اختبارات في مادة

الرياضيات

_ Math Tests _

الثالث الثانوي العلمي

إعداد المدرّس

كاسر خليل عتيق

0988 627 664

NEW

2021

#_الجزء الأول والثاني

اختبارات في مادة

الرياضيات

_ Math Tests _

الجزء الأول

NEW

2021

#_الجزء الأول

بالجد و العمل
نحقق الأمل

النموذج A مركز المنير التعليمي معهد ابي الفداء معهد حماه الأول

المتتاليات و نهاية المتتالية

المدة : $\lim_{n\to+\infty}\left(3\left(\frac{2}{5}\right)^n+\frac{3}{2}\right)$ ساعة

2021 الاختبار الأول الدرجة العظمى : 300

توزيع الدرجات (الأول 40 + الثاني 40 + الثالث 40 + الرابع 60 + الخامس 60 + السادس 60)

السؤال الأول: لتكن المتتاليتين $(S_n)_{n\geq 1}$ ، $(t_n)_{n\geq 1}$ المعرفتين كما يأتي :

$$S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots\dots+\frac{1}{2n} \qquad ، \qquad t_n=S_n+\frac{1}{n}$$

أثبت أن هاتين المتتاليتين متجاورتان

السؤال الثاني: المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها : $u_1+u_2+u_3=12$ و $u_7+u_8=41$

① احسب u_0 و r ② احسب المجموع $S=u_0+u_1+\dots+u_{20}$

السؤال الثالث: أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ التي حدها العام هو :

$u_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots\dots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n!}$ هي متتالية متقاربة

السؤال الرابع: المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة تدريجيا وفق : $u_0=-4$ و $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n-2$

① أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ التي حدها العام $v_n=u_n+8$ هي متتالية هندسية جد اساسها

② اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

③ اكتب عبارة $S_n=u_0+u_1+u_2+\dots\dots+u_n$ بدلالة n ثم احسب نهايتها

السؤال الخامس: المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق : $u_0=\frac{3}{2}$ و $u_{n+1}=u_n{}^2-2u_n+2$ المطلوب :

1 a . تيقن أن : $u_{n+1}=(u_n-1)^2+1$

b . أثبت مستعملا البرهان بالتدريج : أن $1\leq u_n\leq 2$ أياً كانت $n\in\mathbb{N}$

2 a . أثبت أن : $u_{n+1}-u_n=(u_n-2).(u_n-1)$ أياً كانت $n\in\mathbb{N}$

b . استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة .

3 علل تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ثم احسب نهايتها

السؤال السادس : المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق : $u_n=2+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots\dots+\frac{1}{n!}$

1 أثبت ، مستعملاً البرهان بالتدريج ، أن $\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^{n-1}}$

2 استنتج أن العدد (4) راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$

3 حدد جهة اطراد المتتالية واستنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة

((انتهت الأسئلة))

مع التمنيات بالنجاح و التوفيق للجميع المدرس : كاسر خليل عتيق

*** السؤال الأول ***

$$S_{n+1} - S_n = \cancel{\frac{1}{n+2}} + \cancel{\frac{1}{n+3}} + \dots + \cancel{\frac{1}{2n}} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} - \cancel{\frac{1}{n+2}} - \cancel{\frac{1}{n+3}} - \dots - \cancel{\frac{1}{2n}}$$

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

$$= \frac{2n+2-2n-1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$$

$$= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$$

المتتالية $(S_n)_{n \geq 1}$ متزايدة ..... $\boxed{1}$

$$t_n = S_n + \frac{1}{n}$$

$$t_{n+1} - t_n = S_{n+1} + \underbrace{\frac{1}{n+1} - S_n - \frac{1}{n}}_{\text{نوحد مقامات}}$$

$n - n - 1$

$$t_{n+1} - t_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} - \frac{1}{n(n+1)}$$

$$t_{n+1} - t_n < 0$$

المتتالية $(t_n)_{n \geq 1}$ متناقصة ..... $\boxed{2}$

$$S_n - t_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n - t_n = \frac{1}{\infty} = 0 \;\dots\; \boxed{3}$$

من $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ و $\boxed{3}$ نستنتج أن المتتاليتان $(S_n)_{n \geq 1}$ و $(t_n)_{n \geq 1}$ متجاورتان

مجموع السؤال الأول

* السؤال الثاني *

$U_1 + U_2 + U_3 = 12$

$U_7 + U_8 = 41$

① $U_n = U_0 + n.r$

* $U_1 + U_2 + U_3 = 12$

$(U_0 + r) + (U_0 + 2r) + (U_0 + 3r) = 12$

$3U_0 + 6r = 12$ $(\div 3)$

$U_0 + 2r = 4$ ...... $\boxed{1}$

* $U_7 + U_8 = 41$

$(U_0 + 7r) + (U_0 + 8r) = 41$

$2U_0 + 15r = 41$ ...... $\boxed{2}$

من ① نجد:

$\boxed{U_0 = 4 - 2r}$ ...... $\boxed{3}$

نعوض ③ في ②:

$2(4 - 2r) + 15r = 41$

$8 - 4r + 15r = 41$

$8 + 11r = 41$

$\Longrightarrow 11r = 33$

$\rightarrow r = 3$

نعوض في ③:

$U_0 = 4 - 2(3)$

$U_0 = 4 - 6$

$\rightarrow U_0 = -2$

② $S = U_0 + U_1 + \dots + U_{20}$

$S = \frac{n(a+l)}{2}$

$S = \frac{21(-2+58)}{2}$

$S = \frac{21(\cancel{56})^{28}}{\cancel{2}}$

$S = 21 \times 28$

$S = 588$

التعويض في القانون:

$a = U_0 = -2$

$n = 20 - 0 + 1 = 21$

$l = U_{20}$

$U_{20} = U_0 + 20r$

$= -2 + 20(3)$

$= -2 + 60 = 58$

مجموع السؤال الثاني

* السؤال الثالث *

$Un = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{n!}$

نجد أن المتتالية Un هي مجموع متتاليتين.

$Un = Vn + Wn$

$Vn = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$

* $Vn = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$

مجموع n حد من متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

حدها الأول:

$Vn = a\frac{1-q^n}{1-q}$

$n = n - 1 + 1 = n$
$a = \frac{1}{2}$
$q = \frac{1}{2}$

$Vn = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$

$Vn = \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\cancel{\frac{1}{2}}}$

$Vn = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

لمّا كان $-1 \leq q = \frac{1}{2} \leq 1$

$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \boxed{0}$

$\lim_{n \to +\infty} (Vn) = 1 - 0 = \boxed{1}$

* $Wn = \frac{1}{n!}$

$n! \geq n$

$0 \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}$

$\lim_{n \to +\infty} (0) = 0$

$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$

حسب مبرهنة الإحاطة $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n!}\right) = 0$

* $Un = Vn + Wn$

$\lim_{n \to +\infty} Un = \lim_{n \to +\infty} Vn + \lim_{n \to +\infty} (Wn)$

$\lim_{n \to +\infty} Un = 1 + 0 = \boxed{1}$

نجد أن $(Un)_{n \geq 1}$ متقاربة من الواحد.

مجموع السؤال الثالث

* السؤال الرابع *

$U_0 = -4$

$U_{n+1} = \frac{3}{4} U_n - 2$

① $V_{n+1} = U_{n+1} + 8$

$V_{n+1} = \frac{3}{4} U_n - 2 + 8$

$V_{n+1} = \frac{3}{4} U_n + 6$

$V_{n+1} = \frac{3}{4} \left[U_n + \frac{6}{\frac{3}{4}} \right]$

$V_{n+1} = \frac{3}{4} \left[U_n + \cancel{6}^{2} \times \frac{4}{\cancel{3}} \right]$

$V_{n+1} = \frac{3}{4} [\underbrace{U_n + 8}_{V_n}]$

$\boxed{V_{n+1} = \frac{3}{4} V_n}$

$(V_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية

أساسها $q = \frac{3}{4}$

② الحد الأول:

$V_0 = U_0 + 8$

$V_0 = -4 + 8 = +4$

الحد العام:

$V_n = V_0 \cdot q^n$

«$V_n = 4 \left(\frac{3}{4}\right)^n$»

$V_n = U_n + 8$

نعزل U_n:

$U_n = V_n - 8$

«$U_n = 4 \left(\frac{3}{4}\right)^n - 8$»

③

$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$

$S_n = V_0 - 8 + V_1 - 8 + V_n - 8 + \dots + V_n - 8$

$S_n = \underbrace{V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n}_{\text{هندسية}} \underbrace{-8 - 8 - 8 - \dots - 8}_{(n+1)\ \text{حد}}$

$S_n = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} - 8(n+1)$

$S_n = 4 \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}} - 8(n+1)$

$a = V_0 = 4$

$q = \frac{3}{4}$

$n = n - 0 + 1 = n + 1$

$S_n = 4 \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{\frac{1}{4}} - 8(n+1)$

$S_n = 4 \times 4 \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \right] - 8(n+1)$

$S_n = 16 \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n} \right] - 8(n+1)$

تمت

$S_n = 16[1-(\frac{3}{4})^1 \cdot (\frac{3}{4})^n] - 8n - 8$

$S_n = 16 - 12(\frac{3}{4})^n - 8n - 8$

$S_n = 8 - 12(\frac{3}{4})^n - 8n$

لما كانت $-1 < q = \frac{3}{4} < 1$

$\lim_{n\to+\infty} (\frac{3}{4})^n = 0$

$S_n = 8 - 12(0) - 8n$

$S_n = 8 - (+\infty) = -\infty$

مجموع السؤال الرابع ......

* السؤال الخامس *

$U_0 = \frac{3}{2}$; $U_{n+1} = U_n^2 - 2U_n + 2$

(1)

(a) $U_{n+1} = f(U_n)$

متتالية مدرجة (الإتمام لمربع كامل)

$U_{n+1} = U_n^2 - 2U_n + 2$

$= U_n^2 - 2U_n + 1 - 1 + 2$

$= (U_n - 1)^2 + 1$

(b) $1 \le U_n \le 2$

نسمي القضية

$E(n): 1 \le U_n \le 2$

1] نثبت صحة القضية من أجل $n=0$

$E(0): 1 \le U_0 \le 2$ — $E(0)$ محققة

$1 \le \frac{3}{2} \le 2$

2] نفرض أن القضية صحيحة من أجل n

$1 \le U_n \le 2$ ......(*)

3] نثبت صحة القضية من أجل $n+1$

$1 \le U_{n+1} \le 2$??

$1 \le U_n^2 - 2U_n + 2 \le 2$

من الطلب السابق نجد:

$U_{n+1} = (U_n - 1)^2 + 1$

انطلق من (*)

$1 \le U_n \le 2$ نطرح $\boxed{1}$

$0 \le U_n - 1 \le 1$ نربع

$0 \le (U_n - 1)^2 \le 1$ نضيف $\boxed{1}$

$1 \le (U_n - 1)^2 + 1 \le 2$

$1 \le U_{n+1} \le 2$

$E(n+1)$ محققة والقضية صحيحة

بالتدريج مهما كانت $n \geq 0$

و (U_n) محدودة

تتمة

②
ⓐ

$U_{n+1}-U_n=U_n^2-2U_n+2-U_n$

$U_{n+1}-U_n=U_n^2-3U_n+2$

$U_{n+1}-U_n=(U_n-2)(U_n-1)$

وهو المطلوب.

ⓑ من الطلب السابق لدينا

$U_{n+1}-U_n=(U_n-2)(U_n-1)$

وأيضاً $1\leq U_n\leq 2$

$\Rightarrow U_n-2\leq 0$

$U_n-1\geq 0$

$(U_n-2)(U_n-1)\leq 0$

$U_{n+1}-U_n\leq 0$

(U_n) متناقصة

③

وجدنا أن $(U_n)_{n\geq 0}$ متناقصة

ومحدودة من الأدنى بالقاصر

(1) فهي متقاربة

* وهي تملك نهاية حقيقية l

هي حل للمعادلة $f(x)=x$

$x^2-3x+2=0$

$(x-2)(x-1)$

إما: $x=2$ مرفوض

أو: $x=1$ مقبول

f مستمر عند ①

$\lim_{n\to+\infty} U_n=1$

نجد أن (U_n) متقاربة من الواحد.

مجموع السؤال الخامس

---

* السؤال السادس *

①

$\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^{n-1}}$

نبني القضية

$E(n):\ \frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^{n-1}}$

1. نثبت صحة القضية من أجل $n=1$

$E(1):\ \frac{1}{1!}\leq\frac{1}{2^0}$

$1\leq 1$

$E(1)$ محققة

2. نفرض أن القضية صحيحة من أجل n

$\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^{n-1}}$ ..... (*)

3. نثبت صحة القضية من أجل $n+1$

$\frac{1}{(n+1)!}\leq\frac{1}{2^n}$

$l_1=\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n!}$

حسب (*)

تتمة

$$\leq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\leq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2}{2^n}$$

$$\leq \frac{2}{n+1} \cdot \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

$= l_2$

حيث $0 < \frac{2}{n+1} \leq 1$

$E(n+1)$ محققة والقضية صحيحة بالتدريج مهما كانت $n \geq 1$

② بما أن $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

نطبق العلاقة على البسوط

$$U_n \leq 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

مجموع n حد من متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

حدها الأول: $a = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

$$U_n \leq 2 + a\,\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$U_n \leq 2 + 1\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$U_n \leq 2 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}$$

$$U_n \leq 2 + 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$$U_n \leq 2 + 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$U_n \leq 4 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 4$$

$-1 < q = \frac{1}{2} < 1$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

(U_n) محدودة من الأعلى بالراجح $\boxed{M = 4}$

③ المتتالية محدودة من الأعلى بالراجح $M = 4$

يجب إثبات أنها متزايدة لنثبت تقاربها.

$$U_{n+1} - U_n = \cancel{2} + \cancel{\frac{1}{1!}} + \cancel{\frac{1}{2!}} + \cancel{\frac{1}{3!}} + \dots + \cancel{\frac{1}{n!}} + \frac{1}{(n+1)!}$$

$$- \cancel{2} - \cancel{\frac{1}{1!}} - \cancel{\frac{1}{2!}} - \cancel{\frac{1}{3!}} - \dots - \cancel{\frac{1}{n!}}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

$(U_n)_{n \geq 1}$ متزايدة

بما أن المتتالية (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالراجح $\boxed{M = 4}$ فهي متقاربة.

مجموع السؤال السادس

بالجد و العمل نحقق الأمل

النموذج B **مركز المنير التعليمي** معهد ابي الفداء معهد حماه الأول

المتتاليات و نهاية المتتالية

المدة : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n+1}{2n+5}\right)$ ساعة

2021 الاختبار الأول الدرجة العظمى : 300

توزيع الدرجات (الأول 50 + الثاني 40 + الثالث 40 + الرابع 50 + الخامس 50 + السادس 70)

السؤال الأول: متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق:
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \quad n \geq 0 \end{cases}$$

① أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ هي متتالية حسابية ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n

واستنتج عبارة u_n بدلالة n ② احسب المجموع $S = v_0 + v_1 + \cdots + v_{19}$

السؤال الثاني: a و b و c ثلاث حدود متوالية من متتالية هندسية اساسها q (حيث $a \neq 0$ و $a < c$)

كما أن $4a$ و $3b$ و $2c$ ثلاث حدود متوالية من متتالية حسابية ، احسب q

السؤال الثالث: ❶ ادرس اطراد المتتالية : $u_n = \dfrac{n}{5^n}$ ❷ ادرس تقارب المتتالية : $V_n = \dfrac{n!-3}{n!}$

السؤال الرابع: المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ الحد العام هو : $u_n = \dfrac{1}{n^2+3n+2}$

① أوجد عددين حقيقيين a,b يحققان : $u_n = \dfrac{a}{n+1} + \dfrac{b}{n+2}$

② في حالة عدد طبيعي غير معدوم n لتكن : $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots\dots + u_n$

عبر عن S_n بدلالة n و استنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$

السؤال الخامس: المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة تدريجيا وفق :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n+3}{u_n+3} \end{cases}$$

① أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ التي حدها العام $v_n = \dfrac{u_n-3}{u_n+1}$ هي متتالية هندسية جد اساسها

② اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم احسب نهايتها

③ استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم احسب نهايتها و استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

السؤال السادس : لتكن θ عدد حقيقي من المجال $]0, \frac{\pi}{2}[$ ، نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

وفق : $\begin{cases} u_0 = 2\cos\theta \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$ ① أثبت بالتدريج أن : $u_n = 2\cos(\dfrac{\theta}{2^n})$

② بفرض $\theta = \dfrac{\pi}{3}$: a) أوجد u_0 و u_1 ثم أثبت أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً

b) أثبت بالتدريج $0 \leq u_n \leq 2$ أيا كان $n \in \mathbb{N}$

c) علل تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ثم احسب نهايتها

((انتهت الأسئلة))

مع التمنيات بالنجاح و التوفيق للجميع المدرس : كاسر خليل عتيق

السؤال الأول

$U_0 = 2$

$U_{n+1} = \frac{U_n}{1+U_n} \quad n \geq 0$

[1] $V_n = \frac{1}{U_n}$

$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n}$

$= \frac{1}{\frac{U_n}{1+U_n}} - \frac{1}{U_n}$

$= \frac{1+U_n}{U_n} - \frac{1}{U_n} = \frac{\cancel{1}+U_n-\cancel{1}}{U_n}$

$= \frac{U_n}{U_n} = 1 = Const$

$(V_n)_{n\geq 0}$ حسابية أساسها $r = 1 = const$

$V_n = V_0 + nr$

$V_0 = \frac{1}{U_0} = \frac{1}{2}$

$V_n = \frac{1}{2} + n = \frac{1+2n}{2}$

$U_n = \frac{1}{V_n} = \frac{1}{\frac{1+2n}{2}} = \frac{2}{1+2n}$

[2] $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{19}$

$S_n = n\,\frac{a+l}{2}$ حيث:

$n = 19 - 0 + 1 = 20$

$V_0 = \frac{1}{2}$

$V_{19} = \frac{1+2(19)}{2}$

$V_{19} = \frac{39}{2}$

$S_n = \cancel{20}\,\frac{\frac{39}{2}+\frac{1}{2}}{\cancel{2}}$

$= 10\left[\frac{40}{2}\right]$

$= 10(20) = 200$

السؤال الثاني

★ لدينا a ، b ، c ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسية

حد أول $a \rightarrow b = a.q \rightarrow c = a.q^2$ ★

★ ولدينا $4a$ ، $3b$ ، $2c$ ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابية

$3b = \frac{2c+4a}{2}$

$(2\div)\quad 6b = 2c + 4a$

$3b = c + 2a$

بالاستفادة من ★

$3(a.q) = a.q^2 + 2a$

$aq^2 + 2a - 3a.q$

$a(q^2 + 2 - 3q) = 0$

$a \neq 0 \quad (q^2 - 3q + 2) = 0$

إما $(q-2) = 0 \Rightarrow q = 2$

أو $(q-1) = 0 \Rightarrow q = 1$

لكن بما أن $a < c$

مرفوض $q = 1 \Rightarrow$ ثابتة

السؤال الثالث

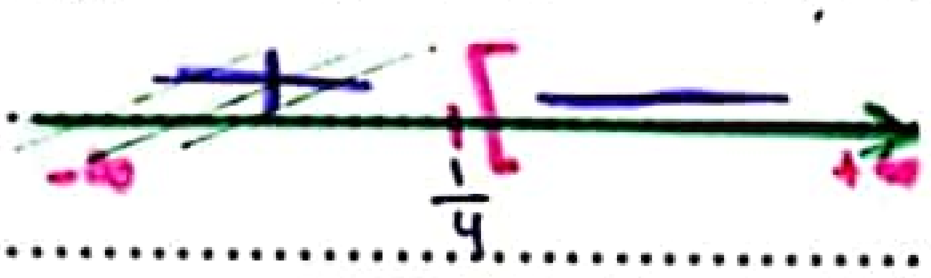
1) $U_n = \frac{n}{5^n}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{n+1}{5^{n+1}} - \frac{n \times 5}{5^n \times 5}$

$= \frac{n+1-5n}{5^{n+1}} = \frac{-4n+1}{5^{n+1}}$

$-4n+1=0$

$\Rightarrow n = \frac{1}{4}$



$(U_n)_{n\geq 1}$ متناقصة بدءاً من $n=1$

2) $U_n = \frac{n!-3}{n!} = 1 - \frac{3}{n!}$

ب $n! \geq n$

نضرب ب -3 : $0 < \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}$

نضيف 1 : $0 > \frac{-3}{n!} \geq \frac{-3}{n}$

$\frac{-3}{n} + 1 \leq 1 - \frac{3}{n!} < 1$

$1 - \frac{3}{n} \leq U_n < 1$

$\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{3}{n} = 1 - 0 = 1$

$\lim_{n\to\infty} 1 = 1$

حسب مبرهنة الإحاطة $\lim_{n\to\infty} U_n = 1$

U_n متقاربة من 1

السؤال الرابع

$U_n = \frac{1}{n^2+3n+2}$

1) $\frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2}$

نوحد المقامات ونحذفها

$1 = a(n+2) + b(n+1)$

نعطي $a=-2$

$1 = 0 + b(-2+1)$

$1 = -b \Rightarrow b = -1$

نعطي $b=-1$

$1 = a + 0 \Rightarrow a = 1$

$$U_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

2) $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$

$= \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right)$

$+ \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \cdots$

$+ \left(\cancel{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+2}\right)$

$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$

$S_n = \frac{n+2-2}{2(n+2)} = \frac{n}{2n+4}$

$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}$

السؤال الخامس

$U_0 = 2$

$U_{n+1} = \dfrac{5U_n+3}{U_n+3}$

$\boxed{1}$ $V_n = \dfrac{U_n-3}{U_n+1}$

$V_{n+1} = \dfrac{U_{n+1}-3}{U_{n+1}+1}$

$= \dfrac{\frac{5U_n+3}{U_n+3} - 3(U_n+3)}{\frac{5U_n+3}{U_n+3} + 1(U_n+3)}$

$= \dfrac{5U_n+3-3U_n-9}{5U_n+3+U_n+3}$

$= \dfrac{2U_n-6}{6U_n+6} = \dfrac{2}{6}\left(\dfrac{U_n-3}{U_n+1}\right)$

$= \dfrac{2}{6}V_n$

$(V_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

$\boxed{2}$ $V_n = V_0 \cdot q^n$

$V_0 = \dfrac{U_0-3}{U_0+1} = \dfrac{2-3}{2+1} = \dfrac{-1}{3}$

$V_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{2}{6}\right)^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{6}\right)^n = 0$ $\quad -1 < q = \dfrac{2}{6} < 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$

$\boxed{3}$ $V_n = \dfrac{U_n-3}{U_n+1}$

$V_n(U_n+1) = U_n - 3$

$V_nU_n + V_n = U_n - 3$

$V_nU_n - U_n = -V_n - 3$

$U_n(V_n - 1) = -V_n - 3$

$U_n = \dfrac{-V_n-3}{V_n-1}$

لكن $V_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{2}{6}\right)^n$

$= \dfrac{-\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{6}\right)^n - 3}{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{6}\right)^n - 1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 3$

السؤال السادس

$U_0 = 2\cos\alpha$

$U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}$

1

نبحث المضية $E(n): U_n = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right), n \geq 0$

1- نثبت صحة القضية من أجل $n=0$

$\ell_1 = U_0 = 2\cos\alpha$

$\ell_2 = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2^0}\right) = 2\cos\alpha$

$\Rightarrow \ell_1 = \ell_2$

2- نفرض أن القضية صحيحة من أجل n

$E(n): U_n = 2\cos\frac{\alpha}{2^n}$ ---★

3- نثبت صحة القضية من أجل $n+1$

$E(n+1): U_{n+1} = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)$ ---??

$\ell_1 = U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}$ حسب ★

$= \sqrt{2+2\cos\frac{\alpha}{2^n}}$

$= \sqrt{2\left(1+\cos\frac{\alpha}{2^n}\right)}$

$= \sqrt{2\left(2\cos^2\frac{\frac{\alpha}{2^n}}{2}\right)} = \sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2^{n+1}}}$

$= 2\left|\cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)\right| = \ell_2$

$\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \ell_1 = 2\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}} = \ell_2$

$E(n+1)$ محققة، والقضية صحيحة بالتدرج

$\forall n \geq 0$

2 $U_0 = 2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}}{2^0}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

$U_1 = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$

نلاحظ أن $U_0 < U_1$

لنثبت أن $U_{n+1} > U_n$ $E(n)$

لكن $U_{n+1} = f(U_n)$

$f(x) = \sqrt{2+x}$

f اشتقاقي على $]-2, +\infty[$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}} \neq 0 > 0$

• f متزايد تماماً على المجال $[0, +\infty[$ تحافظ على إشارة التراجح

1- نثبت صحة القضية من أجل $n=0$

$U_1 > 0$

$\sqrt{3} > 0$

2- نفرض أن القضية صحيحة من أجل n

$U_{n+1} > U_n$ ---★

3 نثبت صحة القضية من أجل $n+1$

$U_{n+2} > U_{n+1}$ ---??

انطلق من ★ $U_{n+1} > U_n$

• بما أن f تابع متزايد تماماً على المجال $[0, +\infty[$ فهو يحافظ على إشارة التراجح

$f(U_{n+1}) > f(U_n)$

$\sqrt{2+U_{n+1}} > \sqrt{2+U_n}$

$U_{n+2} > U_{n+1}$

$E(n+1)$ محققة، والقضية صحيحة بالتدرج $\forall n \geq 0$

$(U_n)_{n\geq 0}$ متزايدة

$\boxed{2}$ (b)

$E(n): 0 \leq U_n \leq 2 \quad n \geq 0$

1- نثبت صحة القضية من أجل $n=0$

$0 \leq 1 \leq 2$ محققة

2- نفرض أن القضية صحيحة من أجل n

$0 \leq U_n \leq 2$ ---*

3- نثبت صحة القضية من أجل $n+1$

$0 \leq U_{n+1} \leq 2$ ---??

