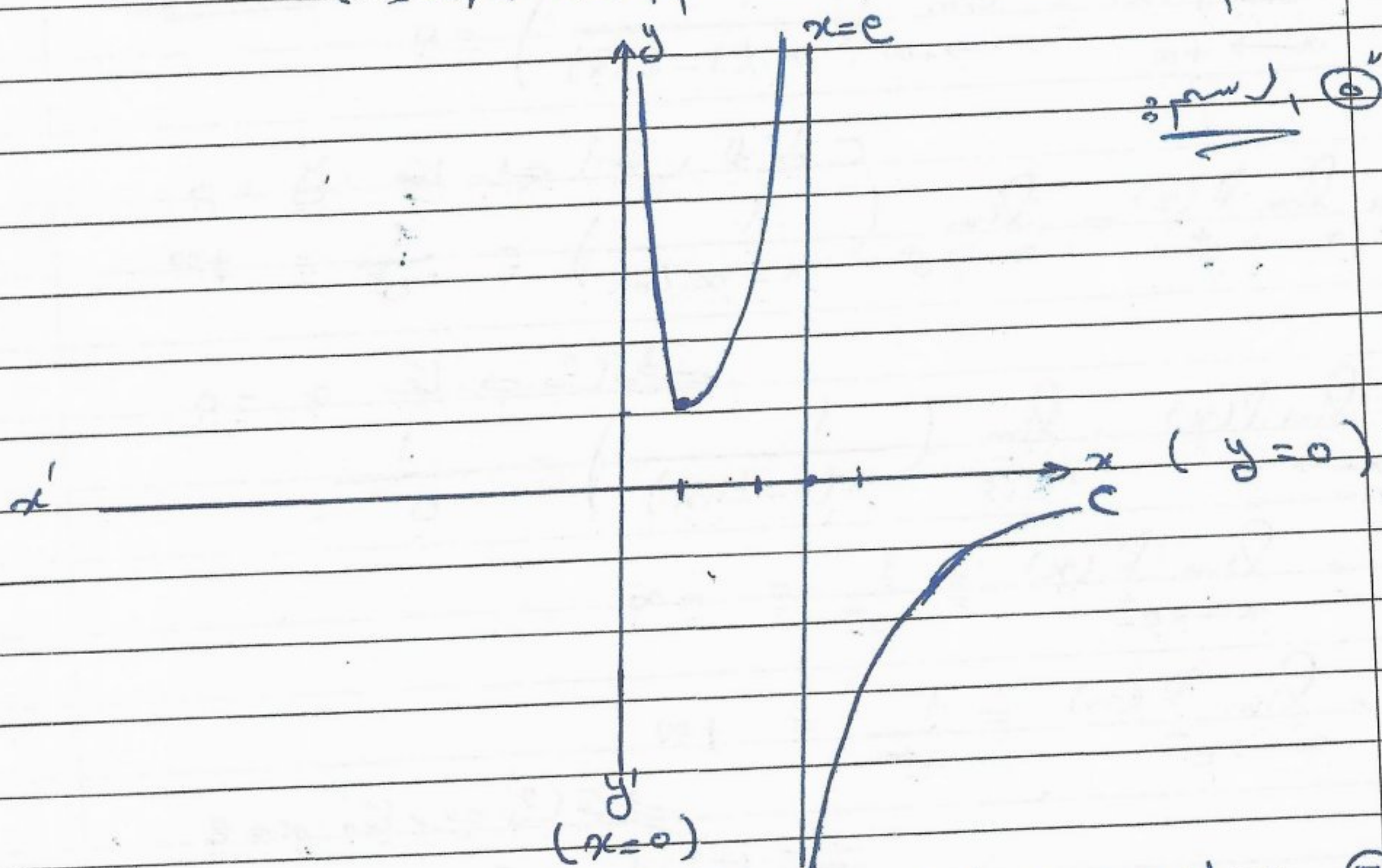
x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$	0

$$\textcircled{2} \quad \Delta: y = 1 \quad \text{نقطة اقصا}$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = 1 \quad \text{من } x = e \text{ الى } +\infty \text{ حيث يتغير المجال}$$

$$-1 \in f([e, +\infty[) \Rightarrow -1 \in]-\infty, 0[$$

فالتابع متزايد قاطعاً



$$m \in]-\infty, 0[\quad \textcircled{*} \quad \text{نقطة اقصا}$$

$$m \in]0, 1[\quad \textcircled{*}$$

$$m = 1 \quad \textcircled{*}$$

$$m \in]1, +\infty[\quad \textcircled{*}$$

$$\textcircled{7} \quad m \cdot x \cdot \ln x - mx + 1 = 0$$

$$m(x \ln x - x) + 1 = 0$$

$$m = \frac{1}{x(1 - \ln x)} = f(x)$$

مسألة (53) -

$$f(x) = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \quad \text{في } D = \mathbb{R}$$

1) هل يكون f تابع زوجي؟ يجب أن يتحقق الشرط: $x \in D \Rightarrow -x \in D$

$$f(-x) = ? f(x)$$

$$f(-x) = e^{-\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} = f(x)$$

إذًا: f تابع زوجي.
لنصفنا نظرية: C متناظر بالنسبة للمحور yy' .

2) f معرف ومستمر وناقص على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}) = +\infty$$

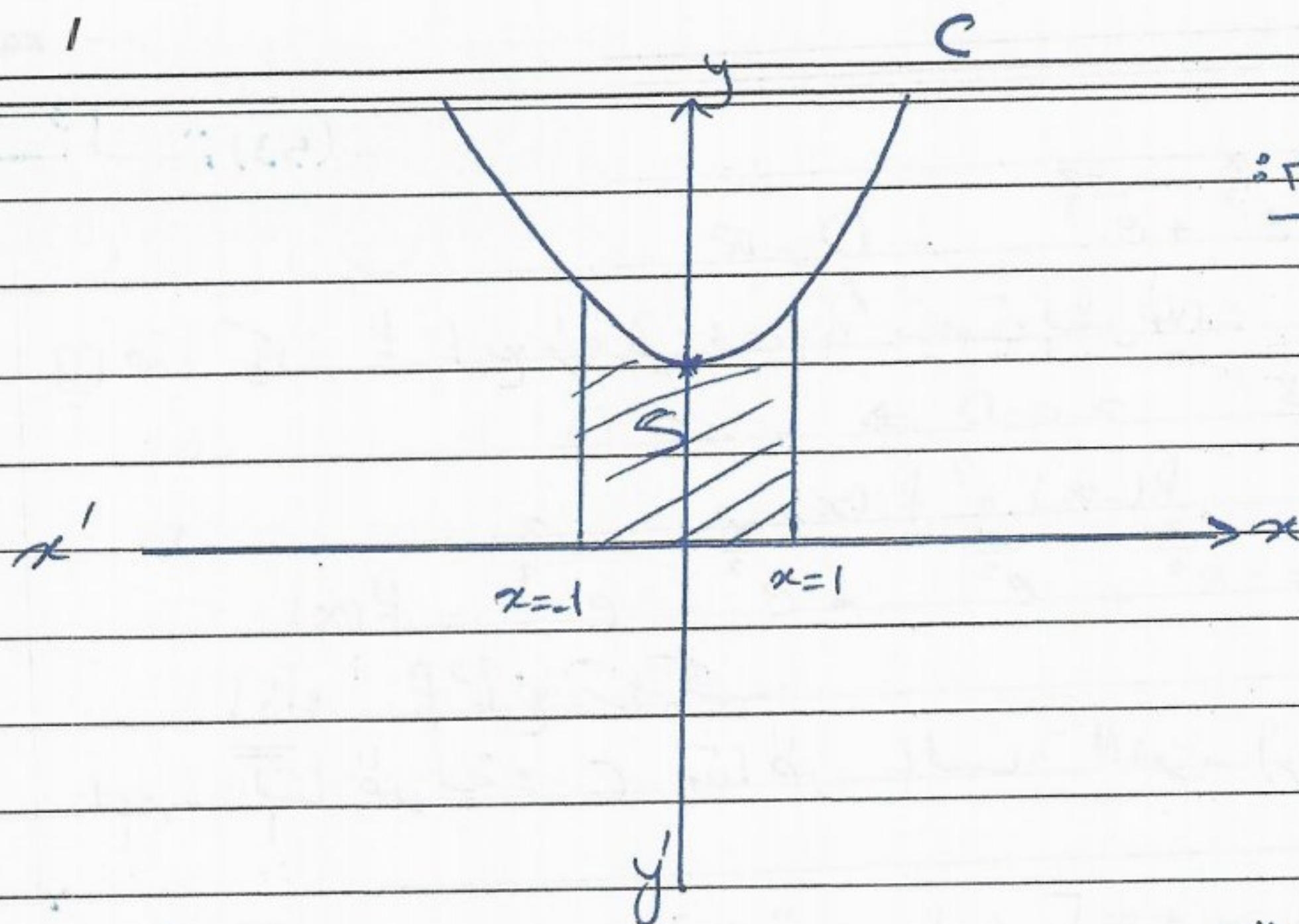
$$f'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} (e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}) = 0$$

$$e^{\frac{x}{2}} = e^{-\frac{x}{2}} \Rightarrow \frac{x}{2} = -\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{2x}{2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f(0) = e^0 + e^0 = 2$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$



المساحة

$$S = \int_{-1}^1 f(x) dx$$

$$= 2 \int_0^1 f(x) dx$$

$$= 2 \int_0^1 (e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}) dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \right]_0^1$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \left[e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} \right]_0^1$$

$$= e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}} - (e^0 - e^0) = \sqrt{e} - \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{e-1}{\sqrt{e}}$$

$$V = \pi \int_{-1}^1 f^2(x) dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 f^2(x) dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 (e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})^2 dx$$

الحجم

$$V = 2\pi \int_0^1 (e^x + e^{-x} + 2) dx$$

$$= 2\pi \left[e^x - e^{-x} + 2x \right]_0^1$$

$$= 2\pi (e^1 - e^{-1} + 2 - (0))$$

$$= 2\pi \left(e - \frac{1}{e} + 2 \right) = \frac{2\pi (e^2 + 2e - 1)}{e}$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \quad (*)$$

