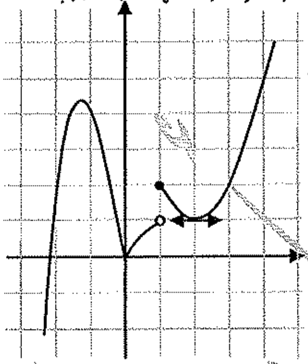
حل النموذج الوزاري الأول

أولاً: أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: 40° لكل سؤال

السؤال الأول: نجد جانباً الخط البياني لتابع f معرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب:



❶ ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 5$

❷ ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \geq 5$

❸ هل $f(1)$ قيمة محلية كبرى أو صغرى للتابع. علل ذلك؟

❹ ما عدد القيم الحدية للتابع f؟

❺ ما قيمة المشتق في النقطة التي فاصلتها $x = 2$؟

❻ أيكون التابع f اشتقاقياً عند $x = 1$؟

الحل:

❶ حل وحيد لأن المستقيم $y = 5$ يقطع الخط البياني للتابع f بنقطة واحدة فقط.

❷ مجموعة حلول المتراجحة هي مجموعة قيم x التي تحقق $f(x) \geq 5$ فنلاحظ حسب الرسم أنها $[4, +\infty[$.

❸ نعم، لأن: $1 \in I =]0,2[$ و $I \cap \mathbb{R} = I$ فالشرط

$$\forall x \in I, f(x) \leq f(2) \quad (\text{محقق})$$

❹ عدد القيم هو 4.

❺ بما أن المماس عند $x = 2$ أفقي عندئذ $f'(2) = 0$.

❻ لا، لأنه غير مستمر (منقطع) عند $x = 1$ فهو غير اشتقاقي.

السؤال الثاني: ليكن X متحول عشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية الجدول المجاور غير المكتمل هو القانون الاحتمالي لـ X.

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$					$\frac{16}{81}$

❶ ما عدد الاختبارات في التجربة؟

❷ أكمل الجدول المجاور.

❸ احسب التوقع الرياضي وتباين المتحول العشوائي X؟

تذكرة بالتجربة البرنولية
$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k . q^{n-k}$$
حيث $q = 1 - p$

الحل:

❶ عدد الاختبارات هو $n = 4$.

❷ كون التجربة برنولية فمن الجدول نجد أن:

$$P(X=4) = \frac{16}{81} = \binom{4}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4 \Rightarrow p = \frac{2}{3} \quad \& \quad q = \frac{1}{3}$$

ومنه

$$P(X=0) = q^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$$

$$P(X=1) = \binom{4}{1} p^1 . q^3 = 4\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{81}$$

$$P(X=2) = \binom{4}{2} p^2 q^2 = 6\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{24}{81}$$

$$P(X=3) = \binom{4}{3} p^3 q = 4\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{81}$$

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$	$\frac{1}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{16}{81}$

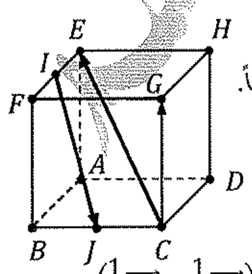
للتحقق: $P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 1$

❸ حساب التوقع الرياضي: بما أن التجربة برنولية عندئذ:

$$E(X) = n.p = 4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$V(X) = n.p(1-p) = 4$$

السؤال الثالث: في الشكل المجاور مكعب، I و J منتصفا $[EF]$ و $[BC]$



❶ أثبت أن $2(\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{IE}) = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CG}$.

❷ أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{CG}, \overrightarrow{CE}$ مرتبطة خطياً.

الحل:

❶ $$2(\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{IE}) = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CG}$$

$$l_1 = 2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FE}\right) = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{GE}$$

$$l_2 = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{GE}$$

$$\Rightarrow l_1 = l_2$$

❷
$$\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{IE}=\overrightarrow{CE}$$
$$\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{JI}=\overrightarrow{CE}$$
$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG})+\overrightarrow{JI}=\overrightarrow{CE}$$
$$\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CG}-\overrightarrow{JI}=\vec{0}$$

فالأشعة $\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{CG},\overrightarrow{CE}$ مرتبطة خطياً.

السؤال الرابع: حل المعادلة $4^x=5^{x+1}$.

الحل:

نأخذ لوغاريتم لطرفي المعادلة فنجد $\ln(4^x)=\ln(5^{x+1})$

$$x.\ln 4=(x+1)\ln 5 \qquad (\text{خواص } \ln)$$
$$x.\ln 4-x.\ln 5=\ln 5$$
$$x(\ln 4-\ln 5)=\ln 5$$
$$\boxed{x=\frac{\ln 5}{\ln 4-\ln 5}}$$

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية: (60° لكل تمرين)

التمرين الأول:

❶ ليكن g التابع المعرف على $I=]-1,+\infty[$ وفق العلاقة
$$g(x)=\ln(\sqrt{x+1})$$

احسب كلاً من $g(1)$ و $g'(x)$ و $g'(1)$ واستنتج
$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(\sqrt{x+1})-\ln\sqrt{2}}{x-1}$$

الحل: حساب $g(1)$ و $g'(x)$ و $g'(1)$
$$g(1)=\ln(\sqrt{1+1})=\ln\sqrt{2}$$

إن g معرف واشتقاقي على I.
$$g'(x)=\frac{(\sqrt{x+1})'}{\sqrt{x+1}}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2(x+1)}$$
$$g'(1)=\frac{1}{2(1+1)}=\frac{1}{4}$$

استنتاج النهاية:
$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(\sqrt{x+1})-\ln\sqrt{2}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=\frac{1}{4}$$

❷ احسب نهاية التابع f المعرفة على $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ وفق
$$f(x)=\frac{2x+\sin x}{x-2}$$
عند $+\infty$.

الحل: نعلم أن $-1\le \sin x\le 1$
$$2x-1\le 2x+\sin x\le 2x+1$$

نقسم على $x-2>0$ في جوار $+\infty$
$$\frac{2x-1}{x-2}\le\frac{2x+\sin x}{x-2}\le\frac{2x+1}{x-2}$$
$$\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x-2}=2\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x-2}=2\end{cases}$$
حسب مبرهنة الإحاطة نجد $\lim_{x\to+\infty}f(x)=2$

التمرين الثاني: لتكن $(x_n)_{n\ge0}$ المتتالية المعطاة وفق $x_0=4$ و $x_{n+1}=\frac{3}{4}x_n+2$ في حالة $n\ge0$.

نعرّف المتتالية $(y_n)_{n\ge0}$ بالعلاقة $y_n=x_n-8$.

أثبت أن $(y_n)_{n\ge0}$ متتالية هندسية. واكتب y_n بدلالة n. واحسب $\lim_{x\to+\infty}y_n$

الحل: إثبات أن المتتالية هندسية $y_{n+1}=\ x_{n+1}-8$
$$y_{n+1}=\left(\frac{3}{4}x_n+2\right)-8$$
$$y_{n+1}=\frac{3}{4}x_n-6=\frac{3}{4}x_n-\frac{24}{4}$$
$$y_{n+1}=\frac{3}{4}(x_n-8)$$
$$y_{n+1}=\frac{3}{4}y_n$$

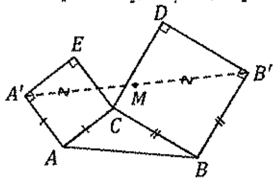
ومنه فالمتتالية y_n متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ وحدها الأول:
$$y_0=x_0-8=4-8=-4$$

حدها العام بدلالة n هو $y_n=(-4)\left(\frac{3}{4}\right)^n$
$$\lim_{n\to+\infty}y_n=\lim_{n\to+\infty}(-4)\left(\frac{3}{4}\right)^n=0 \quad \left(\left|\frac{3}{4}\right|<1 \text{ لأن}\right)$$

التمرين الثالث: ليكن المثلث ABC في المستوي ننشئ على ضلعيه $[AC]$ و $[BC]$ وخارجه المربعين $ACEA'$ و $CBB'D$ كما في الشكل المجاور.

تمثل الأعداد العقدية a,b,c,a',b' النقاط A,B,C,A',B'.

❶ B' هي صورة C وفق دوران مركزه B ، عيّنه واكتب الصيغة العقدية للعدد b' بدلالة b, c.



❷ أثبت أنّ $a' = i(c-a)+a$.

❸ عيّن العدد العقدي m الممثل للنقطة M منتصف $[A'B']$.

❹ كيف تتغير النقطة M عندما تتحول C في المستوي؟

الحل:

❶
$$b'-b = e^{-\frac{\pi}{2}i}(c-b)$$
$$b'-b = -i(c-b)$$
$$\boxed{b' = b - i(c-b)}$$

❷ إن A' هي صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ، ومنه
$$a'-a = e^{\frac{\pi}{2}i}(c-a)$$
$$\boxed{a' = i(c-a)+a}$$

❸ بما أن M منتصف $[A'B']$ عندئذ:
$$m = \frac{a'+b'}{2}$$
$$m = \frac{i(c-a)+a+b-i(c-b)}{2}$$
$$\boxed{m = \frac{a+i(b-a)}{2}}$$

❹ لا تتغير النقطة M عندما تتحول C في المستوي ، لأن m غير مرتبطة بـ c (حسب الطلب الثالث) وأيضاً a, b غير مرتبطتان بـ c.

التمرين الرابع: أثبت صحة المساواة
$$\cos^2 x.\sin^2 x = \frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos(4x)$$
ثم احسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x.\sin^2 x\, dx$.

الحل: إثبات صحة المساواة:
$$\cos^2 x.\sin^2 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right).\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}[1-\cos^2(2x)]$$
$$= \frac{1}{4}\left[1-\frac{1+\cos(4x)}{2}\right] = \frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos(4x)$$

حساب التكامل:
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x.\sin^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos(4x)\right) dx$$
$$= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(4x)\, dx$$
$$= \frac{1}{8}[x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin(4x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) - \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}.0-\frac{1}{4}.0\right]$$
$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x.\sin^2 x\, dx = \frac{\pi}{16}}$$

ثالثاً حل المسألتين الآتيتين — $100°$ لكل مسألة

المسألة الأولى:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ بالصيغة $f(x) = xe^{-x}$

❶ احسب نهاية التابع f عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ، احسب $f'(x)$ ، ادرس اطراد التابع f ونظم جدولاً بتغيراته وعيّن قيمته الحدية ، ثم ارسم C.

❷ احسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = 0$ و $x = 1$.

❸ بيّن أنه في حالة عدد حقيقي m من المجال $]0, e^{-1}[$ تقبل المعادلة $f(x) = m$ حلين مختلفين.

❹ لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً كما يأتي:
$$u_0 = 1 \quad \text{و} \quad u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$$

a) أثبت أن $0 < u_n \leq 1$ وذلك مهما كان الدليل n.

b) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة. ثم بيّن تقاربها واحسب نهايتها

الحل:

❶ حساب النهايات:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x.e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x.e^{-x} = -\infty$$

إن التابع f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$
$$f'(x) = 1.e^{-x} + (-e^{-x}.x) = (1-x)e^{-x}$$

نعدم المشتق ، أي: $f'(x)=0$

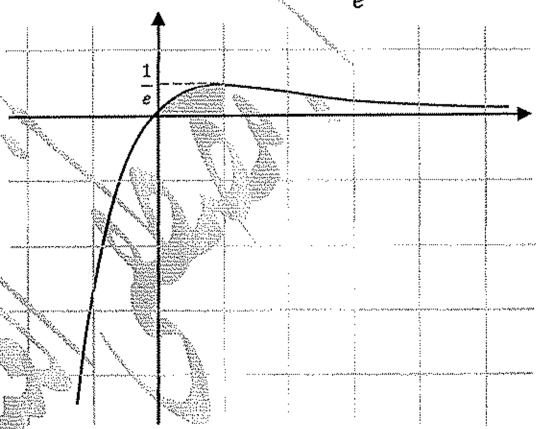
$$(1-x)e^{-x}=0$$

$$x=1 \Rightarrow f(1)=\frac{1}{e}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

التابع f متزايد على المجال $]-\infty,1[$ ومتناقص على المجال $]1,+\infty[$.

