دورة 2017 الأولى — 60 درجة

نلقي قطعة نقود غير متوازنة ثلاث مرّات متتالية ، بحيث يكون احتمال ظهور الشعار في كلّ رمية يساوي $\frac{1}{3}$.

نعرّف X المتحوّل العشوائي الذي يدلّ على عدد مرّات ظهور الشعار .

اكتب مجموعة قيم المتحوّل العشوائي X ، و اكتب جدول قانونه الاحتمالي ، و احسب توقّعه الرياضي و تباينه .

الحل : طريقة أولى :

(تجربة برنوليّة محدّدة بالوسيطين $n = 3 , p = \frac{1}{3}$)

$$X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$$

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad ; \ 0 \le k \le 3$$

$$\mathbb{P}(X = 0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12}{27}$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{6}{27}$$

$$\mathbb{P}(X = 3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{27}$$

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

$$\mathbb{E}(X) = np = (3)\left(\frac{1}{3}\right) = 1$$

$$\mathbb{V}(X) = npq = (3)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

طريقة ثانية :

(المبدأ الأساسي للعد)

$$X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$$

$$\mathbb{P}(X = 0) = \overset{T}{\frac{2}{3}}.\overset{T}{\frac{2}{3}}.\overset{T}{\frac{2}{3}} = \frac{8}{27}$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = \overset{H}{\frac{1}{3}}.\overset{T}{\frac{2}{3}}.\overset{T}{\frac{2}{3}}.3 = \frac{12}{27}$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = \overset{H}{\frac{1}{3}}.\overset{H}{\frac{1}{3}}.\overset{T}{\frac{2}{3}}.3 = \frac{6}{27}$$

$$\mathbb{P}(X = 3) = \overset{H}{\frac{1}{3}}.\overset{H}{\frac{1}{3}}.\overset{H}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{27}$$

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

حساب التوقع الرياضي :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{3} k\mathbb{P}(X = k)$$

$$= (0)\left(\frac{8}{27}\right) + (1)\left(\frac{12}{27}\right) + (2)\left(\frac{6}{27}\right) + (3)\left(\frac{1}{27}\right) = 1$$

حساب التباين :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$$

حيث

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{3} k^2\mathbb{P}(X = k)$$

$$= (0)^2\left(\frac{8}{27}\right) + (1)^2\left(\frac{12}{27}\right) + (2)^2\left(\frac{6}{27}\right) + (3)^2\left(\frac{1}{27}\right) = \frac{5}{3}$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{5}{3} - (1)^2 = \frac{2}{3}$$

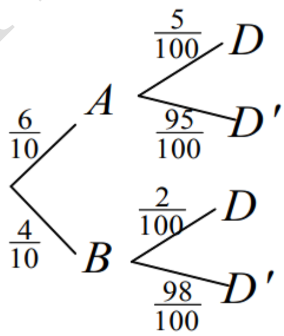
دورة 2017 الثانية — 100 درجة

يضم مصنع ورشتين A و B لتصنيع الأقلام . عندما ورد طلب لعدد من الأقلام قدره 1000 قلم ، صنّعت الورشة A منها 600 قلماً و صنّعت البقيّة الورشة B . هناك نسبة 5% من أقلام الورشة A غير صالحة للاستعمال ، في حين تكون نسبة 2% من أقلام الورشة B غير صالحة للاستعمال . نسحب عشوائيّاً قلماً من الطلب .

نرمز بالرمز A إلى الحدث << القلم مصنوع في الورشة A >> و بالرمز B إلى الحدث << القلم مصنوع في الورشة B >>
و بالرمز D إلى الحدث << القلم غير صالح للاستعمال >> .

1) أعط تمثيلاً شجريّاً للتجربة .
2) احسب احتمال أن يكون القلم صالحاً للاستعمال .
3) إذا كان القلم صالحاً للاستعمال فما احتمال أن يكون مصنوعاً في الورشة A ؟
4) نسحب عشوائيّاً من الورشة A قلمين معاً , و ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يمثّل عدد الأقلام المسحوبة الصالحة للاستعمال . احسب $\mathbb{P}(X=0)$.