طول القوس:

$$1 + \frac{1}{4} (e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})^2 \quad 1 + f'(x)^2$$

$$= 1 + \frac{1}{4} (e^x - 2 + e^{-x}) = \frac{1}{4} (e^x + e^{-x} + 2) = \frac{1}{4} (e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})^2$$

$$\sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} (e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})^2} = \frac{1}{2} (e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}) \quad \text{نأخذ الجذر}$$

$$\Rightarrow L = \int_0^1 \frac{1}{2} (e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}) dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[2e^{\frac{x}{2}} - 2e^{-\frac{x}{2}} \right]_0^1$$

$$= \left[e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} \right]_0^1 = e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}} - 0$$

$$= \sqrt{e} - \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{e-1}{\sqrt{e}}$$

- المسألة (154) -

$$f(x) = \ln(9 - x^2) \text{ في } D =]-3, 3[$$

1) f معرف ومستمرة على $] -3, 3[$ ؟

النهايات :

$$* \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \ln(9 - x^2) = \ln(0) = -\infty$$

$x = -3$ مقام x شاذولي . C يقع بين 3 و -3 .

$$* \lim_{x \rightarrow +3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \ln(9 - x^2) = \ln(0) = -\infty$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{9 - x^2}$$

الاستنتاج :

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f(0) = \ln(9)$$

x	-3	0	3
$f'(x)$	$ $	+	$ $
$f(x)$	$-\infty$	$\rightarrow \ln 9$	$-\infty$

$$x_0 = 2\sqrt{2}$$

$$y_0 = f(2\sqrt{2}) = \ln(9 - 8) = \ln(1) = 0$$

$$m = f'(2\sqrt{2}) = \frac{-2(2\sqrt{2})}{9 - 8} = -4\sqrt{2}$$

$A(2\sqrt{2}, 0)$

$$T: y - 0 = -4\sqrt{2}(x - 2\sqrt{2})$$

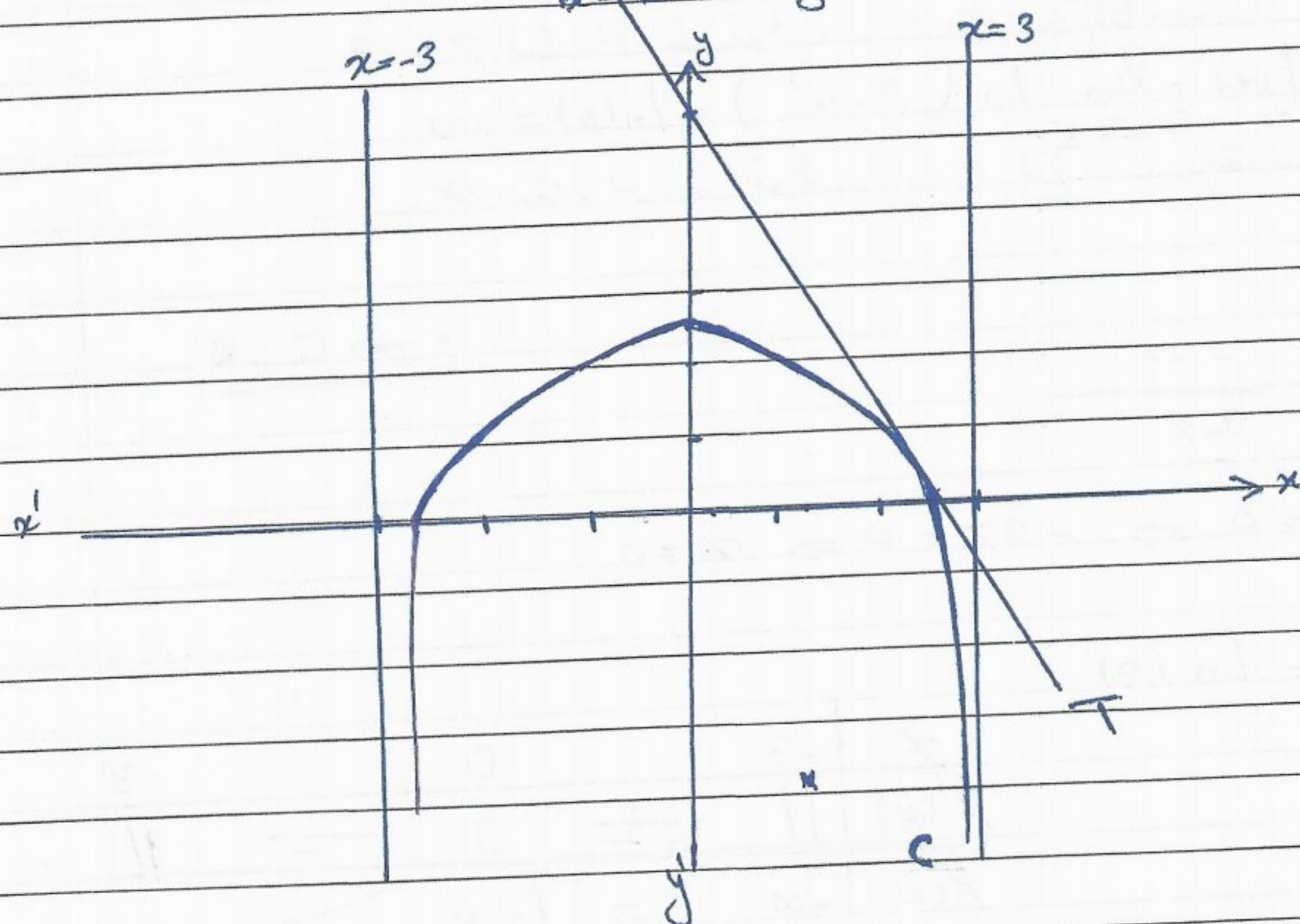
$$T: y = -4\sqrt{2}x + 16$$

المسألة 3: المعادلة $x = -3$ $x = 3$ المعادلة

المعادلة $T: y = -4\sqrt{2}x + 16$

$x = 2\sqrt{2} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (2\sqrt{2}, 0)$

$x = 0 \Rightarrow y = 16 \Rightarrow (0, 16)$



$a = 1$ $x = 1.2$
 $h = 0.2$

$P(1.2)$ قيمة تقريبية

$P(1) = \ln 8$

$P'(1) = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow P(a+h) \approx P(a) + P'(a) \cdot h$

$P(1.2) \approx \ln 8 - \frac{1}{4} \times \frac{2}{10} \approx \ln 8 - \frac{1}{20} = \frac{20 \ln 8 - 1}{20} \approx 2.05$

- المسألة (55) -

$$f(x) = a \cdot e^{2x} + b e^x ; D_f = \mathbb{R}$$

$$f(0) = -1$$

أولاً:

$$f'(0) = 0 \neq$$

$$f(0) = -1 \Rightarrow a \cdot e^0 + b e^0 = -1 \Rightarrow a + b = -1 \quad (*)$$

$$f'(x) = 2a e^{2x} + b e^x \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \quad (**)$$

نظراً:

$$b = -2$$

$$\Leftrightarrow 2 + b = 0$$

$$-a = -1 \Rightarrow a = 1$$

دعوى في (**):

$$\Rightarrow f(x) = e^{2x} - 2e^x$$

ثانياً:

① f معرف ومستمرة واستمرارية على المجال $]-\infty, +\infty[$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - 2e^x) = 0$$

انها لا تتقارب

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - 2e^x) = +\infty - \infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (e^x - 2) = +\infty (+\infty) = +\infty$$

$$f'(x) = 2e^{2x} - 2e^x$$

$$f'(x) = 0$$

الاستمرارية:

$$2e^{2x} - 2e^x = 0$$

$$e^{2x} = e^x \Rightarrow 2x = x \Rightarrow x = 0$$

$$f(0) = e^0 - 2e^0 = -1$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$	$f(0) = -1$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	قيمة صفرية
$f(x)$	0	-1	$+\infty$	