انطلق من *

بما أن f تابع متزايد على $[0,+\infty[$ نحافظ على إشارة التراجح

$f(0) \leq f(U_n) \leq f(2)$

$0 \leq \sqrt{2} \leq \sqrt{2+U_n} \leq 2$

$0 \leq U_{n+1} \leq 2$

$E(n+1)$ محققة إذاً القضية صحيحة بالتدريج $\forall n \geq 0$

(C)

بما أن U_n متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ $M=2$ راجع

فهي متقاربة وتملك نهاية حقيقية l هو حل للمعادلة

$f(x) = x$

نربع $\sqrt{2+x} = x$

$2 + x = x^2$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x-2)(x+1) = 0$

إما $x = 2$ مقبول

أو $x = -1$ مرفوض

$\lim_{n \to +\infty} U_n = l = 2$

Always take the HARD RoAD

Dr.ASMAA J.sh

بالجد و العمل نحقق الأمل

النموذج A **مركز المنير التعليمي** **معهد ابي الفداء** **معهد حماه الأول**

النهايات و الاستمرار و الاشتقاق

المدة : ساعة ونصف

2021 **الاختبار الثاني** **الدرجة العظمى : 300**

توزيع الدرجات (الأول 40 + الثاني 40 + الثالث 40 + الرابع 70 + الخامس 110)

السؤال الأول: نجد جانبا جدول تغيرات التابع f المعرف على $[-5,-2[\cup]-2,1[\cup]1,+\infty[$ و المطلوب :

x	-5		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	$3\ \|\|\ -2$	$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\infty \ \|\| \ -\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty \ \|\| \ -\infty$	$\nearrow$	3

① اكتب معادلة كل مستقيم مقارب شاقولي أو أفقي للخط البياني C_f

② هل $f(-5)$ قيمة حدية ؟ علل اجابتك ③ ما عدد حلول المعادلة $f(x)=3$ ؟

④ اكتب معادلة نصف مماس لمنحني التابع في نقطة منه فاصلتها $x=0$ من اليمين

السؤال الثاني: اذا كان $|f(x)+3|\le \frac{x+\cos x}{x^2+1}$ احسب $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\cos x}{x^2+1}\right)$ و استنتج $\lim_{x\to+\infty}(f(x))$

السؤال الثالث: ليكن التابع f المعين بالعلاقة : $f(x)=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$

❶ ادرس نهاية f في جوار 1 ❷ أوجد مجالا I مركزه 1 و يحقق $f(x)>10^4$ أيا كانت x من $I\setminus\{1\}$

السؤال الرابع: ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=2x+\sqrt{|9x^2-1|}$ خطه البياني C و المطلوب :

❶ احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x]$

❷ استنتج أن الخط C يقبل مستقيم مقارب مائل Δ يطلب إيجاد معادلته و دراسة الوضع النسبي

السؤال الخامس: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ وفق : $f(x)=a\ x+b+\frac{1}{x^2}$

أولاً : عين قيمة كل من العددين الحقيقيين a , b ليكون للتابع f قيمة حدية هي (2) عند x=1

ثانياً : من أجل : $(a=2\ ,\ b=-1)$ التابع يكتب : $f(x)=2x-1+\frac{1}{x^2}$

1) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته : y = 2x – 1 مقارب مائل للخط C عند $+\infty$ وعند $-\infty$

2) ادرس تغيرات التابع f و دل على القيمة الصغرى محلياً للتابع f واستنتج كل مقارب // 'yy .

3) استنتج أن للمعادلة : $f(x)=0$ جذر وحيد احصره بين عددين صحيحين متتاليين

4) اوجد معادلة المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها (-1)

5) ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C

6) ناقش بيانياً و بحسب قيم الوسيط $m\in R$ عدد حلول المعادلة : $2x^3-(1+m)\ x^2+1=0$

((انتهت الاسئلة))

مع التمنيات بالنجاح للجميع **المدرس : كاسر خليل عتيق**

الجمعة 19 / 3 / 2021

السؤال الأول

① $x=-2$ مقارب شاقولي

$x=1$ مقارب شاقولي

$y=3$ مقارب أفقي

② نعم قيمة محلية لأن:

$-5 \in D_1 =]-6,-4[$

أياً كانت:

$x \in D_1 \cap D = [-5,-4[$

$f(x) \leq 2$

$f(x) \leq f(-5)$

$f(-5)=2$ قيمة محلية كبرى

③ ملاذ

④ $f(0)=4$, $f'(0^+)=-2$

$y = f'(0^+)(x-0) + f(0)$

$T: y = -2x+4$

مجموع السؤال الأول

السؤال الثاني

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x+\cos x}{x^2+1}\right] = \frac{+\infty + \cos\infty}{\infty+1}$$

إحاطة

$-1 \leq \cos x \leq 1$

$x-1 \leq x+\cos x \leq x+1$

نقسم على $x^2+1>0$

$$\frac{x-1}{x^2+1} \leq \frac{x+\cos x}{x^2+1} \leq \frac{x+1}{x^2+1}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x^2+1}\right)=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x^2+1}\right)=0\end{array}\right\}$$

حسب مبرهنة الإحاطة

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\cos x}{x^2+1}\right)=0$$

$$|f(x)+3| \leq \frac{x+\cos x}{x^2+1}$$

$|f(x)-\ell| \leq g(x)$

وجدنا أن:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\cos x}{x^2+1}\right)=0$$

حسب مبرهنة الإحاطة (2)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell = -3$$

مجموع السؤال الثاني

* السؤال الثالث *

(1)

$$f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

(2)

$x \in]1-\alpha \,,\, 1+\alpha[$

$$\alpha = \sqrt{\frac{A}{10^m}} = \sqrt{\frac{10^{-2}}{10^4}} = \sqrt{10^{-6}}$$

$\alpha = 10^{-3} = 0{,}001$

$x \in]1-0{,}001 \,,\, 1+0{,}001[$

$x \in]0{,}999 \,,\, 1{,}001[$

$$f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2} > \frac{2(0{,}999)-1}{(1{,}001-1)^2}$$

$$> \frac{1{,}998-1}{(0{,}001)^2}$$

$$> \frac{0{,}998}{10^{-6}}$$

$> 0{,}998 \times 10^6$

$> 99{,}8 \times 10^4 > 10^4$

$\Rightarrow f(x) > 10^4$

أياً كانت: $x \in]1-\alpha \,,\, 1+\alpha[$

$x \in]0{,}999 \,,\, 1{,}001[$

مجموع السؤال الثالث

* السؤال الرابع *

$$f(x) = 2x + \sqrt{|9x^2-1|}$$

$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
	$+$		$-$		$+$	

$$|9x^2-1| = \begin{cases} 9x^2-1 & ; x \in]-\infty, -\frac{1}{3}[\cup]\frac{1}{3}, +\infty[\\ -9x^2+1 & ; x \in]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[\end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = (-\infty + \infty)$$ عدم تعيين

$$= \lim_{x \to -\infty} \left[2x + \sqrt{9x^2-1}\right]$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left[2x + \sqrt{x^2\left(9-\frac{1}{x^2}\right)}\right]$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left[2x - x\sqrt{9-\frac{1}{x^2}}\right]$$

$$= \lim_{x \to -\infty} x\left(2 - \sqrt{9-\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= -\infty(2-3) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x]$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left[3x + \sqrt{9x^2-1}\right]$$

يتبع ←

نضرب ونقسم بالمرافق

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\cancel{9x^2}-\cancel{9x^2}+1}{3x-\sqrt{9x^2-1}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3x-\sqrt{9x^2-1}}\right) = 0$$

(2) وجدنا أن:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x)\right]=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-y_D\right]=0$$

$\Leftarrow$ $D: y=-x$ مقارب

مائل في جوار $-\infty$

الوضع النسبي:

$$f(x)-y_D = 3x+\sqrt{|9x^2-1|}$$

$$f(x)-y_D=0$$

$$\sqrt{|9x^2-1|}=-3x$$

شرط الحل:

$|9x^2-1| \geq 0$

محقق دوماً

$-3x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$

$D = \,]-\infty, 0]$

$$\sqrt{|9x^2-1|}=-3x$$

نربع $\Leftarrow$

$$|9x^2-1| = 9x^2$$

إما $\cancel{9x^2}-1=\cancel{9x^2}$

$-1 \neq 0$

مستحيلة

أو $9x^2-1=-9x^2$

$18x^2=1$

$\Rightarrow x^2=\frac{1}{18}$

إما $x=\frac{1}{\sqrt{18}}>0$ مرفوض

أو $x=-\frac{1}{\sqrt{18}}=-\frac{1}{3\sqrt{2}}$

$=-\frac{\sqrt{2}}{6}$ مقبول

$\Rightarrow y=\frac{\sqrt{2}}{6} \rightarrow A\left(-\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}\right)$

نقطة مشتركة

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{6}$	0
$f(x)-y_D$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	C تحت D		C فوق D

نقطة مشتركة $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}\right)$

* السؤال الخامس *

أولاً :

$f(x) = ax + b + \frac{1}{x^2}$

$D_f = R \setminus \{0\}$

$f(1) = 2$

$a + b + 1 = 2$

$a + b = 1$ — (1)

f قابلة للاشتقاق على $R \setminus \{0\}$

$f'(x) = a - \frac{2}{x^3}$

$= \frac{ax^3 - 2}{x^3}$

$f'(1) = 0 \Rightarrow a(1)^3 - 2 = 0$

$\Rightarrow a = 2$

نعوض في (1) :

$2 + b = 1$

$\Rightarrow b = -1$

$\Rightarrow f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x^2}$

ثانياً : (1)

$f(x) - y_\Delta = \frac{1}{x^2}$

$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0$

$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0$

$\Delta : y = 2x - 1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$ و $-\infty$

(2) f مستمر واشتقاقي على

$R \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0} f(x) = -1 + \frac{1}{0^+} = +\infty$

$x = 0$ مقارب شاقولي عند $+\infty$

$f'(x) = 2 - \frac{2x}{x^4}$

$= \frac{2x^4 - 2x}{x^4}$

$f'(x) = 0$

$2x^4 - 2x = 0$

$2x(x^3 - 1) = 0$

إما $x = 0 \notin D_f$

أو $x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$

$\Rightarrow f(1) = 2$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

$f(1) = 2$ قيمة حدية صغرى

③ من الجدول:

f مستمرة ومتزايدة تماماً على $I =]-\infty, 0[$

$0 \in f(]-\infty, 0[) =]-\infty, +\infty[$

⬅ المعادلة $f(x) = 0$ لها حل وحيد $\alpha \in I$

من الجدول:

$0 \notin f(]0, 1[) =]2, +\infty[$

⬅ ليس للمعادلة $f(x) = 0$ أي حل في $]0, 1[$

من الجدول:

$0 \notin f([1, +\infty[) = [2, +\infty[$

⬅ ليس للمعادلة $f(x) = 0$ أي حل في $[1, +\infty[$

⬅ المعادلة $f(x) = 0$ لها حل وحيد في $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty > 0$

$f(-1) = -2 < 0$

f مستمرة ومتزايدة على $]-1, 0[$

$0 \in f(]-1, 0[) =]-2, +\infty[$

⬅ $\alpha \in]-1, 0[$

$-1 < \alpha < 0$

④ $f(-1) = -2$

$$f'(-1) = \frac{2(-1)^3 - 2}{(-1)^3} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$T: \ y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$

$T: \ y = 4(x+1) - 2$

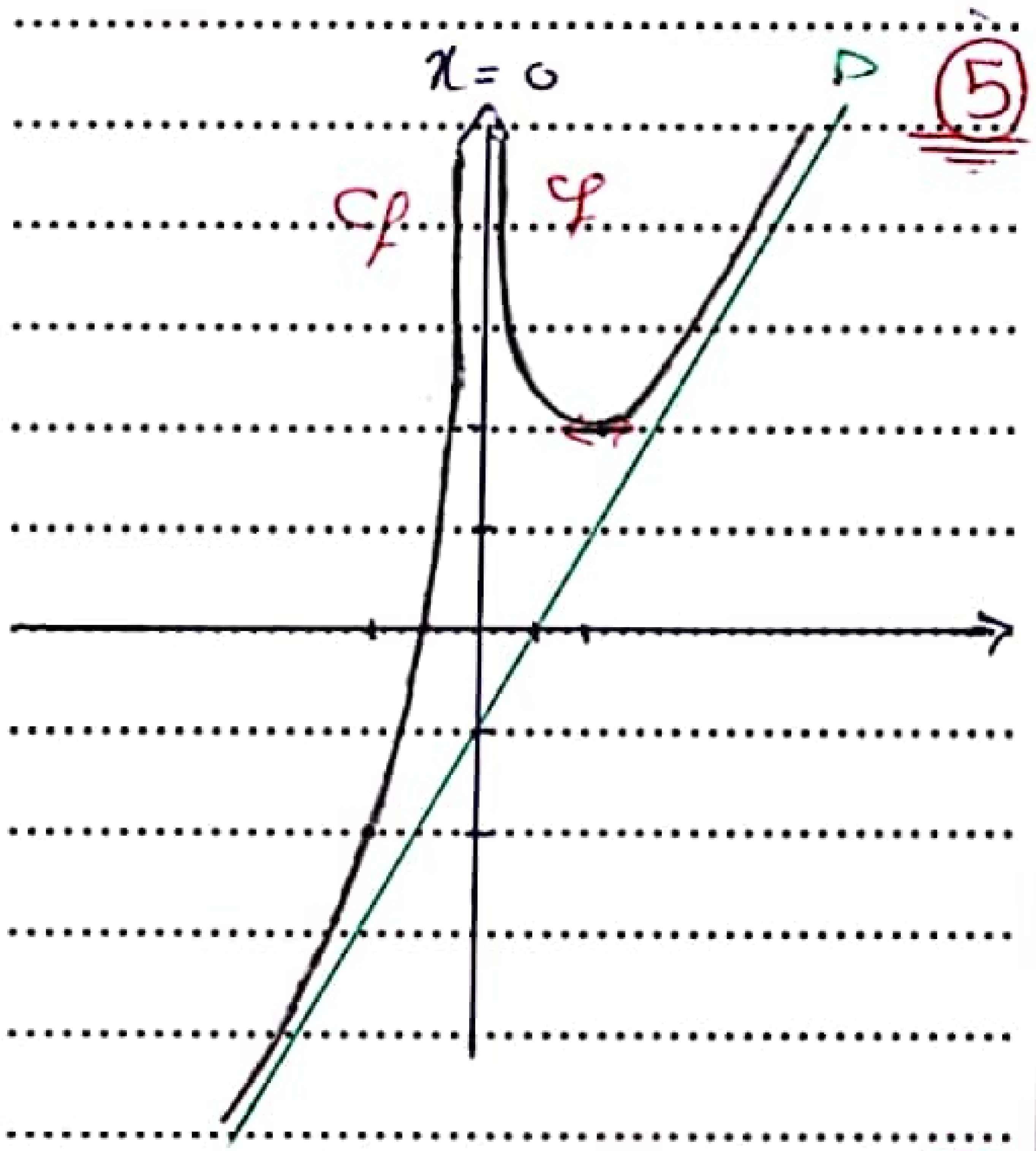
$T: \ y = 4x + 2$

للرسم: $\Delta: \ y = 2x - 1$

x	0	$\frac{1}{2}$
y	-1	0

$f(-1) = -2$

⑤



⑥ $2x^3 - (1+m)x^2 + 1 = 0$

$2x^3 - x^2 - x^2 m + 1 = 0$

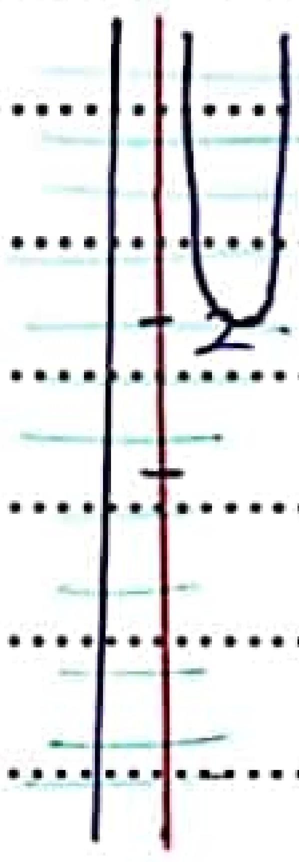
$2x^3 - x^2 + 1 = x^2 m$

$$\frac{2x^3 - x^2 + 1}{x^2} = m$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 + 1 & x^2 \\ \mp 2x^3 & 2x - 1 \\ \hline -x^2 + 1 & \\ \pm x^2 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$2x-1+\frac{1}{x^2}=m$

$f(x)=m$



$m\in]-\infty,2[$ المعادلة حل وحيد

$m=2$ المعادلة حلان

$m\in]2,+\infty[$ المعادلة ثلاث حلول

مجموع السؤال الخامس

انتهى السلم

النموذج B مركز المنير التعليمي معهد ابي الفداء معهد حماه الأول

النهايات و الاستمرار و الاشتقاق

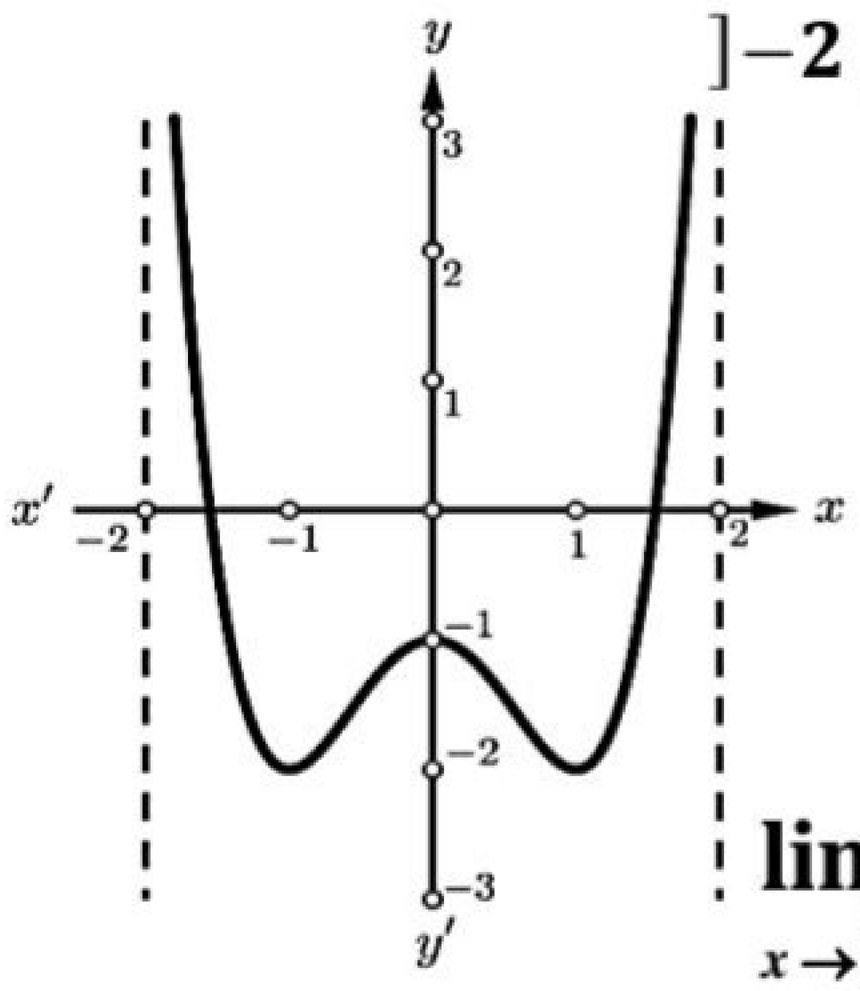
المدة : ساعة ونصف

الاختبار الثاني

2021 الدرجة العظمى : 300

توزيع الدرجات (الأول 40 + الثاني 40 + الثالث 50 + الرابع 70 + الخامس 100)

السؤال الأول : الشكل المجاور هو C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]-2, 2[$



1) عين القيم الحدية للتابع f

2) اكتب معادلة كل مقارب شاقولي للخط C

3) أوجد $f(0)$, $f'(0)$ و $f([-1.1])$

4) كم عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

السؤال الثاني: ليكن $g(x) = \tan(2x)$ و المطلوب :

احسب $g(\frac{\pi}{8})$, $g'(x)$, $g'(\frac{\pi}{8})$ ثم استنتج $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{8}} \left(\dfrac{\tan 2x - 1}{2x - \frac{\pi}{4}} \right)$

السؤال الثالث : التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = 2x - 3E(x)$

① اكتب عبارة $f(x)$ بصيغة مستقلة عن $E(x)$ على المجال $[1, 3[$ ② احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x^2}$

السؤال الرابع: ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ بالصيغة : $f(x) = \dfrac{x+2}{|x|+1}$

❶ ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر من اليسار ثم اكتب معادلة نصف المماس من اليسار لخطه البياني C_f في نقطة منه فاصلتها $x = 0$

❷ عندما $x > 0$ فإن $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$

① احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ثم أعط عدداً A يحقق الشرط إذا كان $x > A$ كان $f(x) \in]0.95 , 1,05[$

② أوجد $f'(x)$ ثم اثبت أن التابع $g(x) = \dfrac{\sin x + 2}{\sin x + 1}$ اشتقاقي على المجال $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

ثم استنتج $g'(x)$

السؤال الخامس : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]1,+\infty[$ وفق $f(x) = x - 2\sqrt{x-1} - 1$

① ادرس قابلية اشتقاق التابع عند (1) ② ادرس تغيرات التابع f و نظم جدولاً بها

③ أثبت أن f(1) قيمة حدية للتابع ④ أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في $]1,+\infty[$

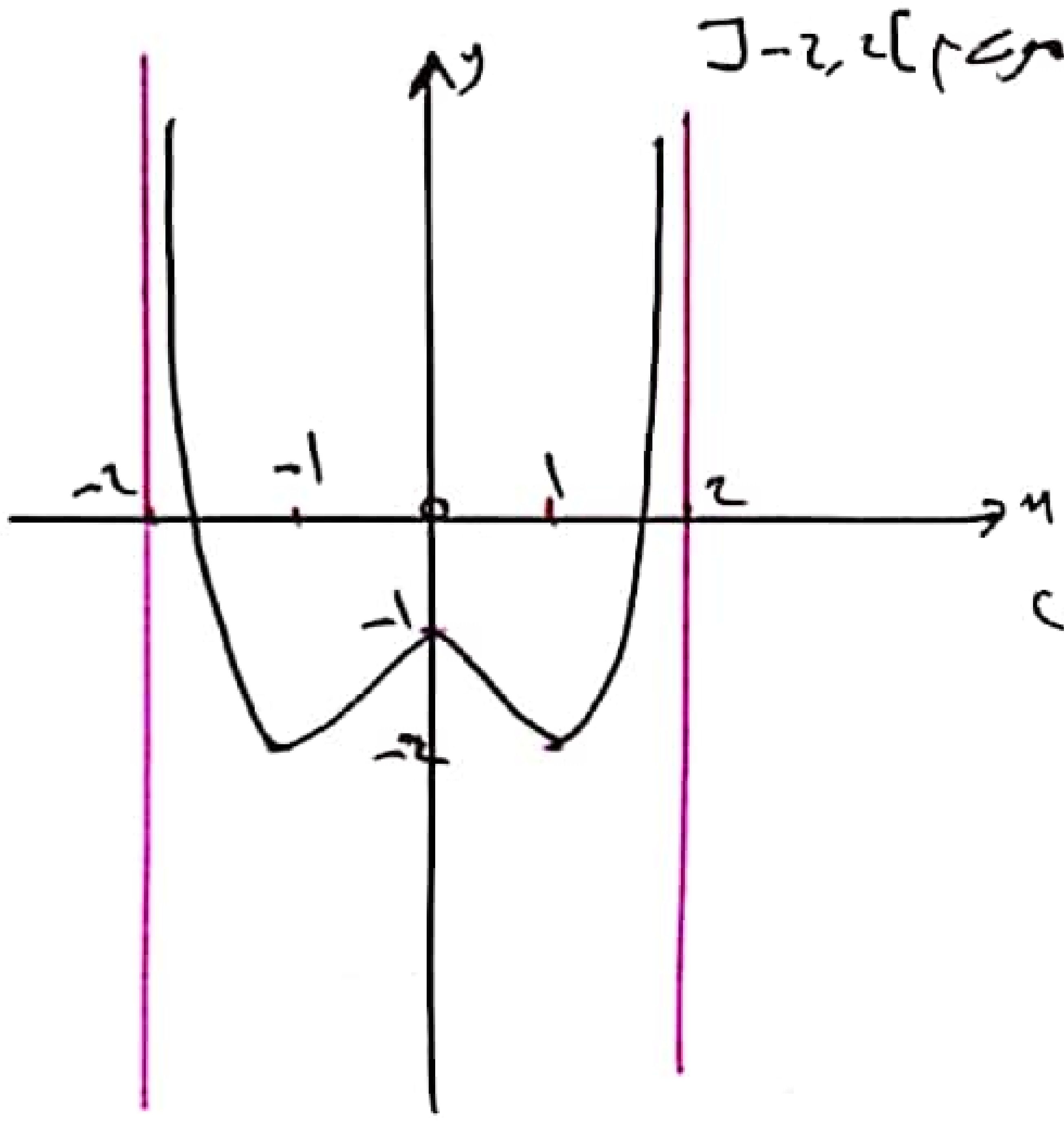
⑤ أوجد معادلة المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها $x = 5$

⑥ ارسم الخط البياني C للتابع f و استنتج رسم C_1 للتابع $f_1(x) = x - 2\sqrt{x-1}$

((انتهت الأسئلة))

مع التمنيات بالنجاح و التوفيق للجميع المدرس : كاسر خليل عتيق

الأحد : 21 / 3 / 2021



السؤال الأول: في الشكل المجاور f معرف على $]-2,2[$

① عين القيم الحدية للتابع f

$f(-1)=-2$ قيمة حدية صغرى

$f(0)=-1$ " " كبرى

$f(1)=-2$ " " صغرى

② أكتب معادلة كل مقارب شاقولي (إن وجد)

$x=2$ و $x=-2$

③ أوجد $f'(0)$ و $f([-1,1])$

$f'(0)=0$

$f([-1,1])=[-2,-1]$

④ عدد حلول المعادلة $f(x)=0$

حلان

السؤال الثاني: ليكن $g(x)=\tan(2x)$

أ- احسب $g(\frac{\pi}{8})$ ، $g'(x)$ ، $g'(\frac{\pi}{8})$

ب- احسب $\lim_{x\to\frac{\pi}{8}}\left(\frac{\tan 2x-1}{2x-\frac{\pi}{4}}\right)$

الحل

$g(x)=\tan(2x) \longrightarrow g(\frac{\pi}{8})=\tan\frac{\pi}{4}=1$

$g'(x)=2(1+\tan^2(2x)) \rightarrow g'(\frac{\pi}{8})=2(1+1)=4$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{8}}\left(\frac{\tan 2x-1}{2x-\frac{\pi}{4}}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{8}}\frac{g(x)-g(\frac{\pi}{8})}{2(x-\frac{\pi}{8})}$$