القيمة الحدية هي $f(1)=\frac{1}{e}$



❷ $S=\int_0^1 x.e^{-x}dx$

نحسب التكامل بطريقة التجزئة فنفرض $\begin{matrix} u=x & v'=e^{-x} \\ u'=1 & v=-e^{-x} \end{matrix}$

$$S=[-xe^{-x}]_0^1-\int_0^1 -e^{-x}dx=[-e^{-1}-0]-[e^{-x}]_0^1$$

$$S=-\frac{1}{e}-\left(\frac{1}{e}-1\right)=1-\frac{2}{e}$$

$$\boxed{S=1-\frac{2}{e}}$$

❸ بملاحظة أن $f(0)=0$

$f(]0,1[)=]0,e^{-1}[$ والتابع f مستمر ومتزايد تماماً على $]0,1[$

$f(]1,\infty[)=]0,e^{-1}[$ والتابع f مستمر ومتزايد تماماً على $]1,\infty[$

إذاً: لكل $m\in]0,e^{-1}[$ كان للمعادلة $f(x)=m$ حلين

$x_1\in]0,1[$ و $x_2\in]1,\infty[$

❹ (a) لنبرهن بالتدريج أن: $E(n): 0<u_n\le 1$ أياً كان n.

لنثبت صحة العلاقة من أجل $E(0)$

لدينا فرضاً $u_0=1$ فالعلاقة $E(0)$ صحيحة.

لنفرض صحة العلاقة $E(k)$ أي: $0<u_k\le 1$ صحيحة.

ولنثبت صحة العلاقة $E(k+1)$ كما يلي:

$$0<u_k\le 1$$

$$f(0)<f(u_k)\le f(1) \quad \left(f \text{ متزايد على المجال } [0,1]\right)$$

$$0<u_{k+1}\le\frac{1}{e}<1$$

$$\boxed{0<u_{k+1}\le 1}$$

(b) لنبرهن أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متناقصة وذلك بالتدريج

أي لنثبت صحة العلاقة $E(n): u_{n+1}\le u_n$.

لنثبت صحة العلاقة $E(0)$

$$\left.\begin{matrix} u_0=1 \\ u_1=\frac{1}{e}\end{matrix}\right\}\Rightarrow 1\ge\frac{1}{e}\Rightarrow u_1\le u_0 \quad (\text{صحيحة})$$

لنفرض صحة العلاقة $E(k)$ أي: $u_{k+1}\le u_k \dots(*)$ صحيحة.

لنثبت صحة العلاقة $E(k+1)$ أي: $u_{k+2}\le u_{k+1}$ كما يلي:

$$u_{k+1}\le u_k \quad (\text{حسب } *)$$

$$f(u_{k+1})\le f(u_k) \quad \left(f \text{ متزايد على المجال } [0,1]\right)$$

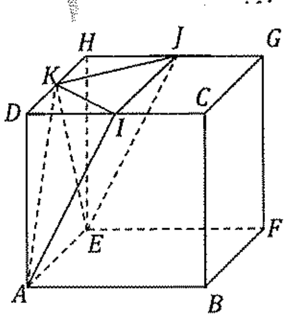
$$u_{k+2}\le u_{k+1}$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متناقصة.

المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متقاربة لأنها متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة من $l=0$ حل المعادلة $f(x)=x$ ومنه

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=0$$

المسألة الثانية: نتأمل مكعباً $ABCDEFGH$. لتكن I و J و K منتصفات أضلاعه $[DC]$ و $[HG]$ و $[DH]$ بالترتيب.



نتخذ $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$ معلماً متجانساً في الفراغ.

❶ أوجد إحداثيات النقاط A,I,E.

❷ اكتب معادلة المستوي $(AIJE)$.

❸ احسب بعد K عن المستوي $(AIJE)$ وحجم الهرم $KAIJE$.

❹ اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d العمودي على المستوي $(AIJE)$ والمار النقطة K.

❺ احسب إحداثيات N نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي $(AIJE)$.

❻ أثبت أنَّ N هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha),(I,\beta),(E,\gamma)$ حيث α و β و γ هي أثقال يطلب تعيينها.

الحل:

❶ نلاحظ حسب الرسم أن:

$$E(0,1,0), I\left(\frac{1}{2},0,1\right), A(0,0,0)$$

$$\overrightarrow{AE} = (x_E - x_A, y_E - y_A, z_E - z_A)$$
$$= (0-0, 1-0, 0-0) = (0,1,0)$$

$$\overrightarrow{AI} = (x_I - x_A, y_I - y_A, z_I - z_A)$$
$$= \left(\frac{1}{2}-0, 0-0, 1-0\right) = \left(\frac{1}{2},0,1\right)$$

❷ نفرض شعاع ناظم $\vec{n}(a,b,c)$ للمستوي $AIJE$

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AE} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AE} = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AI} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AI} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}a + c = 0$$

نفرض $c = 1$ لأن للمستوي أكثر من ناظم

$$\frac{1}{2}a + 1 = 0 \Rightarrow a = -2$$

وبالتالي يكون $\vec{n}(-2,01)$.

معادلة المستوي $(AIJE)$

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$
$$-2(x-0) + 0(y-0) + 1(z-0) = 0$$
$$-2x + z = 0$$

❸ بعد K عن المستوي $(AIJE)$: نلاحظ حسب الرسم أن $K\left(0,\frac{1}{2},1\right)$

$$h = \text{dist}(K, AIJE) = \frac{|(-2)(0) + 0 + 1|}{\sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

حجم الهرم $KAIJE$

لذا لنحسب مساحة قاعدة الهرم $KAIJE$ وهي $AIJE$

$$S_{(AIJE)} = IJ \times AI = 1 \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$V = \frac{1}{3}S_{(AIJE)}.h = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{6}$$

❹ بما أن المستقيم d العمودي على المستوي $(AIJE)$

$$\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{n_{(AIJE)}} = (-2,0,1)$$

$$d: \begin{cases} x = -2t + 0 \\ y = 0 + \frac{1}{2} \\ z = t + 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{d: \begin{cases} x = -2t \\ y = \frac{1}{2} \\ z = t + 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}}$$

❺ لحساب إحداثيات N نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي $(AIJE)$

نوجد الحل المشترك لمعادلة المستوي $(AIJE)$ والمستقيم d

$$-2(-2t) + 0\left(\frac{1}{2}\right) + t + 1 = 0$$

$$4t + t + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{t = -\frac{1}{5}}$$

ومنه إحداثيات N هي $N\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right)$

❻ $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AI} + y\overrightarrow{AE}$

$$\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right) = x\left(\frac{1}{2},0,1\right) + y(0,1,0)$$

$$\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{1}{2}x, y, x\right) \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{1}{2}x &= \frac{2}{5} \\ y &= \frac{1}{2} \\ x &= \frac{4}{5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{4}{5} \\ y &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$

$$\Rightarrow 10\overrightarrow{AN} = 8\overrightarrow{AI} + 5\overrightarrow{AE}$$

$$\Rightarrow 10\overrightarrow{AN} = 8\overrightarrow{AN} + 8\overrightarrow{NI} + 5\overrightarrow{AN} + 5\overrightarrow{NE}$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{AN} + 8\overrightarrow{NI} + 5\overrightarrow{NE} = \vec{0}$$

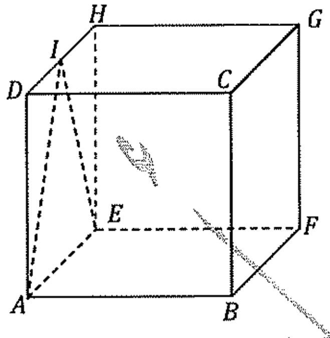
$$\Rightarrow -3\overrightarrow{NA} + 8\overrightarrow{NI} + 5\overrightarrow{NE} = \vec{0}$$

إذاً N مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-3),(I,8),(E,5)$.

حل النموذج الوزاري الثاني

أولاً أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: 40° لكل سؤال

السؤال الأول:



نجد جانباً مكعباً طول ضلعه 1 مزوداً بمعلم متجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$ حيث I منتصف $[DH]$.

❶ أعط إحداثيات النقاط I و E و A.

❷ جد إحداثيات O مركز ثقل المثلث AEI.

❸ أين تقع النقطة M التي تحقق $3\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{EO}$

❹ احسب $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IE}$.

الحل:

❶ $A(0,0,0), E(0,1,0), I\left(0,\frac{1}{2},1\right)$

❷ $O\left(\frac{x_A+x_E+x_I}{3},\frac{y_A+y_E+y_I}{3},\frac{z_A+z_E+z_I}{3}\right)$

$$=\left(\frac{0+0+0}{3},\frac{0+1+\frac{1}{2}}{3},\frac{0+0+1}{3}\right)=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$$

❸

$$3\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{FO}$$

$$3\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{FO}\Rightarrow\boxed{\overrightarrow{FM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FO}}$$

إذا النقطة M تقع على $[FO]$

❹

$$\overrightarrow{IA}=(x_A-x_I,y_A-y_I,z_A-z_I)=\left(0,\frac{1}{2},1\right)$$

$$\overrightarrow{IE}=(x_E-x_I,y_E-y_I,z_E-z_I)=\left(0,\frac{1}{2},1\right)$$

$$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IE}=0+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+(1)(1)=\frac{5}{4}$$

السؤال الثاني: ليكن f التابع المعرف على $D=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق

$$f(x)=\frac{x^2-5x+1}{x+1}$$

❶ جد الأعداد a و b و c التي تحقق $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$ أياً يكن x من D.

❷ احسب $I=\int_0^2 f(x)dx$

الحل:

❶ بالقسمة الإقليدية نجد

$$\begin{array}{r|l} & x-6 \\ \hline x+1 & x^2-5x+1 \\ & \mp x^2\mp x \\ \hline & -6x+1 \\ & \pm 6x\pm 6 \\ \hline & +7 \end{array}$$

$$f(x)=x-1+\frac{1}{x+3}$$

ومنه $a=1, b=-6, c=7$

❷ $$I=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\left(x-6+\frac{7}{x+1}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-6x+7\ln(x+1)\right]_0^2$$

$$=\left(\frac{2^2}{2}-6(2)+7\ln 3\right)-(0-0+7\ln 1)$$

$$\Rightarrow\boxed{I=7\ln(3)-10}$$

السؤال الثالث: ليكن z عدداً عقدياً ما ، وليكن w عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد. أثبت أن $\frac{w\bar{z}-z}{iw-i}$ تخيلي بحت.

الحل:

نعلم أن العدد العقدي z يكون تخيلي بحت إذا حقق $\bar{z}=-z$ ومنه

$$\overline{\left(\frac{w.\bar{z}-z}{i.w-i}\right)}=\frac{\overline{w\bar{z}-z}}{\overline{iw-i}}$$

$$=\frac{\bar{w}z-\bar{z}}{-i.\bar{w}+i}.\frac{w}{w}=\frac{\bar{w}.wz-\bar{z}.w}{-i.\bar{w}.w+iw}$$

$$=\frac{|w|z-\bar{z}.w}{-i.|w|+iw}=\frac{z-\bar{z}.w}{-i+iw}=-\frac{w.\bar{z}-z}{iw-i}$$

ومنه $\boxed{\overline{\left(\frac{w.\bar{z}-z}{i.w-i}\right)}=-\frac{w.\bar{z}-z}{iw-i}}$ وهو المطلوب.

السؤال الرابع: احسب مشتق التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x) = e^{1-\sin x}$$

الحل:

$$f'(x) = (1-\sin x)'.e^{1-\sin x} = -\cos x . e^{1-\sin x}$$

ثانياً حل التمارين الأربعة الآتية: 60° لكل تمرين

التمرين الأول:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2+1}$

❶ ما نهاية التابع f عند $-\infty$.

❷ ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر من اليمين، ثمّ اكتب معادلة لنصف المماس من اليمين لخطه البياني C_f في النقطة $A(0,0)$

الحل:

$$f(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2+1} = \begin{cases} \dfrac{x^2+x}{x^2+1} & ;x \ge 0 \\ \dfrac{x^2-x}{x^2+1} & ;x < 0 \end{cases}$$

❶
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x}{x^2+1} = 1$$

❷
$$g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2+|x|}{x(x^2+1)}$$

$$\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{x^2+|x|}{x(x^2+1)} = \lim_{x\to0^+} \frac{x^2+x}{x(x^2+1)}$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{x+1}{x^2+1} = 1$$

حيث أن $f(0) = 0$ و $m = f'(0^+) = 1$

وبالتالي $T: y = 1(x-0)+0$ أي $\boxed{T: y = x}$.

التمرين الثاني:

لتكن $(x_n)_{n\ge0}$ المتتالية المعرفة وفق العلاقة

$$x_0 = 5 \quad و \quad x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5}$$

❶ احسب x_1, x_2, x_3 ثم ادرس اطراد المتتالية.