$$(e^x x) \quad e^x - 2 = -e^{-x}$$

$$e^{2x} - 2e^x = -1$$

$$f(x) = -1$$

$x=0$

للمعادلة حل واحد

3 الرسم للخطات $y=0$ أفقي

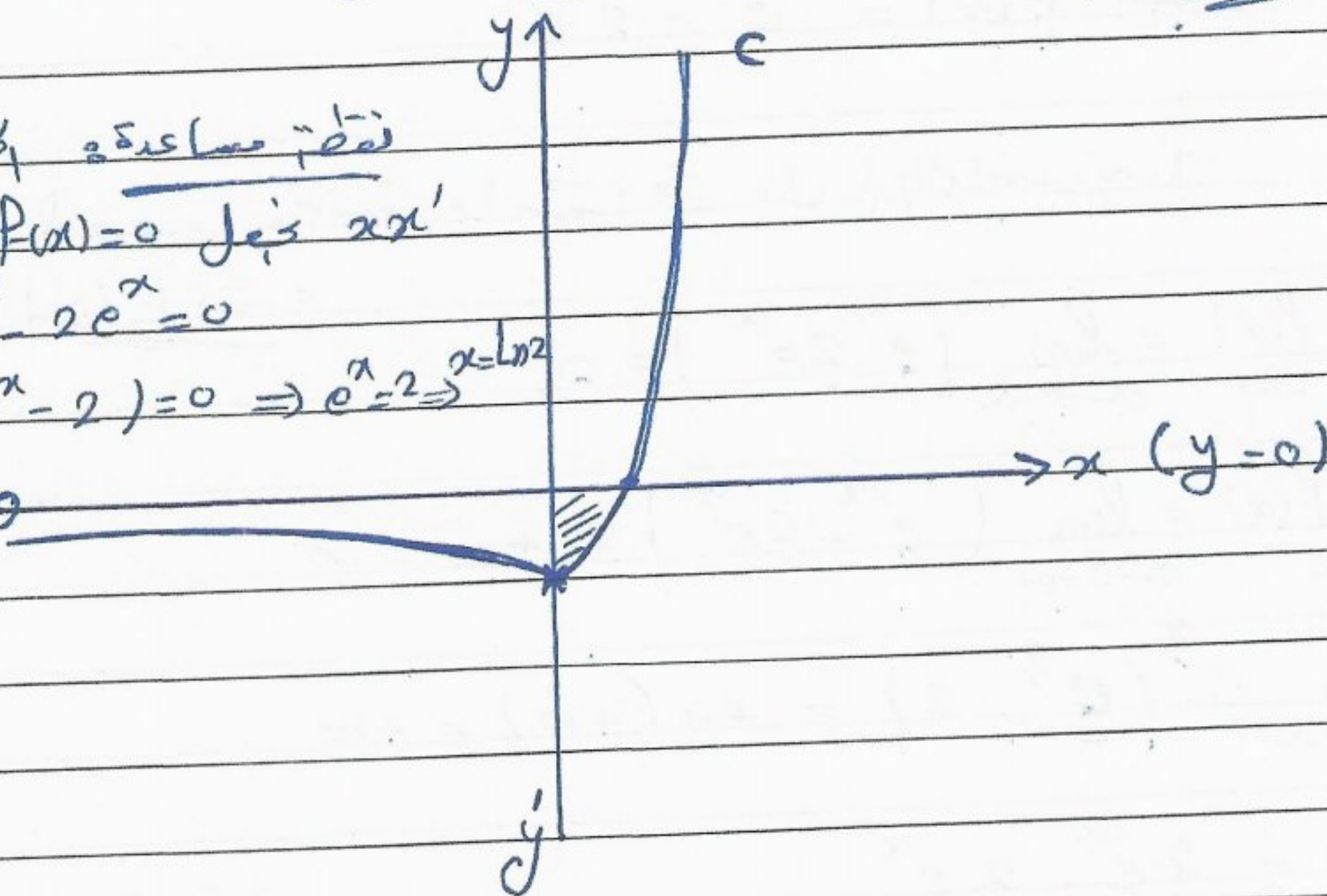
نقطة مساعدة $x=0$ تقاطع

$$f(x) = 0 \quad x \neq 0$$

$$e^{2x} - 2e^x = 0$$

$$e^x(e^x - 2) = 0 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$$

$x=0$



$$f_1(x) = \frac{1}{e^{2x}} (1 - 2e^x)$$

$$= e^{-2x} (1 - 2e^x)$$

$$= e^{-2x} - 2e^{-x}$$

$$= f(-x)$$

• ५५'

2nd Proof

~~$$S = \int f(x) dx$$~~

← لا، ليس، حتى

$$\int_0^{\ln 2} (e^{2x} - 2e^x) dx$$

$$= - \left[\frac{1}{2} e^{2x} - 2e^x \right]_0^{\ln 2}$$

$$= - \left[\left(\frac{1}{2} e^{2 \ln 2} - 2 \cdot e^{\ln 2} \right) - \left(\frac{1}{2} e^0 - 2 e^0 \right) \right]$$

$$= \left(\frac{1}{2} e^{\ln 4} - 2 \cdot 2 - \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \right)$$

$$= - \left(\frac{1}{2} \cdot 4 - 4 + \frac{3}{2} \right)$$

$$\frac{1}{2}$$

$$V = \pi \int_0^{\ln 2} f(x)^2 dx = \pi \int_0^{\ln 2} (e^{2x} - 2e^x)^2 dx \quad \text{--- 13 ---}$$

$$= \pi \int_0^{\ln 2} (e^{4x} - 4e^{3x} + 4e^{2x}) dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{4} e^{4x} - \frac{4}{3} e^{3x} + 2 e^{2x} \right]_{\ln 2}^0$$

$$= \pi \left[\frac{1}{4} e^{4 \ln 2} - \frac{4}{3} e^{3 \ln 2} + 2 e^{2 \ln 2} - \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + 2 \right) \right]$$

$$= \pi \left(\frac{1}{4} \cdot 16 - \frac{4}{3} \times 8 + 2 \times 4 - \frac{1}{4} + \frac{4}{3} - 2 \right) = \frac{5\pi}{12}$$

Ainajah

(47)

مسألة (156) -

$$f(x) = x + \frac{4}{e^x + 1} \quad \text{في } D =]-\infty, +\infty[$$

① معرفة ومجال استمرارية f على $]-\infty, +\infty[$
 لنبدأ بالحدود

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{4}{e^x + 1} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{4}{e^x + 1} \right) = -\infty$$

الاستمرارية

$$f'(x) = 1 - \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + 2e^x + 1 - 4e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (e^x - 1)^2 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$f(0) = 2$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$ 0 $+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 2 \nearrow$	$+\infty$

$$f(x) = x + \frac{4}{e^x + 1}$$

$$f(-x) = -x + \frac{4}{e^{-x} + 1} = -x + \frac{4e^x}{e^x + 1}$$

$$\Rightarrow f(x) + f(-x) = x + \frac{4}{e^x + 1} - x + \frac{4e^x}{e^x + 1} = \frac{4(e^x + 1)}{e^x + 1} = 4$$

$$f(x) + f(-x) = 4$$

Alnajah

(153)

(153)

$A(0, 2)$ يمكن تأجيلها إلى Δ : Δ

$$x \in D \Rightarrow 2x_0 - x \in D \Rightarrow -x \in D$$

$$f(2x_0 - x) + f(x) = 2y_0$$

$$f(-x) + f(x) = 4$$

(a)

(b)

(3) الأساس الأفقي : هم الأساس الذي نستخدمه عند الاستقارة

$$f'(0) = 0 \Rightarrow d = y = f(0) = 2$$

$$f(x) - y = x + \frac{4}{e^x + 1} - x = \frac{4}{e^x + 1} \quad \Delta: y = x \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{e^x + 1} \right) = 0$$

نذهب لـ $x \rightarrow +\infty$:
إذاً Δ مقارب حالي للخط C في جواب $x \rightarrow +\infty$.

$$f(x) - y = \frac{4}{e^x + 1} > 0$$

C فوق Δ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x+4)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{4}{e^x + 1} - x - 4 \right) \quad (5)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{e^x + 1} - 4 \right) = 4 - 4 = 0$$

إذاً $\Delta: y = x + 4$ مقارب حالي
في جواب $x \rightarrow -\infty$.

الوضع لنصف : ندرس إمكانية الفرضية :

$$f(x) - y = \frac{4}{e^x + 1} - 4 = \frac{4 - 4e^x - 4}{e^x + 1} = \frac{-4e^x}{e^x + 1} < 0$$

عقبة Δ'

⑥ الرسم : إلتزاميات :

$\Delta : y = x$ منحنى الزاوية
الأول والثاني

$$\Delta' : y = x + 4$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow (0, 4)$$

$$y = 0 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow (-4, 0)$$

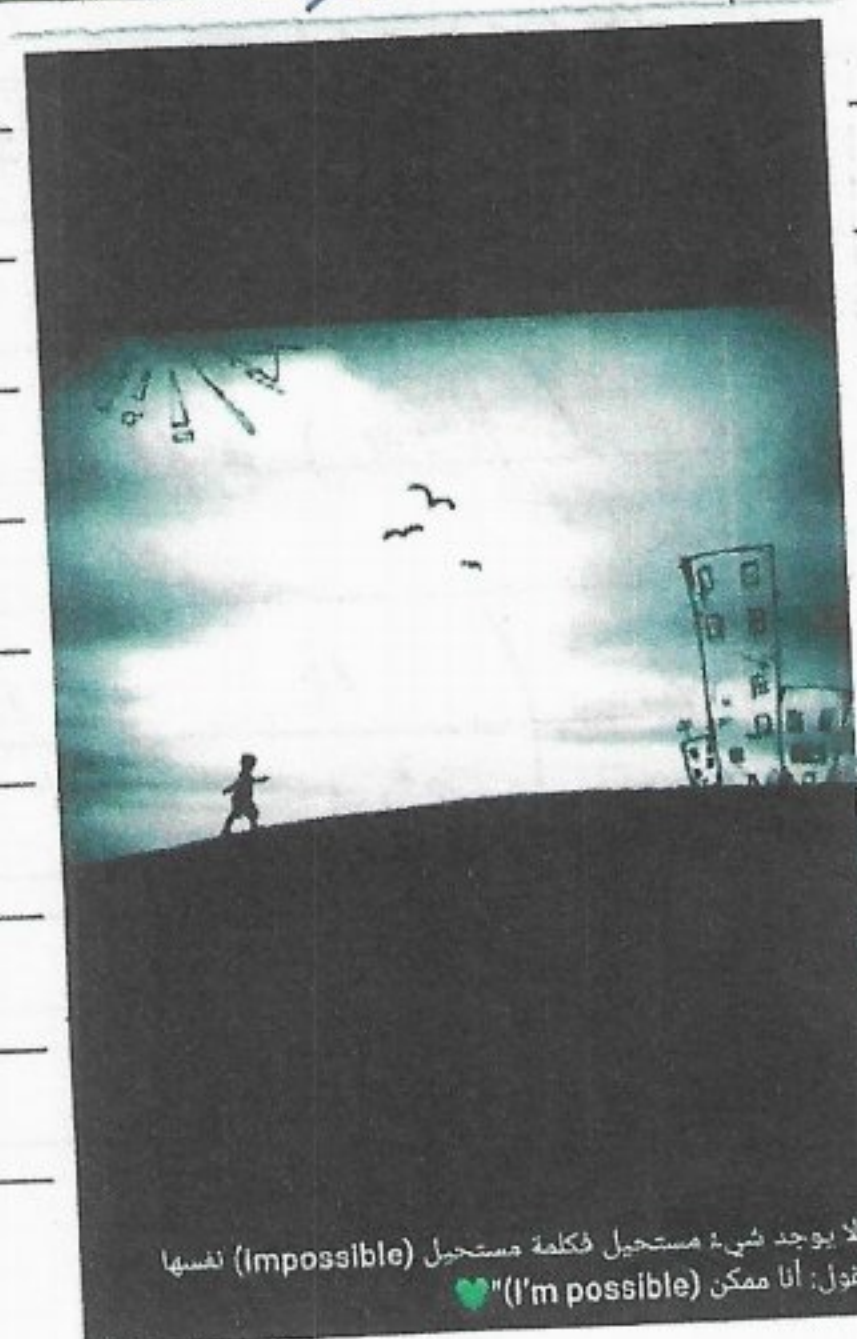
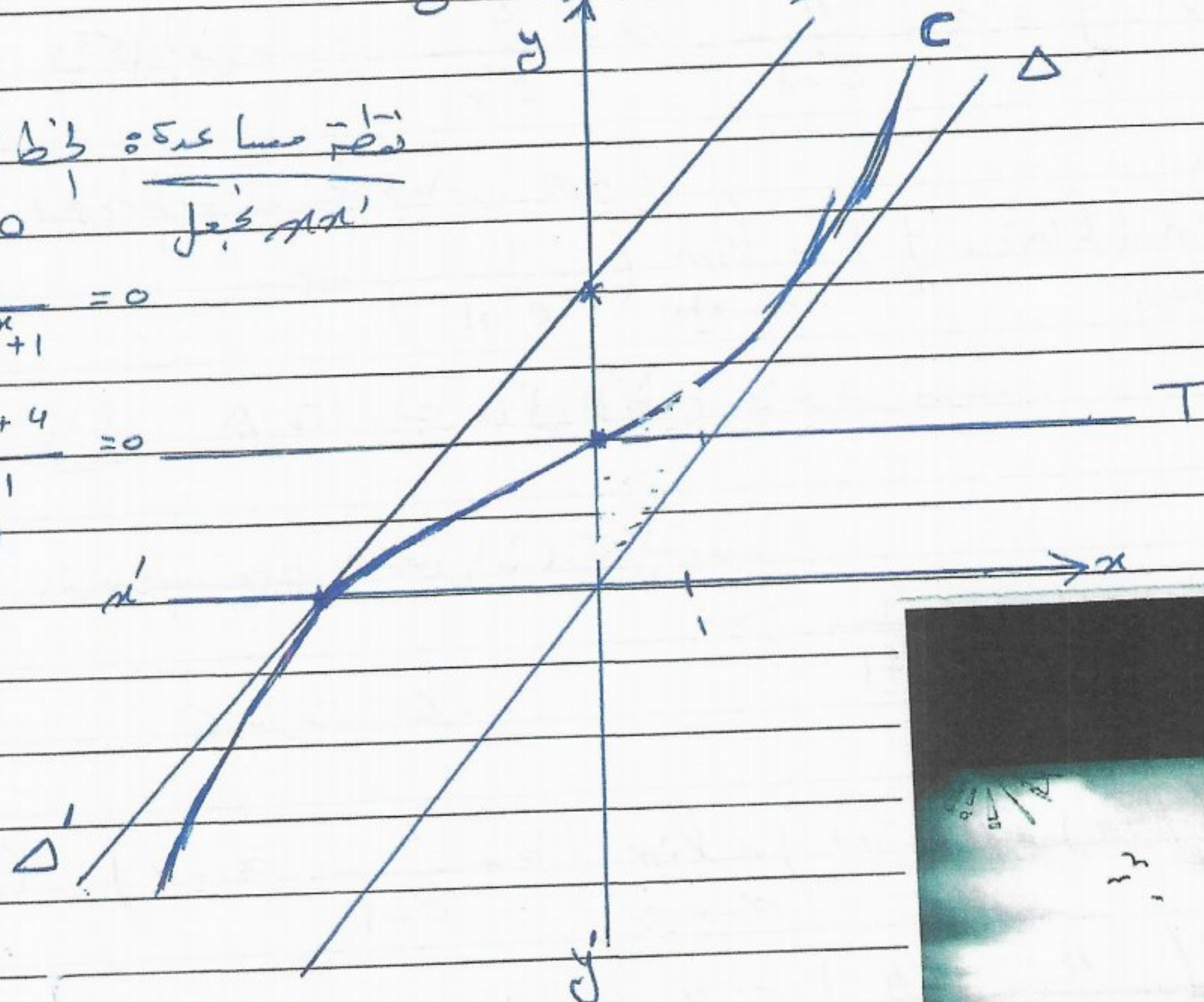
نقطة تقاطع Δ' بـ Δ : نقطة تقاطع Δ' بـ Δ