الحل : الطلب الأول:



الطلب الثاني:

$$\mathbb{P}(D') = \mathbb{P}(D'\cap A) + \mathbb{P}(D'\cap B)$$
$$= \mathbb{P}(D'|A).\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D'|B).\mathbb{P}(B)$$
$$= \frac{95}{100}.\frac{6}{10} + \frac{98}{100}.\frac{4}{10} = \frac{962}{1000}$$

الطلب الثالث:

$$\mathbb{P}(A|D') = \frac{\mathbb{P}(A\cap D')}{\mathbb{P}(D')} = \frac{\frac{6}{10}\cdot\frac{95}{100}}{\frac{962}{1000}} = \frac{570}{962}$$

الطلب الرابع:

عدد الأقلام غير الصالحة للاستعمال في الورشة A :

$$5\% \times 600 = \frac{5}{100}.600 = 30$$

$$\mathbb{P}(X=0) = \frac{\binom{30}{2}}{\binom{600}{2}} = \frac{\frac{30.29}{2}}{\frac{600.599}{2}} = \frac{29}{20\times 599}$$

$$\mathbb{P}(X=0) = \frac{29}{11980}$$

دورة 2018 الأولى — 60 درجة

ليكن X متحوّل عشوائي يمثّل عدد النجاحات في تجربة برنوليّة . الجدول المجاور غير المكتمل هو القانون الاحتمالي للمتحوّل العشوائي X الممثّل لثلاث نجاحات ، فإذا علمت أنّ احتمال النجاح يساوي $\frac{2}{3}$ و

$$\mathbb{P}(X=1) = \frac{6}{27} \quad , \quad \mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{27}$$

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$		

1) جد $\mathbb{P}(X=2)$ و $\mathbb{P}(X=3)$.
2) ما التوقّع الرياضي للمتحوّل العشوائي X ؟
3) ما تباين المتحوّل العشوائي X ؟

الحل : الطلب الأول:

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}\quad ;\ 0\le k\le 3$$

$$\mathbb{P}(X=2)=\binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{12}{27}$$

$$\mathbb{P}(X=3)=\binom{3}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^0=\frac{8}{27}$$

الطلب الثاني:

$$\mathbb{E}(X)=np=(3)\left(\frac{2}{3}\right)=2$$

<u>أو :</u>

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=0}^{3}k\mathbb{P}(X=k)$$

$$=(0)\left(\frac{1}{27}\right)+(1)\left(\frac{6}{27}\right)+(2)\left(\frac{12}{27}\right)+(3)\left(\frac{8}{27}\right)=2$$

الطلب الثالث:

$$\mathbb{V}(X)=npq=(3)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$$

<u>أو :</u>

$$\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-\left(\mathbb{E}(X)\right)^2$$

حيث

$$\mathbb{E}(X^2)=\sum_{k=0}^{3}k^2\mathbb{P}(X=k)$$

$$=(0)^2\left(\frac{1}{27}\right)+(1)^2\left(\frac{6}{27}\right)+(2)^2\left(\frac{12}{27}\right)+(3)^2\left(\frac{8}{27}\right)=\frac{14}{3}$$

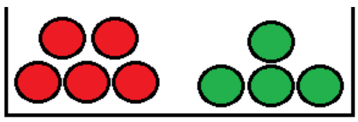
$$\mathbb{V}(X)=\frac{14}{3}-(2)^2=\frac{14-12}{3}=\frac{2}{3}$$

دورة 2018 الثانية — 60 درجة

صندوق يحوي (9) كرات متماثلة منها (4) كرات خضراء و (5) كرات حمراء ، نسحب عشوائيّاً من الصندوق ثلاث كرات معاً . نتأمّل المتحوّل العشوائي X الذي يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السحب ثلاث كرات حمراء و القيمة 3 إذا كانت نتيجة السحب كرتين حمراوين و كرة خضراء و القيمة صفر فيما عدا ذلك ، **و المطلوب :**

اكتب القانون الاحتمالي للمتحوّل العشوائي X و احسب توقّعه الرياضي .