حسب تعريف المشتق

$$=\frac{1}{2}g'(\frac{\pi}{8})$$

$$=\frac{1}{2}(4)=\boxed{2}$$

السؤال الثالث: f معرف على R وفق: $f(x)=2x-3E(x)$

① اكتب عبارة $f(x)$ بصيغة مستقلة عن $E(x)$ على المجال $[1,3[$

$$f(x)=3x-3E(x)=\begin{cases}2x-3 & ; x\in[1,2[\\ 2x-6 & ; x\in[2,3[\end{cases}$$

② احسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}$

$$x-1<E(x)\le x$$

نضرب بـ -3

$$-3x+3>-3E(x)\ge -3x$$

نضيف $2x$

$$-x+3>2x-3E(x)\ge -x$$

$$-x+3>f(x)\ge -x$$

نقسم على $x^2>0$

$$\frac{-x+3}{x^2}>\frac{f(x)}{x^2}\ge\frac{-x}{x^2}$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x+3}{x^2}\right)&=0\\ \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x}{x^2}\right)&=0\end{aligned}\right]$$

حسب مبرهنة الإحاطة

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0$$

السؤال الرابع: f معرف على R بالصيغة $f(x)=\frac{x+2}{|x|+1}$

① ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر من اليسار، ثم اكتب معادلة نصف المماس من اليسار لخط بيان f في نقطة منه يكون ($x=0$)

$x<0 \Rightarrow |x|=-x$

$$f(x)=\frac{x+2}{-x+1} \longrightarrow \boxed{f(0)=2}$$

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{x+2}{-x+1}-2}{x}$$

$$=\frac{\frac{x+\cancel{2}+2x-\cancel{2}}{-x+1}}{x}=\frac{3x}{x(-x+1)}=\frac{3}{-x+1}$$

$$\lim_{x\to 0^-} g(x)=\frac{3}{+1}=3\in R$$

f قابل للاشتقاق عند (0) من اليسار

$$f'(0)=3$$

$$y=f'(0)(x-0)+f(0) \quad ; x<0$$

$$T: y=3x+2 \quad ; x<0$$

② عندما $x>0$ فإن $f(x)=\frac{x+2}{x+1}$

① احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أوجد A بحيث $x>A$ يحقق $f(x)\in\,]0.95,1.05[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1 \quad \text{———} \quad \boxed{c=1}$$

$$f(x)\in\,]\underbrace{0.95}_{c-r},\underbrace{1.05}_{c+r}[\quad \text{———} \quad r=0.05$$

$$|f(x)-c|<r$$

$$\left|\frac{x+2}{x+1}-1\right|<0.05$$

$$\left|\frac{x+2-x-1}{x+1}\right| < \frac{5}{100}$$

♡ ⇐ $$\frac{1}{|x+1|} < \frac{1}{20}$$

$$|x+1| > 20$$

نأخذ x عاماً موجباً

$$x+1 > 20$$

$$\left.\begin{array}{l} x > 19 \\ x > A \end{array}\right) \quad \boxed{A=19}$$

② أوجد $f'(x)$ ثم استنتج $g(x)=\dfrac{\sin x+2}{\sin x+1}$

اشتقاقي على $I=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ ثم $g'(x)$

f اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$$f'(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$g(x)=f(\sin x)$$

f اشتقاقي على $I=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

و g تركيب تابعين كل منهما اشتقاقي على $I=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

حسب قواعد اشتقاق التركيب

$$g'(x)=f'(\sin x)\cdot(\sin x)'$$

$$g'(x)=\frac{-1}{(\sin x+1)^2}(\cos x)$$

$$g'(x)=\frac{-\cos x}{(\sin x+1)^2}$$

السؤال الخامس: f معرف على $[1,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = x - 2\sqrt{x-1} - 1$$

① ادرس قابلية الاشتقاق f عند (1)

$f(1) = 0$

$$g(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{x - 2\sqrt{x-1} - 1}{x-1}$$

$$= \frac{x-1}{x-1} - \frac{2\sqrt{x-1}}{x-1} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x-1}}$$

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = 1 - \frac{2}{0^+} = -\infty$$

f غير قابل للاشتقاق عند $x=1$

f يقبل مماس شاقولي عند $A(1,0)$ معادلته $x=1$

② ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

f مستمر على $[1,+\infty[$

$f(1) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty - \infty$ ح ع ت

$$\lim_{x \to +\infty} (x-1)\left[\frac{x}{x-1} - \frac{2}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{x-1}\right] = +\infty(1-0-0) = +\infty$$

f اشتقاقي على $]1,+\infty[$

$$f'(x) = 1 - \cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x-1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x-1}}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 1$

$x - 1 = 1$

$x = 2$

$f(2) = \cancel{2} - \cancel{2} - 1 = -1$

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-1	↗	$+\infty$

③ أثبت أن $f(1)$ قيمة كبرى

$1 \in D_1 =]0,2[$

لكل $x \in D_1 \cap D = [1,2[$

$f(x) \leq 0$

$f(x) \leq f(1)$

$f(1)=0$ قيمة حدية كبرى

④ أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد $\alpha \in]1,+\infty[$

$0 \notin f(]1,2[) =]-1,0[$ متناقصة

ليس للمعادلة $f(x)=0$ أي حل في $]-1,0[$

f مستمرة ومتزايدة تماماً على $[2,+\infty[$ متزايدة

$0 \in f([2,+\infty[) = [-1,+\infty[$

للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد $\alpha \in [2,+\infty[$

(3) للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد $\alpha \in]1,+\infty[$

⑤ أوجد معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة $x=5$

$x_A = 5 \longrightarrow y_A = f(5) = 0 \quad A(5,0)$

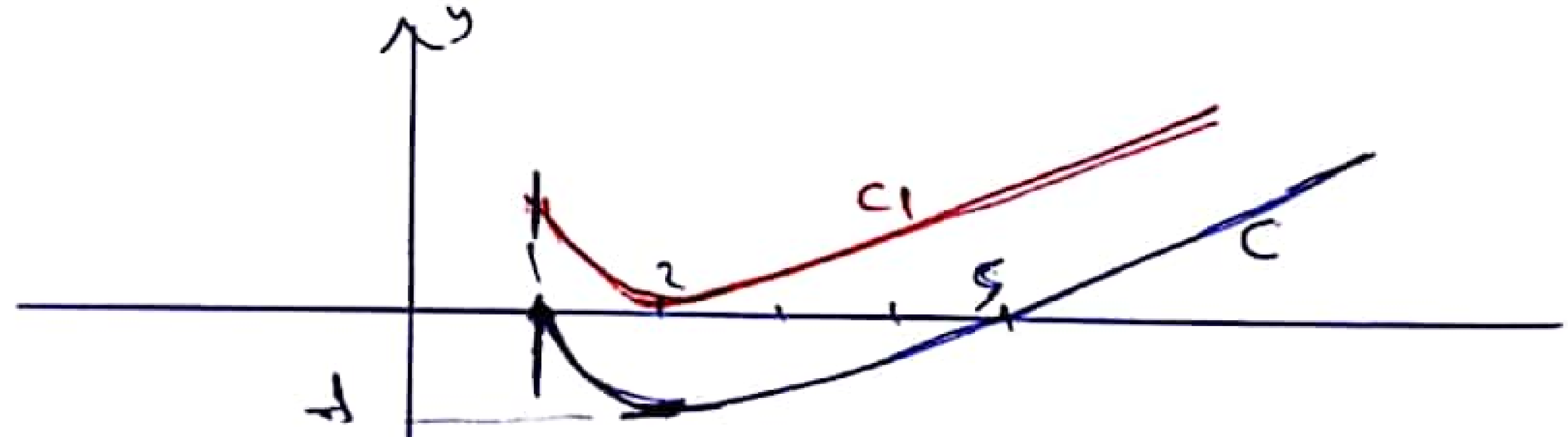
$m = f'(5) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$y = f'(5)(x-5) + f(5)$

$y = \frac{1}{2}(x-5) + 0$

$\boxed{y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}}$

6) ارسم الخط البياني C_1 للتابع f_1 : $f_1(x) = x - 2\sqrt{x-1}$



$$f_1(x) = x - 2\sqrt{x-1}$$
$$= x - 2\sqrt{x-1} - 1 + 1$$
$$f_1(x) = f(x) + 1$$

$$M(x, y) \longrightarrow M_1(x, y+1)$$

C_1 ينتج عن C بانسحاب شاقولي بمقدار (1)

النموذج A مركز المنير التعليمي معهد ابي الفداء معهد حماه الأول

بالجد و العمل
نحقق الأمل

التابع اللوغارتمي و التكامل

المدة : ساعة ونصف

2021 الاختبار السادس الدرجة العظمى : 300

توزيع الدرجات (الأول 40 + الثاني 60 + الثالث 60 + الرابع 70 + الخامس 110)

السؤال الأول: ليكن التابع f المعرف على $]0,e[\cup]e,+\infty[$ وفق : $f(x)=\dfrac{3\ \ln x+2}{\ln x-1}$ خطه البياني C

و المطلوب : احسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أعط عددا حقيقيا A يحقق الشرط :

إذا كان $x>A$ كان $f(x)\in]\ 2.95\ ,\ 3.05\ [$

السؤال الثاني: ليكن التابع f المعرف على $]-1,+\infty[$ وفق : $f(x)=\ln(x+1)-x$

① ادرس تغيرات التابع f ② استنتج صحة المتراجحة : $\ln(x+1)\le x$ في حالة $x>-1$

③ احسب $I=\int_0^2 f(x)\,dx$

السؤال الثالث : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=x-\ln(\dfrac{3x+1}{x})$

① أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته : $y=x-\ln 3$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

② ادرس الوضع النسبي للخط C و مقاربه Δ

③ أوجد $f'(x)$ وحدد جهة الطراد

④ أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α ينتمي إلى المجال $]1,2[$

السؤال الرابع: احسب : ① $I=\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos 2x}\,dx$ ② $j=\int_2^3\dfrac{x+3}{x^2-1}\,dx$

السؤال الخامس : التابع f معرف على $]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

① احسب نهاية التابع عند أطراف مجموعة تعريفه و استنتج معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي للخط C

② ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها و دل على القيم الحدية للتابع و استنتج $f(\mathbb{R}_+^*)$

③ أوجد معادلة المماس للخط C في نقطة من فاصلتها : $x=1$

④ وازن بين π^e و e^{π} ⑤ استنتج حلول المتراجحة $e.\ln x-x<0$

⑥ ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C ثم استنتج رسم الخط C_1 للدالة $f_1(x)=\dfrac{1}{x}.\ln\dfrac{1}{x}$

⑦ أحسب مساحة السطح المحصور بين الخط C و xx' و المستقيم $x=e$

((انتهت الاسئلة))

مع التمنيات بالنجاح للجميع المدرس : كاسر خليل عتيق

السؤال الأول: f معرف على $]0, e[\cup]e, +\infty[$ وفق:

$f(x) = \frac{3\ln x + 2}{\ln x - 1}$ ، احسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

ثم أوجد عدد A بحيث $x > A$ كان $f(x) \in]2.95, 3.05[$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} \quad = \text{ع.ت}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{\ln x}\left(3 + \frac{2}{\ln x}\right)}{\cancel{\ln x}\left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)} = \frac{3+0}{1-0} = \boxed{3} \longrightarrow c = 3$$

$$f(x) \in]\overset{c-r}{2.95}, \overset{c+r}{3.05}[\longrightarrow r = 0.05$$

$$|f(x) - c| < r$$

$$\left| \frac{3\ln x + 2}{\ln x - 1} - 3 \right| < 0.05$$

$$\left| \frac{\cancel{3\ln x} + 2 - \cancel{3\ln x} + 3}{\ln x - 1} \right| < \frac{5}{100}$$

$$\left| \frac{5}{\ln x - 1} \right| < \frac{1}{20}$$

$$\Leftarrow \quad \frac{5}{|\ln x - 1|} < \frac{1}{20}$$

$$\frac{|\ln x - 1|}{5} > \frac{20}{1}$$

$$|\ln x - 1| > 100$$

x في غاية الموجب

$$\ln x - 1 > 100$$

$$\ln x > 101$$

$$x > e^{101}$$

$$x > A$$

$$\boxed{A = e^{101}}$$

السؤال الثاني: ليكن f معرف على $]-1,+\infty[$ وفق $f(x) = \ln(x+1) - x$

① ادرس تغيرات f ونظم جدولاً

f مستمر واشتقاقي على $]-1,+\infty[$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$ مقارب شاقولي $x=-1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty - \infty$ ع ت

$$\lim_{x \to +\infty} (x+1)\left[\frac{\ln(x+1)}{x+1} - \frac{x}{x+1}\right] = +\infty(0-1) = -\infty$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{\cancel{1} - x - \cancel{1}}{x+1} = \frac{-x}{x+1}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -x = 0 \Rightarrow \boxed{x=0} \to f(0) = 0$$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$f(0)=0$ قيمة حدية كبرى

② استنتج صحة المتراجحة $\ln(x+1) \leq x$ أياً كان $x > -1$

المتراجحة تكافئ $\ln(x+1) - x \leq 0$

$f(x) \leq 0$

من الجدول نلاحظ

$f(x) \leq 0$ مهما $x \in]-1,+\infty[$

لذا المتراجحة محققة $\ln(x+1) \leq x$ مهما كان $x > -1$

③ احسب $I = \int_0^2 f(x)\,dx$

$$I = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 [\ln(x+1) - x]\,dx$$

$$u(x) = \ln(x+1) \cancel{-x} \xrightarrow{\ '\ } u'(x) = \frac{1}{x+1} - 1$$

$$v'(x) = 1 \xrightarrow{\ \int\ } v(x) = x$$

$$I = \Big[x\left(\ln(x+1) - x\right)\Big]_0^2 - \int_0^2 x\left(\frac{1}{x+1} - 1\right)dx$$

$$= \Big[x\ln(x+1) - x^2\Big]_0^2 - \int_0^2 \left(\frac{x}{x+1} - x\right)dx$$

$$= \Big[x\ln(x+1) - x^2\Big]_0^2 - \int_0^2 \left(1 + \frac{-1}{x+1} - x\right)dx$$

$$= \Big[x\ln(x+1) - x^2 - x + \ln(x+1) + \frac{x^2}{2}\Big]_0^2$$

$$= \Big[(x+1)\ln(x+1) - \frac{x^2}{2} - x\Big]_0^2$$

$$= (3\ln 3 - 2 - 2) - (\ln 1 - 0 - 0)$$

$$= 3\ln 3 - 4 = \boxed{-4 + \ln(27)}$$

السؤال الثالث:

$$f(x) = x - \ln\left(\frac{3x+1}{x}\right) \qquad]0, +\infty[$$

① أثبت أن $D: y = x - \ln 3$ مقارب مائل عند $+\infty$

$$f(x) - y_D = \cancel{x} - \ln\left(\frac{3x+1}{x}\right) - \cancel{x} + \ln 3 = \ln 3 - \ln\left(\frac{3x+1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty}\left(f(x) - y_D\right) = \ln 3 - \ln 3 = 0$$

$\Delta: y = x - \ln 3$ مقارب مائل لـ C عند $+\infty$

② ادرس الوضع النسبي

$$f(x) - y_D = \ln 3 - \ln\left(\frac{3x+1}{x}\right) = \ln\left(\frac{3x}{3x+1}\right)$$

البسط   المقام

$$3x < 3x+1$$

نقسم على المقام الموجب

$$\frac{3x}{3x+1} < 1$$

$$\ln\left(\frac{3x}{3x+1}\right) < \ln 1$$

$$f(x) - y_D < 0$$

$\boxed{C \text{ تحت } \Delta}$

③ ادرس اطراد f وحدد جهة الاطراد

f اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$f'(x) = 1 - \frac{3(0)-(1)(1)}{x(3x+1)} = 1 + \frac{1}{x(3x+1)} \neq 0 > 0$$

f متزايد تماماً على $]0,+\infty[$

④ أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد $\alpha \in]1,2[$

f مستمر ومتزايد تماماً على $]1,2[$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1-\ln 4 < 0 \\ f(2) = 2-\ln(7) > 0 \end{array}\right) \quad f(1).f(2) < 0$$

المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد $\alpha \in]1,2[$.

---

① $I = \int_0^{\pi} \sqrt{2+2\cos 2x}$ احسب   السؤال الرابع

$$I = \int_0^{\pi} \sqrt{2(1+\cos 2x)}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{2(2\cos^2 x)}\, dx = \int_0^{\pi} \sqrt{4\cos^2 x}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} 2|\cos x|\, dx$$

[illegible]

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-2\cos x)\, dx$$

$$= \left[2\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-2\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= 2(1) - 2(0) + (-2(0)) - (-2(1))$$

$$= 2 - 0 + 0 + 2$$

$$\boxed{I = 4}$$

② $$J = \int_2^3 \frac{x+3}{x^2-1}\,dx$$

$$\frac{x+3}{x^2-1} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+1}$$

[illegible]

$$x+3 = \alpha(x+1) + \beta(x-1)$$

نفرض $x=1$

$$1+3 = \alpha(1+1) + \cancel{\beta(0)}$$

$$4 = 2\alpha \Longrightarrow \alpha = 2$$

نفرض $x=-1$

$$2 = \alpha(0) + \beta(-2)$$

$$\beta = -1$$

$$J = \int_2^3 \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$= \Big[2\ln(x-1) - \ln(x+1)\Big]_2^3$$

$$= \big(2\ln(2) - \ln(4)\big) - \big(2\ln(1) - \ln(3)\big)$$

$$= \cancel{\ln 4} - \cancel{\ln 4} - 0 + \ln 3$$

$$J = \ln 3$$

السؤال الأول: ليكن f معرف على $]0,+\infty[$: $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

① احسب نهايات f عند أطراف D_f واستنتج معادلات المقاربات

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$ $x=0$ مقارب شاقولي

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$ $y=0$ مقارب أفقي

② ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها ودل على القيمة الكبرى ثم احسب $f(\mathbb{R}_+^*)$

f اشتقاقي على $\mathbb{R}_+^*$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - 1\cdot \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 1-\ln x=0 \Rightarrow \ln x=1 \Rightarrow \boxed{x=e}$$

$$f(e)=\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}$$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

$f(e)=\frac{1}{e}$ قيمة حدية كبرى

$f(\mathbb{R}_+^*) =]-\infty, \frac{1}{e}]$

③ أوجد معادلة المماس للخط البياني C في نقطة فاصلتها $x=1$

$x_A=1 \to y_A=f(1)=0$ $A(1,0)$

$m=f'(1)=1$

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$y=x-1$

④ وازن بين π^e ، e^π

نعلم $\pi>e$

f متناقص على $[e,+\infty[$

$f(\pi)<f(e)$

$\frac{\ln\pi}{\pi}<\frac{\ln e}{e}$

$e\ln\pi<\pi\ln e$

$\ln\pi^e<\ln e^\pi$

$\boxed{\pi^e<e^\pi}$

5) ث + حلول المتراجحة $e\ln x - x < 0$

$e\ln x - x < 0$

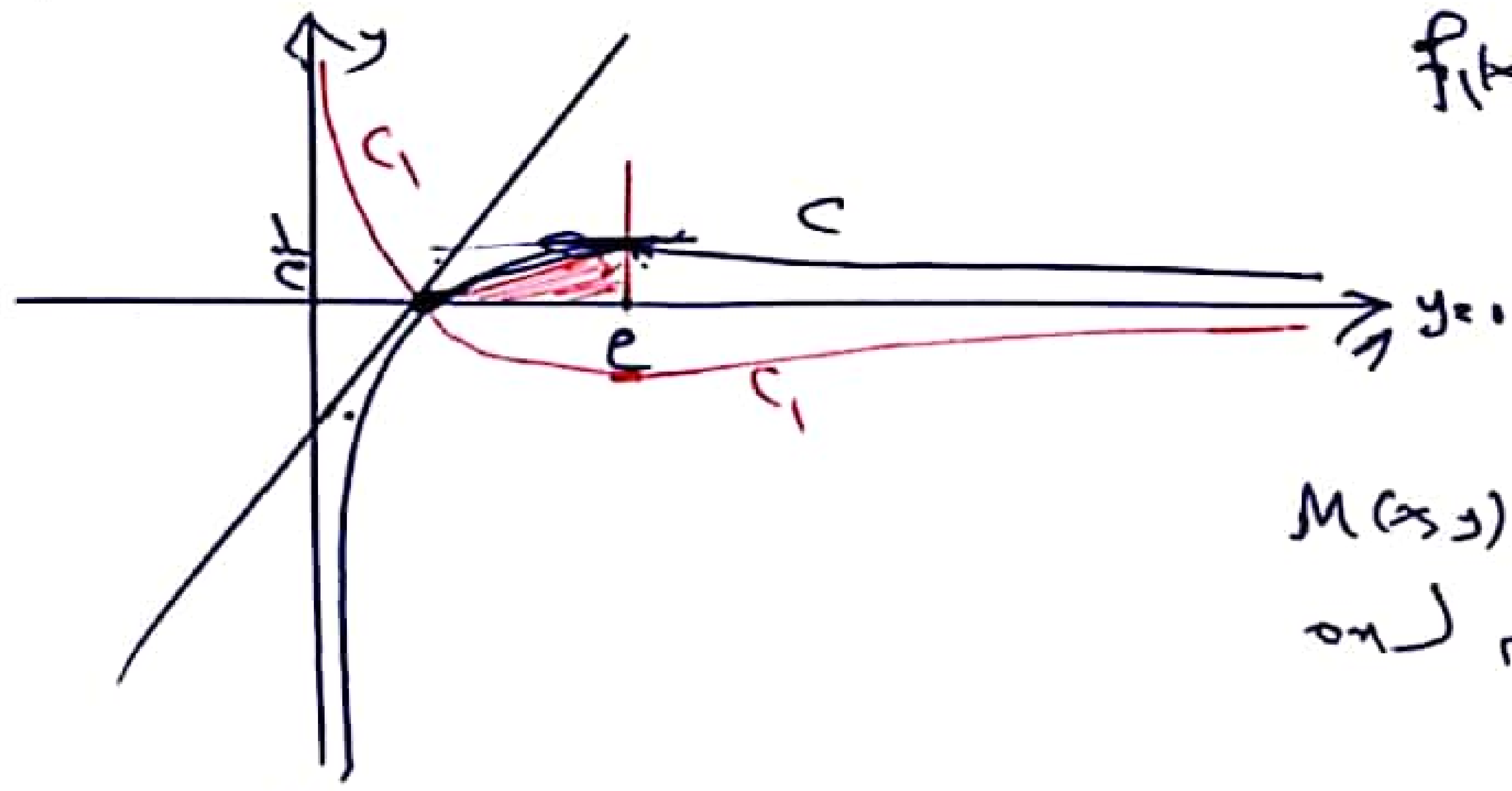
$e\ln x < x \Rightarrow \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{e} \Rightarrow f(x) < \frac{1}{e}$

$x \in]0,+\infty[$ لدينا $f(x) \leq \frac{1}{e}$ مستقرة الكبرى

بما أن $f(e) = \frac{1}{e}$ قيمة حدية كبرى

$x \in]0,+\infty[\setminus \{e\}$ لدينا $f(x) < \frac{1}{e}$

6) ارسم كل من المقاربات ثم ارسم C ثم ارسم $C_1: f_1(x) = \frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}$



$f_1(x) = \frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}$

$= \frac{1}{x}(-\ln x)$

$= -\frac{\ln x}{x}$

$= -f(x)$

$M(x,y) \to M_1(x,-y)$

C_1 نظير C بالنسبة لـ ox

7) احسب مساحة السطح المحصور بين C ، $x'x$ ، والمستقيم $x = e$ محور $x'x$ $[1,e]$

$S = \int_1^e f(x)\,dx$

$= \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \ln x\,dx$

$g' \quad g^n \longrightarrow \frac{g^{n+1}}{n+1}$

$= \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e = \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2}$

$\boxed{S = \frac{1}{2}}$

بالجد و العمل
نحقق الأمل

النموذج B مركز المنير التعليمي معهد ابي الفداء معهد حماه الأول

التابع اللوغارتمي و التكامل

المدة : ساعة ونصف

2021 الاختبار السادس الدرجة العظمى : 300

توزيع الدرجات (الأول 40 + الثاني 70 + الثالث 60 + الرابع 70 + الخامس 100)

السؤال الأول: أثبت أن $\ln x \le 2\sqrt{x}-2$ أيا كان $x>0$ باختيار $x=e^2$ و $x=\frac{1}{e}$ احصر e

السؤال الثاني : التابع f معرف على $]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=2x-3-\frac{\ln x}{x}$

① احسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم $\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{f(x)}{x})$ ثم $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-2x)$

استنتج معادلة المستقيم المقارب للخط C عند $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي

② أوجد التابع الأصلي للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$

السؤال الثالث : احسب : ① $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x.\sin 2x\ dx$ ② $j=\int_2^3 \frac{x+3}{x-1}\,dx$ ③ $k=\int_2^e \frac{3}{x.\ln x}\,dx$

السؤال الرابع : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$

① احسب $f'(x)$ و $f''(x)$

② احسب فواصل النقاط M_1 و M_2 و M_3 و M_4 المعرفة كما يلي :

M_1 نقطة تقاطع C مع محور الفواصل

M_2 نقطة من C مماسه منها يمر بمبدأ الإحداثيات.