$$f(x) = 0$$

$$x + \frac{4}{e^x + 1} = 0$$

$$xe^x + x + 4 = 0$$

$$x = -4$$



مسألة (57) -

$$f(x) = x - \ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)$$

$$D =]0, +\infty[$$

فـ f معرفة ومستمرة على $]0, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \ln\left(\frac{2x+1}{x}\right) \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - \ln\left(\frac{2x+1}{x}\right) \right) = -\ln\left(\frac{1}{0^+}\right) = -\infty$$

$x=0$ معاً بـ ∞ في C يقع ∞ في C

$$f(x) = x - \ln(2x+1) + \ln x$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{2x+1} + \frac{1}{x}$$

الاستقارة :

$$= \frac{(2x+1) \cdot x - 2x + 1 \cdot (2x+1)}{x(2x+1)}$$

$$= \frac{2x^2 + x - 2x + 2x + 1}{x(2x+1)}$$

$$= \frac{2x^2 + x + 1}{x(2x+1)}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 + x + 1 = 0$$

$$a=2, b=1, c=1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 1 - 4(2)(1) = -7 < 0$$

فـ f $\nearrow$ في $]0, +\infty[$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$ $	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

$$\Delta: y = x - \ln 2 \quad [2]$$

$$f(x) - y_{\Delta} = x - \ln\left(\frac{2x+1}{x}\right) - x + \ln 2$$

نشكل الفرق:

$$= -\ln\left(\frac{2x+1}{x}\right) + \ln 2 = -\left[\ln\left(\frac{2x+1}{x}\right) - \ln 2\right]$$

$$= -\ln\left(\frac{2x+1}{2x}\right) = -\ln\left(1 + \frac{1}{2x}\right)$$

نتبع الفرق في مجال $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y_{\Delta}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\ln\left(1 + \frac{1}{2x}\right)\right) = \ln(1) = 0$$

لذا: Δ مقامات مائل للخط C في $x \rightarrow +\infty$ [3] الوضع النسبي بين Δ و C :

ندرس إشارة الفرق:

$$f(x) - y_{\Delta} = -\ln\left(\frac{2x+1}{2x}\right)$$

$$f(x) - y_{\Delta} = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{2x+1}{2x}\right) = 0$$

نعد الفرق:

$$\frac{2x+1}{2x} = 1 \Rightarrow 1 = 0$$

إذًا: لا يوجد تقاطع بين Δ و C

$$f(x) - y_{\Delta} = -\ln\left(\frac{2x+1}{2x}\right) < 0$$

الوضع النسبي:

 C فوق Δ [4] المعادلة $f(x) = 0$ قابلة حلًا $x \in]1, 2[$ لا $\sim$:

$$f(1) = 1 - \ln 3 < 0$$

$$f(2) = 2 - \ln\left(\frac{5}{2}\right) > 0$$

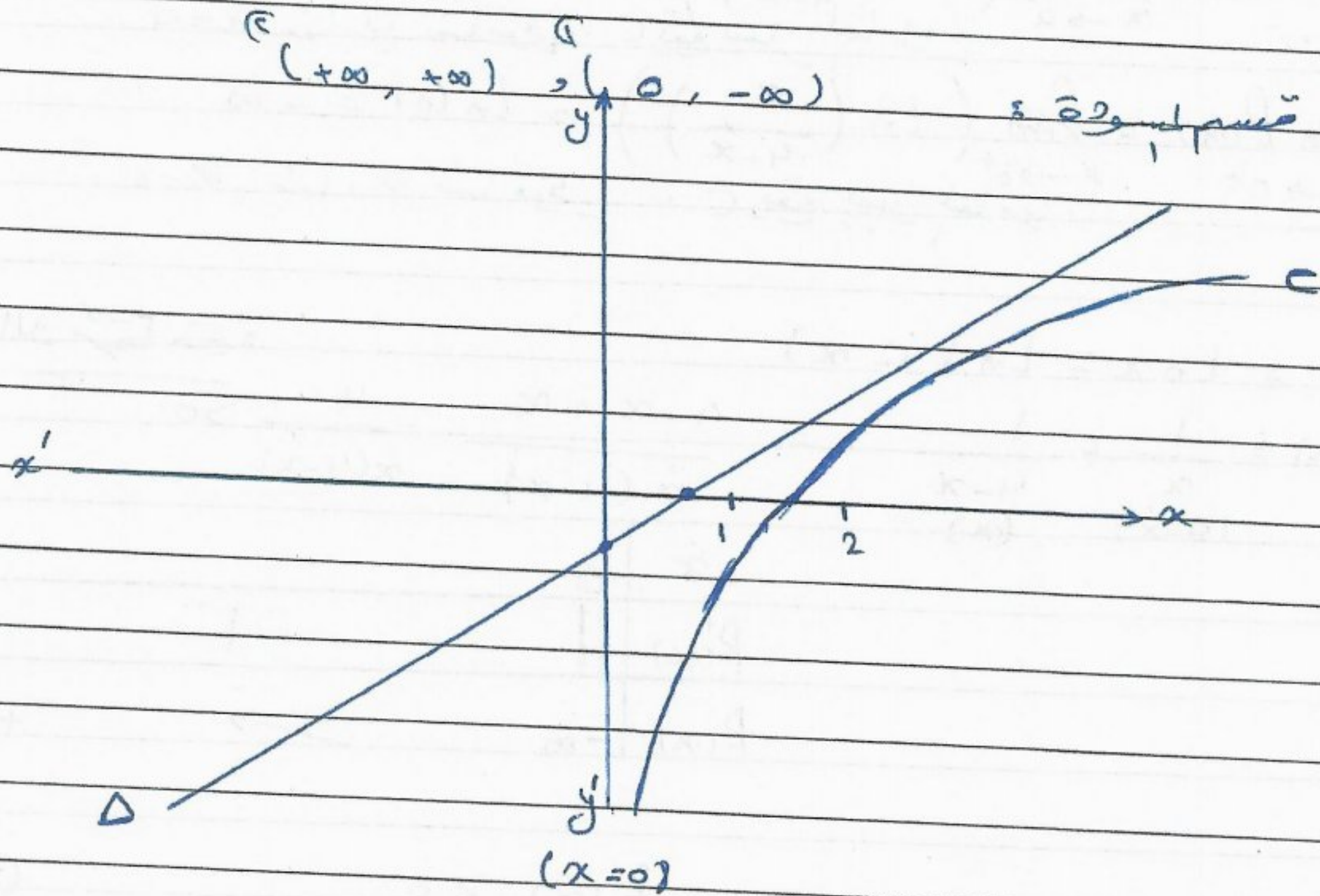
$$f(1) \cdot f(2) < 0$$

إذًا: كل $x \in]1, 2[$ ينتمي إلى C

5) الرسم: $x=0$ شاطئ
 $y = x - \ln 2$ " شاطئ "

$$x=0 \Rightarrow y = -\ln 2 \Rightarrow (0, -0.7)$$

$$y=0 \Rightarrow x = \ln 2 \Rightarrow (0.7, 0)$$



أنت إنسان ناجح مهما أخبرك البعض
 سيعطيك نور إنجازك يوماً،
 فاعمل آمن بذلك.