❷ نعرّف $(y_n)_{n\ge0}$ بالعلاقة $y_n = x_n + 4$. أثبت أن $(y_n)_{n\ge0}$ متتالية هندسية.

❸ اكتب y_n بدلالة n. ثم احسب $y_2 + y_3 + \cdots + y_{10}$ بدلالة قوة للعدد $\frac{6}{5}$.

الحل:

❶
$$x_1 = \frac{6}{5}.5 + \frac{4}{5} = \frac{34}{5}$$

$$x_2 = \frac{6}{5}\left(6+\frac{4}{5}\right) + \frac{4}{5} = \frac{224}{25}$$

$$x_3 = \frac{6}{5}\left(\frac{224}{25}\right) + \frac{4}{5} = \frac{1444}{125}$$

نلاحظ أن المتتالية x_n متزايدة وسنثبت ذلك بالتدريج أي:

$$E(n): x_n \le x_{n+1}$$

لنثبت صحة القضية $E(0)$

$$\left.\begin{matrix} x_0 = 5 \\ x_1 = \dfrac{34}{5} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_0 \le x_1$$

لنفرض صحة القضية $E(n)$، أي: $x_n \le x_{n+1} \ldots (*)$

ولنثبت صحة القضية $E(n+1)$ أي: $x_{n+1} < x_{n+2}$ كما يلي:

$x_n \le x_{n+1}$ حسب $(*)$

$\frac{6}{5}x_n \le \frac{6}{5}x_{n+1}$ نضرب الطرفين بـ $\frac{6}{5}$

$\frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5} \le \frac{6}{5}x_{n+1} + \frac{4}{5}$ نجمع للطرفين $\frac{4}{5}$

$x_{n+1} \le x_{n+2}$

إذن حسب البرهان بالتدريج فإن $x_n < x_{n+1}$ أياً كان العدد الطبيعي n

فالمتتالية $(x_n)_{n\ge0}$ متزايدة.

❷

$$y_{n+1} = x_{n+1} + 4 = \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5} + 4$$

$$= \frac{6}{5}x_n + \frac{24}{5} = \frac{6}{5}(x_n+4)$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = \frac{6}{5}y_n$$

فالمتتالية y_n هندسية أساسها $\frac{6}{5}$ وحدها الأول

$$y_0 = x_0 + 4 = 5 + 4 = 9$$

● كتابة y_n بدلالة n: $y_n = 9\left(\frac{6}{5}\right)^n$

$$y_2 = 9\left(\frac{6}{5}\right)^2 = 9 \times \frac{36}{25}$$

$$y_2 + y_3 + \cdots + y_{10} = 9 \times \frac{36}{25} \frac{1-\left(\frac{6}{5}\right)^8}{1-\frac{6}{5}}$$

$$= \frac{324}{25} \frac{1-\left(\frac{6}{5}\right)^8}{-\frac{1}{5}} = -\frac{324}{5}\left(1-\left(\frac{6}{5}\right)^8\right)$$

التمرين الثالث: في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، لدينا نقطتين $A(2,-1,0)$ و $B(-1,3,5)$. والمستوي $\mathcal{P}$ الذي يقبل معادلة $2x-3y+z-5=0$.

● أثبت أن المستقيم (AB) يقطع المستوي $\mathcal{P}$ في نقطة C يطلب تعيين إحداثياتها.

● اكتب معادلة للمستوي Q العمودي على $\mathcal{P}$ ويمر بالنقطتين A و B.

الحل:

● إن $\mathcal{P}: 2x-3y+z-5=0$

كما أن المستقيم (AB) يقبل شعاع التوجيه $\overrightarrow{AB}=(-3,4,5)$ نكتب معادلة المستقيم (AB) بالشكل الوسيطي

$$(AB): \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \; ; t \in \mathbb{R} \\ z = ct + z_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (AB): \begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = 4t - 1 \; ; t \in \mathbb{R} \\ z = 5t \end{cases}$$

بالحل المشترك لمعادلة المستقيم (AB) و معادلة المستوي $\mathcal{P}$ فنجد:

$$2(-3t+2) - 3(4t-1) + (5t) - 5 = 0$$

بالإصلاح نجد أن: $-13t+2=0$ ومنه $t=\frac{2}{13}$ إذن يتقاطعان في النقطة C

$$\left.\begin{aligned} x &= -3\left(\frac{2}{13}\right) + 2 = \frac{20}{13} \\ y &= 4\left(\frac{2}{13}\right) - 1 = -\frac{5}{13} \\ z &= 5\left(\frac{2}{13}\right) = \frac{10}{13} \end{aligned}\right\} \Rightarrow C\left(\frac{20}{13}, -\frac{5}{13}, \frac{10}{13}\right)$$

● نفرض $\overrightarrow{n_Q}(a,b,c)$ شعاع ناظم لـ Q.

$$Q \perp \mathcal{P} \Rightarrow \overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{n_\mathcal{P}} \Rightarrow \overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{n_\mathcal{P}} = 0 \Rightarrow 2a - 3b + c = 0 \dots (1)$$

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{n_Q} \Rightarrow \overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow -3a + 4b + 5c = 0 \dots (2)$$

نضرب المعادلة (1) بـ 3 والمعادلة (2) بـ 2 عندئذ

$$\begin{cases} 6a - 9b + 6c = 0 \\ -6a + 8b + 10c = 0 \end{cases}$$ نجمع فنجد $-b + 13c = 0$

وبما أن للمستوي أكثر من ناظم نفرض $c=1$ عندئذ: $b=13$

نعوض في (1) فنجد $a=19$

ومنه $\overrightarrow{n_Q}(19,13,1)$ إذاً:

$$Q: a(x-x_A) + b(y-y_A) + c(z-z_A) = 0$$

$$19(x-2) + 13(y+1) + 1(z-0) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{Q: 19x + 13y + z - 25 = 0}$$

التمرين الرابع: يحتوي صندوق على أربع كرات زرقاء ، وثلاث كرات زرقاء وواحدة بيضاء. نسحب عشوائياً معاً كرتين من الصندوق. ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد الألوان المختلفة بين الكرات المسحوبة.

● ما هي مجموعة القيم التي يأخذها X؟

● احسب كلاً من $P(X=1)$ ثم استنتج قيمة $P(X=2)$.

● احسب توقّع X وانحرافه المعياري.

الحل:

● ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد الألوان المختلفة بين الكرات المسحوبة فتكون مجموعة القيم التي يأخذها هي $\{1,2\}$.

●

$$P(X=1) = \frac{\binom{4}{2} + \binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{6+3}{42} = \frac{3}{7}$$

إن الحدث $\{X=2\}$ هو الحدث المتمم لـ $\{X=1\}$

$$P(X=2) = 1 - P(X=1) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

●

$$E(X) = 1 \times \frac{3}{7} + 2 \times \frac{4}{7} = \frac{11}{7}$$

$$\Rightarrow \boxed{E(X) = \frac{23}{14}}$$

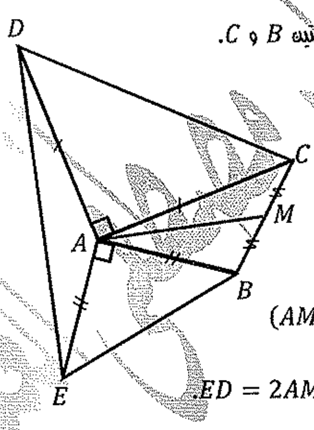
$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{3}{7} + 2^2 \times \frac{4}{7} = \frac{19}{7}$$

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \frac{19}{7} - \left(\frac{11}{7}\right)^2 = \frac{12}{49}$$

ثالثاً حل المسألتين الآتيتين 100° لكل مسألة

المسألة الأولى:

نتأمل في المستوي مثلثاً ABC مباشر التوجيه كيفياً. لتكن M منتصف $[AC]$ ، ولتكن AEB و ACD مثلثين قائمين في A متساويي الساقين مباشرين. نختار معلماً مباشراً مبدأه النقطة A.ونرمز بالرمزين b و c إلى العددين العقديين اللذين يمثلان النقطتين B و C.



❶ احسب بدلالة b و c الأعداد العقدية e و d و m الممثلة للنقاط E و C و M بالترتيب.

❷ احسب $\frac{d-e}{m-a}$ ثم استنتج أن (AM) هو ارتفاع في المثلث AED وأن $ED = 2AM$

❸ نفترض أن A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة

$(B,1),(C,1),(E,3),(D,2)$

- احسب $\frac{c}{b}$. ثم استنتج قياس الزاوية BAC.

الحل:

❶ نلاحظ أولاً أن $a = 0$ لأن A هي مبدأ المعلم.

بما أن M منتصف $[BC]$ عندئذ: $\boxed{m = \frac{b+c}{2}}$

بما أن المثلث ACD قائم ومتساوي الساقين فإن D ناتجة عن دوران C حول A بزاوية $+\frac{\pi}{2}$

$$d - a = e^{\frac{\pi}{2}i}(c-a) \Rightarrow d = i(c-a) + a \xrightarrow{a=0\ \text{لكن}} \boxed{d = ic}$$

بما أن المثلث AED قائم ومتساوي الساقين فإن E ناتجة عن دوران B حول A بزاوية $-\frac{\pi}{2}$

$$e - a = e^{-\frac{\pi}{2}i}(b-a) \Rightarrow e = -i(b-a) + a \xrightarrow{a=0\ \text{لكن}} \boxed{e = -ib}$$

❷

$$\frac{d-e}{m-a} = \frac{ic-(-ib)}{m-0} = \frac{i(c+b)}{m} = \frac{2im}{m} = 2i$$

إثبات أن (AM) هو ارتفاع في المثلث AED أي إثبات أن $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{ED}$

$$(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{ED}) = \arg\left(\frac{d-e}{m-a}\right) = \arg(2i) = \frac{\pi}{2}$$

إذن: $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{ED}$.

$$\left|\frac{d-e}{m-a}\right| = |2i| \Rightarrow \frac{|d-e|}{|m-a|} = 2 \Rightarrow \frac{ED}{AM} = 2 \Rightarrow \boxed{ED = 2AM}$$

❸ بما أن A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط$(B,1),(C,1),(E,3),(D,2)$

$$a = \frac{1.b + 1.c + 2.d + 3.e}{1+1+3+2}$$

ولكن $a = 0$ و $d = ic$ و $e = -ib$ عندئذ

$$0 = \frac{b + c + 2ic - 3ib}{7}$$

$$\Rightarrow -b(3i-1) + c(1+2i) = 0$$

$$\Rightarrow c(1+2i) = b(3i-1)$$

$$\Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{3i-1}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{5+5i}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{c}{b} = 1+i}$$

حساب قياس الزاوية BAC

$$\frac{c}{b} = \frac{c-a}{b-a} = 1+i$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg(1+i)$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$$

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$ بالعلاقة

$$f(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

❶ احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه D_f.

❷ أوجد $f'(x)$ ثم ادرس إشارة المشتق ثم نظم جدولاً بتغيرات التابع f.

❸ ارسم الخط C في معلم متجانس.

❹ لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ وفق $u_n=f(n)$ نضع

$$S_n=u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n$$

أثبت أنَّ $S_n=\ln\left(\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right)$

الحل:

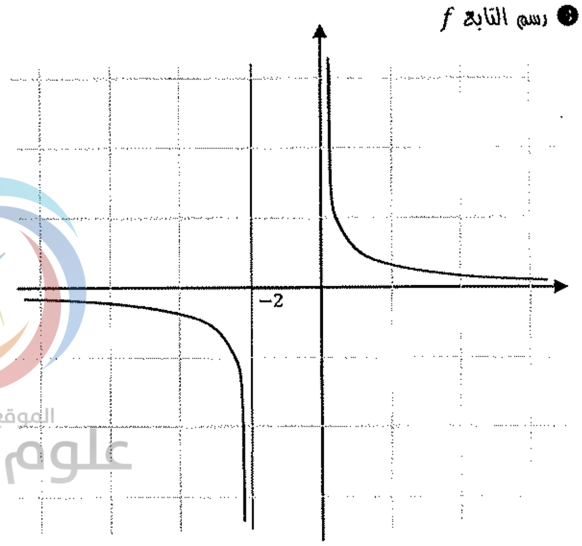
❶
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=0\quad,\quad\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$$
$$\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty\quad,\quad\lim_{x\to-2^-}f(x)=-\infty$$

❷ إن f معرف واشتقاقي على $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{x+2}{x}\right)'}{\frac{x+2}{x}}=\frac{x-x-2}{x^2}\cdot\frac{x}{x+2}=\frac{-2}{x(x+2)}<0$$

x	$-\infty$		-2	0		$+\infty$
f'		$-$	‖	‖	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖	‖ $+\infty$	$\searrow$	0

❸ رسم التابع f



❹ نلاحظ أن:

$$u_n=\ln\left(\frac{n+2}{n}\right)=\ln(n+2)-\ln n$$

نبرهن العلاقة $E(n):S_n=\ln\left(\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right)$ بالتدريج

من أجل $E(1)$

$$S_1=\ln\left(\frac{3\times2}{2}\right)=\ln3=u_1$$

إذاً $E(1)$ صحيحة.