M_3 نقطة من C مماسه منها يوازي محور الفواصل

M_4 نقطة من C ينعدم فيها المشتق الثاني للتابع

③ أثبت أن تلك الفواصل هي أربعة حدود متعاقبة من متتالية هندسية ، ما أساسها ؟

السؤال الخامس : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $D=]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=ax+b-\ln x$

أولاً : عين العددين الحقيقيين إذا علمت أن للتابع قيمة حدية هي (-2) عند $x=1$

ثانياً : من أجل : $(a=1, b=-3)$ التابع $f(x)=x-3-\ln x$ المطلوب :

① احسب نهاية التابع عند أطراف مجموعة تعريفه و استنتج معادلة المقارب الشاقولي للخط C

② ادرس تغيرات التابع f و دل على القيمة الصغرى محلياً للتابع f و أوجد $f(D)$

③ أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حلان في $]0,+\infty[$

④ اكتب معادلة المماس للخط C في نقطة فاصلتها تجعل $f''(x)=\frac{1}{4}$

⑤ ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C و استنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع $f_1(x)=3-x-\ln\frac{1}{x}$

((انتهت الأسئلة))

مع التمنيات بالنجاح و التوفيق للجميع مدرس المادة : كاسر خليل عتيق

السؤال الأول

(1) أثبت أن ~~$\ln x \leq 2\sqrt{x}-2$~~ أياً كان $x>0$

$\ln x \leq 2\sqrt{x} - 2$

3 $\ln x - 2\sqrt{x} + 2 \leq 0$

$f(x) \leq 0$

3 ندرس اطراد التابع f المعرف على المجال $\mathbb{R}_+^*$

f اشتقاقي على $\mathbb{R}_+^*$

3 $f'(x) = \frac{1}{x} - 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$

3 $= \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{x}$

3 $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{x} = 0$

$\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$

$f(1) = 0$

3

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$ (3)	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$ (3)	||	↗	0	↘	

من الجدول:

3 $f(x) \leq 0$

أياً كانت $x \in D_f =]0,+\infty[$

3 وبالتالي المتراجحة

$\ln x - 2\sqrt{x} + 2 \leq 0$

3 $\ln x \leq 2\sqrt{x} - 2$

محققة

أياً كانت $x \in \mathbb{R}_+^*$

(2) باختيار $x = e^2$ و $x = \frac{1}{e}$ استنتج

$x = e^2$

3 $\ln e^2 \leq 2\sqrt{e^2} - 2$

$2 \leq 2e - 2$

$2e \geq 4$

$e \geq 2$ — (1)

$x = \frac{1}{e}$

3 $\ln\left(\frac{1}{e}\right) \leq 2\sqrt{\frac{1}{e}} - 2$

$-1 \leq 2\frac{1}{\sqrt{e}} - 2$

$1 \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$

$\sqrt{e} \leq 2 \rightarrow e \leq 4$ — (2)

1 من $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ نجد:

$\boxed{2 \leq e \leq 4}$

السؤال الثاني

$f(x) = 2x - 3 - \frac{\ln x}{x}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - 0 = +\infty$ $\boxed{1}$

$\frac{f(x)}{x} = \frac{2x - 3 - \frac{\ln x}{x}}{x}$

$= \frac{2x-3}{x} - \frac{\ln x}{x^2}$

$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2x-3}{x} - \frac{\ln x}{x^2}\right]$

$= 2 - \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ ح ع ت

$= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2x-3}{x} - \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln x}{x}\right]$

$= 2 - (0)(0) = 2$

$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 2x]$

$= \lim_{x \to +\infty} \left[\cancel{2x} - 3 - \frac{\ln x}{x} - \cancel{2x}\right]$

$= -3 - 0 = -3$

وجدنا أن

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

و

$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \in \mathbb{R}$

يوجد مقارب مائل للخط C

معادلته $\Delta: y = ax + b$

$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = -3$

$\Delta: y = 2x - 3$

الوضع النسبي حسب إشارة الفرق

$f(x) - y_\Delta = \frac{-\ln x}{x}$

$f(x) - y_\Delta = 0 \Rightarrow \frac{-\ln x}{x} = 0$

$-\ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 0$

$\Rightarrow x = 1$

$\Delta: y = 2(1) - 3 = -1$

نقطة مشتركة $A(1, -1)$

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - y_\Delta$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
وضع نسبي	$\Vert$	C فوق Δ	$A(1,-1)$	C تحت Δ	

$f(x) = 2x - 3 - \frac{\ln x}{x}$ $\boxed{2}$

$= 2x - 3 - \left(\frac{1}{x} \ln x\right)$

$g' g^n \rightarrow \frac{g^{n+1}}{n+1}$

$F(x) = \cancel{2} \frac{x^2}{\cancel{2}} - 3x - \frac{(\ln x)^2}{2}$

$F(x) = x^2 - 3x - \frac{1}{2}(\ln x)^2$

السؤال الثالث

1

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x \sin 2x)\, dx$$

بتجزئة:

$u(x) = x \longrightarrow u'(x) = 1$

$v'(x) = \sin 2x \longrightarrow v(x) = \frac{-1}{2}\cos 2x$

$$I = \left[-\frac{1}{2}x\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{-1}{2}\cos(2x)\right)dx$$

$$= \left[\frac{-1}{2}x\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$

$$= \left[\frac{-1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(\cancel{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2}}^{0} + \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{2}\right) - \left(\cancel{\frac{-1}{2}(0)\cos(0)} + \cancel{\frac{1}{4}\sin(0)}\right)$$

$$I = \frac{1}{4}(1) = \frac{1}{4}$$

2

$$J = \int_2^3 \frac{x+3}{x-1}\, dx$$

نقسم قسمة إقليدية

$$\begin{array}{r|l} x-1 & x+3 \\ & \underline{-x+1} \\ & 4 \end{array} \quad \text{الناتج } 1$$

$$= \int_2^3 \left(1 + \frac{4}{x-1}\right)dx$$

$$= \Big[x + 4\ln|x-1|\Big]_2^3$$

$$= \Big[x + 4\ln(x-1)\Big]_2^3$$

$$= (3 + 4\ln 2) - (2 + \cancel{4\ln(1)})$$

$$= 3 + 4\ln 2 - 2$$

$$J = 4\ln 2 + 1$$

3

$$K = \int_2^e \frac{3}{x\ln x}\, dx$$

$$= \int_2^e 3\,\frac{1}{x\ln x}\, dx$$

$$= 3\int_2^e \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\, dx$$

$$= 3\Big[\ln(\ln x)\Big]_2^e$$

$$= 3\Big[\big(\cancel{\ln(\ln e)}^{(1)}\big) - \big(\ln(\ln 2)\big)\Big]$$

$$K = -3\ln\ln 2$$

السؤال الرابع

$$f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$$

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}$$

$\boxed{1}$ f اشتقاقي على I

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x(1)}{x^2}$$

$$=\frac{-1}{x^2}+\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}$$

f' اشتقاقي على I

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-[2x(-\ln x)]}{x^4}$$

$$=\frac{-x+2x\ln x}{x^4}$$

$$=\frac{x(-1+2\ln x)}{x^4}$$

$$f''(x)=\frac{-1+2\ln x}{x^3}$$

$\boxed{2}$ M_1 نقطة تقاطع C مع محور الفواصل

$$y=0 \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow \frac{1+\ln x}{x}=0$$

$$1+\ln x=0$$

$$\ln x=-1 \Rightarrow x=\frac{1}{e}$$

M_2 مماسه يمر بمبدأ الإحداثيات

$$y=f'(x_2)(x-x_2)+f(x_2)$$

$$(0,0)\in\Delta$$

$$0=f'(x_2)(0-x_2)+f(x_1)$$

$$\frac{-\ln x_2}{x_2^2}(-x_2)+\frac{1+\ln x_2}{x_2}=0$$

$$\frac{\ln x_2}{x_2}+\frac{1+\ln x_2}{x_2}=0$$

$$\frac{1+2\ln x_2}{x_2}=0$$

$$1+2\ln x_2=0 \Rightarrow \ln x_2=\frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow x_2=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

M_3 مماسه يوازي محور الفواصل

$$\Rightarrow \boxed{m=0}$$

ميل المماس يساوي قيمة المشتق الأول عند نقطة التماس

$$f'(x_3)=m$$

$$f'(x_3)=0$$

$$\frac{-\ln x_3}{x_3^2}=0 \Rightarrow -\ln x_3=0$$

$$x_3=1$$

M_4 ينعدم عندها المشتق الثاني

$f''(x_4) = 0$

$\frac{-1+2\ln x_4}{x_4^3} = 0$

$-1+2\ln x_4 = 0 \Rightarrow 2\ln x_4 = 1$

$\ln x_4 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_4 = \sqrt{e}$

نلاحظ أن

$x_1 = \frac{1}{e}$ $x_2 = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$x_3 = 1$ $x_4 = \sqrt{e}$

كل حد ينتج عن سابقه بضربه بعدد ثابت هو $\sqrt{e}$

$\leftarrow$ 4 حدود متتالية هندسية أساسها

$q = \sqrt{e}$

السؤال الخامس

$f(x) = ax + b - \ln x$

$f(1) = -2$

$a(1) + b - \ln(1) = -2$

$a + b = -2$ —— (1)

f اشتقاقي على $D =]0, +\infty[$

$f'(x) = a - \frac{1}{x}$

$f'(1) = 0 \Rightarrow a - \frac{1}{1} = 0$

$a = 1$

نعوض في (1)

$1 + b = -2$

$\Rightarrow b = -3$

$$\boxed{f(x) = x - 3 - \ln x}$$

ثانياً: $\boxed{1}$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 - 3 - (-\infty) = \boxed{+\infty}$

$x = 0$ مقارب شاقولي عند $+\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = (+\infty - \infty$ ع.ت.ع$)$

$= \lim_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{3}{x} - \frac{\ln x}{x}\right)$

$= +\infty(1 - 0 - 0)$

$= +\infty$

إعداد المدرس: كاسر خليل عتيق

2 f اشتقاقي على $D =]0,+\infty[$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0$$

$$\boxed{x = 1} \rightarrow \boxed{f(1) = -2}$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1) = -2$ قيمة صغرى

$$f(D) = [-2,+\infty[$$

3 من الجدول: f مستمر ومتناقص تماماً على

$$I_1 =]0,1[$$

$$0 \in f(I_1) =]-2,+\infty[$$

للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد

$$\alpha \in I_1$$

f مستمر ومتزايد تماماً على

$$I_2 = [1,+\infty[$$

$$0 \in f(I_2) = [-2,+\infty[$$

للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد

$$\beta \in I_2$$

⇐ للمعادلة $f(x)=0$ حلان في $]0,+\infty[$

$\alpha \in I_1 \qquad \beta \in I_2$

4 f' اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$f''(x) = \frac{(1)(x)-(1)(x-1)}{x^2}$$

$$= \frac{x-x+1}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}$$

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \quad \text{or} \quad \boxed{x = -2}$$

مرفوض $\notin D$

$$\Rightarrow x = 2$$

$x = 2 \rightarrow y = f(2) = -1 - \ln 2$

$A(2, -1-\ln 2)$

$$m = f'(2) = \frac{1}{2}$$

$$y = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$= \frac{1}{2}(x-2) - 1 - \ln 2$$

$$= \frac{1}{2}x - 1 - 1 - \ln 2$$

$$y = \frac{1}{2}x - \ln 2 - 2$$

5

$$f_1(x) = 3 - x - \ln\frac{1}{x}$$

$$= 3 - x - (-\ln x)$$

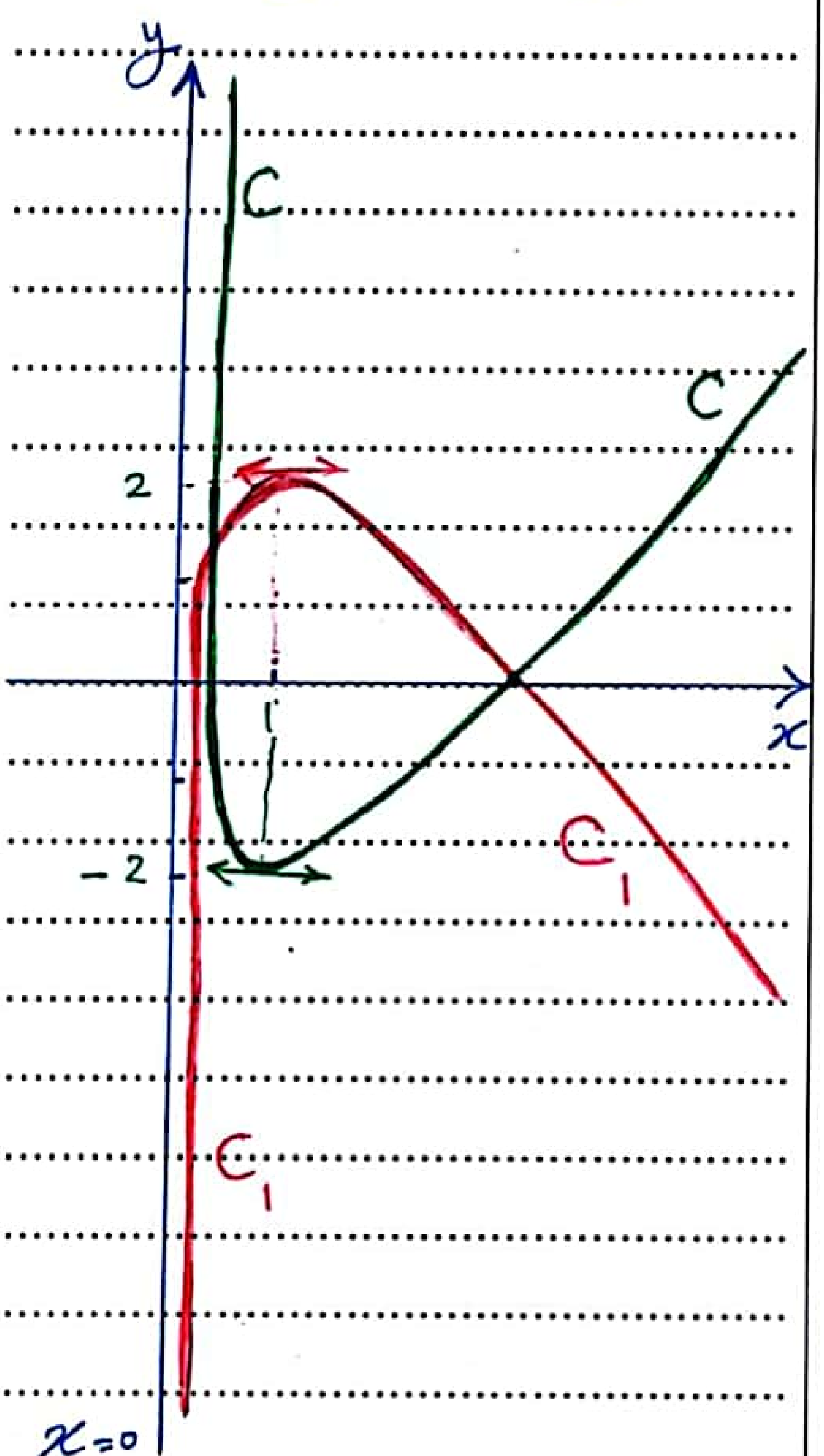
$$= 3 - x + \ln x$$

$$= -(x - 3 - \ln x)$$

$$f_1(x) = -f(x)$$

$$M(x, y) \longrightarrow M_1(x, -y)$$

C_1 نظير C بالنسبة لمحور الفواصل



انتهى السلم

HAZAR

بالجد و العمل نحقق الأمل

النموذج A — **مركز المنير التعليمي** — معهد ابي الفداء — معهد حماه الأول

التابع الاسي و التكامل

المدة : ساعة ونصف

2021 — الاختبار السابع — الدرجة العظمى : 300

توزيع الدرجات (الأول 50 + الثاني 50 + الثالث 60 + الرابع40 + الخامس 100)

السؤال الأول: ① حل المتراجحة $3^{x+1}+2\,.\,3^{-x}\geq 7$

② عين حل المعادلة التفاضلية $3y+2y'=6$ الذي يحقق الشرط $f(\ln 4)=0$

السؤال الثاني: احسب النهايتين : ① $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{e^{x}-2+e^{-x}}{1-\cos 2x}\right]$ ② $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}$

السؤال الثالث : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة تدريجيا وفق : $\begin{cases}u_0=e^{3}\\ u_{n+1}=e\sqrt{u_n}\end{cases}$

المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ التي حدها العام $v_n=ln(u_n)-2$

① أثبت أن v_n هي متتالية هندسية جد $v_0\ ,\ q$

② اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n ③ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$

السؤال الرابع : اذا كان $I=\int_{0}^{ln16}\dfrac{e^{x}+3}{e^{x}+4}\,dx$, $J=\int_{0}^{ln16}\dfrac{1}{e^{x}+4}\,dx$ فاحسب $I+J\,,I-3J$

واستنتج قيمة كل من $I\,,J$

السؤال الخامس : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=ae^{2x}+be^{x}$ حيث a , b حقيقيان

أولاً : عين a , b إذا علمت أن للتابع قيمة صغرى محلياً قيمتها (-1) عند x=0

ثانياً : من أجل $(a=1\ ,\ b=-2)$

1 - ادرس تغيرات التابع f : $f(x)=e^{2x}-2e^{x}$ و نظم جدولاً بها ودل على القيمه الصغرى محليا

2 – استنتج عدد حلول المعادلة : $e^{x}-2=-e^{-x}$ في R

3 – ارسم كل مقارب و جدته ثم ارسم C و استنتج الخط البياني للتابع f_1 : $f_1(x)=\dfrac{1}{e^{2x}}\left(1-2e^{x}\right)$

4 – احسب مساحة السطح المحصور بين C و محوري الإحداثيات .

5 – احسب حجم المجسم الناتج عن دوران السطح السابق دورة كاملة حول محور 'xx

((انتهت الاسئلة))

مع التمنيات بالنجاح للجميع — المدرس : كاسر خليل عتيق

السؤال الأول:

$\boxed{1}$ حل المتراجحة

$3^{x+1} + 2 \cdot 3^{-x} \geq 7$

الحل:

$3 \cdot 3^{x} + 2 \cdot 3^{-x} \geq 7$

بالضرب بـ 3^x

$3 \cdot 3^{2x} + 2 \geq 7 \cdot 3^{x}$

$3 \cdot 3^{2x} - 7 \cdot 3^{x} + 2 \geq 0$

$\frac{1}{3}(3 \cdot 3^{x} - 6)(3 \cdot 3^{x} - 1) \geq 0$

$(3^{x} - 2)(3 \cdot 3^{x} - 1) \geq 0$

إما $3^{x} = 2$

$\ln 3^{x} = \ln 2$

$\Rightarrow x = \boxed{\frac{\ln 2}{\ln 3}}$

أو $3 \cdot 3^{x} = 1$

$3^{x} = \frac{1}{3}$

$3^{x} = 3^{-1} \Rightarrow \boxed{x = -1}$

x		-1		$\frac{\ln 2}{\ln 3}$	
	$+$		$-$		$+$
	م		غ		م

$S \in]-\infty, -1] \cup [\frac{\ln 2}{\ln 3}, +\infty[$

$\boxed{2}$ حل المعادلة التفاضلية $3y + 2y' = 6$ $f(\ln 4) = 0$ المحققة

$3y + 2y' = 6$ $\boxed{2}$

نعزل y':

$2y' = -3y + 6$

نقسم على $\boxed{2}$

$y' = \frac{-3}{2} y + 3$

$y = ke^{ax} - \frac{b}{a}$

$\Rightarrow y = ke^{\frac{-3}{2}x} + 2$

الحل العام

من أجل: $f(\ln 4) = 0$

$0 = k e^{-\frac{3}{2}\ln 4} + 2$

$0 = k e^{-\frac{3}{2}(2\ln 2)} + 2$

$0 = k e^{-3\ln 2} + 2$

$0 = k e^{3\ln(\frac{1}{2})} + 2$

$0 = k e^{\ln(\frac{1}{2})^3} + 2$

$0 = k(\frac{1}{8}) + 2$

إعداد المدرس: كاسر خليل عتيق

$\frac{1}{8}K = -2$

$\Longrightarrow \boxed{K=-16}$

$\Longrightarrow y = -16\,e^{-\frac{3}{2}x}+2$

الحل الخاص

السؤال الثاني

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left[e^{x}-2+e^{-x}\right]}{\left[1-\cos(2x)\right]} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

ح.ع.ت

* نضرب بـ $\boxed{e^{x}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2e^{x}+1}{e^{x}\left(1-\cos(2x)\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{2x}-2e^{x}+1\right)\left(1+\cos(2x)\right)}{e^{x}\left(1-\cos(2x)\right)\left(1+\cos(2x)\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{x}-1\right)^{2}\left(1+\cos 2x\right)}{e^{x}\left(1-\cos^{2}2x\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{x}-1\right)^{2}\left(1+\cos 2x\right)}{e^{x}\sin^{2}2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos 2x}{e^{x}}\left(\frac{e^{x}-1}{\sin 2x}\right)^{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos 2x}{e^{x}}\left(\frac{\cancel{x}\boxed{\frac{e^{x}-1}{\cancel{x}}}}{2\cancel{x}\boxed{\frac{\sin 2x}{2\cancel{x}}}}\right)^{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos 2x}{e^{x}}\left(\frac{\frac{e^{x}-1}{x}}{2\frac{\sin 2x}{2x}}\right)^{2}$$

$$= \frac{1+1}{e^{0}}\left(\frac{1}{2(1)}\right)^{2}$$

$$= \frac{2}{1}\left(\frac{1}{4}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

2)

$$\lim_{x\to +\infty}\left[\frac{x+3}{x-1}\right]^{\frac{x-1}{2}} = \left(1^{\infty}\right)$$

ح.ع.ت

١- نفرض الأساس $1+t$

$\frac{x+3}{x-1} = 1+t$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x-1 & x+3 \\ & -x+1 \\ \hline & 4 \end{array}$$

$\cancel{1}+\frac{4}{x-1} = \cancel{1}+t$

٢- نفرض t:

$t = \frac{4}{x-1}$ $\boxed{\begin{array}{l} x\to+\infty \\ t\to 0 \end{array}}$

٣- نعزل x:

$x-1 = \frac{4}{t}$

$x = \frac{4}{t}+1$

٤- نكتب الأس بدلالة t:

$\frac{x-1}{2} = \frac{\frac{4}{t}+\cancel{1}-\cancel{1}}{2} = \frac{2}{t}$

نعوض :

$\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{2}{t}} = \boxed{e^2}$

السؤال الثالث :

$\begin{cases} U_0 = e^3 \\ U_{n+1} = e\sqrt{U_n} \end{cases}$

$\boxed{1}$: $V_n = \ln(U_n) - 2$

$V_{n+1} = \ln(U_{n+1}) - 2$

$= \ln(e\sqrt{U_n}) - 2$

$= \ln e + \ln\sqrt{U_n} - 2$

$= 1 + \frac{1}{2}\ln U_n - 2$

$= \frac{1}{2}\ln U_n - 1$

$V_{n+1} = \frac{1}{2}(\ln(U_n) - 2)$

$V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n$

(V_n) هندسية : ~~أساسها~~

$\boxed{q = \frac{1}{2}}$

حدها الأول :

$V_0 = \ln(U_0) - 2$

$= \ln(e^3) - 2$

$= 3 - 2 = 1$

حدها العام :

$V_n = V_0\, q^n$

$V_n = (1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$V_n = \ln(U_n) - 2$ $\boxed{2}$

$e^{\ln(U_n)} = e^{V_n + 2}$

$U_n = e^{V_n + 2}$

$U_n = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}$

$U_n = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} \cdot e^2$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ لأن $\boxed{3}$

$-1 < q < 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = e^0\, e^2$

$= 1 \cdot e^2 = \boxed{e^2}$

السؤال الرابع

8

$$I = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x + 3}{e^x + 4}\, dx$$

$$J = \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x + 4}\, dx$$

$$I - 3J = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x + 3}{e^x + 4}\, dx - 3\int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x + 4}\, dx$$

$$= \int_0^{\ln 16} \frac{e^x \cancel{+3-3}}{e^x + 4}\, dx$$

$$I - 3J = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x}{e^x + 4}\, dx$$

$$I - 3J = \left[\ln(e^x + 4)\right]_0^{\ln 16}$$

$$= \left[\ln(e^{\ln 16} + 4) - \ln(e^0 + 4)\right]$$

$$= \ln(20) - \ln(5)$$

$$= \ln \frac{20}{5} = \ln 4 = 2\ln 2$$

$$I + J = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x + 3}{e^x + 4}\, dx + \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x + 4}\, dx$$

$$= \int_0^{\ln 16} \frac{e^x + 3 + 1}{e^x + 4}\, dx$$

$$= \int_0^{\ln 16} \frac{e^x + 4}{e^x + 4}\, dx$$

$$I + J = \int_0^{\ln 16} 1\, dx$$

$$I + J = [x]_0^{\ln 16}$$

$$I + J = \ln(16) - 0 = \ln 16 = \ln 2^4$$

$$= 4\ln 2$$

ومنها: ⇐

$$I - 3J = 2\ln 2 \quad \text{---} (1)$$

$$-I - J = -4\ln 2 \quad \text{---} (2)$$

$-$

بطرح (1) من (2)

$$-4J = -4\ln 2 + 2\ln 2$$

$$-4J = -2\ln 2 \qquad \boxed{\div -4}$$

$$\boxed{J = \frac{1}{2}\ln 2}$$

نعوض في (1):

$$I - 3\left(\frac{1}{2}\right)\ln 2 = 2\ln 2$$

$$I - \frac{3}{2}\ln 2 = 2\ln 2$$

$$I = 2\ln 2 + \frac{3}{2}\ln 2 = \boxed{\frac{7}{2}\ln 2}$$

السؤال الخامس:

$f(x) = a e^{2x} + b e^{x}$

أولاً:

$f(0) = -1$

$a e^{0} + b e^{0} = -1$

$a + b = -1 \quad \dots (1)$

$f'(x) = 2a e^{2x} + b e^{x}$

$f'(0) = 0$

$2a e^{0} + b e^{0} = 0$

$2a + b = 0$

$\boxed{2a = -b} \rightarrow b = -2a$

نعوض:

$a - 2a = -1$

$-a = -1 \rightarrow \boxed{a = 1}$

$* \quad b = -2(1) = \boxed{-2}$

إذاً: $a = 1$

$b = -2$

ثانياً: $f(x) = e^{2x} - 2e^{x}$

f مستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 - 0 = 0$

$y = 0$ مقارب أفقي عند $-\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty - \infty$ ح.ع.ت

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^{x}[e^{x} - 2]$

$= +\infty[+\infty - 2]$

$= \boxed{+\infty}$

$f'(x) = 2e^{2x} - 2e^{x}$

$= 2e^{x}[e^{x} - 1]$

$f'(x) = 0 \Rightarrow$

$e^{x} - 1 = 0$

$e^{x} = 1$

$x = 0 \rightarrow f(0) = -1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0) = -1$ قيمة حدية صغرى

$e^{x} - 2 = -e^{-x}$ R.