NOT IMPOSSIBLE



المسألة (158) -

$$P(x) = \ln\left(\frac{x}{4-x}\right) \quad \text{و} \quad D =]0, 4[$$

① P معرف وصغر ما استقامت في $]0, 4[$.

$$* \lim_{x \rightarrow 4^-} P(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\ln\left(\frac{x}{4-x}\right) \right) = \ln\left(\frac{4}{0^+}\right) = +\infty$$

لها ت : $x=4$ مقام شامولي . يقع يسار المقارب

$$* \lim_{x \rightarrow 0^+} P(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln\left(\frac{x}{4-x}\right) \right) = \ln(0) = -\infty$$

$x=0$ مقام ب شامولي . يقع يمين المقارب

$$P(x) = \ln x - \ln(4-x)$$

$$P'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{4-x} = \frac{4-x+x}{x(4-x)} = \frac{4}{x(4-x)} > 0$$

x	0		4
$P'(x)$		+	
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$$P(x) \geq 0$$

②

$$x \in]0, 4[\quad \text{شروط كل :}$$

$$\ln\left(\frac{x}{4-x}\right) \geq 0$$

$$\frac{x}{4-x} \geq 1$$

$$x > 4-x$$

$$2x \geq 4$$

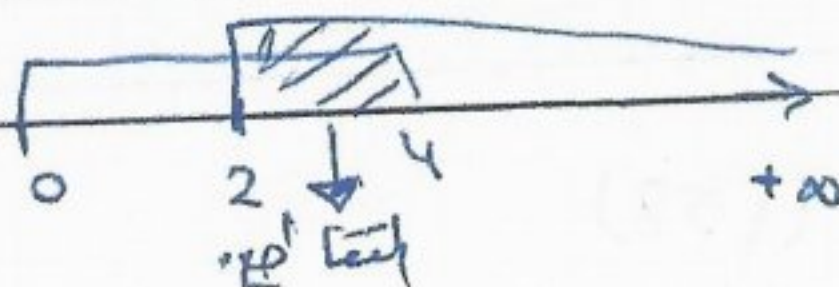
$$\Leftrightarrow x \geq 2$$

نقاط طبع المقارب

$$x \in [2, +\infty[$$

$$x \in]0, 4[\cap [2, +\infty[\Rightarrow x \in [2, 4[$$

فالحل المقارب هي $[2, 4[$.



$x \in]0, 4[$

~~$-x \in]-4, 0[$~~

~~$4 - \alpha \in]0, 4[$~~

$$P(4-x) + P(x) = ?$$

$$\bullet f(4-x) = \ln\left(\frac{4-x}{4-4+x}\right) = \ln\left(\frac{4-x}{x}\right)$$

$$\bullet f(x) = \ln\left(\frac{x}{4-x}\right)$$

$$f(x) + f(4-x) = \ln\left(\frac{x}{4-x}\right) + \ln\left(\frac{4-x}{x}\right)$$

$$= \ln \left(\frac{x}{4-x} * \frac{4-x}{x} \right)$$

$$= \ln(1) = 0$$

$$\Rightarrow P(4-x) + P(x) = 0$$

٢٠ إذا: النقطة $A(2,0)$ مركز تماثل N, C لها محور التماثل l ، فإن:

$$x \in D \Rightarrow 2x_0 - x \in D$$

$$P(2x_2 - x) + P(x) = 2y$$

(۱) معادلات الحاسی Δ خالصہ

$$m = f'(2) = 1$$

$$\Rightarrow \Delta \approx y - f(2) = f'(2)(x - 2)$$

~~$$\Delta = y - 0 = 1 \cdot (x - 2)$$~~

~~$\Delta y = x - 2$~~

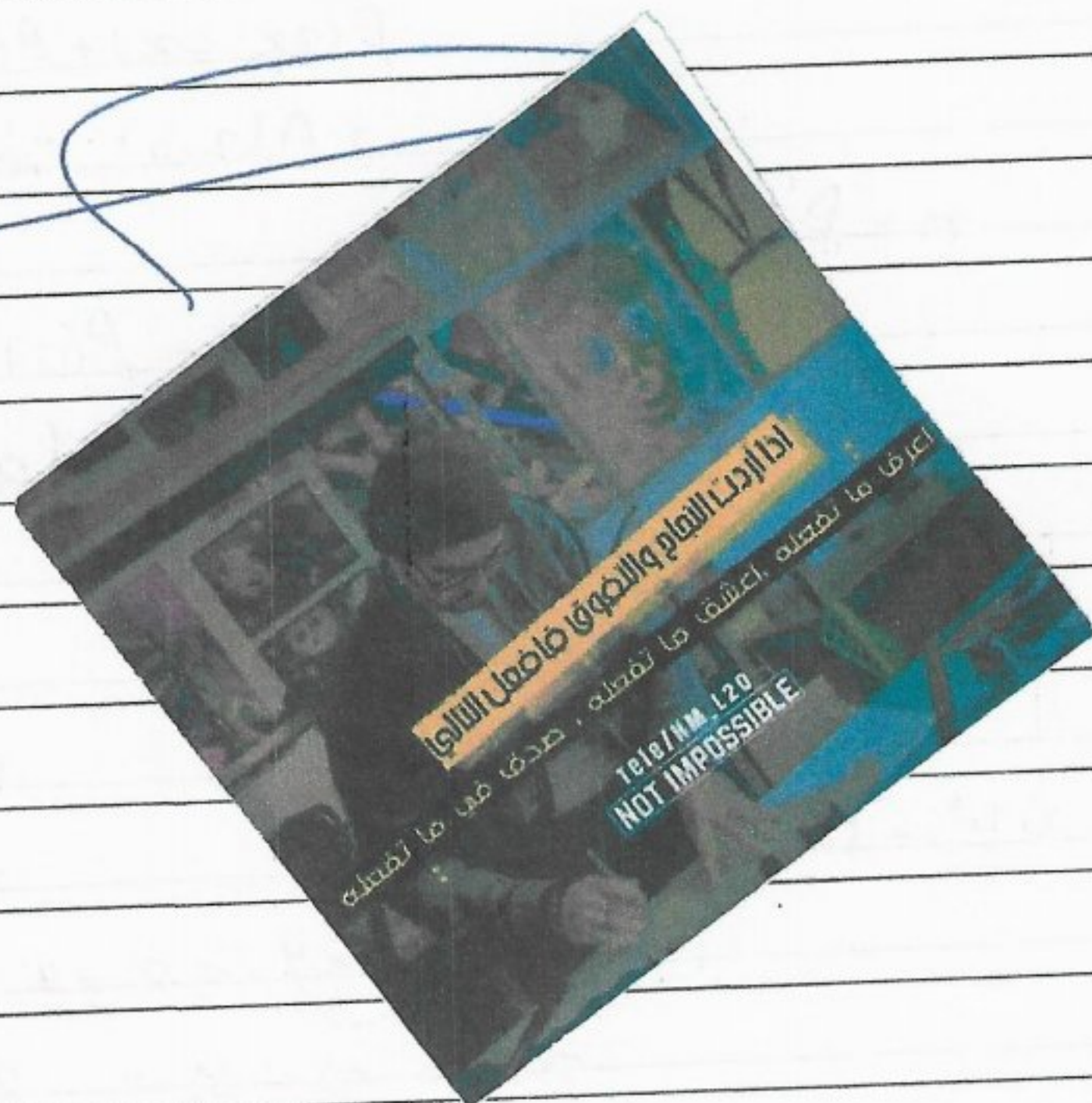
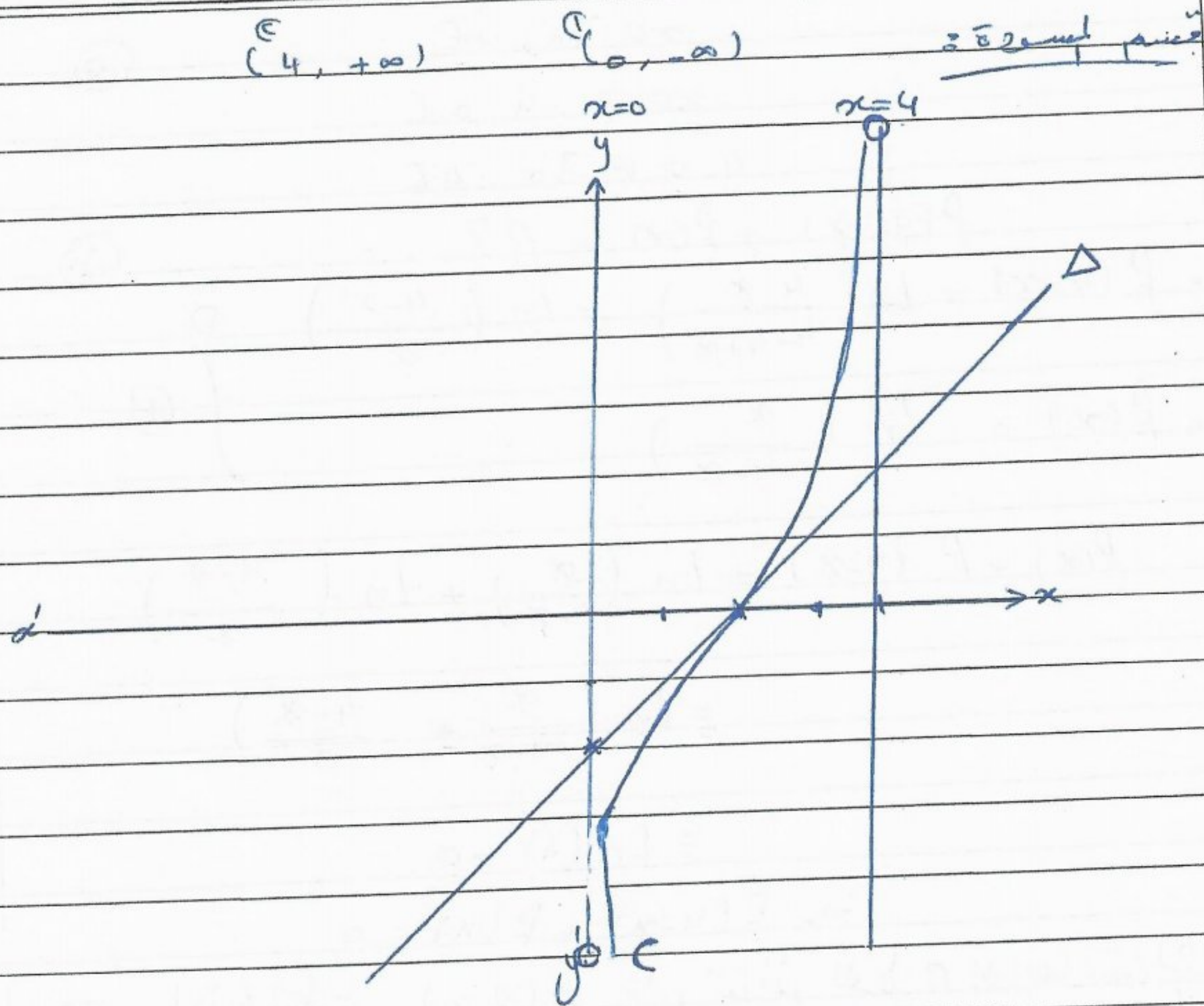
$\left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array} \right.$