نفرض صحة $E(n)$ أي: $S_n=\ln\left[\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right]$ صحيحة.

ولنبرهن صحة $E(n+1)$، أي: $S_{n+1}=\ln\left[\frac{(n+3)(n+2)}{2}\right]$

$$S_{n+1}=S_n+u_{n+1}=\ln\left(\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right)+\ln\left(\frac{n+3}{n+1}\right)$$
$$=\ln\left[\frac{(n+3)(n+1)}{2}\cdot\frac{n+3}{n+1}\right]$$
$$=\ln\left[\frac{(n+3)(n+2)}{2}\right]$$

فالقضية صحيحة وحسب البرهان بالتدريج فإن S_{n+1} صحيحة أياً يكن $n\in\mathbb{N}^*$

حل النموذج الوزاري الثالث

أولاً أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: 40° لكل سؤال

السؤال الأول: نجد جانباً جدول التغيرات التابع f والمطلوب:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

❶ ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$.

❷ ما عدد القيم الحدية محلياً.

❸ اكتب معادلة مماس منحنى التابع عند نقطة فاصلتها $x = 1$.

الحل:

❶ عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ هو واحد فقط لأن:

f مستمر ومتزايد على المجال $]0,1]$ و $f(]0,1]) =]-\infty,1]$ فيوجد $0 \in]-\infty,1]$

للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]0,1]$ (حسب مبرهنة القيمة الوسطى)

❷ عددها واحد وهي $f(1) = 1$.

❸ نلاحظ أن $f(1) = 1$ قيمة حدية عندئذ المماس أفقي عند $x = 1$

وهو $\boxed{T: y = 1}$

السؤال الثاني: حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $Z^2 = 1 + i2\sqrt{2}$.

الحل: نلاحظ أن: $|1 + i2\sqrt{2}| = \sqrt{1+8} = 3$

نفرض $Z = a + ib$ عندئذ:

$$2ab = 2\sqrt{2} \quad ...(1)$$
$$a^2 - b^2 = 1 \quad ...(2)$$
$$a^2 + b^2 = 3 \quad ...(3)$$

نجمع (2) مع (3) نجد: $2a^2 = 4$ ومنه $a^2 = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{إما} \quad a = +\sqrt{2} \Rightarrow b = +1 \Rightarrow Z = \sqrt{2} + i \\ \text{أو} \quad a = -\sqrt{2} \Rightarrow b = -1 \Rightarrow Z = -\sqrt{2} - i \end{cases}$$

السؤال الثالث: ليكن التابع f المعرف على $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ وفق

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

أوجد $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ثم عين A حيث $x > A$ ليكون $f(x)$ من المجال $]1.95,2.05[$

الحل:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2$$

$$f(x) \in]1.95,2.05[$$

$$f(x) \in]2 - 0.05, 2 + 0.05[$$

$$|f(x) - 2| < 0.05$$

$$\left|\frac{2x+1}{x-1} - 2\right| < \frac{5}{100}$$

$$\left|\frac{2x+1-2(x-1)}{x-1}\right| < \frac{1}{20}$$

$$\left|\frac{3}{x-1}\right| < \frac{1}{20}$$

$$\left|\frac{x-1}{3}\right| > 20$$

$$|x-1| > 60$$

$x - 1 > 60$ كون x في جوار $+\infty$

$$x > 61$$

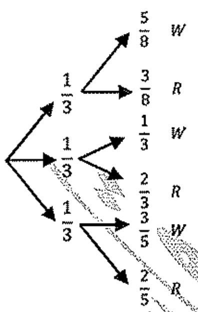
إذا عندما $x > 61$ فإن $f(x)$ من المجال $]1.95,2.05[$.

السؤال الرابع: في المخطط الشجري المرسوم جانباً ، الرمز W يدل على الكرات البيضاء والرمز R على الكرات الحمراء حيث يتم اختيار كرة واحدة

❶ ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء.

❷ إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء

فما احتمال أن تكون من الصندوق الأول.



الحل:

❶

$$P(R) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5} = \frac{173}{360}$$

❷

$$P(R_1) = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}}{\frac{173}{360}} = \frac{45}{173}$$

ثانياً حل التمارين الأربعة الآتية: (60° لكل تمرين)

التمرين الأول:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ وفق

$$f(x)=\frac{x^2+2x-2}{x+3}$$

❶ اكتب $f(x)$ بالشكل $f(x)=ax+b+\frac{1}{x+3}$ وعين قيمة كلاً من a,b ثم أثبت أن المستقيم $y=ax+b$ مقارب مائل في جوار $+\infty$.

❷ احسب $\int_0^2 f(x)dx$

الحل:

❶

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x-2 & x+3 \\ \mp x^2\mp 3x & x-1 \\ \hline -x-2 & \\ \pm x\pm 3 & \\ \hline +1 & \end{array}$$

ومنه

$$f(x)=x-1+\frac{1}{x+3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-(x-1)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x+3}\right)=0$$

إذاً $\Delta: y=x-1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$.

❷

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\left(x-1+\frac{1}{x+3}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+3)\right]_0^2$$

$$=(2-2+\ln 5)-(0-0+\ln 3)=\ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

التمرين الثاني: لتكن المتتالية $u_0=e^3, u_{n+1}=e\sqrt{u_n}$ و v_n متتالية معرفة بالشكل $v_n=\ln(u_n)-2$ والمطلوب:

❶ أثبت أن v_n هندسية وعين v_0, q.

❷ اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.

❸ أثبت أن $\lim_{n\to\infty} u_n=e^2$

الحل:

❶

$$v_{n+1}=\ln(u_{n+1})-2=\ln(e\sqrt{u_n})-2$$

$$=\ln e+\ln(\sqrt{u_n})-2=1+\frac{1}{2}\ln(u_n)-2$$

$$=\frac{1}{2}\ln(u_n)-1=\frac{1}{2}(\ln(u_n)-2)$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n}$$

أي $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول

$$v_0=\ln(u_0)-2=\ln(e^3)-2=\ln(e^3)-2$$

$$=3\ln e-2=3-2=1$$

❷

$$v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n=\ln(u_n)-2$$

$$\ln(u_n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\Rightarrow u_n=e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n+2}=e^{0+2}=e^2$$

حيث $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

التمرين الثالث:

$ABCDEFGH$ مكعب حيث K نقطة من CD تحقق $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ والنقطة $J\in BC$ بحيث $\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ والمطلوب:

❶ جد إحداثيات النقط H,E,J,K,G في المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$

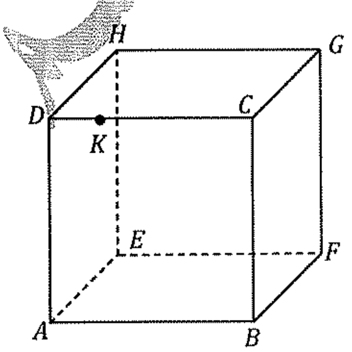
❷ أثبت أن الشعاعين $\overrightarrow{EJ},\overrightarrow{EG}$ غير مرتبطين خطياً.

❸ أثبت أن الاشعة $\overrightarrow{EJ},\overrightarrow{EG},\overrightarrow{HK}$ مرتبطة خطياً

❹ أثبت أن المستقيم HK يوازي (EGJ).

الحل:

❶ نرسم الشكل



لسهولة إيجاد

إحداثيات النقط

فنلاحظ حسب الرسم

$$G(1,1,1), K\left(\frac{1}{4},0,1\right), J\left(1,0,\frac{3}{4}\right), E(0,1,0), H(0,1,1)$$

$$\overrightarrow{EG} = (x_G - x_E, y_G - y_E, z_G - z_E) = (1,0,1)$$

$$\overrightarrow{EJ} = (x_J - x_E, y_J - y_E, z_J - z_E) = \left(1,-1,\frac{3}{4}\right)$$

❷ نلاحظ أن $\frac{1}{1} \neq \frac{0}{-1} \neq \frac{1}{\frac{3}{4}}$ المركبات المتقابلة غير متناسبة فالشعاعان غير مرتبطان خطياً.

❸ لكي تكون الأشعة مرتبطة خطياً يجب أن تحقق $\overrightarrow{HK} = \alpha\overrightarrow{EG} + \beta\overrightarrow{EJ}$

$$\left(\frac{1}{4},-1,0\right) = \alpha(1,0,1) + \beta\left(1,-1,\frac{3}{4}\right)$$

$$\left(\frac{1}{4},-1,0\right) = \left(\alpha+\beta, -\beta, \alpha + \frac{3}{4}\beta\right)$$

$$\alpha + \beta = \frac{1}{4} \quad ...(1)$$
$$-\beta = -1 \quad ...(2)$$
$$\alpha + \frac{3}{4}\beta = 0 ...(3)$$

من (2) نجد $\beta = 1$ نعوض في (3) فنجد $\alpha = -\frac{3}{4}$ نتحقق من (1) فنجد $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ محقق ، إذا فالأشعة مرتبطة خطياً

$$\overrightarrow{HK} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{EJ}$$

❹ بما أن الاشعة مرتبطة خطياً فتقع في مستويات متوازية لأنها لا تشترك بنقطة ومنه (HK) يوازي المستوي الحاوي على EG و EJ وهو (EGJ).

التمرين الرابع: أوجد الحد المستقل عن x في منشور ذي الحدين $\left(x + \frac{1}{x}\right)^8$

الحل:

$$T_r = \binom{8}{r} x^{8-r} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^r = \binom{8}{r} x^{8-r} \cdot x^{-r} = \binom{8}{r} x^{8-2r}$$

فالحد المستقل عن x هو x^0 ومنه $8 - 2r = 0 \Leftarrow \boxed{r = 4}$.

$$T_0 = \binom{8}{4} x^0 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$$

ثالثاً حل المسائل التالية (100° لكل مسألة)

المسألة الأولى:

أولاً: ليكن التابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x) = e^x + 2 - x$

ادرس اطراد التابع g واستنتج مجموعة حلول المتراجحة $g(x) > 0$.

ثانياً: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x) = x + \frac{x-1}{e^x}$$

❶ أثبت أن $f'(x) = \frac{1}{e^x} g(x)$.

❷ بين أن للمعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

❸ أثبت أن المستقيم $\Delta: y = x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي.

❹ ارسم Δ وارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيم Δ والمستقيمين $x = 0$ و $x = 1$.

الحل:

أولاً: دراسة إطراد التابع g:

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$$

في جوار $+\infty$ لدينا حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$ لإزالتها نكتب

$$g(x) = e^x\left(1 + \frac{2}{e^x} - \frac{x}{e^x}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty(1 + 0 - 0) = +\infty$$

إن g معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$ عندئذ:

$g'(x) = e^x - 1$ ، نعدم المشتق ، أي: $g'(x) = 0$ ومنه

$$e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow \ln e^x = \ln 1 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

$$f(0) = 3$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

إذاً: g متناقص على المجال $]-\infty,0[$ و g متزايد على المجال $]0,+\infty[$

حلول المتراجحة $g(x) > 0$: حسب الجدول $]-\infty,+\infty[$.