نضرب بـ $\boxed{e^{x}}$

$e^{2x} - 2e^{x} = -1$

$f(x) = -1$

من الجدول نجد أن $f(0) = -1$ قيمة حدية صغرى

وبالتالي المعادلة لها حل وحيد هو $\boxed{x = 0}$

B)

$f_1(x) = \frac{1}{e^{2x}}(1-2e^{x})$

$= e^{-2x}(1-2e^{x})$

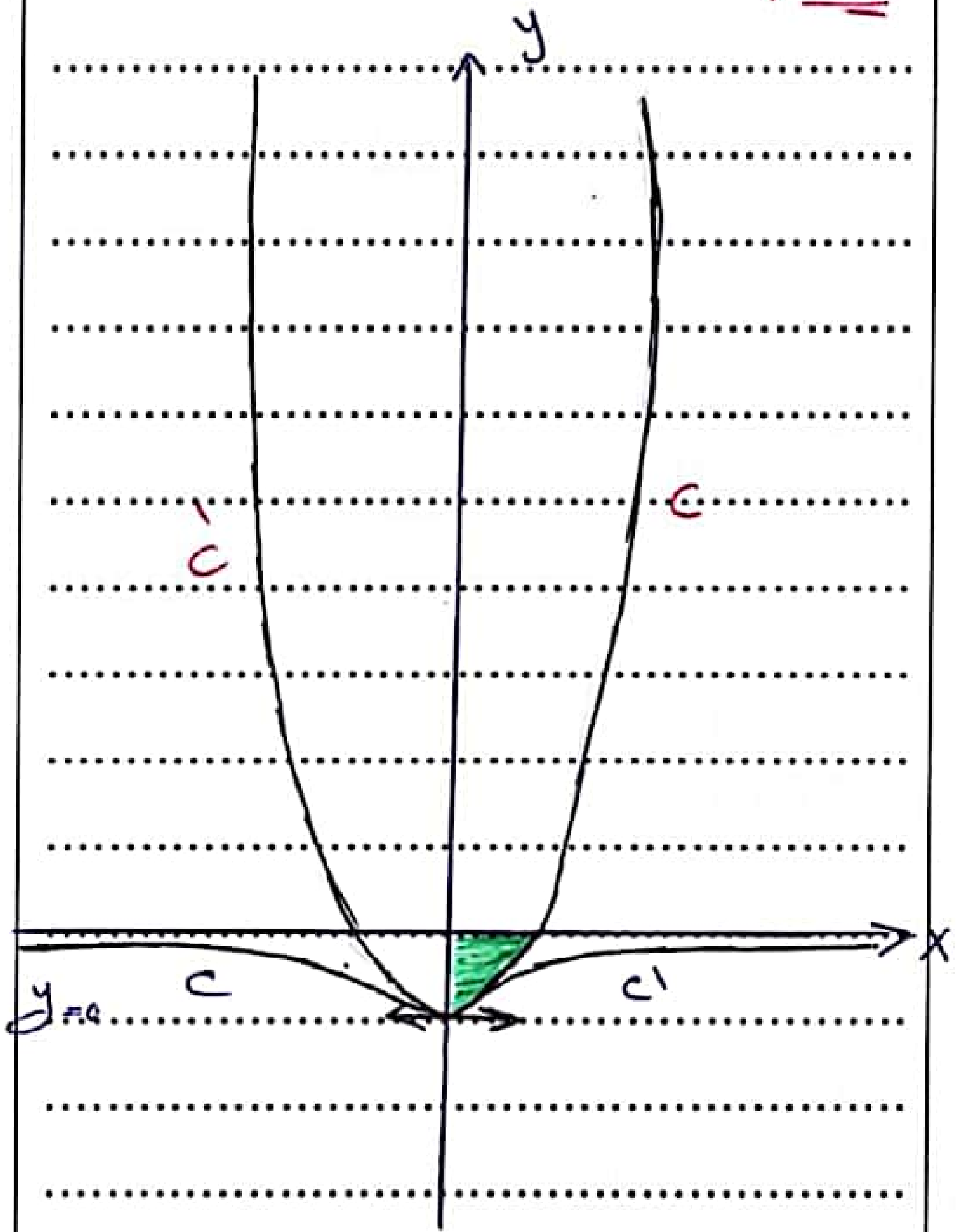
$= e^{-2x} - 2e^{-x}$

$f_1(x) = f(-x)$

$M(x,y) \longrightarrow M(-x,y)$

C_1 نظير C بالنسبة لـ $y'oy$

الرسم



نلاحظ أن C تقطع xx' في

* لمعرفة حدود التكامل

$f(x) = 0$

$e^{2x} - 2e^{x} = 0$

$e^{x}[e^{x} - 2] = 0$

$e^{x} - 2 = 0$

$e^{x} = 2$

$\Rightarrow \boxed{x = \ln 2}$

إذاً حدود التكامل $x = 0$ ، $x = \ln 2$

C تحت xx' على $[0, \ln 2]$

$S = \int_{0}^{\ln 2} -f(x)\,dx$

$= \int_{\ln 2}^{0} f(x)\,dx$

$= \int_{\ln 2}^{0} (e^{2x} - 2e^{x})\,dx$

$= \left[\frac{1}{2}e^{2x} - 2e^{x}\right]_{\ln 2}^{0}$

$$= \left[\tfrac{1}{2}e^{0} - 2e^{0}\right] - \left[\tfrac{1}{2}e^{2\ln 2} - 2e^{\ln 2}\right]$$

$$= \left[\tfrac{1}{2} - 2\right] - \left[\tfrac{1}{2}e^{\ln 4} - 2e^{\ln 2}\right]$$

$$= \left[-\tfrac{3}{2}\right] - \left[\tfrac{1}{2}(4) - 2(2)\right]$$

$$= -\tfrac{3}{2} - [2 - 4]$$

$$= -\tfrac{3}{2} + 2$$

$$\boxed{S = \tfrac{1}{2}}$$

$$V = \int_0^{\ln 2} A(x)\,dx \qquad \boxed{5}$$

$$V = \int_0^{\ln 2} \pi\,[f(x)]^2\,dx$$

$$= \pi \int_0^{\ln 2} (e^{2x} - 2e^{x})^2\,dx$$

$$= \pi \int_0^{\ln 2} \left(e^{4x} - 2e^{2x}(2e^{x}) + 4e^{2x}\right)dx$$

$$= \pi \int_0^{\ln 2} \left(e^{4x} - 4e^{3x} + 4e^{2x}\right)dx$$

$$= \pi \left[\tfrac{1}{4}e^{4x} - \tfrac{4}{3}e^{3x} + 2e^{2x}\right]_0^{\ln 2}$$

$$= \pi \left[\tfrac{1}{4}e^{4\ln 2} - \tfrac{4}{3}e^{3\ln 2} + 2e^{2\ln 2}\right] - \left[\tfrac{1}{4} - \tfrac{4}{3} + 2\right]$$

$$= \pi \left[\tfrac{1}{4}e^{\ln 16} - \tfrac{4}{3}e^{\ln 8} + 2e^{\ln 4}\right] - \left[\tfrac{1}{4} - \tfrac{4}{3} + 2\right]$$

$$= \pi \left[\tfrac{1}{4}(16) - \tfrac{4}{3}(8) + 2(4)\right] - \left[\tfrac{1}{4} - \tfrac{4}{3} + 2\right]$$

$$= \pi \left[4 - \tfrac{32}{3} + 8\right] - \left[\tfrac{1}{4} - \tfrac{4}{3} + 2\right]$$

$$= \pi \left[4 - \tfrac{32}{3} + 8 - \tfrac{1}{4} + \tfrac{4}{3} - 2\right]$$

$$= \pi \left[\tfrac{10}{1} - \tfrac{28}{3} - \tfrac{1}{4}\right]$$

(12) (4) (3)

$$= \pi \left[\frac{120 - 112 - 3}{12}\right]$$

$$= \pi \left(\frac{120 - 115}{12}\right)$$

$$\Rightarrow V = \frac{5\pi}{12}$$

انتهى السلم

Mahasen

بالجد و العمل نحقق الأمل

النموذج B   مركز المنير التعليمي   معهد ابي الفداء   معهد حماه الأول

التابع الاسي و التكامل

المدة : ساعة ونصف

2021   الاختبار السابع   الدرجة العظمى : 300

توزيع الدرجات (الأول 50 + الثاني 50 + الثالث 40 + الرابع60 + الخامس 100)

السؤال الأول : ① حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $9^x - 3^{x+1} + 2 > 0$

② احسب النهاية : $f(x) = \dfrac{x.\cos\left(e^{-x}\right)}{x^2+3}$ عند $a = -\infty$

السؤال الثاني : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$ و فق $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + x - 3}{x^2 - x - 2}$

① عين قيمة الأعداد الحقيقية a,b,c التي تحقق : $f(x) = \text{ax} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{x-2}$

② احسب $\int_0^1 f(x)\,\text{dx}$

السؤال الثالث: ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x^2 e^{2x}$

جد تابعا أصليا F للتابع f على $\mathbb{R}$ بالصيغة $F(x) = p(x)e^{2x}$ حيث p تابع كثير حدود

السؤال الرابع : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x) = xe^{-x} + x - 2$ و المطلوب :

① اكتب معادلة Δ المقارب المائل للخط C و ادرس وضعه النسبي

② ادرس تغيرات f و نظم جدولا بها

③ أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α يحقق $1 < \alpha < 2$

السؤال الخامس : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة : $f(x) = x + \dfrac{4}{e^x + 1}$

① ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها .

② احسب $f(x) + f(-x)$ ثم استنتج أن النقطة $A(0,2)$ هي مركز تناظر للخط C

③ أثبت أن C يقبل مماس d يوازي محور الفواصل ، أوجد معادلته

④ أثبت أن C يقبل منصف الربع الأول مقارب مائل له في جوار $+\infty$

⑤ أوجد $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - (x+4))$ ثم فسر النتيجة هندسياً

⑥ ارسم d و كل مقارب وجدته ثم ارسم C

⑦ احسب مساحة السطح المحدد بالخط C و المستقيم $\Delta : y = x + 4$ و المستقيمين $x = 0$ و $x = 1$

((انتهت الأسئلة))

مع التمنيات بالنجاح و التوفيق للجميع   المدرس : كاسر خليل عتيق

السؤال الأول ① حل في R المتراجحة $9^x - 3^{x+1} + 2 > 0$

$$3^{2x} - 3 \cdot 3^x + 2 > 0$$

$$(3^x - 2)(3^x - 1) = 0$$

إما $3^x - 2 = 0 \Rightarrow 3^x = 2 \Rightarrow \ln 3^x = \ln 2$

$$x \ln 3 = \ln 2$$

$$\boxed{x = \frac{\ln 2}{\ln 3}}$$

أو $3^x - 1 = 0 \Rightarrow 3^x = 1 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

	0		$\frac{\ln 2}{\ln 3}$	
$+$		$-$		$+$
محقق		///		محقق

$$x \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]\frac{\ln 2}{\ln 3}, +\infty\right[$$

② احسب النهاية عند $(-\infty)$ $f(x) = \frac{x \cdot \cos(e^{-x})}{x^2 + 3}$

نضرب بـ $x < 0$

$x \to -\infty$

نقسم على x^2+1

$$-1 \leq \cos(e^{-x}) \leq 1$$

$$-x \geq x\cos(e^{-x}) \geq x$$

$$\frac{-x}{x^2+1} \geq \frac{x\cos(e^{-x})}{x^2+1} \geq \frac{x}{x^2+1}$$

$$\frac{-x}{x^2+1} \geq f(x) \geq \frac{x}{x^2+1}$$

$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-x}{x^2+1}\right) = 0$

$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{x^2+1}\right) = 0$

حسب مبرهنة الإحاطة

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

السؤال الثاني

f معرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{x^3-x^2+x-3}{x^2-x-2}$$

① عين قيم a ، b ، c التي تحقق:

$$f(x)=ax+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$$

الحل

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline x^2-x-2 & x^3-x^2+x-3 \\ & \underline{-x^3 \pm x^2 \pm 2x} \\ & 3x-3 \end{array}$$

$$f(x)=x+\frac{3x-3}{x^2-x-2}$$

بالمطابقة $\boxed{a=1}$

$$\frac{3x-3}{x^2-x-2}=\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$$

توحيد المقامات ونختزل

$$3x-3=b(x-2)+c(x+1)$$

نعوض $x=-1$

$$-6=b(-3)\rightarrow \boxed{b=2}$$

نعوض $x=2$

$$3=c(3)\Rightarrow \boxed{c=1}$$

$$f(x)=x+\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x-2}$$

② احسب $\int_0^1 f(x)\,dx$

$$I=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(x+\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x-2}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}+2\ln(x+1)+\ln(-x+2)\right]_0^1$$

$$=\left(\frac{1}{2}+2\ln(2)+\cancel{\ln 1}\right)-\left(0+\cancel{2\ln 1}+\ln 2\right)$$

$$=\frac{1}{2}+2\ln 2-\ln 2$$

$$\boxed{I=\frac{1}{2}+\ln 2}$$

السؤال الثالث: f معرف على R وفق: $f(x) = x^2 e^{2x}$

جد تابعاً أصلياً F لـ f على R بالصيغة $F(x) = p(x)e^{2x}$ إذ p كثير حدود

الحل: F تابع أصلي لـ f.

$$F'(x) = f(x)$$

$$p'(x)e^{2x} + (2e^{2x})p(x) = x^2e^{2x}$$

$$[p'(x) + 2p(x)]\cancel{e^{2x}} = x^2\cancel{e^{2x}}$$

$$\boxed{p'(x) + 2p(x) = x^2} \quad (*)$$

p كثير حدود من الدرجة الثانية

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$
$$p'(x) = 2ax + b$$

نعوض

$$2ax + b + 2ax^2 + 2bx + 2c = x^2$$

$$2ax^2 + (2a+2b)x + b + 2c = x^2$$

مطابقة الأمثال

$$2a = 1 \Rightarrow \boxed{a = \tfrac{1}{2}}$$

$$2a + 2b = 0 \Rightarrow b = -a \Rightarrow \boxed{b = -\tfrac{1}{2}}$$

$$b + 2c = 0 \Rightarrow c = -\tfrac{b}{2} = \boxed{+\tfrac{1}{4}}$$

$$\boxed{p(x) = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}}$$

إذن

F تابع أصلي لـ f: $F(x) = \left(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\right)e^{2x}$

السؤال الأول: f معرف على R

$$f(x) = xe^{-x} + x - 2$$

1) أثبت أن المستقيم Δ مقارب مائل للخط C وادرس الوضع النسبي.

$\Delta: y = x - 2$

$$f(x) - y_\Delta = xe^{-x} = \frac{x}{e^x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - y_\Delta] = 0$$

$\Delta: y = x - 2$ مقارب مائل عند $+\infty$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{x}{e^x} = 0$$

$$\boxed{x = 0}$$

$\Delta: y = -2$

$A(0,-2)$ نقطة مشتركة

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$		$-$	0	$+$	
الوضع		Δ فوق C		Δ تحت C	

$A(0,-2)$ نقطة مشتركة

2) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

f مستمر وقابل للاشتقاق على $R =]-\infty,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x} + x - 2\right) = \boxed{+\infty}$$

$$f'(x) = 1\cdot e^{-x} + (-e^{-x})x + 1$$

$$= e^{-x} - xe^{-x} + 1$$

$$f'(x) = (1-x)e^{-x} + 1$$

نظراً لصعوبة دراسة إشارة f' نفرض

$$g(x) = f'(x)$$

$$g'(x) = -1e^{-x} + (-e^{-x})(1-x)$$

$$= -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x}$$

$$= (-2+x)e^{-x}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow -2 + x = 0$$

$$x = 2$$

$$g(2) = -1e^{-2} + 1$$

$$= -\frac{1}{e^2} + 1 = \frac{e^2-1}{e^2}$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$\frac{e^2-1}{e^2}$	$\nearrow$	

$g(x) \geq \frac{e^2-1}{e^2} > 0$ مهما كان x

$$f'(x) > 0$$

f متزايد على R

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) أثبت أن $f(x)=0$ له حل α حيث $1<\alpha<2$

f مستمر ومتزايد على $[1,2]$

$$f(1) = e^{-1} + 1 - 2 = \frac{1}{e} - 1 = \frac{1-e}{e} < 0$$

$$f(2) = 2e^{-2} = \frac{2}{e^2} > 0$$

$$f(1)f(2) < 0$$

المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد $1<\alpha<2$

السؤال الخامس: f معرف على R ، $f(x)=x+\frac{4}{e^x+1}$

① ادرس تغيرات f ونظم جدولا

f مستمر وقابل للاشتقاق على R

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty+4=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty+0=+\infty$$

$$f'(x) = 1+\frac{-4(e^x)}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x+1)^2-4e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{e^{2x}+2e^x+1-4e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x}-2e^x+1}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2} \geq 0$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow e^x-1=0 \Rightarrow e^x=1 \Rightarrow x=0$$

$$f(0)=0+\frac{4}{1+1}=2$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

$A(0,2)$ نقطة انعطاف

② احسب $f(x)+f(-x)$ ثم استنتج أن $A(0,2)$ مركز تناظر للخط البياني

$$f(x)+f(-x) = \cancel{x}+\frac{4}{e^x+1}-\cancel{x}+\frac{4}{e^{-x}+1}$$

$$= \frac{4}{e^x+1}+\frac{4e^x}{1+e^x} = \frac{4+4e^x}{1+e^x}$$

$$= \frac{4(1+e^x)}{1+e^x} = 4$$

$\Rightarrow \quad f(x)+f(-x)=4$

أيا كان $x\in D=\mathbb{R}$ فإن $2a-x=-x\in\mathbb{R}$ الشرط الأول محقق

$f(2a-x)+f(x)=2b$ الشرط الثاني محقق

$f(-x)+f(x)=4$

إذاً $A(0,2)$ مركز تناظر للخط

(3) أثبت أن C يقبل مماساً يوازي محور الفواصل أوجد معادلته

بما أن $f'(x)=0$ عندما $x=0$

فإن الخط C يقبل مماساً أفقياً (يوازي محور الفواصل)

معادلته $y=y_A=f(0)$

$y=2$

(4) أثبت أن C يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً له معادلته

$\Delta: y=x$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{4}{e^x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{e^x+1}\right)=0$$

$\Delta: y=x$ مقارب مائل عند $+\infty$

بما أن $\frac{4}{e^x+1}>0$ فإن C فوق Δ

(5) أوجد $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+4)]$ ماذا تستنتج هندسياً

$$f(x)-(x+4)=\cancel{x}+\frac{4}{e^x+1}-\cancel{x}-4=\frac{4}{e^x+1}-4$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+4)]=4-4=0$$

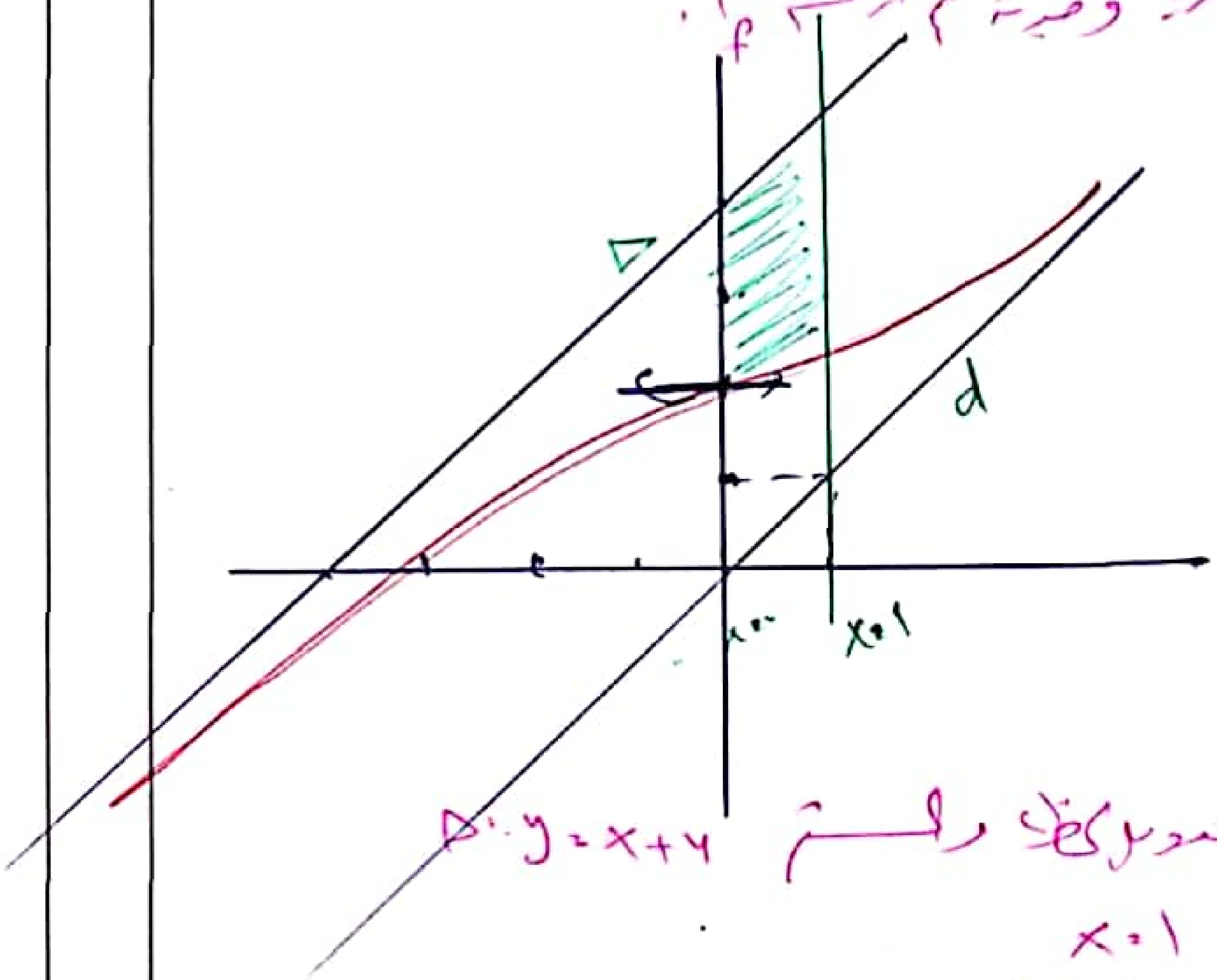
هندسياً

$\Delta': y=x+4$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$

$$f(x)-y_{\Delta'}=\frac{\cancel{4}-4e^x-\cancel{4}}{e^x+1}=\frac{-4e^x}{e^x+1}<0$$

C تحت Δ'

6) ارسم d وكلا مقاربة وصحة الرسم



للرسم

$d: y = x$

x	0	1
y	0	1

$\Delta: y = x + 4$

x	0	-4
y	4	0

$A(0,2)$ نقطة انعطاف

7) احسب مساحة السطح المحصور بـ C والمستقيم $\Delta: y = x+4$ والمستقيمين $x=0$, $x=1$

نلاحظ Δ فوق C بـ $[0,1]$

$$S = \int_0^1 (y_\Delta - f(x))\,dx = \int_0^1 \left(\cancel{x} + 4 - \cancel{x} - \frac{4}{e^x+1}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(4 - \frac{4}{e^x+1}\right) dx = 4\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{e^x+1}\right) dx$$

$$= 4\int_0^1 \frac{e^x + \cancel{1} - \cancel{1}}{e^x+1}\,dx = 4\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$$

$$= \left[4\ln(e^x+1)\right]_0^1$$

$$= 4\ln(e+1) - 4\ln(e^0+1)$$

$$= 4\left[\ln(e+1) - \ln 2\right]$$

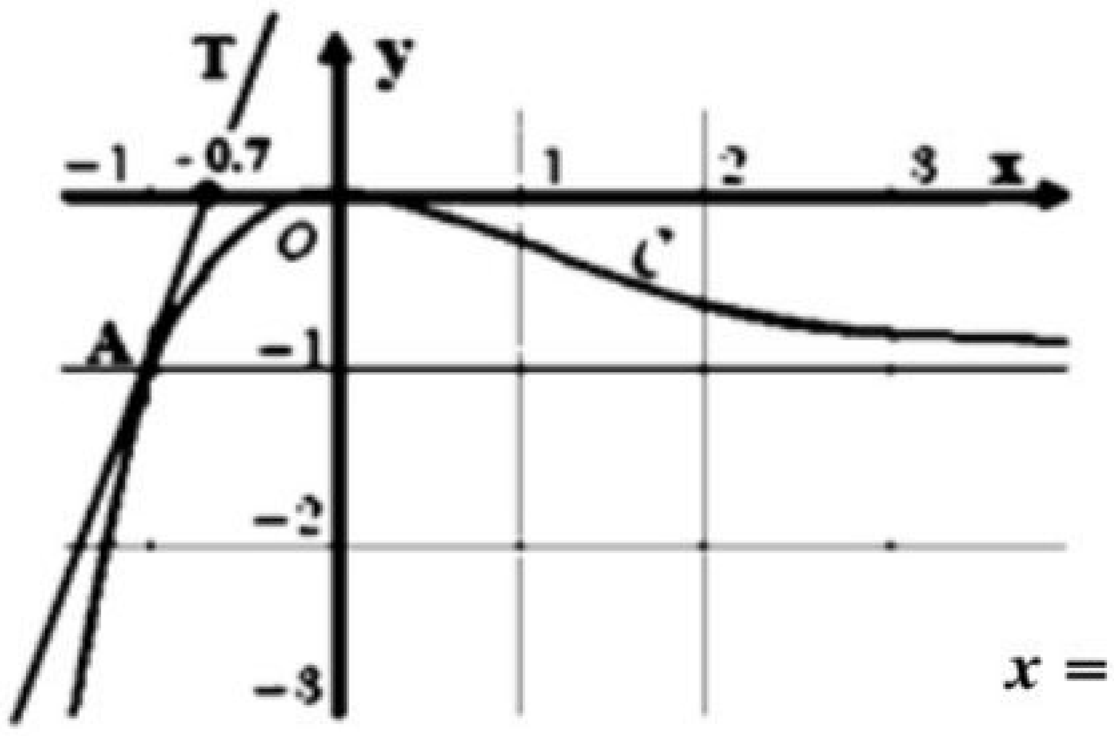
$$S = 4\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

اختبارات 2021 | مركز المنير التعليمي | معهد ابي الفداء | معهد حماه الأول

النموذج A | **الشامل جزء أول** | المدة : 3 ساعة

المدرس : كاسر خليل عتيق | 2021 | الدرجة العظمى : 600

أولا : أجب عن أربع أسئلة من الأسئلة الخمسة الآتية : **(40 درجة لكل سؤال)**



السؤال الأول: نجد جانباً C_f الخط البياني لتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ و المطلوب :

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ واكتب معادلة المقارب الأفقي

2) جد حلول المتراجحة : $f'(x) \le 0$ ؟

3) دل على القيمة الحدية و بين نوعها

4) اكتب معادلة المماس لمنحني التابع في نقطة منه فاصلتها $x=-1$

السؤال الثاني: ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ وفق : $f(x)=\dfrac{3\,e^x+2}{e^x-1}$ خطه البياني C و المطلوب :

احسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أعط عددا حقيقيا A يحقق الشرط :

إذا كان $x>A$ كان $f(x)\in\left]\ 2.95\ ,\ 3.05\ \right[$

السؤال الثالث: احسب $I=\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin x\ dx$

السؤال الرابع: ليكن التابع f المعرف على $[-1,3]$ وفق $f(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{3+2x-x^2}$

ادرس قابلية اشتقاق f عند (3) من اليسار ماذا تستنتج بالنسبة للخط C_f

السؤال الخامس: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=a\sqrt{x^2+3}+bx$

عين العددين a,b إذا علمت أن $\Delta: y=2x+3$ مماس لـ C في نقطة فاصلتها (1)

ثانياً : حل التمارين الأربعة الآتية : **(60 درجة لكل تمرين)**

التمرين الأول: عين قيم A,B بحيث يكون التابع f المعرفة فيما يأتي مستمرة على R :

$$f(x)=\begin{cases} A\left(\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x-2}}{x^2+3x-4}\right) & : x>1 \\ -\dfrac{1}{5} & : x=1 \\ \dfrac{B.\sin(x-1)}{(x^2+1).|x-1|} & : x<1 \end{cases}$$

التمرين الثاني: ليكن C_1 الخط البياني للتابع f المعرفة على $]0,+\infty[$ وفق : $f\ \ x\ =Lnx$ و المطلوب :

1 – أوجد قيمة تقريبية للعدد $\ln(7.9)$ إذا علمت أن $\ln(2)=0.7$

2 - ليكن C_2 الخط البياني للتابع g المعرفة على R وفق : $g\ \ x\ =x-1$ و المطلوب :

أثبت أن الخطين C_1 و C_2 متماسان في النقطة $A(1,0)$ ثم أوجد معادلة المماس المشترك في A

يتبع في الصفحة التالية ....