5] لیسیم : اعلیٰ جا تے :

~~See lat/ $\Delta y = x - 2$~~

~~$x=0 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow B(0,-2)$~~

$$y=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow A(2,0)$$



مسألة (59) -

$$f(x) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \quad D_f = \mathbb{R}$$

① متى يكون f تابعاً زوجياً؟ متى يكون f تابعاً فردياً؟

② "مؤتمتة" $x \in D \Rightarrow -x \in D$

$$f(-x) \stackrel{?}{=} -f(x)$$

$$f(-x) = \frac{1}{2} (e^{-x} - e^{+x}) = -\frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = -f(x)$$

إذاً: f تابع فردي.

لـ f نقطة تقاطع مع المحاور الأصلية للـ x و y عند 0 .

③ f معرف ومتر وامتداداً على $]-\infty, +\infty[$.

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \right) = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \right) = -\infty$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) > 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

④ معادلة التماس في $x=0$: $m = f'(0) = \frac{1}{2} (e^0 + e^0) = 1$

$$d: y - 0 = 1 \cdot (x - 0)$$

$$d: y = x$$

وهذه هي المعادلة التماسية.

$$f(x) - y = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) - x$$

* الوضع لشيء بين c و d :

ندرس أولاً الفرق :

لنستعين بتابع :

$$g(x) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) - x$$

وندرس الجواب 0 على المجال $]-\infty, +\infty[$:

$$g'(x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) - 1$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) - 1 = 0$$

$$(2x) \quad e^x + e^{-x} - 2 = 0$$

$$(e^x x) \quad e^{2x} + e^0 - 2e^x = 0$$

$$e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$$

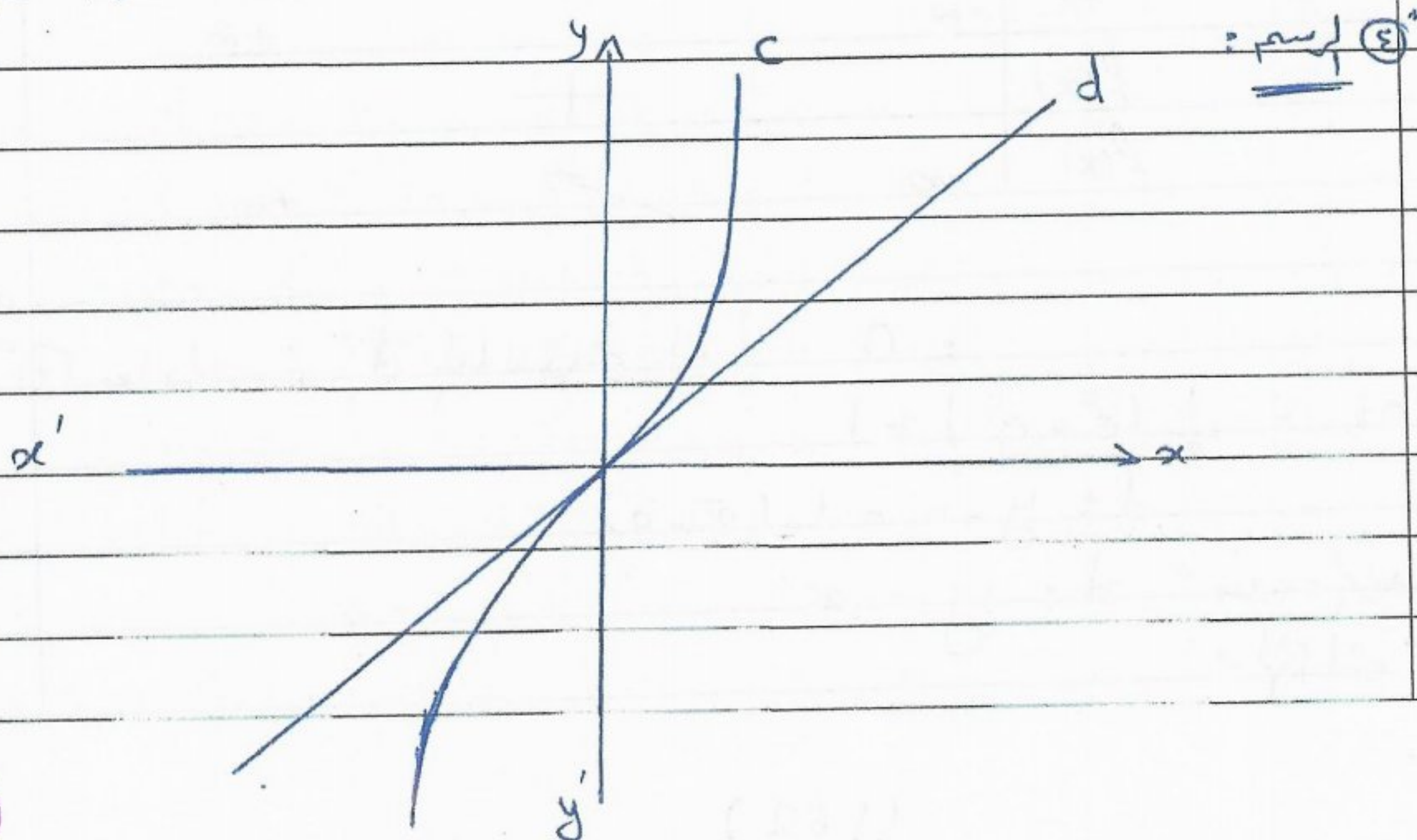
$$(e^x - 1)^2 = 0$$

$$e^x - 1 = 0$$

$$e^x = 1$$

$$\underline{\underline{x = 0}}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
الوضع لشيء	$d < c$		$c < d$



٥) للمعادلة $P(x) = m$ حل واحد m من R لا يتغير.

لتابع متناقص ومتزايد كما هو على IR .
وبالنظر إلى الرسم نجد أن الخط البياني C يقطع أي مستقيم أفقي
نقطة واحدة.

$$P(x) = m$$

٦)

$$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = m$$

$$e^x - e^{-x} = 2m$$

$$e^x - e^{-x} - 2m = 0$$

$$e^{2x} - e^0 - 2m e^x = 0$$

$$e^{2x} - 2m e^x - 1 = 0$$

$$: e^x = X \quad \text{نضع}$$

$$X^2 - 2mX - 1 = 0$$

$$a=1, b=-2m, c=-1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 4m^2 - 4(1)(-1)$$

$$= 4m^2 + 4$$

$$= 4(m^2 + 1) > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4(m^2 + 1)} = 2\sqrt{m^2 + 1}$$

$$X_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2m + 2\sqrt{m^2 + 1}}{2} = m + \sqrt{m^2 + 1}$$

$$X_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2m - 2\sqrt{m^2 + 1}}{2} = m - \sqrt{m^2 + 1} < 0$$

مرفوض

$$\Rightarrow X = m + \sqrt{m^2 + 1}$$

$$e^x = m + \sqrt{m^2 + 1}$$

$$x = \ln(m + \sqrt{m^2 + 1})$$

1. The first part of the paper is devoted to a general discussion of the problem. It is shown that the problem is well-posed and that the solution exists and is unique.

2. In the second part, we consider the case of a homogeneous medium. It is shown that the solution can be expressed in terms of a series of Bessel functions.

3. In the third part, we consider the case of an inhomogeneous medium. It is shown that the solution can be expressed in terms of a series of Bessel functions and a series of Legendre functions.

4. In the fourth part, we consider the case of a medium with a constant density. It is shown that the solution can be expressed in terms of a series of Bessel functions and a series of Legendre functions.

5. In the fifth part, we consider the case of a medium with a variable density. It is shown that the solution can be expressed in terms of a series of Bessel functions and a series of Legendre functions.

6. In the sixth part, we consider the case of a medium with a constant density and a constant velocity. It is shown that the solution can be expressed in terms of a series of Bessel functions and a series of Legendre functions.

مسألة (60) -

$$f(x) = \ln(1-x^2)$$

$$D =]-1, 1[$$

1. متى يكون f تابع زوج؟ متى يكون f متماثل؟ متى يكون f متماثل؟

$$x \in D \Rightarrow -x \in D$$

$$f(-x) = f(x)$$

$$f(-x) = \ln(1-(-x)^2) = \ln(1-x^2) = f(x)$$

إذاً: f تابع زوج
نقط C متماثل بالنسبة إلى المحور yy' .