ثانياً:

❶ إن f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$ عندئذ:

$$f'(x) = 1 + \frac{e^x - (x-1)e^x}{(e^x)^2} = 1 + \frac{1 - x + 1}{e^x}$$

$$f'(x) = \frac{e^x - x + 2}{e^x} = \frac{1}{e^x}(e^x - x + 2)$$

$$f'(x) = \frac{1}{e^x} g(x)$$

❷ نلاحظ أن:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0-e^{0}=-1<0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right)>0 \end{array}\right\}\Rightarrow f(0).f\left(\frac{1}{2}\right)<0$$

فحسب مبرهنة القيمة الوسطى فيوجد $\alpha\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$ وهو وحيد لأن

$$f'(x)=\frac{1}{e^{x}}g(x)>0$$

❸ نلاحظ أن:

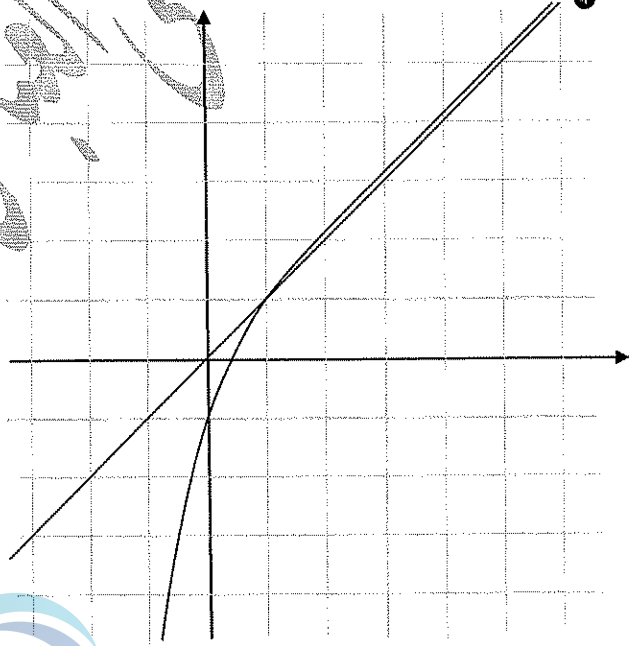
$$h(x)=f(x)-x=x+\frac{x-1}{e^{x}}-x=\frac{x-1}{e^{x}}=\frac{x}{e^{x}}-\frac{1}{e^{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}h(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{e^{x}}-\frac{1}{e^{x}}\right)=0$$

إذا Δ مقارب مائل في جوار $+\infty$. دراسة الوضع النسبي

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-y_{\Delta}$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	C تحت Δ		C فوق Δ

❹



$$S=\int_{0}^{1}(x-f(x))dx=\int_{0}^{1}-(x-1)e^{-x}dx$$

نحسب التكامل بطريقة التجزئة فنفرض $\begin{array}{ll} u=x-1 & v'=-e^{-x} \\ u'=1 & v=e^{-x}\end{array}$

$$S=\left[-(x-1)e^{-x}\right]_{0}^{1}-\int_{0}^{1}e^{-x}dx$$

$$S=(0+1)-\left[-e^{-x}\right]_{0}^{1}$$

$$S=1-(-e^{-1}+1)=1+\frac{1}{e}-1=\frac{1}{e}$$

المسألة الثانية: في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

لدينا النقاط $A(1,0,-1)$ و $B(2,2,3)$ و $C(3,1,-2)$ و $D(-4,2,1)$

❶ أثبت أن المثلث ABC قائم واحسب مساحته.

❷ أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي ABC واستنتج معادلة المستوي (ABC).

❸ احسب بعد النقطة D عن المستوي ABC ثم احسب حجم رباعي الوجوه (D,ABC).

الحل:

❶ $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)=(1,2,4)$

$$\Rightarrow AB=\sqrt{1^2+2^2+4^2}=\sqrt{21}$$

$$\overrightarrow{AC}=(x_C-x_A,y_C-y_A,z_C-z_A)=(2,1,-1)$$

$$\Rightarrow AC=\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{BC}=(x_C-x_B,y_C-y_B,z_C-z_B)=(1,-1,5)$$

$$\Rightarrow BC=\sqrt{1^2+(-1)^2+5^2}=\sqrt{27}$$

نلاحظ أن $BC^2=AB^2+AC^2$ فحسب عكس فيثاغورث فالمثلث ABC قائم.

$$S_{ABC}=\frac{AB.AC}{2}=\frac{\sqrt{21}\times\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{126}}{2}$$

❷ $\vec{n}\perp\overrightarrow{BC}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow a-b+5c=0$

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\Rightarrow 2a+b-c=0$$

نجمع المعادلتين فنجد $3a-6c=0$

ولكن بما أن للمستوي أكثر من ناظم نفرض $c=1$ عندئذ $a=2$ ومنه $b=-3$ ، إذا $\vec{n}(2,-3,1)$. فمعادلة المستوي (ABC)

$$(ABC): a(x-x_a)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

$$2(x-1)-3(y-0)+1(z+1)=0$$

$$\Rightarrow\boxed{(ABC): 2x-3y+z-1=0}$$

❸

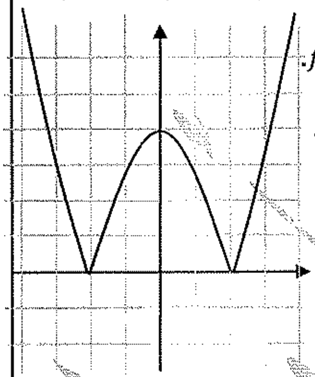
$$h=dist(D,ABC)=\frac{|-8-6+1-1|}{\sqrt{4+9+1}}=\sqrt{14}$$

$$V=\frac{1}{3}S_{ABC}.h=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{126}}{2}\times\sqrt{14}=7$$

حل النموذج الوزاري الرابع

أولاً أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: 40° لكل سؤال

السؤال الأول: نجد جانبًا الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب:



❶ أوجد عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$.

❷ احسب قيمة المشتق للتابع عند الصفر.

❸ احسب $f([-2,2])$.

❹ كم قيمة كبرى وصغرى محليًا.

❺ اكتب جدول تغيرات التابع f.

الحل:

❶ أربع حلول لأن المستقيم $y = 2$ يقطع الخط C في أربع نقاط

❷ نلاحظ أن المستقيم المماس في النقطة $x = 0$ أفقي عندئذ $f'(0) = 0$

❸ $f([-2,2]) = [0,4]$

❹ ثلاث قيم وهي $f(-2) = 0$ و $f(2) = 0$ و $f(0) = 4$.

❺ جدول تغيرات التابع f

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
f'		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

السؤال الثاني: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة الآتية:

$$-\ln(x+1) + \ln x = \ln(x-1)$$

الحل: شرط الحل: $x > 1$

$$\ln x = \ln(x-1) + \ln(x+1)$$

$$\ln x = \ln(x-1)(x+1)$$

$$\ln x = \ln(x^2-1)$$

$$x = x^2 - 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ مقبول ، $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 1$ مرفوض

السؤال الثالث:

اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ حيث $A(2,-1,3)$ و $B(4,3,-1)$

الحل: إن المستوي المحوري يقبل شعاع ناظم $\overrightarrow{AB}$ حيث

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (2,4,-4)$$

ولتكن I منتصف $[AB]$ وتنتمي للمستوي المحوري P

$$I = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right) = (3,1,1)$$

$$P: 2(x-3) + 4(y-1) - 4(z-1) = 0$$

$$2x + 4y - 4z - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P: x + 2y - 2z - 3 = 0}$$

السؤال الرابع: ما هي أمثال الحد x^2y في منشور $\left(\frac{y^2}{x} + \frac{x}{y}\right)^8$؟

الحل:

$$T_r = \binom{8}{r}\left(\frac{y^2}{x}\right)^{8-r}.\left(\frac{x}{y}\right)^r$$

$$= \binom{8}{r}(y^2x^{-1})^{8-r}.(xy^{-1})^r$$

$$= \binom{8}{r}y^{16-2r}x^{-8+r}x^r y^{-r} = \binom{8}{r}y^{16-3r}x^{2r-8}$$

نحصل على x^2y عندما

$$\left.\begin{matrix} 16 - 3r = 1 \Rightarrow r = 5 \\ 2r - 8 = 2 \Rightarrow r = 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{r = 5}$$

$$T_5 = \binom{8}{5}x^2y = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 56$$

ثانياً حل التمرينات الأربعة الآتية: (60° لكل تمرين)

التمرين الأول: إذا كان $f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x^2} + \dfrac{1}{2}$ أيًا يكن x من $\mathbb{R}^*$

أوجد نهاية التابع f عند الصفر.

الحل:

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{2} = \frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} = 0$$

حيث $\lim_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right) = 1$

التمرين الثاني: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة التدريجية:

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n} \quad \text{و} \quad u_0 = \frac{1}{2}$$

❶ أثبت أنّ $0 < u_n < 1$ أياً كان n من $\mathbb{N}$.

❷ نعرّف $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n = \frac{1}{u_n} - 1$. أثبت أنّ $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية واستنتج v_n بدلالة n.

❸ اكتب u_n بدلالة n، واحسب $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

الحل:

❶ سنبرهن بالتدريج أنّ $0 < u_n < 1$ أياً كان n من $\mathbb{N}$ كما يلي:

لنثبت صحة القضية $E(0)$

صحيحة $u_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < u_0 = \frac{1}{2} < 1$

لنفرض صحة القضية $E(n)$ أي $0 < u_n < 1 \ldots (*)$

ولنثبت صحة القضية $E(n+1)$ كما يلي:

$0 < u_n < 1$ (حسب $(*)$)

$f(0) < f(u_n) < f(1)$ (f متزايد)

التابع $f(x) = \frac{x}{2-x}$ متزايد لأنّ:
$$f'(x) = \frac{2}{(2-x)^2} > 0$$

$$0 < 1 < \frac{u_n}{2-u_n} < 2$$

$$\Rightarrow \boxed{0 < u_{n+1} < 2}$$

إذاً فحسب التدريج فإنّ $0 < u_n < 1$ أياً كان n من $\mathbb{N}$.

❷

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} - 1 = \frac{1}{\frac{u_n}{2-u_n}} - 1 = \frac{2-u_n}{u_n} - 1$$

$$= \frac{2-u_n-u_n}{u_n} = \frac{2(1-u_n)}{u_n} = 2\left(\frac{1}{u_n} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{n+1} = 2v_n}$$

إذاً v_n متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول

$$v_0 = \frac{1}{u_0} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1$$

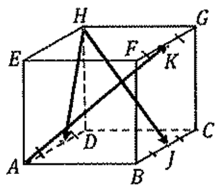
$$\Rightarrow \boxed{v_n = 2^n}$$

$$v_n = \frac{1}{u_n} - 1 \Rightarrow 2^n + 1 = \frac{1}{u_n} \Rightarrow \boxed{u_n = \frac{1}{2^n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n+1} = 0$$

حيث $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$

التمرين الثالث: $ABCDEFGH$ مكعب. I و J و K هي بالترتيب منتصفات $[AD]$ و $[BC]$ و $[FG]$.



❶ باختيار معلم متجانس $(D;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$

احسب مركبات كل من الأشعة $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$.

❷ أوجد عددين حقيقيين a و b يحققان المساواة $\overrightarrow{AK} = a\overrightarrow{HI} + b\overrightarrow{HJ}$

ثم استنتج أنّ الأشعة $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$ مرتبطة خطياً.

الحل:

❶ $A(1,0,0), K\left(\frac{1}{2},1,1\right), H(0,0,1), I\left(\frac{1}{2},0,0\right), J\left(\frac{1}{2},1,0\right)$

$$\overrightarrow{AK} = (x_K - x_A, y_K - y_A, z_K - z_A) = \left(-\frac{1}{2},1,1\right)$$

$$\overrightarrow{HI} = (x_I - x_H, y_I - y_H, z_I - z_H) = \left(\frac{1}{2},0,-1\right)$$

$$\overrightarrow{HJ} = (x_J - x_H, y_J - y_H, z_J - z_H) = \left(\frac{1}{2},1,-1\right)$$

❷ إيجاد العددين المحققين لـ $\overrightarrow{AK} = a\overrightarrow{HI} + b\overrightarrow{HJ}$

$$\left(-\frac{1}{2},1,1\right) = a\left(\frac{1}{2},0,-1\right) + b\left(\frac{1}{2},1,-1\right)$$

$$\left(-\frac{1}{2},1,1\right) = \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b, b, -a-b\right)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = -\frac{1}{2} \ldots (1) \\ b = 1 \ldots (2) \\ -a - b = 1 \ldots (3) \end{cases}$$

ومن (2) نجد $b = 1$

نعوض في (1) و (3) فنجد $a = -2$

ومنه $\overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{HJ}$ فالأشعة $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$ مرتبطة خطياً.