التمرين الثالث: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R\setminus\{1\}$ وفق : $f(x)=\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$

① اكتب معادلة المماسين للخط البياني العمودين على المستقيم الذي معادلته : $3y-x=0$

② أثبت أن التابع $g(x)=\dfrac{\sin^2 x-3\sin x+6}{\sin x-1}$ اشتقاقي على المجال $I=]0,\frac{\pi}{2}[$ ثم استنتج $g'(x)$

التمرين الرابع: المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق : $u_n=1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3^2}+\dfrac{3}{3^3}+\dfrac{4}{3^4}+.............+\dfrac{n}{3^n}$

1. أثبت ، مستعملاً البرهان بالتدريج ، أن $n\leq 2^n$ مهما كان العدد الطبيعي n
2. استنتج أن العدد (3) راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$
3. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة

ثالثاً : حل المسألتين الآتيتين :　　　　　　　　　　　　(100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: لتكن مجموعة التوابع $f_\lambda(x)=\ln(x^2+\lambda)$ حيث λ وسيط حقيقي

أولاً – عين قيمة الوسيط λ ليمر خطه البياني بالنقطة $A(2,\ln 3)$

ثانياً – ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $D=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ وفق $f(x)=\ln(x^2-1)$

① أثبت أن f تابع زوجي و استنتج الصفة التناظرية للخط C

② ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها و استنتج معادلة كل مقارب للخط C شاقولي أو أفقي

③ أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ جذران مختلفان

④ اذا كان C_1 الجزء من الخط C الذي تكون فاصلة كل نقطه منه موجبة ، فاكتب معادلة المماس للخط C_1 في نقطة تقاطعه مع محور xx'

⑤ ارسم كل مقارب وجدته للخط C ثم ارسم C.

المسألة الثانية : ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=x(1+e^{-x})$

و ليكن : $g(x)=1+(1-x)e^{-x}$ المعرف على $\mathbb{R}$

① ادرس اطراد التابع g ثم حدد اشارته

② احسب نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه

③ أثبت أن $f'(x)=g(x)$ ثم نظم جدول تغيرات للتابع f

④ أثبت أن $\Delta: y=x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$ و ادرس الوضع النسبي

⑤ ارسم Δ و ارسم C_f

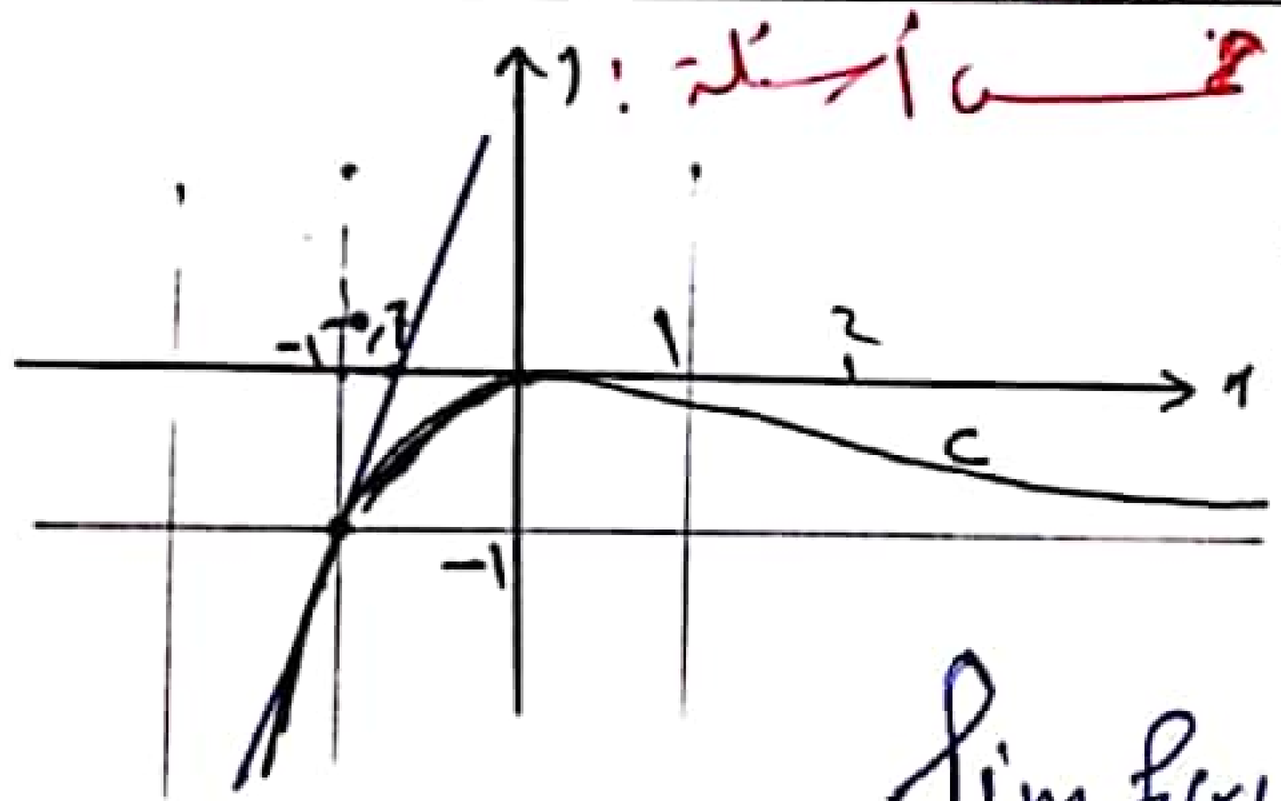
في حالة $\lambda>0$ احسب $S(\lambda)$ مساحة السطح المحصور بين C_f و Δ و $x=\lambda$

ثم احسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} S(\lambda)$

((انتهت الأسئلة))

مع التمنيات بالنجاح و التوفيق للجميع　　　　　　　　　　　　مدرس المادة : كاسر خليل عتيق

أولاً: أجب عن أربع أسئلة من خمس أسئلة:



السؤال الأول: تأمل الشكل وأجب

1) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ واكتب معادلة المقارب الأفقي

5 $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$$

5 $y=-1$ مقارب أفقي

16 2) حدد حلول المتراجحة $f'(x)\le 0$

$x\in[0,+\infty[$

3) دل على القيم الحدية ونوعها

5+5 $f(0)=0$ قيمة حدية كبرى

4) اكتب معادلة المماس للخط البياني في النقطة ذات الفاصلة $x=-1$

$A(-1,-1)\in T$, $B(-0{,}7,0)=B(-\frac{7}{10},0)$

5 $$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0+1}{-\frac{7}{10}+1}=\frac{1}{\frac{3}{10}}=\frac{10}{3}$$

5 $$y-y_A=m(x-x_A)\Rightarrow y+1=\frac{10}{3}(x+1)$$

$$y=\frac{10}{3}x+\frac{7}{3}$$

السؤال الثاني: f معرف على R^* وفق $f(x)=\frac{3e^x+2}{e^x-1}$

1) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أعط عدداً حقيقياً A كي

إذا كان $x>A$ كان $f(x)\in]2.95,3.05[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{\infty}{\infty} = \text{ع ت}$$

3 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{e^x}(3+\frac{2}{e^x})}{\cancel{e^x}(1-\frac{1}{e^x})}=\frac{3+0}{1-0}=\boxed{3}\longrightarrow c=3$$

3 $$f(x)\in]\overset{c-r}{2.95},\overset{c+r}{3.05}[\longrightarrow r=0{,}05$$

3 $|f(x) - c| < r$

3 $\left| \dfrac{3e^x + 2}{e^x - 1} - 3 \right| < 0,05$

3 $\left| \dfrac{\cancel{3e^x} + 2 - \cancel{3e^x} + 3}{e^x - 1} \right| < 0,05$

3 $\left| \dfrac{5}{e^x - 1} \right| < \dfrac{5}{100}$

3 ب $\dfrac{5}{|e^x - 1|} < \dfrac{1}{20}$

3 $\dfrac{|e^x - 1|}{5} > \dfrac{20}{1}$

3 $|e^x - 1| > 100$

x [illegible]

3 $e^x - 1 > 100$

3 $e^x > 101$

3 $x > \ln(101)$

2 $x > A$ $\Big\}$ $A = \ln(101)$

2

السؤال الثالث: احسب $I = \int_0^{\pi} e^x \cdot \sin x \, dx$

3+3 $u(x) = e^x \xrightarrow{\;/\;} u'(x) = e^x$

3+3 $v'(x) = \sin x \xrightarrow{\;\int\;} v(x) = -\cos x$

3+3 $I = \Big[(-\cos x)(e^x)\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x)\, e^x \, dx$

$= \Big[-\cos x \, e^x\Big]_0^{\pi} + \underbrace{\int_0^{\pi} \cos x \, e^x \, dx}_{\text{تجزئة ثانية}}$

3 $u(x) = \quad \xrightarrow{\;/\;} u'(x) = e^x$

3 $v'(x) = \cos x \xrightarrow{\;\int\;} v(x) = \sin x$

2+2 $I = \Big[-\cos x \, e^x\Big]_0^{\pi} + \Big[\sin x \, e^x\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x \, e^x \, dx$

3 $I = \Big[(-\cos x + \sin x)\, e^x\Big]_0^{\pi} - I$

3 $2I = (-\overset{-1}{\cos \pi} + \cancel{\overset{0}{\sin \pi}})\, e^{\pi} - (-\overset{1}{\cos 0} + \cancel{\overset{0}{\sin 0}})\, e^0$

3 $2I = 1 e^{\pi} + 1$

3 $I = \dfrac{e^{\pi} + 1}{2}$

السؤال الرابع: f معرف على $[-1,3]$ وفق

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3+2x-x^2}$$

ادرس قابلية اشتقاق f عند (3) من اليسار، ماذا تستنتج هندسياً

1 $f(3) = 0$

3+3 $$g(x) = \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{-x^2+2x+3}}{x-3}$$

3 $$\lim_{x \to 3^-} g(x) = \frac{0}{0} \text{ ع.ت}$$

3+3 $$g(x) = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{-x^2+2x+3}\,\sqrt{-x^2+2x+3}}{(x-3)\sqrt{-x^2+2x+3}} = \frac{-x^2+2x+3}{2(x-3)\sqrt{-x^2+2x+3}}$$

3+3 $$= \frac{-(x^2-2x-3)}{2(x-3)\sqrt{-x^2+2x+3}} = \frac{-\cancel{(x-3)}(x+1)}{2\cancel{(x-3)}\sqrt{-x^2+2x+3}}$$

3 $$= \frac{-(x+1)}{2\sqrt{-x^2+2x+3}}$$

3+3 $$\lim_{x \to 3^-} g(x) = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

3 f غير قابل للاشتقاق عند $(x=3)$ من اليسار

3 نستنتج C_f يقبل مماساً شاقولياً في $A(3,0)$

3 معادلته $X=3$

السؤال الخامس: f معرفة على R وفق

$$f(x) = a\sqrt{x^2+3} + bx$$

جد a ، b إذا علمت أن $\Delta: y = 2x+3$ يمس المنحني في النقطة (1)

1 $\boxed{x_A = 1}$

إيجاد نقطة التماس نعوض في معادلة المماس

3 $y = 2(1)+3 = 5$

نقطة التماس $A(1,5)$

3 $f(1) = 5 \Rightarrow a\sqrt{1+3} + b(1) = 5$

3 $① \longrightarrow \boxed{2a + b = 5}$

f قابلة للاشتقاق على R

3+3 $f'(x) = a\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} + b = a\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}} + b$

3 $m = 2$ $\quad \Delta: y = 2x+3$, $y = mx + p$

3+3 $f'(x_A) = m \Rightarrow f'(1) = 2$

3 $a\dfrac{1}{\sqrt{4}} + b = 2$

$\dfrac{a}{2} + b = 2$

$a + 2b = 4$

3 نعوض ② في ① $\quad ② \longrightarrow \boxed{a = 4 - 2b}$

$2(4-2b) + b = 5$

3 $8 - 4b + b = 5$

3 $-3b = -3 \Rightarrow b = 1$

$a = 4 - 2$

3 $a = 2$

$$\boxed{f(x) = 2\sqrt{x^2+3} + x}$$

ثانياً: حل التمارين الأربعة

التمرين الأول:

عيّن قيم A ، B لتكون f مستمر على R:

$$f(x)=\begin{cases} A\left(\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x-2}}{x^2+3x-4}\right) & : x>1 \\ -\dfrac{1}{5} & : x=1 \\ \dfrac{B\cdot\sin(x-1)}{(x^2+1)\,|x-1|} & : x<1 \end{cases}$$

f مستمر على R إذا كان مستمر عند (1) نحقق ذلك شرطاً

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} A\left(\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x-2}}{x^2+3x-4}\right)\ \left(\frac{0}{0}\right) \text{ ع.ت}$$

نضرب بمرافق البسط

$$=\lim_{x\to 1^+} A\,\frac{2x-1-3x+2}{(x^2+3x-4)(\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x-2})}$$

$$=\lim_{x\to 1^+} A\,\frac{\overset{-1}{\cancel{(-x+1)}}}{(x+4)\cancel{(x-1)}(\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x-2})}$$

$$=\frac{-A}{(1+4)(1+1)}=\frac{-A}{10}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{B\sin(x-1)}{(x^2+1)\,|x-1|}\ \left(\frac{0}{0}\right) \text{ ع.ت}$$

$$\lim_{g\to 0}\frac{\sin g}{g}=1$$

$$=\lim_{x-1\to 0}\frac{B\sin(x-1)}{-(x^2+1)(x-1)}$$

$$=\frac{B(1)}{-(1+1)}=-\frac{B}{2}$$

$$f(1) = -\frac{1}{5}$$

نلاحظ أن

$$-\frac{A}{10} = -\frac{B}{2} = -\frac{1}{5}$$

$$A = 2$$
$$B = \frac{2}{5}$$

التمرين الثاني: $C_f : f(x) = \ln x \quad]0,+\infty[$

① أوجد قيمة تقريبية للعدد $\ln(7.9)$ إذا علمت أن $\ln(2)=0,7$

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$ f اشتقاقية على $\mathbb{R}_+^*$

$$f(a+h) \simeq f(a) + f'(a)\cdot h \qquad \begin{cases} a+h = 7.9 \\ a = 8 \\ h = -0,1 \end{cases}$$

$$f(7,9) \simeq f(8) + f'(8)(-0,1)$$

$$\ln(7,9) \simeq \ln(8) + \left(\frac{1}{8}\right)(-0,1)$$
$$\simeq \ln(2)^3 + (0,125)(-0,1)$$
$$\simeq 3\ln 2 - 0,0125$$
$$\simeq 3(0,7) - 0,0125$$
$$\simeq 2,1 - 0,0125$$
$$\simeq 2,0875$$

② $C_g : g(x) = x - 1$

بيّن أن C_f و C_g متماسان في $A(1,0)$ وأوجد معادلة المماس المشترك

$$\left.\begin{matrix} f(1) = \ln 1 = 0 \\ g(1) = 1 - 1 = 0 \end{matrix}\right) f(1) = g(1)$$

$$\left.\begin{matrix} f'(x) = \frac{1}{x} \to f'(1) = 1 \\ g'(x) = 1 \to g'(1) = 1 \end{matrix}\right) f'(1) = g'(1)$$

C_f و C_g متماسان في $A(1,0)$

$$y - y_A = m(x - x_A)$$
$$y - 0 = 1(x - 1)$$

المماس المشترك $\boxed{y = x - 1}$

التمرين الثالث: f معرفة على $R\setminus\{1\}$ وتحقق: $f(x)=\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$

① أكتب معادلات المماس للمنحني العمودية على المستقيم الذي معادلته $3y-x=0$

$3y-x=0$

$y=\frac{1}{3}x \Rightarrow m=\frac{1}{3}$

شرط التعامد

$m_1\cdot m_2=-1$

$\frac{1}{3}m_2=-1 \Rightarrow \boxed{m_2=-3}$ ميل المماس

f مستمرة على $R\setminus\{1\}$

$$f'(x)=\frac{(2x-3)(x-1)-1(x^2-3x+6)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{2x^2-2x-\cancel{3x}+3-x^2+\cancel{3x}-6}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

نعلم أن ميل المماس = قيمة المشتقة الأولى عند نقطة التماس

$f'(x)=m_T$

$\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=-3 \Rightarrow x^2-2x-3=-3(x^2-2x+1)$

$x^2-2x-\cancel{3}=-3x^2+6x-\cancel{3}$

$4x^2-8x=0$

$4x(x-2)=0$

إما $\boxed{x=0} \rightarrow y_A=f(0)=-6$, $m=-3$

$y=f'(0)(x-0)+f(0) \Rightarrow \boxed{y=-3x-6} \longleftarrow T_1$

أو $x-2=0 \Rightarrow x=2 \rightarrow y_B=f(2)=4$, $m=f'(2)=-3$

$y=f'(2)(x-2)+f(2)$

$y=-3(x-2)+4$

$y=-3x+10 \longleftarrow T_2$

2) أ) نبحث

$$g(x) = \frac{\sin^2 x - 3\sin x + 6}{\sin x - 1}$$

اشتقاق الدالة على $I =]0, \frac{\pi}{2}[$ ثم $g'(x)$

ملاحظة
$$g(x) = f(\sin x)$$

g قابلة للاشتقاق على $I =]0, \frac{\pi}{2}[$ لأنه تركيب تابعين كل منهما قابل للاشتقاق على I

حيث $\sin x$ قابل للاشتقاق على R و f قابل للاشتقاق على $I =]0, \frac{\pi}{2}[$

و $D_f = R \setminus \{1\}$

$\sin x \neq 1$ لأن $x \in I$

حسب قواعد اشتقاق تابع مركب

$$g'(x) = f'(\sin x)(\sin x)'$$

$$g'(x) = \left(\frac{\sin^2 x - 2\sin x - 3}{(\sin x - 1)^2}\right) \cdot (\cos x)$$

التمرين الرابع:

$$U_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \cdots + \frac{n}{3^n}$$

1) أثبت بالتدريج $n \leq 2^n$ مهما كان العدد الطبيعي n

لتكن القضية $E(n): n \leq 2^n : n \geq 0$

1- نتحقق من صحة القضية من أجل $n = 0$

$E(0)$: $0 \leq 2^0$، $0 \leq 1$ محققة

2- نفرض أن القضية صحيحة من أجل n

$E(n): \boxed{n \leq 2^n}$ (*)

3- نتحقق من صحة القضية من أجل $n+1$

$E(n+1): n+1 \leq 2^{n+1}$ ؟؟

نضرب طرفي * $n \leq 2^n$ بـ 2

$2n \leq 2 \cdot 2^n$

$n+1 \leq 2n \leq 2^{n+1}$ لأن $n \geq 1$

$n+1 \leq 2^{n+1}$

محققة $E(n+1)$

القضية محققة أياً كان $n \geq 0$

② أثبت أن العدد (3) راجح لـ المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$

$$U_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \cdots + \frac{n}{3^n}$$

نستطيع $n \leq 2^n$ (بالتدريج)

$$U_n \leq 1 + \frac{2^1}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} + \cdots + \frac{2^n}{3^n}$$

$$\leq 1 + \underbrace{\left(\tfrac{2}{3}\right)^1 + \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\tfrac{2}{3}\right)^n}_{\text{هندسية}}$$

$$\leq 1 + a\,\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$\leq 1 + \frac{2}{3}\,\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}$$

$$\leq 1 + \frac{2}{3}\,\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}}$$

$$\leq 1 + 2\left[1-\left(\tfrac{2}{3}\right)^n\right]$$

$$\leq 1 + 2 - 2\left(\tfrac{2}{3}\right)^n$$

$$\leq 3 - 2\left(\tfrac{2}{3}\right)^n \leq 3$$

$$\Longrightarrow \quad U_n \leq 3$$

$M=3$ راجح

③ أثبت أن $(V_n)_{n\geq 0}$ متقاربة

$$U_{n+1} = \underbrace{1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n}{3^n}}_{U_n} + \frac{n+1}{3^{n+1}}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{n+1}{3^{n+1}} \geq 0$$

(V_n) متزايدة

$(V_n)_{n\geq 0}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالراجح $M=3$

فهي متقاربة

موضحة

المسألة الأولى:

$\lambda\in\mathbb{R}$: $f_\lambda(x)=\ln(x^2+\lambda)$

أولاً: عين قيمة الوسيط λ ليمر الخط البياني بالنقطة $A(2,\ln 3)$

$$f(2)=\ln 3 \Rightarrow \ln(4+\lambda)=\ln 3$$

$$4+\lambda=3 \Rightarrow \lambda=-1$$

ثانياً: f معرفة على $D=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ وفق $f(x)=\ln(x^2-1)$

① اثبت أن f تابع زوجي واستنتج الصفة التالية للخط

أياً كان $x\in D=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

فإن $-x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[=D$

$$f(-x)=\ln[(-x)^2-1]=\ln(x^2-1)=f(x)$$

f تابع زوجي ⇐ C متناظر بالنسبة لمحور التراتيب oy

② ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها واستنتج معادلات المقاربات الشاقولية

f مستمر واشتقاقي على $D=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$

مقارب شاقولي $x=-1$ ، مقارب شاقولي $x=1$

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2-1}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0\notin D$ مرفوض

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖		‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖		‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

③ أثبت ان للمعادلة $f(x)=0$ حلان متعاكسان

من الجدول: f مستمرة ومتناقصة على $I_1 =]-\infty,-1[$

$0 \in f(I_1) = R$

للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد $\alpha \in I_1$

من الجدول f مستمرة ومتزايدة على $I_2 =]1,+\infty[$

$0 \in f(I_2) = R$

للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد $\beta \in I_2$

إذاً للمعادلة $f(x)=0$ حلان متعاكسان في D_f

④ اذا كان C الخط البياني الذي تكون فاصلة كل نقطة منه موجبة فاكتب معادلة المماس للخط C في نقطة تقاطعه مع محور x

نقطة التقاطع مع محور الفواصل نضع $f(x)=0$

$\ln(x^2-1)=0$

$x^2-1=1 \Rightarrow x^2=2$ ← $x=-\sqrt{2}$ مرفوض ، $x=+\sqrt{2}$ مقبول

$A(\sqrt{2},0)$

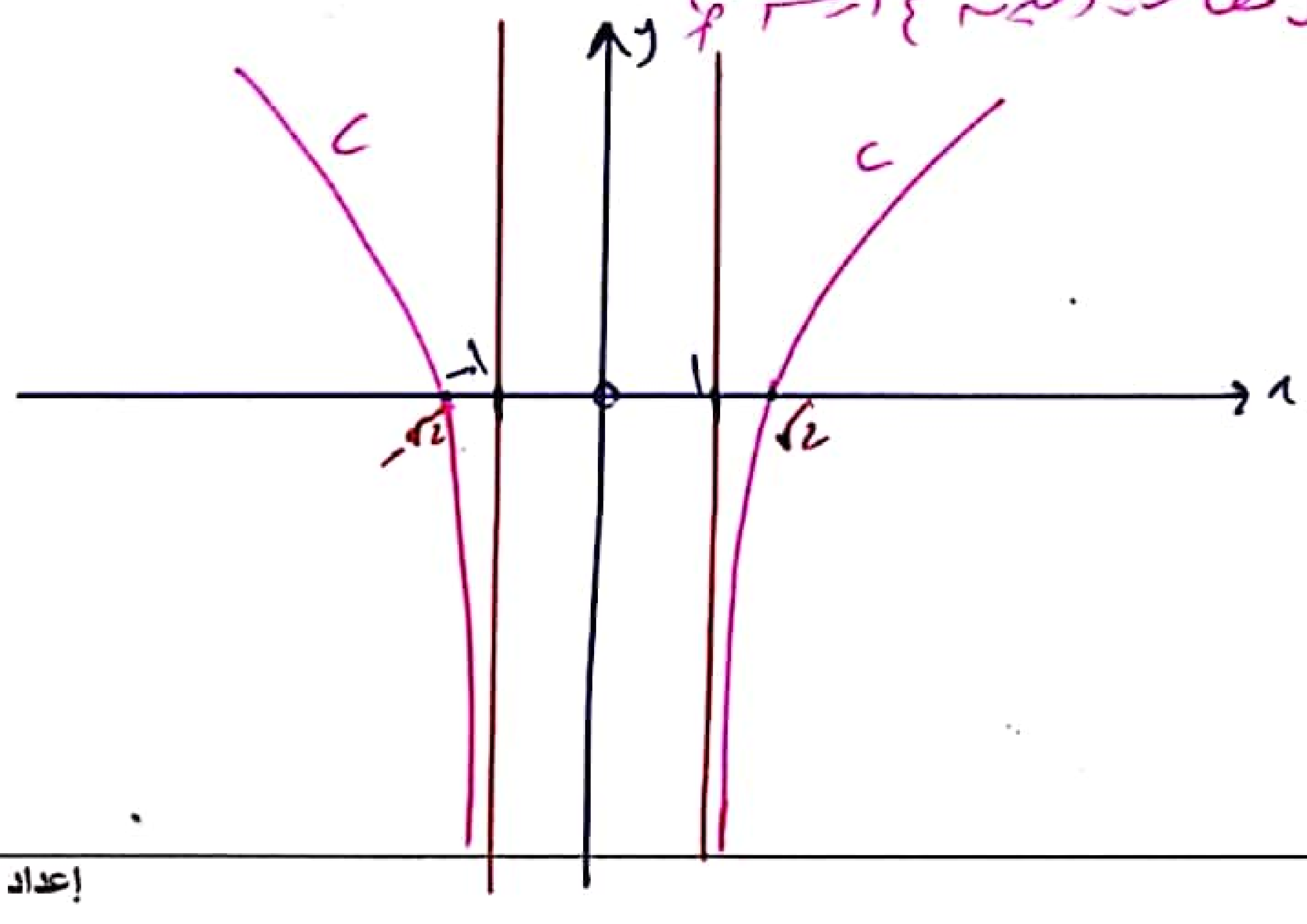
$m = f'(\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}}{2-1} = 2\sqrt{2}$