2. f معرف وصفر واستمرارية على $]-1, 1[$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(1-x^2) = \ln(0) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(1-x^2) = \ln(0) = -\infty$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$$

الاستمرارية:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

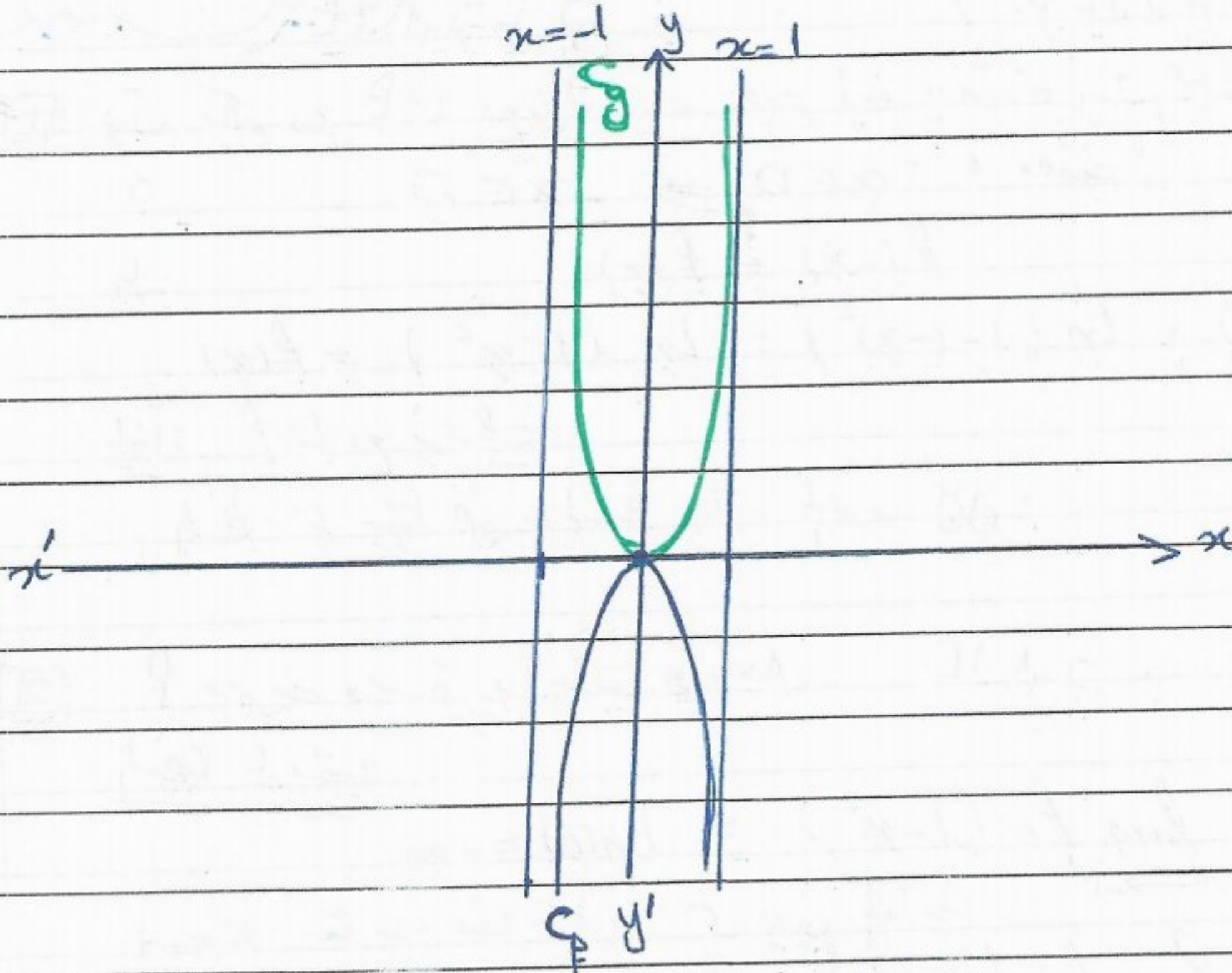
$$f(0) = \ln(1) = 0$$

قيمة كبرى.

x	-1	0	1
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

3. الرسم: $x = -1$ و $x = 1$ هما نقطتان.

قسم المسودة : $(-1, -\infty)$ $(0, 0)$ $(1, \infty)$



$$g(x) = \ln \left(\frac{1}{1-x^2} \right)$$

(4)

$$= -\ln(1-x^2)$$

$$= -f(x)$$

g نظير f بالنسبة الى المحاور xx' .



- دورة 2021 أول -

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x} \quad ; \quad D = \mathbb{R}$$

$$(*) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{(x+1)^2}{e^x} \right) = \frac{(-\infty)^2}{e^{-\infty}} = \frac{+\infty}{0} = +\infty \quad (1)$$

$$(*) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(x+1)^2}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{e^x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{e^x} + \frac{2x}{e^x} + \frac{1}{e^x} \right) = 0 + 0 + 0 = 0$$

$y=0$ ممارة أفقي للحد C

$$f'(x) = \frac{2(x+1) \cdot 1 \cdot e^x - e^x (x+1)^2}{(e^x)^2} \quad (2)$$

$$= \frac{e^x (x+1) (2 - x - 1)}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{(x+1)(1-x)}{e^x} = \frac{(1-x^2)}{e^x} = (1-x^2) \cdot e^{-x}$$

(3) f معرف وصار $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

نقاط:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = (1-x^2) \cdot e^{-x}$$

استنتاج:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (1-x^2) \cdot e^{-x} = 0$$

$$1-x^2 = 0$$

$$(1-x)(1+x) = 0$$

$$\text{لذا } 1-x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow f(1) = \frac{(1+1)^2}{e^1} = \frac{4}{e}$$

$$\text{أو } 1+x = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$f(-1) = \frac{(-1+1)^2}{e^{-1}} = 0$$

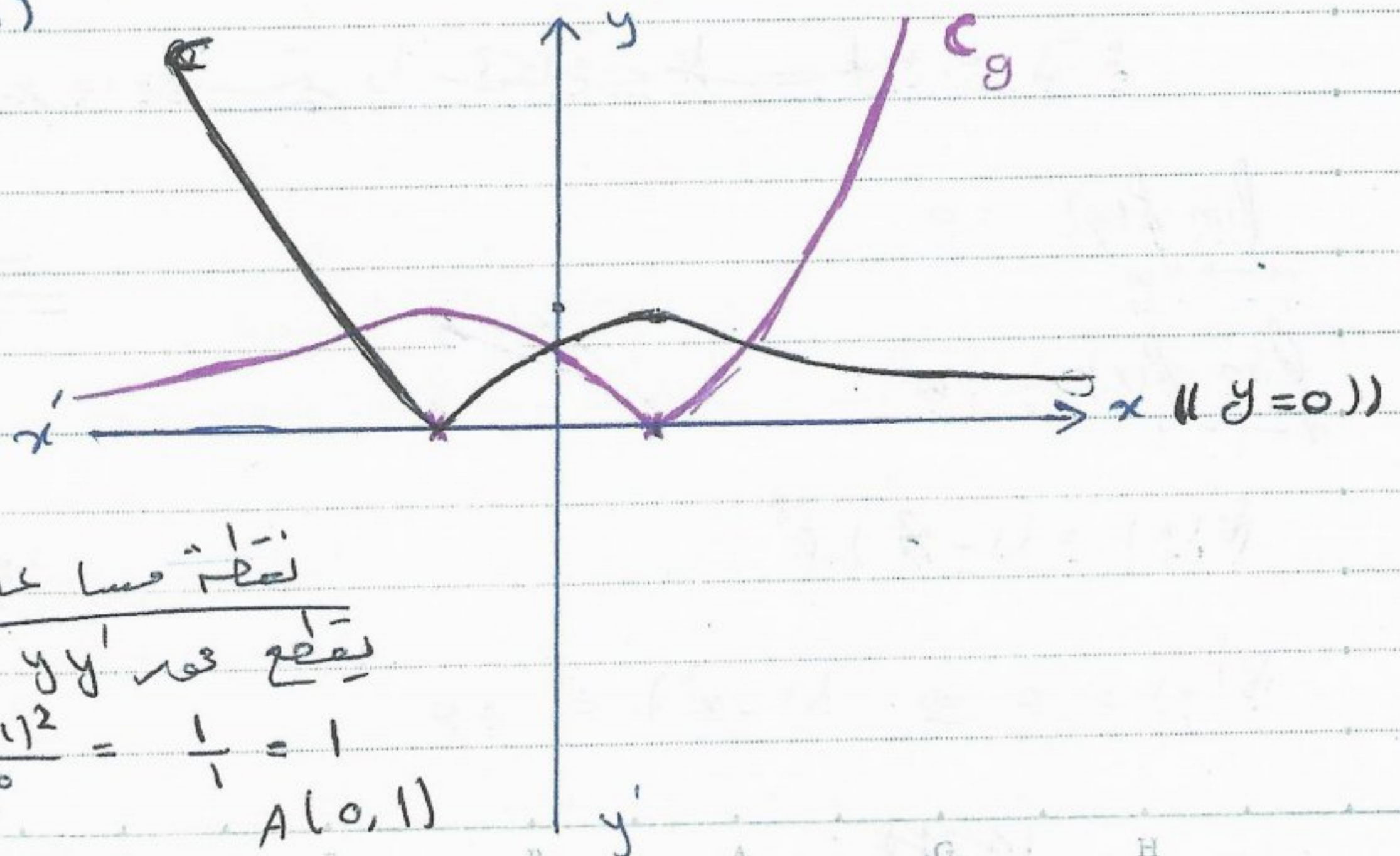
x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow$	$\frac{4}{e}$	$\rightarrow 0$

$$f(-1) = 0 \text{ قيمة صغرى}$$

$$f(1) = \frac{4}{e} \text{ قيمة كبرى}$$

(١١) - الرسم: لعلنا نرى $y = 0$ « أضعي »

قسم الوحدة
 ① $(-\infty, +\infty)$
 ② $(1, +\infty)$
 ③ $(-\infty, -1)$
 ④ $(-1, 1)$



نلاحظ هنا عدة: كل ما يلي

نلاحظ في $y y'$ عند $x = 0$:

$$f(0) = \frac{(0+1)^2}{e^0} = \frac{1}{1} = 1$$

A(0, 1)

$$g(x) = (x-1)^2 \cdot e^x \quad (*) \quad (5)$$

$$P(-x) = \frac{(-x+1)^2}{e^{-x}} = \frac{(x-1)^2}{e^{-x}} = (x-1)^2 \cdot e^x$$

$$= g(x)$$

$$\Rightarrow g(x) = P(-x)$$

C_1 تقدير C_P بالنسبة للمعادلة yy'

$$h(x) = \ln(P(x)) \quad (6)$$

مجموعة تعريف $h(x)$ تحقق الشرط "ما بعد" للعقار يتم أكبر عا مآ

من العنصر."

$$P(x) > 0$$

$$\frac{(x+1)^2}{e^x} > 0$$

$$(x+1)^2 > 0$$

صحة $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ يمكن

$$D_h =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$$

C_P فوكة عدد لفا مآ

ولا يتألم معه!

$$f(x) = e^{-x} (1 + \ln x)$$

$$g(x) = \frac{1}{x} - 1 - \ln x$$

$$I =]0, +\infty[$$

① g معرف ومتزايدة على $]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} * \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - 1 - \ln x \right) \\ &= +\infty - 1 - (-\infty) = +\infty \end{aligned}$$