الحل :



$$X(\Omega)=\{0,3,5\}$$

$$\mathbb{P}(X=5)=\frac{\binom{5}{3}\binom{4}{0}}{\binom{9}{3}}=\frac{10}{84}=\frac{5}{42}$$

$$\mathbb{P}(X=3)=\frac{\binom{5}{2}\binom{4}{1}}{\binom{9}{3}}=\frac{40}{84}=\frac{20}{42}$$

$X=0$ هو حدث الحصول على ثلاث كرات خضراء <u>أو</u> كرة حمراء و كرتين خضراوين :

$$\mathbb{P}(X=0)=\frac{\binom{5}{0}\binom{4}{3}+\binom{5}{1}\binom{4}{2}}{\binom{9}{3}}=\frac{34}{84}=\frac{17}{42}$$

طريقة ثانية لحساب $\mathbb{P}(X=0)$:

$$\mathbb{P}(X=0)=1-\left(\mathbb{P}(X=3)+\mathbb{P}(X=5)\right)$$

$$=1-\frac{50}{84}=\frac{34}{84}=\frac{17}{42}$$

x_i	0	3	5
$\mathbb{P}(X=x_i)$	$\frac{17}{42}$	$\frac{20}{42}$	$\frac{5}{42}$

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i\mathbb{P}(X=x_i)$$

$$=(0)\left(\frac{17}{42}\right)+(3)\left(\frac{20}{42}\right)+(5)\left(\frac{5}{42}\right)$$

$$=0+\frac{60}{42}+\frac{25}{42}=\frac{85}{42}$$

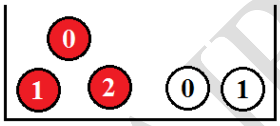
دورة 2019 الأولى — 60 درجة

يحتوي صندوق على خمس كرات ، ثلاث حمراء اللون و تحمل الأرقام 0 , 1 , 2 و كرتان بيضاء اللون و تحمل الأرقام 0 , 1 .
نسحب عشوائياً كرتين على التتالي دون إعادة من هذا الصندوق .

1) الحدث A :" الكرتان المسحوبتان لهما اللون ذاته " ، احسب $\mathbb{P}(A)$.
2) نعرّف متحوّلاً عشوائيّاً X يدلّ على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين .
عيّن مجموعة قيم المتحوّل العشوائي X ، و اكتب جدول قانونه الاحتمالي ، ثم احسب توقعه الرياضي .

الحل : الطلب الأوّل:

الحدث A هو حدث الحصول على كرتين حمراوين **أو** كرتين بيضاوين :



$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(WW)+\mathbb{P}(RR)=\frac{P_2^2+P_3^2}{P_5^2}=\frac{8}{20}$$

الطلب الثاني:

$$X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$$

$X=0$ يعني الحصول على كرتين تحملان الرقم صفر :

$$\mathbb{P}(X=0)=\frac{P_2^2}{P_5^2}=\frac{2}{20}$$

$X=1$ يعني الحصول على كرة تحمل الرقم 0 و كرة تحمل الرقم 1 (الأولى 0 و الثانية 1 **أو** الأولى 1 و الثانية 0)

$$\mathbb{P}(X=1)=\frac{P_2^1.P_2^1}{P_5^2}\times 2=\frac{8}{20}$$

$X=2$ يعني الحصول على كرة تحمل الرقم 0 و كرة تحمل الرقم 2 (مع مراعاة الترتيب) **أو** الحصول على كرتين تحملان الرقم 1 :

$$\mathbb{P}(X=2)=\frac{P_2^1.P_1^1}{P_5^2}\times 2+\frac{P_2^2}{P_5^2}=\frac{6}{20}$$

$X=3$ يعني الحصول على كرة تحمل الرقم 1 و كرة تحمل الرقم 2 (مع مراعاة الترتيب)

$$\mathbb{P}(X=3)=\frac{P_2^1.P_1^1}{P_5^2}\times 2=\frac{4}{20}$$

x_i	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=x_i)$	$\frac{2}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{4}{20}$

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{i=1}^{4}x_i\mathbb{P}(X=x_i)$$