$y = f'(\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) + f(\sqrt{2})$

$y = 2\sqrt{2}(x-\sqrt{2}) + 0$

$\boxed{y = 2\sqrt{2}x - 4}$

⑤ ارسم كل مقارباته ومنحني f



المسألة الثامنة

$f: f(x) = x(1+e^{-x})$ ، f معرفة على IR ،

$g: g(x) = 1+(1-x)e^{-x}$; R

(1) ادرس اطراد الدالة g ثم حدد اشارتها.

$$g(x) = 1+(1-x)e^{-x}$$

g مستمرة على R

$$g'(x) = (-1)(e^{-x}) + (-e^{-x})(1-x)$$

$$= (-1-1+x)e^{-x} = \frac{-2+x}{e^{x}}$$

$$g'(x)=0 \Rightarrow -2+x=0 \rightarrow \boxed{x=2}$$

$$g(2) = 1-1e^{-2} = 1-\frac{1}{e^2} = \frac{e^2-1}{e^2}$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$\frac{e^2-1}{e^2}$	$\nearrow$	
$g>0$		$+$	$+$	$+$	

بما أن $g(x) \geq \frac{e^2-1}{e^2} > 0$

إذن $g(x)>0$ لكل $x \in R$

(2) احسب نهايات f عند اطراف D_f

$$f(x) = x(1+e^{-x})$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty(1+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(1+0) = +\infty$$

(3) أثبت أن $f'(x) = g(x)$ ثم ضع جدول تغيرات f

f مستمرة على R

$$f'(x) = 1\cdot(1+e^{-x}) + (-e^{-x})(x)$$

$$= 1+e^{-x}-xe^{-x}$$

$$= 1+(1-x)e^{-x} = g(x)$$

$$f'(x) = g(x) > 0$$

f متزايدة تماماً على R

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

④ اثبت أن $\Delta: y=x$ مقارب للخط البياني عند $+\infty$ وادرس الوضع النسبي

$$f(x) - y_\Delta = \cancel{x} + x e^{-x} - \cancel{x} = \frac{x}{e^x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y_\Delta] = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{e^x}\right) = 0$$

$\Delta: y=x$ مقارب مائل عند $+\infty$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{x}{e^x} = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

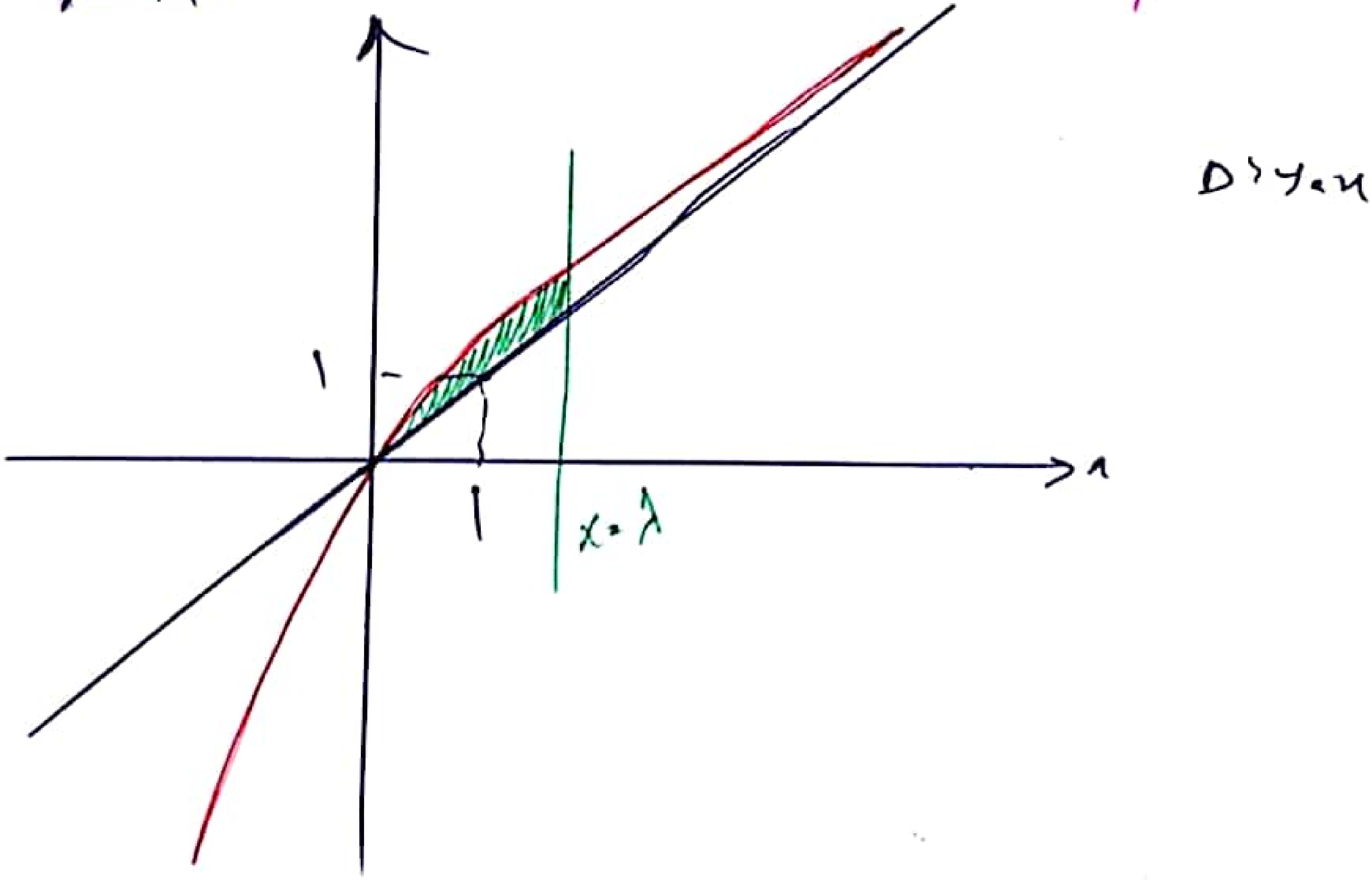
$\Delta: y=0$

$A(0,0)$ مشترك

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	Δ فوق C		C فوق Δ

$A(0,0)$ نقطة مشتركة

⑤ ارسم Δ والخط C في حالة $\lambda > 0$ احسب $S(\lambda)$ مساحة السطح المحصور بين C و Δ و $x=\lambda$ و $x=0$ احسب $\lim_{\lambda \to +\infty} S(\lambda)$



مساحة م.Δ $[0, \lambda]$

$$S = \int_0^{1} (f(x) - y_\Delta)\, dx$$

$$= \int_0^{\lambda} \left(\frac{x}{e^x}\right) dx = \int_0^{\lambda} (x\, e^{-x})\, dx$$

$u(x) = x \longrightarrow u'(x) = 1$

$v'(x) = e^{-x} \longrightarrow v(x) = -e^{-x}$

$$S = \Big[(x)(-e^{-x})\Big]_0^{\lambda} - \int_0^{\lambda} -e^{-x}\, dx$$

$$= \Big[-x e^{-x} - e^{-x}\Big]_0^{\lambda}$$

$$= \Big[(-x-1)e^{-x}\Big]_0^{\lambda} = (-\lambda-1)\, e^{-\lambda} - (0-1)e^{0}$$

$$= \frac{-\lambda-1}{e^{\lambda}} + 1$$

$$\boxed{S(\lambda) = -\frac{\lambda}{e^{\lambda}} - \frac{1}{e^{\lambda}} + 1}$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} S(\lambda) = 0 - 0 + 1 = 1$$

انتهى الحل

اختبارات في مادة

الرياضيات

_ Math Tests _

الجزء الثاني

NEW

2021

#_الجزء الثاني

بالجد و العمل نحقق الأمل

معهد حماه الأول   معهد ابي الفداء   **مركز المنير التعليمي**   النموذج A

المدة : ساعة ونصف   **الأشعة و الارتباط الخطي**

الدرجة العظمى : 300   و الجداء السلمي و مركز الأبعاد   الاختبار الثالث   2021

توزيع الدرجات (الأول 120 + الثاني 40 + الثالث 70 + الرابع 70)

السؤال الأول: نتأمل في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقاط $A\left(1,2,3\right)$ ، $B\left(2,3,1\right)$ ، $C\left(3,2,1\right)$ ، $M\left(0,3,3\right)$

① أوجد مركبات $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ ثم أثبت أن النقاط A,B,C ليست على استقامة واحدة

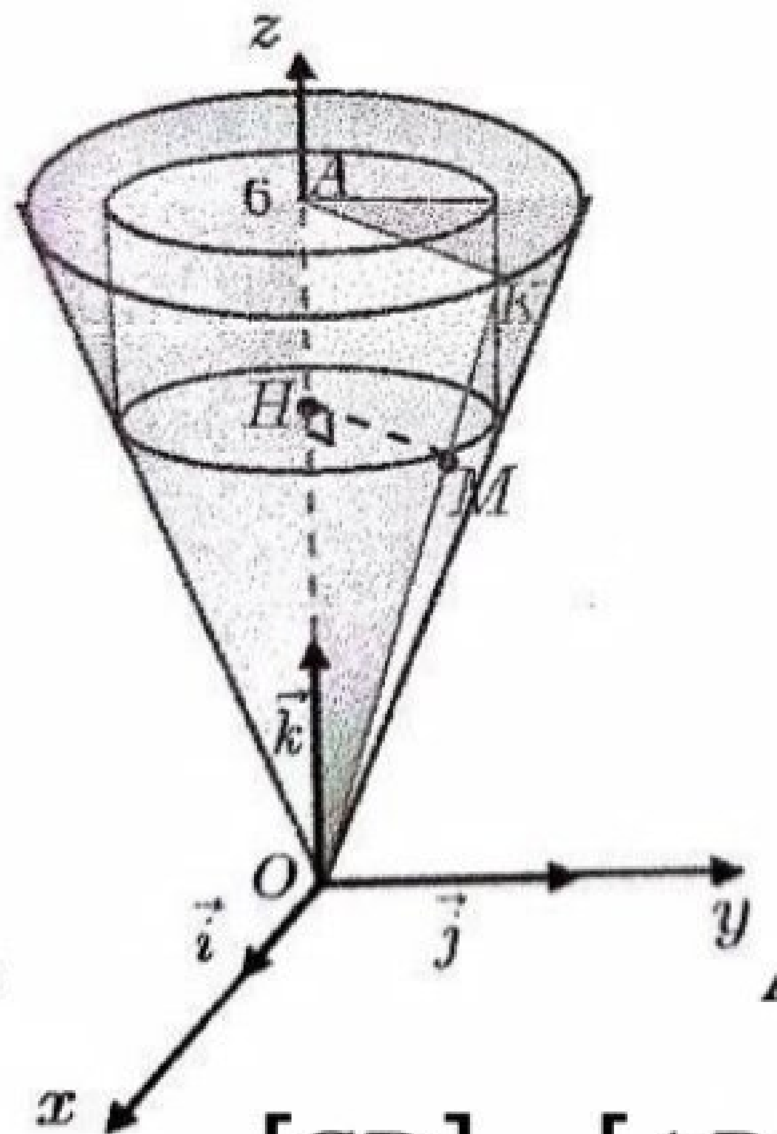
② هل النقطة M تنتمي للمستوي (ABC) ③ أثبت أن المثلث ABC قائم ، احسب مساحته

④ جد احداثيات النقطة D التي تجعل الرباعي $ABCD$ مستطيل

⑤ اكتب معادلة الكرة S التي مركزها B و تمر من C

⑥ أثبت أن : $AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$

⑦ احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ثم احسب $COS\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

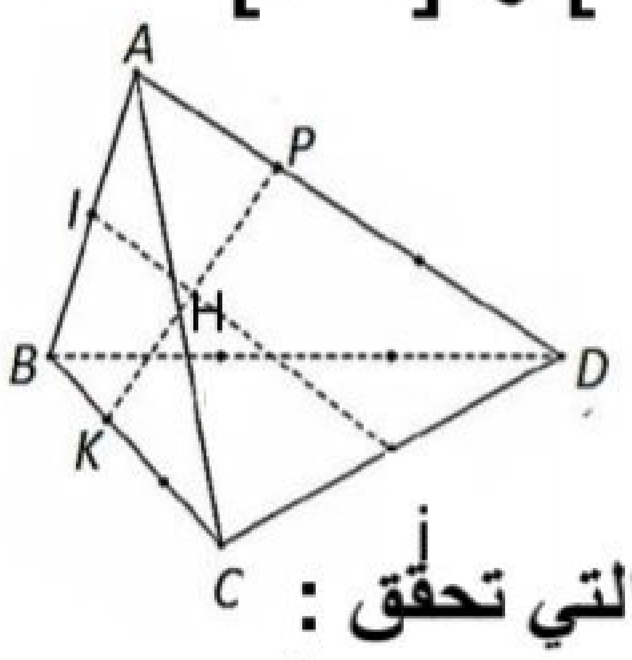


السؤال الثاني : *في معلم متجانس* $\left(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لتكن $A(0,0,6)$ و $AK = 2$

① أوجد معادلة المخروط المولد بدوران الضلع $[OK]$ حول (OA)

② اذا علمت ان $\mathrm{OH} = \frac{2}{3}OA$ اوجد معادلة الأسطوانة التي مركزي قاعدتها H و A

السؤال الثالث : $ABCD$ رباعي وجوه : I و J هما بالترتيب منتصفا $[AB]$ و $[CD]$



و النقطتان P و K تحققان العلاقتين

$\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BK}$ و $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AP}$

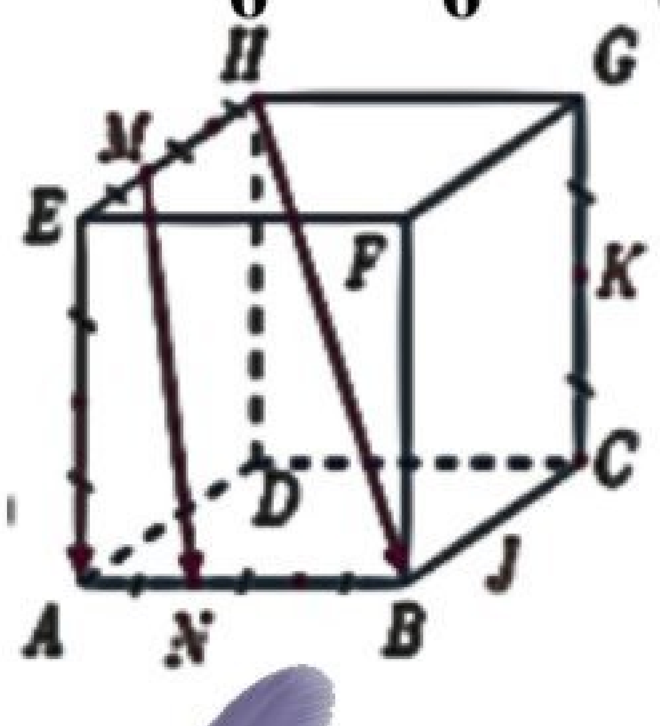
وأخيرا H منتصف $[PK]$

① أثبت أن النقاط I و J و H تقع على استقامة واحدة

② بفرض G مركز ثقل المثلث BCD جد مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق :

$$\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right\|$$

السؤال الرابع: $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه (6) مزود بمعلم متجانس $\left(A;\frac{1}{6}\overrightarrow{AB},\frac{1}{6}\overrightarrow{AD},\frac{1}{6}\overrightarrow{AE}\right)$



فيه M نقطة تحقق $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$ و N نقطة تحقق $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

① أثبت أن : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$

② هل الأشعة $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{HB}$ مرتبطة خطياً ؟ علل ؟

③ احسب: $\overrightarrow{KD}.\overrightarrow{KH}$ و $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{CK}$

((انتهت الاسئلة))

مع التمنيات بالنجاح للجميع   المدرس : كاسر خليل عتيق

الجمعة 26 / 3 / 2021

السؤال الأول

(1) $\vec{AC}(2,0,-2)$ ، $\vec{AB}(1,1,-2)$ $\Big\}$ $\frac{2}{1} \neq \frac{0}{1} \neq \frac{-2}{-2}$

← $\vec{AC}$ و $\vec{AB}$ غير مرتبطان خطياً لعدم تناسب مركباتهما.

← النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة.

← النقاط A و B و C تعين مستوي $P=(ABC)$

(2) لنبحث عن عددين حقيقيين α و β يحققان:

$\vec{AM} = \alpha\,\vec{AC} + \beta\,\vec{AB}$

$(-1,1,0) = (2\alpha,0,-2\alpha) + (\beta,\beta,-2\beta)$

$\boxed{-1 = 2\alpha + \beta}$ ------ (1)

$\boxed{1 = \beta}$ ------ (2)

$\boxed{0 = -2\alpha - 2\beta}$ ------ (3)

نعوض (2) في (1):

$-1 = 2\alpha + 1$

$-2 = 2\alpha$

→ $\alpha = -1$

نعوض α و β في (3):

$0 = -2(-1) - 2(1)$

$0 = +2 - 2$

$0 = 0$ محققة

$\vec{AM} = -\vec{AC} + \vec{AB}$ ←

← الأشعة $\vec{AM}$ و $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ مرتبطة خطياً ولها البداية ذاتها

← النقاط A و B و C و M تقع في مستو واحد ← $M \in P=(ABC)$

(3) $\vec{AB}(1,1,-2)$

→ $AB = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

$\vec{AC}(2,0,-2)$

→ $AC = \sqrt{4+0+4} = \sqrt{8}$

$\vec{BC}(1,-1,0)$

→ $BC = \sqrt{1+1+0}$

$BC = \sqrt{2}$

$(AB)^2 + (BC)^2 \overset{?}{=} (AC)^2$

$6 + 2 = 8$

$8 = 8$ محققة

← المثلث ABC قائم في B حسب عكس فيثاغورث:

$S_{ABC} = \frac{(AB)\cdot(BC)}{2}$

$= \frac{\sqrt{6} \times \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$S_{ABC} = \sqrt{3}$

(4) $ABCD$ مستطيل

→ $\vec{AB} = \vec{DC}$

$(1,1,-2) = (3-x, 2-y, 1-z)$

$1 = 3 - x$ → $x = 2$

$1 = 2 - y$ → $y = 1$

$-2 = 1 - z$ → $z = 3$

$\Big\}$ $D(2,1,3)$

⑤

$S : (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2$

$R = BC = \sqrt{2}$

$S : (x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2 = 2$

⑥

$\ell_1 = (AB)^2-(BC)^2+(CD)^2-(DA)^2$

مربع الشعاع يساوي مربع نظيمه ←

$\ell_1 = (\vec{AB})^2-(\vec{BC})^2+(\vec{CD})^2-(\vec{DA})^2$

$= (\vec{AB}-\vec{BC})(\vec{AB}+\vec{BC}) + (\vec{CD}-\vec{DA})(\vec{CD}+\vec{DA})$

$= \vec{AC}(\vec{AB}-\vec{BC}) + \vec{CA}(\vec{CD}-\vec{DA})$

$= \vec{AC}(\vec{AB}-\vec{BC}) - \vec{AC}(\vec{CD}-\vec{DA})$

$= \vec{AC}(\vec{AB}-\vec{BC}-\vec{CD}+\vec{DA})$

$= \vec{AC}(\vec{DA}+\vec{AB}-\vec{BC}-\vec{CD})$

$= \vec{AC}(\vec{DA}+\vec{AB}-(\vec{BC}+\vec{CD}))$

$= \vec{AC}(\vec{DB}-\vec{BD})$

$= \vec{AC}(\vec{DB}+\vec{DB})$

$= 2\vec{AC}\cdot\vec{DB} = \ell_2$

⑦

$\vec{AB}(1,1,-2) \Rightarrow \|\vec{AB}\| = \sqrt{6}$

$\vec{AC}(2,0,-2) \Rightarrow \|\vec{AC}\| = 2\sqrt{2}$

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = (1)(2)\ (1)(0)\ (-2)(-2)$

$= 2+0+4 = 6$

$\cos(\vec{AB},\vec{AC}) = \dfrac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{\|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{AC}\|}$

$\cos(\vec{AB},\vec{AC}) = \dfrac{6}{\sqrt{6}\times 2\sqrt{2}}$

$= \dfrac{3\sqrt{12}}{12} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow \cos(\vec{AB},\vec{AC}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

مجموع السؤال الأول

السؤال الثاني

①

$x^2+y^2-\dfrac{R^2}{a^2}z^2 = 0 \; ; \; 0 \leq z \leq a$

$x^2+y^2-\dfrac{4}{36}z^2 = 0 \; ; \; 0 \leq z \leq 6$

② لدينا:

$OH = \dfrac{2}{3}OA$

$(x,y,z) = \dfrac{2}{3}(0,0,6)$

$(x,y,z) = (0,0,4)$

$\Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow y = 0$

$\Rightarrow z = 4$

$\rightarrow H(0,0,4)$

التتمة ←

لدينا:

$OH = \frac{2}{3} OA$

→ $\frac{OH}{OA} = \frac{2}{3}$

ولدينا $AK // HM$ لأن العمودان على مستقيم واحد متوازيان

حسب مبرهنة النسب الثلاث المتساوية:

$\frac{OH}{OA} = \frac{OM}{OK} = \frac{HM}{AK}$

(1) (2) (3)

من (1) و (3):

$\frac{OH}{OA} = \frac{HM}{AK}$

$\frac{2}{3} = \frac{HM}{2}$

→ $HM = \frac{4}{3} = R$

- معادلة الاسطوانة:

$x^2 + y^2 = R^2 \quad : a \le z \le b$

$x^2 + y^2 = \frac{16}{9} \quad : 4 \le z \le 6$

مجموع السؤال الثاني

السؤال الثالث

(1) * لدينا:

$\vec{BC} = 3\vec{BK}$

→ $\vec{BK} = \frac{1}{3}\vec{BC}$

← K مركز أبعاد متناسبة لـ:
(B , 2) و (C , 1)

ومنه (K , 3)

* ولدينا: $\vec{AD} = 3\vec{AP}$

→ $\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{AD}$

← P مركز أبعاد متناسبة لـ:
(D , 1) و (A , 2)

ومنه (P , 3)

* ولدينا:
H منتصف [PK]:

← H مركز الأبعاد المتناسبة
لـ: (K , 3) و (P , 3)

← حسب الخاصة التجميعية
H مركز الأبعاد المتناسبة لـ:
(C , 1) و (B , 2) و (D , 1)
و (A , 2)

* ولدينا: I منتصف [AB]

← I مركز الأبعاد المتناسبة لـ:
(B , 2) و (A , 2)

ومنه (I , 4)

* ولدينا: J منتصف [CD]:

← J مركز الأبعاد المتناسبة لـ:
(D , 1) و (C , 1)

ومنه (J , 2)

بما أن H مركز الأبعاد المتناسبة لـ:
$(D,1)$ و $(B,2)$ و $(C,1)$ و $(A,2)$

← حسب الخاصة التجميعية:
H مركز الأبعاد المتناسبة لـ: $(I,4)$ و $(J,2)$

← $H \in [IJ]$

← $\vec{IH} = \frac{2}{6}\vec{IJ}$

← الشعاعان $\vec{IH}$ و $\vec{IJ}$ مرتبطان خطياً ← النقاط H و I و J تقع على استقامة واحدة.

(2) بما أن G مركز ثقل المثلث (BCD) ← G مركز أبعاد متناسبة لـ:
$(B,1)$ $(C,1)$ $(D,1)$

← $\vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$

وحسب خاصية تبسيط المركز:
$\vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 3\vec{MG}$

$\|\vec{MB}+\vec{MC}+\vec{MD}\| = \|3\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} - \vec{MD}\|$

$\|3\vec{MG}\| = \|3\vec{MA} - 3\vec{MG}\|$

$\|3\vec{MG}\| = \|3\vec{GA}\|$

$3MG = 3GA$

$MG = GA$

← مجموعة النقاط M تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها $R = GA$

مجموع السؤال الثالث

السؤال الرابع

$(A; \frac{1}{6}\vec{AB}, \frac{1}{6}\vec{AD}, \frac{1}{6}\vec{AE})$

$A(0,0,0)$ $B(6,0,0)$ $D(0,6,0)$
$C(6,6,0)$ $E(0,0,6)$ $F(6,0,6)$
$H(0,6,6)$ $G(6,6,6)$

(1) $\vec{MN} = \vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{DB}$

$\ell_1 = \vec{MN} = \vec{ME} + \vec{EA} + \vec{AN}$
$= -\frac{1}{3}\vec{EH} + \vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{AB}$
$= \vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{EH}$
$= \vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AD}$
$= \vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{DB} = \ell_2$

(A) يمكن استخدام المعلم لإيجاد α و β اللذين يحققان $\vec{MN} = \alpha\vec{EA} + \beta\vec{DB}$

(2) وجدنا:
$\vec{MN} = \vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{DB}$
$\vec{MN} = \vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{HB} - \frac{1}{3}\vec{HD}$

$\vec{MN} = \vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{HB} - \frac{1}{3}\vec{EA}$
$\vec{MN} = \frac{2}{3}\vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{HB}$

وبما أن $\vec{EA}$ و $\vec{HB}$ غير مرتبطة خطياً ← الأشعة $\vec{EA}$ و $\vec{MN}$ و $\vec{HB}$ مرتبطة خطياً.