التمرين الرابع: عيّن العددين z_1 و z_2 حيث

$$2z_1 - z_2 = -3$$
$$2\overline{z_1} + \overline{z_2} = -3 + i2\sqrt{3}$$

الحل: نأخذ مرافق المعادلة الأولى ثم نجمع المعادلتين كما يلي:

$$\left.\begin{aligned}2\overline{z_1}-\overline{z_2}&=-3\\2\overline{z_1}+\overline{z_2}&=-3+i2\sqrt{3}\end{aligned}\right\}\Rightarrow 4\overline{z_1}=-6+i2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \overline{z_1}=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \boxed{z_1=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_2=-i\sqrt{3}}$$

ثالثاً حل المسألتين الآتيتين: (90° للأولى و 110° للثانية)

المسألة الأولى:

صندوق يحتوي على ثلاث كرات حمراء وأربع كرات سوداء. نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات في آن معاً ولتكن الحدث A الحصول على كرة حمراء على الأقل والحدث B الحصول على كرتين سوداوين على الأقل.

احسب الاحتمالات التالية:

❶ $A|B$, B , A.

❷ إذا كان X متحول عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة اكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه وتباينه.

الحل:

❶

$$P(A)=\frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}+\binom{3}{2}\binom{4}{1}+\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}}=\frac{31}{35}$$

$$P(B)=\frac{\binom{4}{2}\binom{3}{1}+\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}}=\frac{22}{35}$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{\binom{4}{2}\binom{3}{1}}{\binom{7}{3}}}{\frac{22}{35}}=\frac{18}{22}$$

❷ مجموعة قيم المتحول X هي $\{0,1,2,3\}$

$$P(X=0)=\frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}}=\frac{4}{35}$$

$$P(X=1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}}{\binom{7}{3}}=\frac{18}{35}$$

$$P(X=2)=\frac{\binom{3}{2}\binom{4}{1}}{\binom{7}{3}}=\frac{12}{35}$$

$$P(X=3)=\frac{\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}}=\frac{1}{35}$$

X	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

$$E(X)=0\times\frac{4}{35}+1\times\frac{18}{35}+2\times\frac{12}{35}+3\times\frac{1}{35}=\frac{9}{7}$$

$$E(X^2)=0^2\times\frac{4}{35}+1^2\times\frac{18}{35}+2^2\times\frac{12}{35}+3^2\times\frac{1}{35}=\frac{15}{7}$$

$$V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2=\frac{15}{7}-\left(\frac{9}{7}\right)^2=\frac{24}{49}$$

المسألة الثانية:

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=2e^{-x}+x-2$ وخطه البياني C.

❶ أوجد معادلة المقارب المائل وادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة إلى مقاربه.

❷ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها. وبين أنّه يبلغ قيمة حدية محلية عيّنها وبيّن نوعها.

❸ استنتج أن للمعادلة $f(x)=0$ جذرين أحدهما يساوي الصفر الآخر نرمزه بالرمز α أثبت أن $1<\alpha<2$.

❹ ارسم المقارب المائل ثم ارسم C، واحسب السطح المحصور بين C والمستقيمات التي معادلتها

$$x=\ln 3\,,x=\ln 2\,,y=x-2$$

الحل:

❶ نلاحظ أن $\Delta: y=x-2$ مقارب مائل في جوار $+\infty$ لـ C لأنّ:

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-(x-2)\right)=\lim_{x\to\infty}2e^{-x}=0$$

بما أن $f(x)-(x-2)=2e^{-x}>0$ عندئذ C فوق Δ

❷

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}e^{-x}(2+xe^{x}-2e^{x})=\infty(2+0-0)=\infty$$

إن f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومنه

$$f'(x) = -2e^{-x} + 1 \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$e^{-x} = \frac{1}{2} \Rightarrow -x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x = \ln 2 \Rightarrow \boxed{f(\ln 2) = -1 + \ln 2}$$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-1+\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

❸ f مستمر ومتناقص على المجال $]-\infty, \ln 2[$ و

$$0 \in]-\infty, -1 + \ln 2[= f(]-\infty, \ln 2[)$$

فحسب مبرهنة القيمة الوسطى فيوجد للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]-\infty, \ln 2[$ وهو $x = 0$ حيث $f(0) = 0$.

f مستمر ومتزايد على المجال $]\ln 2, +\infty[$ و

$$0 \in]-1 + \ln 2, +\infty[= f(]\ln 2, +\infty[)$$

فحسب مبرهنة القيمة الوسطى فيوجد للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]\ln 2, +\infty[$.

مما سبق للمعادلة جذران مختلفان في $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{r} f(1) = 2e^{-1} - 1 < 0 \\ f(2) = 2e^{-2} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1).f(2) < 0$$

فحسب مبرهنة القيمة الوسطى فيوجد $\alpha \in]1,2[$ بحيث $f(\alpha) = 0$.

❹

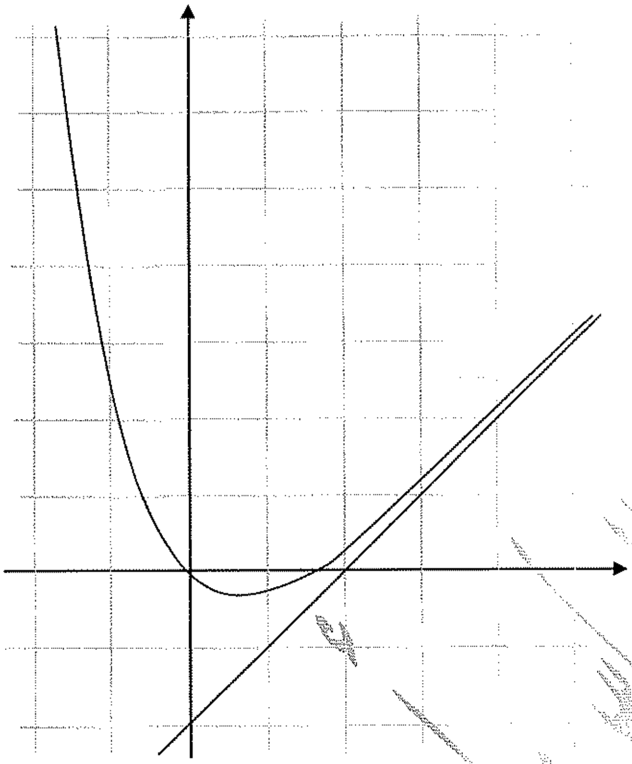
$$S = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \big(f(x) - (x-2)\big)dx$$

$$= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \big(2e^{-x} + x - 2 - (x-2)\big)dx$$

$$= \int_{\ln 2}^{\ln 3} 2e^{-x}dx$$

$$= [-2e^{-x}]_{\ln 2}^{\ln 3}$$

$$= \left[-\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{2}\right)\right] = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}$$



حل النموذج الوزاري الخامس

أولاً أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: 40° لكل سؤال

السؤال الأول: لتكن $u_n = 4n + 1$ أثبت أن المتتالية حسابية عين أساسها واحسب $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{10}$.

الحل:

$$u_{n+1} - u_n = 4(n+1) + 1 - (4n+1)$$
$$= 4n + 5 - 4n - 1 = 4$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ حسابية أساسها $r = 4$ وحدها الأول $u_0 = 1$

$$u_{10} = u_0 + 10r = 1 + 10 \times 4 = 41$$

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{10} = (10 - 0 + 1)\frac{1 + 41}{2} = 231$$

السؤال الثاني: اكتب بالشكل المثلثي العدد العقدي $z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1+i}$

الحل:

الشكل المثلثي للعدد $1 + i$ هو

$$\left.\begin{array}{l} r = |1+i| = \sqrt{2} \\ \left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

الشكل المثلثي للعدد $1 - i\sqrt{3}$ هو

$$\left.\begin{array}{l} r = |1 - i\sqrt{3}| = 2 \\ \left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$\frac{1 - i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1 - i\sqrt{3}}{1+i} = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i.\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right]}$$

السؤال الثالث:

رف يحوي 7 كتب لمؤلفين ثلاثة كتب للمؤلف A وأربعة للمؤلف B

❶ بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا كانت الكتب الثلاثة الأولى للمؤلف B

❷ بكم طريقة ترتيب الكتب على الرف إذا اشترطنا أن يكون كتاباً معيناً للمؤلف B في البداية.

الحل:

❶ عدد طرق ترتيب الكتب الثلاثة الأولى (للمؤلف B) يساوي $\binom{4}{3} = 4$

عدد طرق ترتيب الكتب المتبقية (ثلاث كتب للمؤلف A و كتاب للمؤلف B) يساوي $4!$

فحسب المبدأ الأساسي في العد فإن عدد طرق ترتيب الكتب وفق شرط هو

$$4 \times 4!$$

❷ عدد طريقة ترتيب الكتب على الرف بشرط أن يكون كتاباً معيناً للمؤلف B في البداية هو $1.6! = 6!$

السؤال الرابع: أوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين

$$\begin{cases} e^x - \frac{1}{e}e^y = 1 \\ 2e^x + e^y = 4 + e \end{cases}$$

الحل:

نفرض $X = e^x$ و $Y = e^y$ عندئذ:

$$\begin{cases} X - \frac{1}{e}Y = 1 & \ldots(1) \\ 2X + Y = 4 + e & \ldots(2) \end{cases}$$ نضرب المعادلة (1) بـ (-2) ونجمع

$$\boxed{Y = e} \Leftarrow \left(\frac{2}{e} + 1\right)Y = 2 + e \xLeftarrow{\text{نجمع}} \begin{cases} -2X + \frac{2}{e}Y = -2 \\ 2X + Y = 4 + e \end{cases}$$

ومنه $X - \frac{1}{e}e = 1 \Leftarrow X = 2$

إذاً $\boxed{y = 1} \Leftarrow e^y = e$

$\boxed{x = \ln 2} \Leftarrow e^x = 2$

ثانياً حل التمارين الأربعة الآتية: 60° لكل تمرين

التمرين الأول: ليكن $g(x) = \tan x$ والمطلوب:

❶ احسب $g\left(\frac{\pi}{4}\right), g'(x), g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$.

❷ احسب مشتق التابع $f(x) = x.e^{\frac{1}{x}}$ على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

الحل:

❶

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$g'(x) = \tan^2 x + 1$$

$$g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1 = 1 + 1 = 2$$

الاستنتاج:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{g(x) - g\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

❷

$$f'(x) = 1.e^{\frac{1}{x}} + x\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$$

التمرين الثاني: لتكن المتتاليتين $(x_n)_{n\geq0}, (y_n)_{n\geq0}$ المعرفتين وفق

$$x_n = \frac{4n+5}{n+1} \quad , \quad y_n = \frac{4n+1}{n+2}$$

برهن أنهما متجاورتين.

الحل: ⋆ دراسة إطراد المتتالية $(x_n)_{n\geq0}$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{4(n+1)+5}{(n+1)+1} - \frac{4n+5}{n+1}$$

$$= \frac{4n+9}{n+2} - \frac{4n+5}{n+1}$$

$$= \frac{4n^2+13n+9-(4n^2+13n+10)}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{-1}{(n+2)(n+1)} < 0$$

فالمتتالية $(x_n)_{n\geq0}$ متناقصة.

⋆⋆ دراسة إطراد المتتالية $(y_n)_{n\geq0}$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{4(n+1)+1}{(n+1)+2} - \frac{4n+1}{n+2}$$

$$= \frac{4n+5}{n+3} - \frac{4n+1}{n+2}$$

$$= \frac{4n^2+13n+10-(4n^2+13n+3)}{(n+3)(n+2)}$$

$$= \frac{7}{(n+2)(n+3)} > 0$$

فالمتتالية $(y_n)_{n\geq0}$ متزايدة.

$$x_n - y_n = \frac{4n+5}{n+1} - \frac{4n+1}{n+2}$$

$$= \frac{(4n+5)(n+2)-(4n+1)(n+1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{4n^2+8n+5n+10-(4n^2+4n+n+1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$x_n - y_n = \frac{8n+9}{(n+1)(n+2)}$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{8n+9}{(n+1)(n+2)} = 0$$

إذاً المتتاليتان $(x_n)_{n\geq0}, (y_n)_{n\geq0}$ متجاورتان.