$x=0$ مقام ناقص

الوضع ليس بين المقام

$$\begin{aligned} * \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - 1 - \ln x \right) \\ &= 0 - 1 - (+\infty) = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{-1-x}{x^2} \end{aligned}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow -1-x = 0 \Rightarrow x = -1 \notin I$$

النتيجة لا نستخدم

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$\parallel$	$\parallel$
$g(x)$	$+\infty$	$-\infty$

② للمعادلة $g(x) = 0$ حل واحد في I : x

و نتمنى قد نأخذ على المجال I وكذلك :

$$0 \in P(I) \Rightarrow 0 \in]-\infty, +\infty[$$

(*) للتحقق من أن $\alpha = 1$ جذراً للمعادلة $g(x) = 0$ يجب أن يتحقق

$$g(1) = \frac{1}{1} - 1 - \ln(1) = 1 - 1 - 0 = 0$$

$$g(x) = 0 \quad \alpha = 1 \quad \leftarrow$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{-x} (1 + \ln x)) \quad (3)$$

$$= e^0 (1 + (-\infty)) = 1(-\infty) = -\infty$$

$x = 0$ مقاماً رتباً فوقياً
لوضع بيني وبين المقابلة

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} (1 + \ln x)) = 0 \cdot (+\infty)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + \ln x}{e^{+x}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^x} + \frac{\ln x}{e^x} \right) = 0 + 0 = 0$$

$y = 0$ مقاماً رتباً فوقياً

$$f'(x) = -e^{-x} (1 + \ln x) + \frac{1}{x} \cdot e^{-x} \quad (4)$$

$$= e^{-x} \left[-1 - \ln x + \frac{1}{x} \right]$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-1 - \ln x}{e^x} = \frac{g(x)}{e^x}$$

$$p'(x) = 0 \Rightarrow \frac{g(x)}{e^x} = 0 \Rightarrow g(x) = 0 \quad \text{--- (5)}$$

$x = 1$

$$f(1) = e^{-1} \cdot (1 + \ln(1)) = e^{-1} (1 + 0) = e^{-1}$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

$P(1) = \frac{1}{e}$ قیے جبری

⑤ برص : البرص

$y = 0$ أفقي
 $x = 0$ عمودي

قسم اول $(x=0)$ $(0, -\infty)$ ①

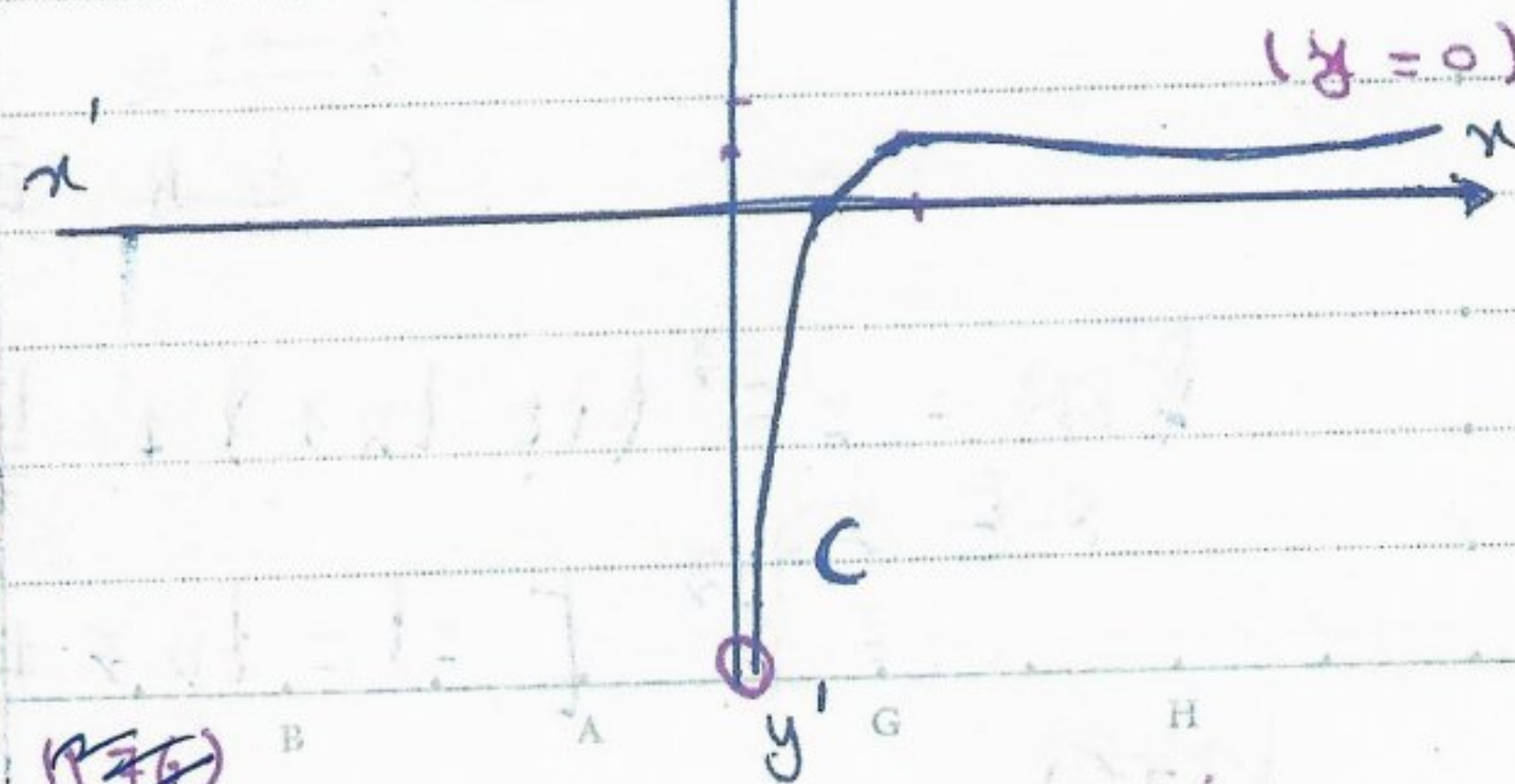
نصف ساعة

الحظ الثاني يقطع محور xx' عند $P(x)=0$

$$1 + \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = -1$$

$$x = e^{-1}$$

$$A\left(\frac{1}{e}, 0\right)$$

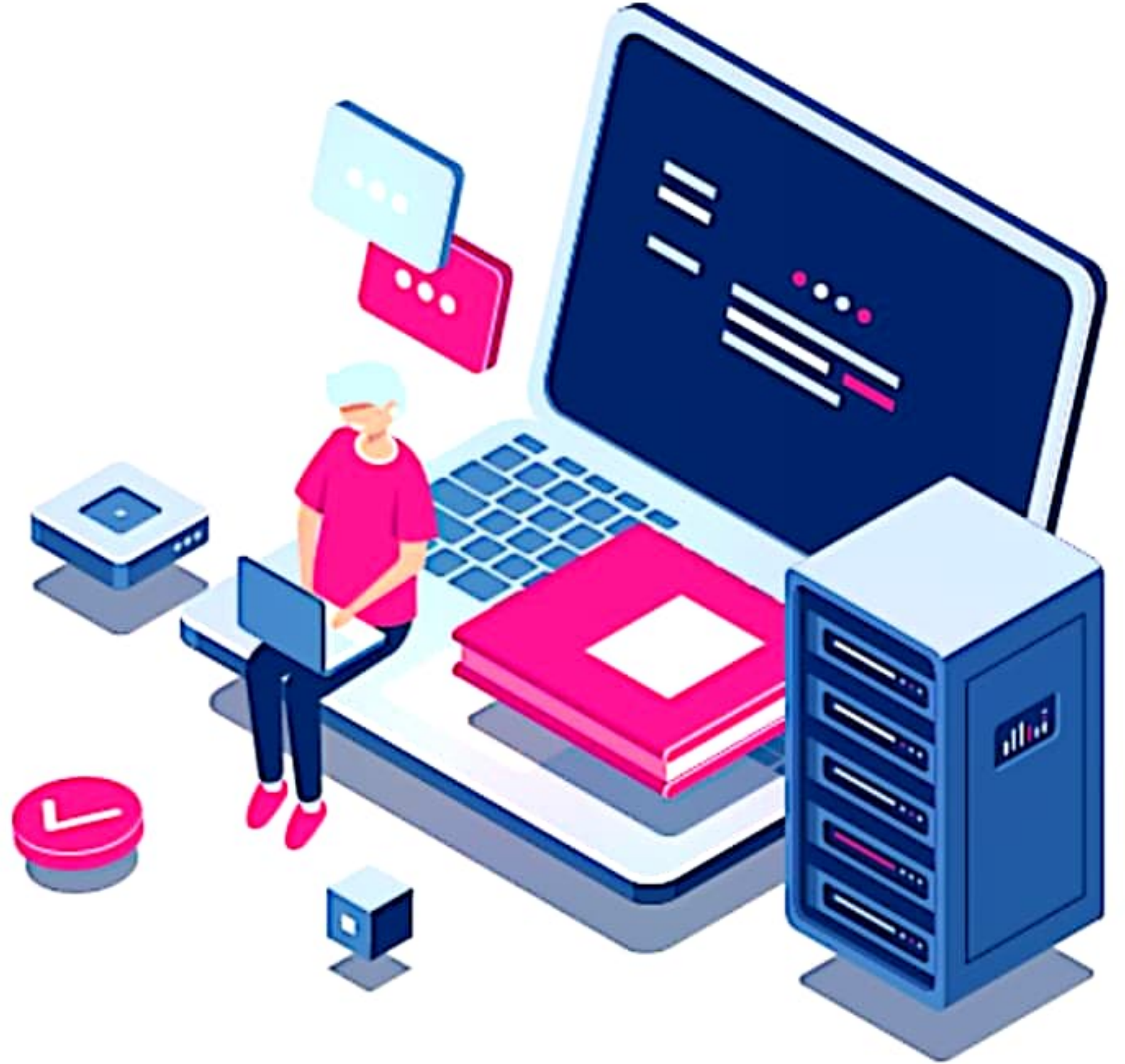


سلسلة

التجمع التعليمي



التجمع التعليمي



القناة الرئيسية: t.me/BAK111

بوت التواصل: [@BAK1117_bot](https://t.me/BAK1117_bot)