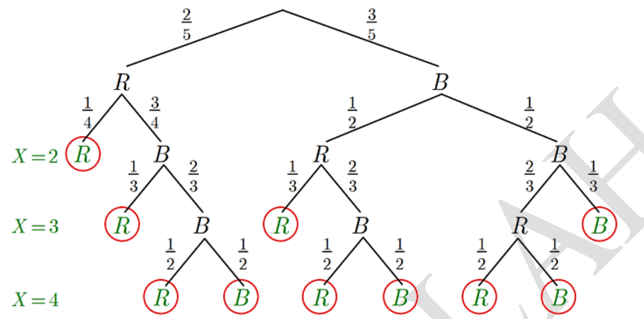
$$=(0)\left(\frac{2}{20}\right)+(1)\left(\frac{8}{20}\right)+(2)\left(\frac{6}{20}\right)+(3)\left(\frac{4}{20}\right)$$

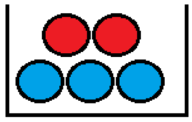
$$=\frac{0+8+12+12}{20}=\frac{32}{20}=\frac{8}{5}$$

دورة 2019 الثانية — 60 درجة

صندوق يحتوي على خمس كرات منها كرتان حمراوان و ثلاث كرات زرقاء ، نكرّر عمليّة سحب عشوائي لكرة من الصندوق دون إعادة حتى لا يتبقى في الصندوق إلا كرات من اللون ذاته .
ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يمثّل عدد مرّات السحب اللازمة .
عيّن مجموعة القيم التي يأخذها X ، و اكتب جدول القانون الاحتمالي للمتحوّل X ، و احسب توقّعه الرياضي .

الحل :





$X\,(\Omega) = \{2,3,4\}$

$X = 2$ يكافئ الحصول على كرة حمراء في السحبة الأولى و كرة حمراء في السحبة الثانية

$$\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(R_1R_2) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

$$\mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}(R_1B_2R_3) + \mathbb{P}(B_1B_2B_3) + \mathbb{P}(B_1R_2R_3)$$

$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{3}{10}$$

$$\mathbb{P}(X=4) = \mathbb{P}(R_1B_2B_3) + \mathbb{P}(B_1B_2R_3) + \mathbb{P}(B_1R_2B_3)$$

$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{6}{10}$$

x_i	2	3	4
$\mathbb{P}(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i\mathbb{P}(X=x_i) = (2)\left(\frac{1}{10}\right) + (3)\left(\frac{3}{10}\right) + (4)\left(\frac{6}{10}\right)$$

$$= \frac{2}{10} + \frac{9}{10} + \frac{24}{10} = \frac{35}{10} = \frac{7}{2}$$

دورة 2021 الأولى — 40 درجة

نتأمّل حجر نرد متوازن فيه أربعة وجوه ملوّنة بالأسود ، و وجهان ملوّنان بالأحمر ، نلقي هذا الحجر خمس مرّات على التّوالي .

نعرّف متحوّلاً عشوائيّاً X يدلّ على عدد الوجوه السوداء التي نحصل عليها . **المطلوب :**

1) اكتب قيم المتحوّل العشوائي X و احسب $\mathbb{P}(X=0)$.

2) احسب التوقّع الرياضي للمتحوّل العشوائي X و تباينه .

الحل :

$X\,(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5\}$

X متحوّل عشوائي حدّاني وسيطاه : $n = 5\ ,\ p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}\quad ;\ 0 \le k \le 5$$

$$\mathbb{P}(X=0) = \binom{5}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$$

التوقّع الرياضي : $\mathbb{E}(X) = np = \frac{10}{3}$

التباين : $\mathbb{V}(X) = npq = \frac{10}{9}$

دورة 2021 الثانية — 40 درجة

يحتوي صندوق على كرات حمراء و كرات بيضاء ، عدد الكرات الحمراء يساوي ثلاثة أضعاف عدد الكرات البيضاء . **المطلوب :**

1) نسحب عشوائيّاً من الصندوق كرة ، ما احتمال أن تكون بيضاء اللون ؟

2) نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي مع الإعادة ، نعرّف X المتحوّل العشوائي الذي يدلّ على عدد الكرات البيضاء المسحوبة أثناء عمليّات السحب الثلاثة . اكتب مجموعة قيم X و جدول القانون الاحتمالي .

الحل :

(1 $\mathbb{P}(W) = \frac{n}{4n} = \frac{1}{4}\quad ;n \ne 0$

(2 $X\,(\Omega) = \{0,1,2,3\}$

تجربة برنوليّة وسيطاها $n = 3\ ,\ p = \frac{1}{4}$

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}\quad ;\ 0 \le k \le 3$$

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$