التمرين الثالث: ليكن كثير الحدود $P(z) = z^4 + 5z^3 + 10z^2 + 10z + 4$

❶ عين عددين a, b يحققان $P(z) = (z^2+az+a)(z^2+bz+a)$

❷ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

الحل:

❶

$$P(z) = (z^2+az+a)(z^2+bz+a)$$

$$= z^4 + (a+b)z^3 + (2a+ab)z^2 + (a^2+ab)z + a^2$$

لكن $P(z) = z^4 + 5z^3 + 10z^2 + 10z + 4$ نجد أن:

$$\left.\begin{array}{r} a+b=5 \\ 2a+ab=10 \\ a^2+ab=10 \\ a^2=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a=2 \Rightarrow b=3 \quad \text{مقبول} \\ a=-2 \Rightarrow b=7 \quad \text{مرفوض} \end{array}$$

عندئذ $P(z) = (z^2+2z+2)(z^2+3z+2)$

❷ ومنه $P(z) = (z^2+2z+2)(z^2+3z+2) = 0$

إما $z^2+3z+2=0 \Leftarrow (z+2)(z+1)=0 \Leftarrow \left.\begin{array}{l} z=-1 \\ z=-2 \end{array}\right\}$

أو $z^2+2z+2=0$ نحل $\Delta = 2^2 - 4(1)(2) = -4$

$$z_1 = \frac{-2+2i}{2} = -1+i \quad , \quad z_2 = \frac{-2-2i}{2} = -1-i$$

فمجموعة حلول $P(z) = 0$ هي $\{-1, -2, -1+i, -1-i\}$.

التمرين الرابع: يشتري محل للأدوات الكهربائية 400 مصباح من المصنع A و 200 مصباح من المصنع B.

إذا علمت أن نسبة المصابيح المعطوبة في انتاج المصنع A هي 4% وفي انتاج B هي 10%. نسحب عشوائياً مصباحاً.

❶ ما احتمال أن يكون المصباح معطوباً.

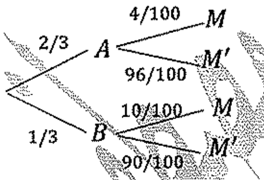
❷ إذا علمت أن المصباح معطوب ما احتمال أن يكون من B.

الحل:

❶ لنفرض أن M الحدث سحب مصباح معطوب

و A الحدث سحب مصباح من المعمل A

و B الحدث سحب مصباح من المعمل B



$$P(A)=\frac{400}{600}=\frac{2}{3}\qquad P(B)=\frac{200}{600}=\frac{1}{3}$$

$$P(M_A)=\frac{4}{100}\qquad P(M_B)=\frac{10}{100}$$

$$P(M)=P(A\cap M)+P(B\cap M)$$

$$=P(A\cap M).P(M|A)+P(B).P(M|B)$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{100}+\frac{1}{3}\cdot\frac{10}{100}=\frac{18}{300}$$

❷ $$P(M_B|M)=\frac{P(B\cap M)}{P(M)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{10}{100}}{\frac{18}{300}}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$$

ثالثاً حل المسألتين الآتيتين 100° لكل مسألة

المسألة الأولى:

ليكن C الخط البياني للتابع $f(x)=\frac{x+2}{(x+1)^2}$ المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$

❶ ادرس نهايات التابع عند اطراف مجموعة التعريف وبين إذا كانت له نهاية حقيقية عند $x=-1$.

❷ أوجد معادلة مقارب أفقي للخط C وادرس الوضع النسبي لهذا المقارب مع C.

❸ احسب $f'(x)$ ونظم جدولاً بتغيرات f وعين ماله من قيم حدية محلية

❹ أوجد معادلة المماس في النقطة من C التي فاصلتها $x=-2$

❺ ارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين محوري الإحداثيات والمنحني C والمستقيم $x=3$.

الحل:

❶ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\frac{1}{\infty}=0 \qquad \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\frac{1}{\infty}=0$

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty \qquad \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$

❷ $\Delta: y=0$ مقارب أفقي للتابع f في جوار $+\infty$ و $-\infty$ لأن:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to\infty} f(x)=0$$

دراسة الوضع النسبي:

x		-2	
$f(x)-0$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	C_f تحت Δ		C_f فوق Δ

❸ حساب $f'(x)$

$$f'(x)=\frac{1.(x+1)^2-2(x+1)(x+2)}{(x+1)^4}=\frac{x+1-2x-4}{(x+1)^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x)=\frac{-x-3}{(x+1)}}$$

دراسة تغيرات التابع f

$$f'(x)=0\Rightarrow -x-3=0\Rightarrow x=-3\Rightarrow f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{4}$$

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$ $+\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	0

القيمة الحدية (صغرى) هي $f(-3)=-\frac{1}{4}$.

❹ $f(-2)=0$ و $m=f'(-2)=+1$

$$T: y=m(x-(-2))+f(-2)=+1(x+2)+0$$

$$\Rightarrow \boxed{T: y=x+2}$$

❺

$$S=\int_0^3\frac{x+2}{(x+1)^2}dx=\int_0^3\left(\frac{x+1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$$

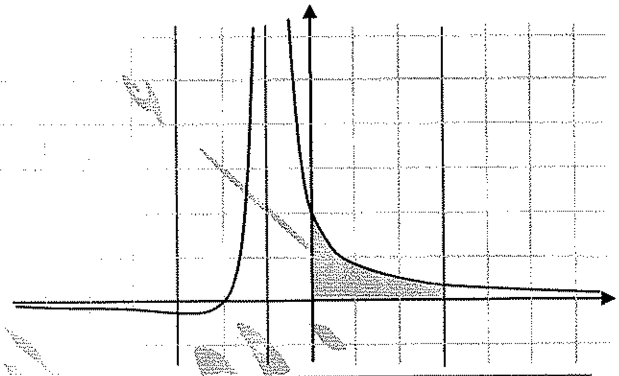
$$=\int_0^3\left(\frac{1}{x+1}+(x+1)^{-2}\right)dx$$

$$=\left[\ln(x+1)+\frac{(x+1)^{-1}}{-1}\right]_0^3=\left[\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}\right]_0^3$$

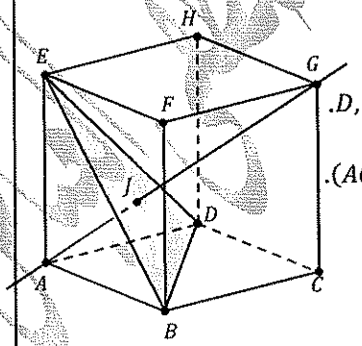
$$= \left(\ln(4) - \frac{1}{4}\right) - (\ln(1) - 1)$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \ln(4) + \frac{3}{4}}$$

رسم الخط البياني C للتابع f



المسألة الثانية: $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه يساوي 3 في المعلم $\left(A;\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\frac{1}{3}\overrightarrow{AD},\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$



❶ عين إحداثيات النقاط D,B,E,G.

❷ اعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AG).

❸ أثبت أن المستقيم (AG) ناظم مع للمستوي (EDB).

❹ المستقيم (AG) يتقاطع مع المستوي (EDB) في J عين إحداثياتها

❺ أثبت أن J هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث EDB ومركز ثقله.

❻ احسب حجم رباعي الوجوه $AEDB$.

الحل:

❶ $D(0,3,0), B(3,0,0), E(0,0,3), G(3,3,3)$

❷ إن المستقيم (AG) يقبل شعاع توجيه

$$\overrightarrow{AG} = (x_G - x_A, y_G - y_A, z_G - z_A) = (3,3,3)$$

$$(AG): \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \, ; t \in \mathbb{R} \\ z = ct + z_0 \end{cases} \Rightarrow (AG): \begin{cases} x = 3t \\ y = 3t \, ; t \in \mathbb{R} \\ z = 3t \end{cases}$$

❸ $\overrightarrow{EB} = (x_B - x_E, y_B - y_E, z_B - z_E) = (3,0,-3)$

$$\overrightarrow{ED} = (x_D - x_E, y_D - y_E, z_D - z_E) = (0,3,-3)$$

$$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{EB} = -3(3) + 0(3) + 3(3) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{EB}$$

$$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{ED} = 0(3) + (-3)(3) + 3(3) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{ED}$$

وبما أن الشعاعان $\overrightarrow{EB}$ و $\overrightarrow{EG}$ غير مرتبطان خطياً عندئذ $(AG) \perp (EDB)$

❹ نوجد معادلة المستوي (EDB)

وجدنا أن $(AG) \perp (EDB)$ عندئذ $\vec{n} = \overrightarrow{AG} = (3,3,3)$

$$(EDB): a(x - x_E) + b(y - y_E) + c(z - z_E) = 0$$

$$3(x - 0) + 3(y - 0) + 3(z - 3) = 0$$

$$3x + 3y + 3z - 9 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(EDB): x + y + z - 3 = 0}$$

بالحل المشترك نجد أن:

$$3t + 3t + 3t - 3 = 0 \Rightarrow 9t = 3 \Rightarrow \boxed{t = \frac{1}{3}}$$

ومنه احداثيات نقطة التقاطع $J(1,1,1)$ لأن:

$$x = 3\left(\frac{1}{3}\right) = 1, y = 3\left(\frac{1}{3}\right) = 1, z = 3\left(\frac{1}{3}\right) = 1$$

❺ إن المثلث EDB مثلث متساوي الأضلاع لأن EB, DB, ED هي أقطار لمربعات متطابقة فهي متساوية أي $EB = DB = ED$

إذن نقطة تلاقي الارتفاعات في مركز ثقل المثلث ومنه k مركز ثقل المثلث EDB

$$K = \left(\frac{x_E + x_D + x_B}{3}, \frac{y_E + y_D + y_B}{3}, \frac{z_E + z_D + z_B}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{0 + 0 + 3}{3}, \frac{0 + 3 + 0}{3}, \frac{3 + 0 + 0}{3}\right) = (1,1,1) = J$$

إذن J هي مركز ثقل المثلث EDB ونقطة تلاقي ارتفاعه.

❻ نعلم أن $V_{AEDB} = \frac{1}{3} S_{EDB}.h$ عندئذ لنحسب h و S_{EDB}

$$S_{EDB} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

حيث

$$a = ED = \sqrt{9 + 0 + 9} = \sqrt{18}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{18})^2 = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$h = AJ = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} = \frac{9}{2}$$

حل النموذج الوزاري السادس

أولاً أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: 40° لكل سؤال

السؤال الأول: نجد فيما يأتي جدول تغيرات التابع f والذي خطه البياني C

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	3

❶ اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي للخط البياني C.

❷ هل يوجد مقاربات مائلة للخط البياني C؟

❸ هل يوجد للخط C مماسات أفقية؟

❹ أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]-1,1[$.

الحل:

❶ المستقيم $y=3$ مقارب افقي في جوار $+\infty$ و $-\infty$.

والمستقيم $x=1$ مقارب شاقولي

والمستقيم $x=-1$ مقارب شاقولي

❷ لا يوجد لأن $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\neq\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\neq\infty$

❸ لا لأن المشتق لا ينعدم.

❹ إن f متناقص على المجال $]-1,1[$ و $0\in]-\infty,\infty[=f(]-1,1[)$

فللمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]-1,1[$.

السؤال الثاني: اكتب العدد العقدي

$Z=(1-\sqrt{2})\left(\cos\frac{\pi}{3}+i.\sin\frac{\pi}{3}\right)$ بالشكل الأسي

الحل:

$$Z=(1-\sqrt{2})\left(\cos\frac{\pi}{3}+i.\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=-(\sqrt{2}-1)e^{\frac{\pi}{3}i}=e^{\pi i}(\sqrt{2}-1)e^{\frac{\pi}{3}i}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z=(\sqrt{2}-1)e^{\frac{4\pi}{3}i}}$$

السؤال الثالث: $ABCD$ رباعي وجوه و G مركز ثقل المثلث DBC.

جد مجموعة نقاط الفراغ التي تحقق:

$$\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}\|=\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}\|$$

الحل:

بما أن G مركز ثقل المثلث DBC عندئذ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$

$$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$$

$$\Rightarrow\|3\overrightarrow{MG}\|=\|3\overrightarrow{MA}-(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC})\|$$

$$\|3\overrightarrow{MG}\|=\|3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MG}\|$$

$$\|3\overrightarrow{MG}\|=\|3\overrightarrow{GA}\|$$

$$\|\overrightarrow{MG}\|=\|\overrightarrow{GA}\|$$

فمجموعة النقاط M تشكل كرة مركزها G ونصف قطرها GA.

السؤال الرابع: ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=e^x$.

احسب $f(\ln 2)$ و $f'(\ln 2)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to\ln 2}\frac{e^x-2}{x-\ln 2}$.

الحل:

$$f(x)=e^x\Rightarrow f(\ln 2)=e^{\ln 2}=2$$

$$f'(x)=e^x\Rightarrow f'(\ln 2)=e^{\ln 2}=2$$

$$\lim_{x\to\ln 2}\frac{e^x-2}{x-\ln 2}=\lim_{x\to\ln 2}\frac{f(x)-f(\ln 2)}{x-\ln 2}=f'(\ln 2)=2$$

ثانياً حل التمارين الأربعة الآتية: 60° لكل تمرين

التمرين الأول: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كما يأتي:

$$u_{n+1}=\frac{2u_n+1}{u_n+2}\quad,\quad u_0=0$$

❶ أثبت أنّ $0\leq u_n\leq 1$.

❷ أثبت أنّ $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة.

❸ علّل تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ واحسب نهايتها.

الحل:

❶ سنثبت صحة العلاقة $0\leq u_n\leq 1$ بالتدريج

نثبت صحة القضية $E(0)$ كما يلي: $u_0=0\Rightarrow 0\leq u_0=0\leq 1$

فالعلاقة $E(0)$ صحيحة.

نفرض صحة العلاقة $E(n)$ أي: $0\leq u_n\leq 1\ \ldots(*)$

ولنثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ كما يلي:

نلاحظ أن f متزايد لأن

$$f(x)=\frac{2x+1}{x+2}$$

$$f'(x)=\frac{2x+4-2x-1}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{3}{(x+2)^2}>0$$

$0 \le u_n \le 1$ (حسب $*$)

$f(0) \le f(u_n) \le f(1)$ (لأن f متزايد)

$0 \le \frac{1}{2} \le u_{n+1} \le 1$

$0 \le u_{n+1} \le 1$

❷ لنثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ متزايدة أي لنثبت أن $E(n): u_n < u_{n+1}$ بالتدريج

إن العلاقة $E(0)$ صحيحة لأن: $\left.\begin{matrix} u_0=0 \\ u_1=\frac{1}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow u_1 > u_0$

لنفرض صحة العلاقة $E(n)$ أي $u_{n+1} > u_n$ ... $(*)$

لنثبت صحة العلاقة $E(n+1)$

$u_{n+1} > u_n$ (حسب $*$)

$f(u_{n+1}) > f(u_n)$ (لأن f متزايد)

$u_{n+2} > u_{n+1}$

إذن فالمتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ متزايدة.

❸ بما أن المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ متزايدة

ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

من $l=1$ حل المعادلة $f(x)=x$

$f(x)=x$

$\frac{2x+1}{x+2}=x$

$2x+1=x^2+x$

$x^2=1$

$x=1$ مقبول

$x=-1$ مرفوض

إذاً: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

التمرين الثاني: صندوق يحوي خمس كرات حمراء وخمس كرات خضراء. نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات معاً. نتأمل المتحول العشوائي X الذي يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السحب ثلاث كرات حمراء ويأخذ القيمة 3 إذا كانت نتيجة السحب كرتان حمراوان وكرة خضراء والقيمة صفر في غير ذلك. عيّن القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X واحسب توقعه وتباينه

الحل:

مجموعة قيم المتحول العشوائي X هي $\{0,3,5\}$

$$P(X=5)=\frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$$

$$P(X=3)=\frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{50}{120}=\frac{5}{12}$$

$$P(X=0)=\frac{\binom{5}{1}\binom{5}{2}+\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{60}{120}=\frac{6}{12}$$

r	0	3	5
$P(X=r)$	$\frac{6}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

$$E(X)=0.\frac{6}{12}+3.\frac{5}{12}+5.\frac{1}{12}=\frac{5}{3}$$

$$E(X^2)=0^2.\frac{6}{12}+3^2.\frac{5}{12}+5^2.\frac{1}{12}=\frac{35}{6}$$

$$V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2=\frac{35}{6}-\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{55}{18}$$

التمرين الثالث: أوجد الحد المستقل عن x في منشور ذي الحدين $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^6$

الحل:

$$T_r=\binom{6}{r}(x^2)^{6-r}.\left(\frac{1}{x}\right)^r=\binom{6}{r}x^{12-2r}.x^{-r}$$

$$=\binom{6}{r}x^{12-3r}$$

فالحد المستقل عن x هو x^0 ومنه $12-3r=0 \Leftarrow \boxed{r=4}$.

$$T_0=\binom{6}{4}x^0=\frac{6\times5\times4\times3}{4\times3\times2\times1}=15$$

التمرين الرابع: عين مجموعة تعريف التابع $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}$ واحسب نهايته عند الصفر

الحل:

الجذر معرف عندما $1+x\ge 0$ أي $]-1,+\infty[$

مجموعة تعريف التابع f هي $]-1,+\infty[$ عدا القيم التي تعدم المقام أي عدا حلول المعادلة $\sqrt{1+x}-1=0$ عندئذ

$$\sqrt{1+x}-1=0 \Rightarrow \sqrt{1+x}=1$$

نربع الطرفين $\Rightarrow 1+x=1 \Rightarrow x=0$

ومنه $D_f=\ ]-1,+\infty[\setminus\{-1\}$.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{1+x-1}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\left(\sqrt{1+x}+1\right)$$

$$=1\left(\sqrt{1+0}+1\right)=2$$

حيث $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

ثالثاً حل المسألتين الآتيتين — 100° لكل مسألة

المسألة الأولى: ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$

1. أوجد نهايات التابع عند أطراف مجموعة التعريف.
2. ادرس اطراد التابع ونظم جدولاً بها.
3. بيّن القيم الحدية المحلية للتابع f. وارسم خطه البياني.
4. استنتج عدد حلول المعادلة $x^2e^{-x}=1$.
5. احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيم $x=1$

الحل:

1. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty \quad , \quad \lim_{x\to\infty} f(x)=0$

2. إن f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$ عندئذٍ: $f(x)=x^2e^{-x}$

$$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=x(2-x)e^{-x}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x(2-x)e^{-x}=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(0)=0\\f(2)=4e^{-2}\end{cases}$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0

اطراد التابع f: نلاحظ حسب الجدول أن:

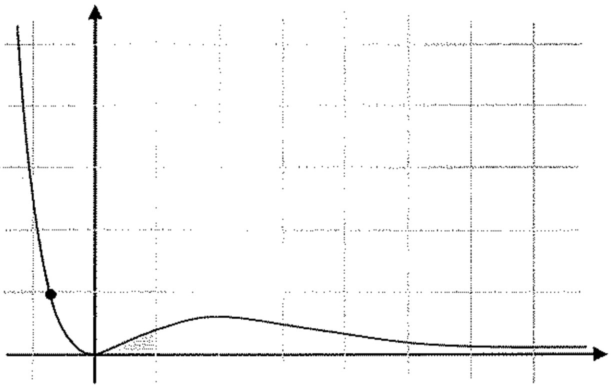
f متزايد على المجال $[0,2]$

و f متناقص على المجالين $]-\infty,0[$ و $]2,+\infty[$

3. القيم الحدية هي $f(0)=0$ وهي قيمة حدية صغرى

$f(2)=4e^{-2}$ وهي قيمة حدية كبرى

رسم التابع f



4. عدد حلول المعادلة $x^2e^{-x}=1$ هو نفس عدد حلول المعادلة $f(x)=1$

فنلاحظ حسب الجدول أن:

f مستمر ومتناقص على المجال $]-\infty,0]$ و

$1\in]0,+\infty[=f(]-\infty,0])$

فللمعادلة $f(x)=1$ حل وحيد في المجال $]-\infty,0[$.

بما أن $1\notin[0,4e^{-2}]=f([0,2])$

فلمعادلة $f(x)=1$ مستحيلة الحل في المجال $[0,2]$.

بما أن $1\notin]0,4e^{-2}[=f(]0,+\infty[)$

فلمعادلة $f(x)=1$ حل وحيد في المجال $]0,+\infty[$.

مما سبق نجد أن للمعادلة $f(x)=1$ حل وحيد في $\mathbb{R}$.

5. حسب الرسم نجد أن:

$$I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^2e^{-x}dx$$

نطبق التجزئة فنفرض

$u=x^2$	$v'=e^{-x}$
$u'=2x$	$v=-e^{-x}$

$$I=[-x^2e^{-x}]_0^1-\int_0^1-2xe^{-x}dx=-e^{-1}+2\int_0^1 xe^{-x}dx$$

نطبق التجزئة مرة ثانية فنفرض

$u=x$	$v'=e^{-x}$
$u'=1$	$v=-e^{-x}$

$$I=-e^{-1}+2[-xe^{-x}]_0^1-2\int_0^1-e^{-x}dx$$

$$=-e^{-1}+2(-e^{-1}+0)+2[-e^{-x}]_0^1=\boxed{2-\frac{5}{e}}$$

المسألة الثانية:

نتأمل النقطتين $A(1,1,1)$ و $B(3,2,0)$ في الفراغ المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. ليكن P المستوي المار بالنقطة B ويقبل $\overrightarrow{AB}$ شعاعاً ناظماً ، وليكن Q المستوي الذي معادلته $x-y+2z+4=0$

وأخيراً لتكن S الكرة مركزها A ونصف قطرها AB.

❶ أثبت أن $2x+y-z-8=0$ هي معادلة للمستوي P.

❷ جِد معادلة الكرة S.

❸ أثبت أن المستوي Q مستوٍ مماس للكرة S.

❹ أثبت أن النقطة $C(0,2,-1)$ هي مسقط النقطة A على المستوي Q

❺ ليكن d المستقيم الذي يقبل تمثيلاً وسيطياً:

$$d:\begin{cases} x=t \\ y=12-5t\ ;t\in\mathbb{R} \\ z=4-3t \end{cases}$$

(a) أثبت أن المستقيم d هو الفصل المشترك للمستويين P و Q.

(b) أثبت أن المستقيم d محتوى في المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$.

الحل:

❶
$$P: a(x-x_B)+b(y-y_B)+c(z-z_B)=0$$
$$2(x-3)+1(y-2)-1(z-0)=0$$
$$\Rightarrow \boxed{P: 2x+y-z-8=0}$$

❷ الكرة التي مركزها A ونصف قطرها

$$R^2=AB^2=2^2+1^2+(-1)^2=6$$
$$S:(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=R^2$$
$$S:(x-1)^2+(y-1)+(z-1)^2=6$$

❸
$$dist(A,Q)=\frac{|1-1+2(1)+4|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$
$$\Rightarrow dist(A,Q)=6=AB=R$$

إذن المستوي Q يمس الكرة S.

❹ $\overrightarrow{AC}=(-1,1,-2), \overrightarrow{n_Q}=(1,-1,2)$

نلاحظ أن $\overrightarrow{n_Q}=-\overrightarrow{AC}$ ومنه $\overrightarrow{AC}\perp Q$

لنثبت أن $c\in Q$ لذا نعوض c في معادلة المستوي Q

$$0-2-2+4=0\Rightarrow 0=0$$

إذا $C\in Q$ و $\overrightarrow{AC}\perp Q$ عندئذ C المسقط القائم للنقطة C على Q.

❺ (a) إثبات أن المستقيم d هو الفصل المشترك للمستويين P و Q

$$\left.\begin{matrix} x-y+2z+4=0 \\ 2x+y-z-8=0 \end{matrix}\right\} \xRightarrow{\text{بالجمع}} 3x+z-4=0$$

$$\Rightarrow z=4-3x$$

نفرض $\boxed{x=t}$ عندئذ: $\boxed{z=4-3t}$ و

$$y=x+2z+4=t+2(4-3t)+4\Rightarrow \boxed{y=12-5t}$$

وبالتالي فمعادلة الفصل المشترك للمستويين P و Q هي:

$$d:\begin{cases} x=t \\ y=12-5t\ ;t\in\mathbb{R} \\ z=4-3t \end{cases}$$

(b) نفرض R المستوي المحوري للقطعة BC

نوجد إحداثيات النقطة I منتصف $[BC]$

$$I=\left(\frac{x_B+x_C}{2},\frac{y_B+y_C}{2},\frac{z_B+z_C}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},2,-\frac{1}{2}\right)$$

$$R:-3\left(x-\frac{3}{2}\right)+0+1\left(z+\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\boxed{R:-3x-z+5=0}$$

حتى يكون d محتوى في المستوي المحوري للقطعة $[BC]$ يجب أن يحقق معادلة المستوي

$$-3t-(4-3t)+4=-3t-4+3t+4=0$$

إذاً: d محتوى في المستوي المحوري للقطعة $[BC]$.