③

- طريقة أولى -

K منتصف [CG]

$\Rightarrow K\left(\frac{6+6}{2}, \frac{6+6}{2}, \frac{6+0}{2}\right)$

$K(6, 6, 3)$

$\overrightarrow{KD}(-6, 0, -3)$

$\overrightarrow{KH}(-6, 0, 3)$

$\overrightarrow{KD} \cdot \overrightarrow{KH} = (-6)(-6) + (0)(0) + (-3)(3)$

$= 36 - 9 = 27$

$\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{CK} = (0)(0) + (0)(0) + (-6)(3)$

$= -18$

$\overrightarrow{EA}(0, 0, -6)$
$\overrightarrow{CK}(0, 0, 3)$ قبل الحساب

- طريقة ثانية -

$* \quad \overrightarrow{KD} \cdot \overrightarrow{KH} = (\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CD}) \cdot (\overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GH})$

$= \underbrace{\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KG}}_{\text{جهتين متعاكستين}} + \underbrace{\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{GH}}_{\text{تعامد}} + \underbrace{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{KG}}_{\text{تعامد}}$

$+ \underbrace{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{GH}}_{\text{جهة واحدة}}$

$= \left(\frac{6}{2}\right)\left(\frac{6}{2}\right)(-1) + 0 + 0 + (6)(6)(1)$

$= -9 + 36 = 27$

$* \quad \underbrace{\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{CK}}_{\text{جهتين متعاكستين}} = EA \cdot CK \cdot \cos(\pi)$

$= 6 \cdot \left(\frac{6}{2}\right) \cdot (-1)$

$= 6 \times -3$

$= -18$

بالجد و العمل نحقق الأمل

النموذج B مركز المنير التعليمي معهد ابي الفداء معهد حماه الأول

الأشعة و الارتباط الخطي

المدة : ساعة ونصف

2021 الاختبار الثالث و الجداء السلمي و مركز الأبعاد الدرجة العظمى : 300

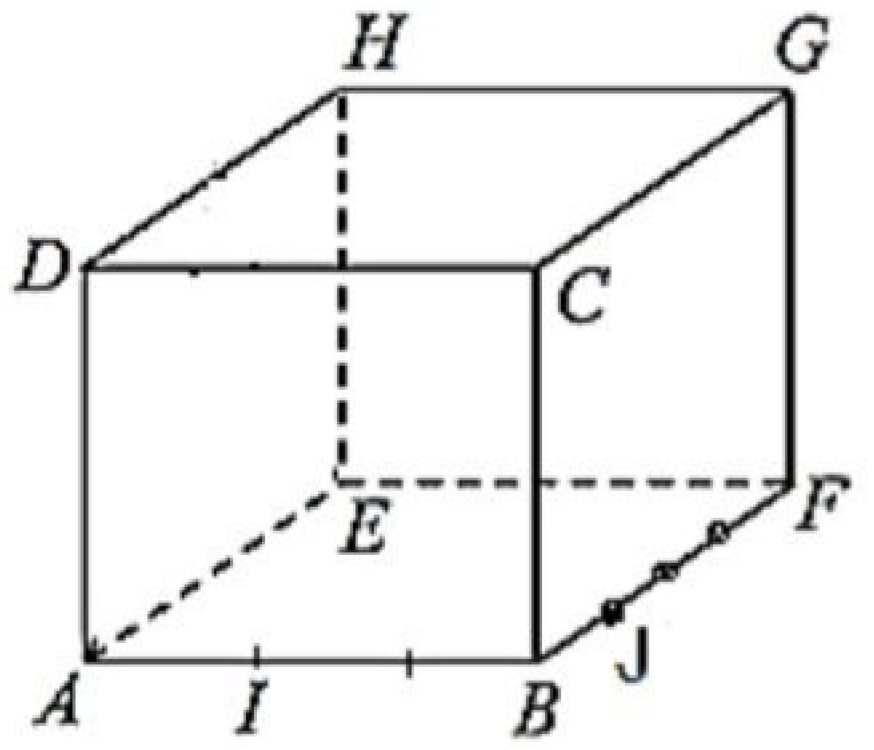
توزيع الدرجات (الأول 50 + الثاني 60 + الثالث 80 + الرابع 110)

السؤال الأول: نتأمل في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقاط $D\left(0,0,3\right)$ ، $C\left(0,n,0\right)$ ، $B\left(m,n,0\right)$ ، $A\left(m,0,0\right)$

حيث m و n عددان حقيقيان موجبان يحققان $n>m>0$ عين m و n

ليكون محيط المستطيل $OABC$ مساوي (6) و حجم المجسم $D\,OABC$ مساوي (2)

السؤال الثاني: ليكن $ABCDEFGH$ مكعب



ولتكن I تحقق $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ و J تحقق $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BF}$

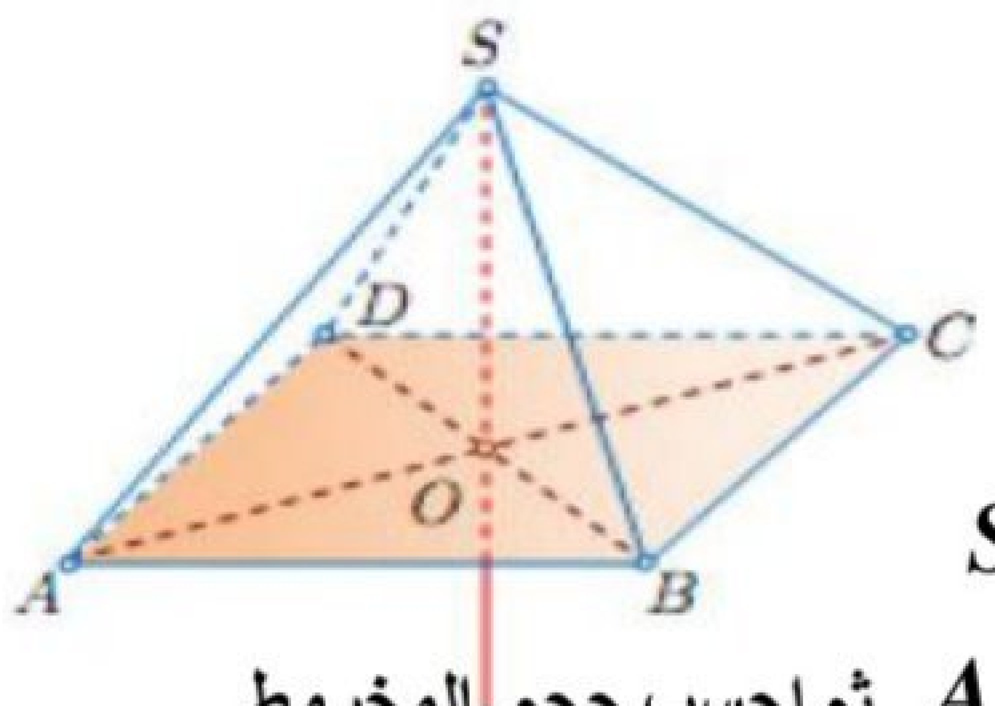
ولتكن K مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,2),(B,4),(F,1),(C,1)$

① برهن أن النقاط C,J,I,K تقع في مستوٍ واحد .

② جد مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق :

$$\left\|2\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MC}\right\|=24$$

السؤال الثالث : نتأمل هرم $S-ABCD$ قاعدته مربع و رأسه S



و طول كل حرف من حروفه و أضلاعه يساوي (4)

① احسب : $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$ و $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}$ و $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AC}$

② احسب حجم الهرم $S-ABCD$

③ في معلم متجانس $\left(S;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ اكتب معادلة مخروط رأسه المبدأ S

ومحوره $\left(S;\vec{k}\right)$ و قاعدته الدائرة المارة من رؤوس المربع $ABCD$ ثم احسب حجم المخروط

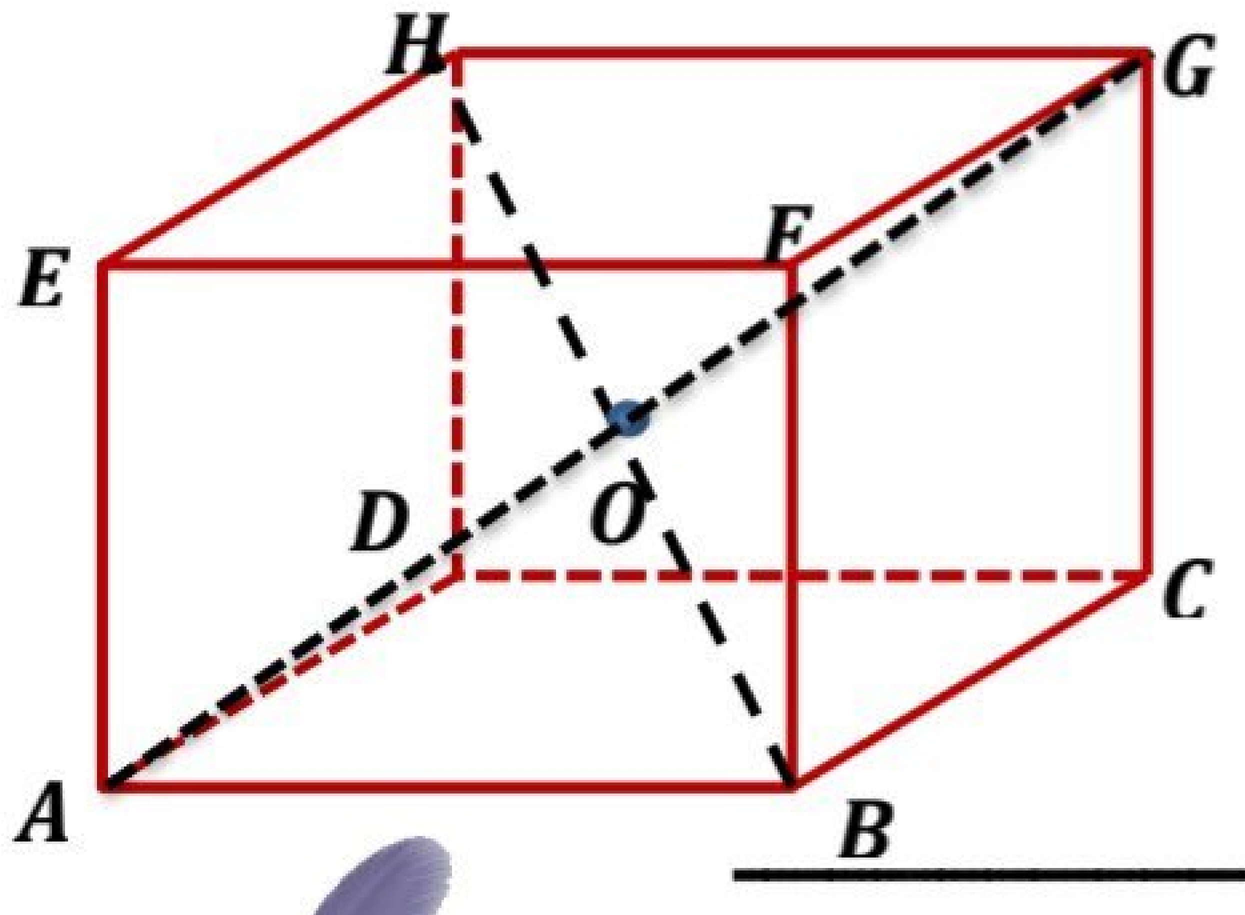
④ أنشئ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,2)$ $(B,1)$ $(S,3)$

السؤال الرابع: $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 4

O نقطة تقاطع القطرين $[AG]$ و $[HB]$ نختار المعلم المتجانس $\left(A;\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\frac{1}{4}\overrightarrow{AD},\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}\right)$

المطــوب: ① جد احداثيات O و إحداثيات رؤوس المكعب

② اكتب معادلة الكرة المارة برؤوس المكعب



③ احسب $\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{OB}$ واستنتج $COS\widehat{GOB}$

④ أثبت أن المستقيم (DC) يوازي المستوي (GOB)

⑤ جد الاعداد الحقيقية γ و β و α حتى تكون النقطة D

مركز الابعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (C,γ) و (B,β) و $(A,\propto)$

((انتهت الاسئلة))

مع التمنيات بالنجاح للجميع

المدرس : كاسر خليل عتيق

الأحد : 28 / 3 / 2021

السؤال الأول:

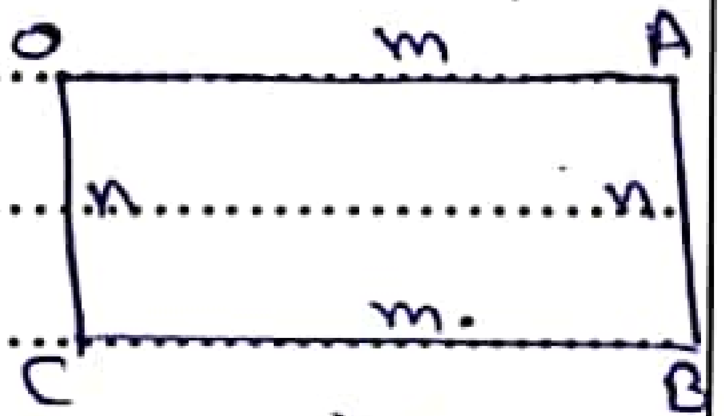
بمعلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$A(m,0,0)$, $B(m,n,0)$, $C(0,n,0)$,
$D(0,0,3)$

$n > m > 0$

جد n , m ليكون محيط المستطيل
$OABC$ مساوياً 6

وحجم المجسم $DOABC$ مساوياً 2



لنوجد أطوال الأضلاع

$\vec{OA} = \vec{CB} = (m,0,0) \Rightarrow$

$|\vec{OA}| = |\vec{CB}| = \sqrt{m^2} = \boxed{m}$

$\vec{OC} = \vec{AB} = (0,n,0) \Rightarrow$

$|\vec{OC}| = |\vec{AB}| = \sqrt{n^2} = \boxed{n}$

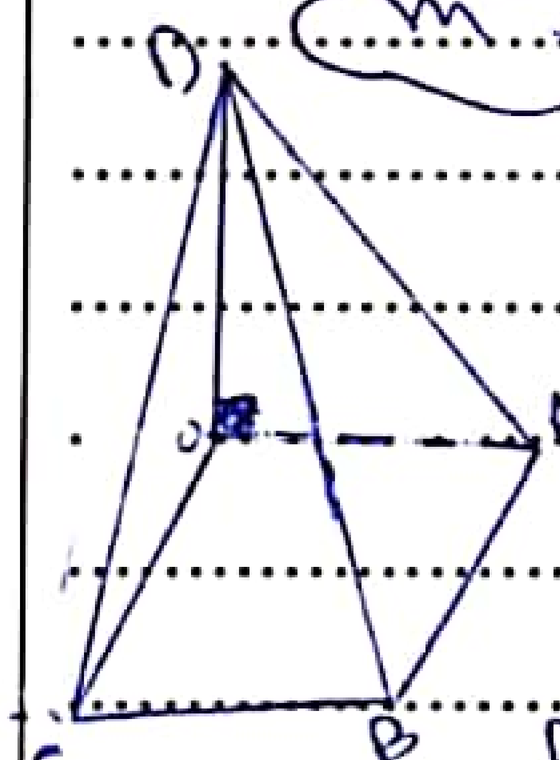
محيط المستطيل = مجموع أطوال الأضلاع

= 2 (الطول + العرض)

نعوض: $P = 2(m+n)$

$6 = 2(m+n)$ $\quad \div 2$

$m + n = 3$ ... (1)



* حجم المجسم:

$V = \frac{1}{3} \times S_{\text{مستطيل}} \times h$

حيث

$h = DO = \sqrt{0+0+9} = \boxed{3}$

نعوض

$2 = \frac{1}{3}(m \times n) \times 3 \Rightarrow$

$m \times n = 2$ ... (2)

من (1) و (2) نبحث عن عددين

حاصل ضربهما 2 ومجموعهما 3

وبما أن $n > m$

$\boxed{n = 2}$ و $\boxed{m = 1}$

السؤال الثاني:

مكعب، $\vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AB}$

$\vec{BJ} = \frac{1}{4}\vec{BF}$

و K مركز أبعاد متناسبة لـ

$(A,2)$, $(B,4)$, $(F,1)$, $(C,1)$

1) برهن أن النقاط K , I , J , C

تقع في مستوٍ واحد.

بما أن $\vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AB} \Leftarrow$

I م.أ.م $(A,2)$ و $(B,1)$ $\Leftarrow$

$(I,3)$

وبما أن $\vec{BJ} = \frac{1}{4}\vec{BF} \Leftarrow$

J م.أ.م $(B,3)$ و $(F,1)$ $\Leftarrow (J,4)$

الآن K م.أ.م $(A,2)$, $(B,4)$, $(F,1)$, $(C,1)$

إذاً K م.أ.م $\underbrace{(A,2),(B,1)}_{I}$, $\underbrace{(B,3),(F,1)}_{J}$, $(C,1)$

حسب الخاصة التجميعية تكون

K م.أ.م لـ $(I,3)$, $(J,4)$, $(C,1)$

إذاً $K \in (CJI)$ إذاً

النقاط K , I , J , C تقع في مستوٍ واحد

2) جد مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق:

$\|2\vec{MA}+4\vec{MB}+\vec{MF}+\vec{MC}\|=24$

بما أن K مركز أبعاد $(A,2)$ ، $(B,4)$ ، $(F,1)$ ، $(C,1)$

$2\vec{KA}+4\vec{KB}+1\vec{KF}+1\vec{KC}=\vec{0}$

حسب خاصة تبديل المركز:

$2\vec{KA}+4\vec{KB}+1\vec{KF}+1\vec{KC}=8\vec{KM}$

نعوض في العلاقة:

$\|8\vec{KM}\|=24$

$8\|\vec{KM}\|=24$

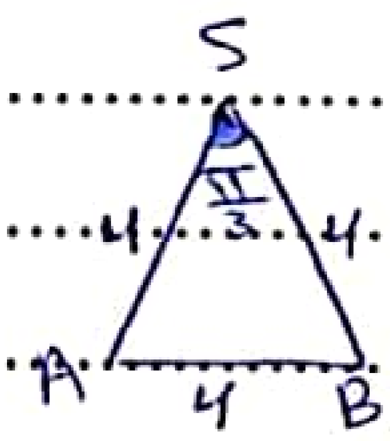
$\|\vec{KM}\|=3$

مجموعة النقاط M تمثل كرة مركزها K ونصف قطرها $R=3$

السؤال الثالث:

هرم S.ABCD قاعدته مربع ورأسه S وطول كل حرف من حروفه (4)

1) احسب $\vec{SA}\cdot\vec{SC}$ ، $\vec{SA}\cdot\vec{SB}$ ، $\vec{SA}\cdot\vec{AC}$



$\vec{SA}\cdot\vec{SB}=|\vec{SA}||\vec{SB}|\cos\frac{\pi}{3}$

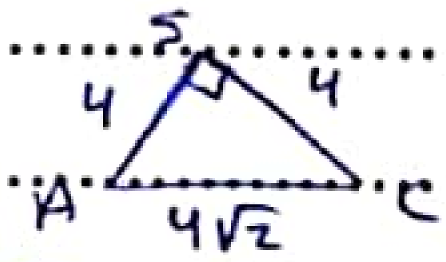
$=4\times4\times\frac{1}{2}$

$=\boxed{8}$

أبدا طول قطر المربع $AC=a\sqrt{2}$

$\boxed{AC=4\sqrt{2}}$

المثلث SAC قائم في S حسب عكس فيثاغورث



$\vec{SA}\cdot\vec{SC}=0$ (للتعامد)

$\vec{SA}\cdot\vec{AC}=-\vec{AS}\cdot\vec{AC}$

$=-\|\vec{AS}\|\|\vec{AC}\|\cos\frac{\pi}{4}$

لأن المثلث SAC قائم ومتساوي الساقين

$=-4\times4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\boxed{-16}$

2) احسب حجم الهرم S.ABCD

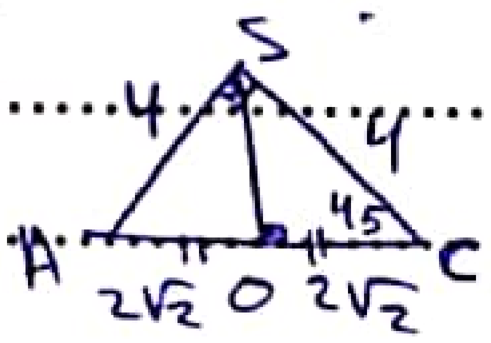
$V=\frac{1}{3}\times S_{مربع}\times h$

نحسب مساحة المربع

$S=(a)^2=(4)^2=\boxed{16}$

نحسب الارتفاع:

$h=SO$



لأن SO ارتفاع ومتوسط ومحور

$\sin 45=\frac{مقابل}{وتر}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{SO}{4}$

$SO=\frac{4\times\sqrt{2}}{2}=\boxed{2\sqrt{2}}$

أو طريقة ثانية نحسب SO حسب فيثاغورث

نعوض في قانون الحجم

$V=\frac{1}{3}\times16\times2\sqrt{2}$

$$\boxed{V=\frac{32\sqrt{2}}{3}}$$

السؤال الثالث

③ في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ اكتب معادلة المخروط الذي رأسه S ومحوره $(S; \vec{k})$ وقاعدته الدائرة المارة من رؤوس المربع ABCD ثم احسب حجم المخروط

معادلة المخروط رأسه S ومحوره $\vec{ok}$

$$x^2+y^2-\frac{R^2}{a^2}z^2=0 \quad 0\le z\le a$$

$$a = SO = 2\sqrt{2}$$

$$R = OC = \frac{4\sqrt{2}}{2} = \boxed{2\sqrt{2}}$$

$$x^2+y^2-z^2=0 \quad 0\le z\le 2\sqrt{2}$$

$$V = \frac{1}{3}\times\pi R^2 h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi(2\sqrt{2})^2(2\sqrt{2})$$

$$\boxed{V = \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi}$$

④ اثبت أن G م.ا.م لـ $(S,3)$ $(B,1)$ $(A,2)$

لتكن I م.ا.م لـ $(B,1)$ $(A,2)$

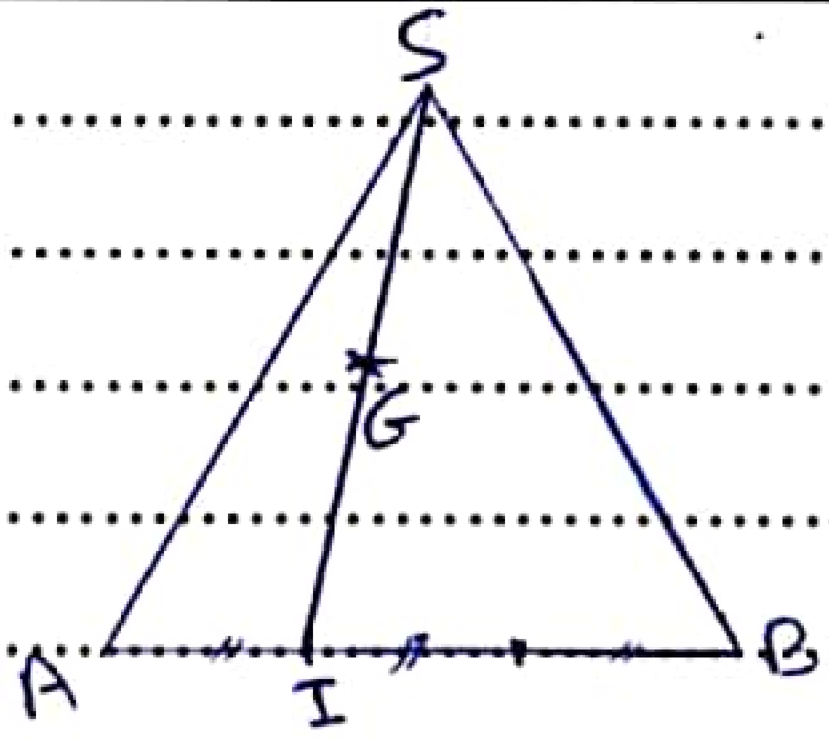
حسب قانون الإنشاء

$$\vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AB}$$

اذاً $(I,3)$

حسب خاصة التجميع يكون G م.ا.م $(S,3)$ $(I,3)$

اذاً G منتصف SI



السؤال الرابع

مكعب طول حرفه 4

O نقطة تقاطع القطرين $[AG]$، $[HB]$

نختار المعلم $(A; \frac{1}{4}\vec{AB}, \frac{1}{4}\vec{AD}, \frac{1}{4}\vec{AE})$

1) اكتب احداثيات رؤوس المكعب و O

$A(0,0,0)$, $B(4,0,0)$, $D(0,4,0)$, $C(4,4,0)$

$E(0,0,4)$, $F(4,0,4)$, $H(0,4,4)$, $G(4,4,4)$

$O(2,2,2)$ منتصف AG

② اكتب معادلة الكرة المارة من رؤوس المكعب

كرة مركزها هو $O(2,2,2)$

نصف قطرها $AO = R$

$\vec{AO} = (2,2,2) \Rightarrow$

$R = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$S: (x-x_O)^2+(y-y_O)^2+(z-z_O)^2=R^2$

$S: (x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=12$

③ احسب $\vec{OG}\cdot\vec{OB}$ واستنتج $\cos G\hat{O}B$

$\vec{OG}(2,2,2) \Rightarrow |\vec{OG}| = \sqrt{12}$

$\vec{OB}(2,-2,-2) \Rightarrow |\vec{OB}| = \sqrt{12}$

$\vec{OG}\cdot\vec{OB} = (2)(2)+(2)(-2)+(2)(-2)$

$= 4-4-4 = -4$

$$\cos G\hat{O}B = \frac{\vec{OG} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OG}| \cdot |\vec{OB}|}$$

$$= \frac{-4}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{12}} = \frac{-4}{12} = \boxed{\frac{-1}{3}}$$

(4) أثبت أن المستقيم (DC) يوازي المستوي (GOB).

حتى يكون (DC) يوازي (GOB)

يجب أن تتحقق العلاقة

$\vec{DC} = \alpha\, \vec{GO} + \beta\, \vec{GB}$ ؟

$\vec{DC}(4, 0, 0)$

$\vec{GO}(-2, -2, -2)$

$\vec{GB}(0, -4, -4)$; $\frac{0}{-2} \neq \frac{-4}{-2}$

المركبات غير متناسبة ⇐ $\vec{GB}, \vec{GO}$

غير مرتبطان خطياً ⇐

النقاط G, O, B لا تقع على استقامة واحدة

وهي تعين مستوي (GOB)

$(4, 0, 0) = \alpha(-2, -2, -2) + \beta(0, -4, -4)$

$(4, 0, 0) = (-2\alpha, -2\alpha - 4\beta, -2\alpha - 4\beta)$

$-2\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = \frac{4}{-2} = \boxed{-2}$

$-2\alpha - 4\beta = 0 \Rightarrow -2(-2) - 4\beta = 0$

$4 = 4\beta \Rightarrow \boxed{\beta = 1}$

نتحقق في المعادلة

$-2\alpha - 4\beta = 0$

$-2(-2) - 4(1) \overset{?}{=} 0$

$0 = 0$ محققة

إذاً:

$\vec{DC} = -2\, \vec{GO} + 1\, \vec{GB}$

الأشعة $\vec{DC}, \vec{GO}, \vec{GB}$ مرتبطة خطياً

و DC لا يخترق مع GOB بأي نقطة

إذاً: DC يوازي GOB

(5) جد الأعداد الحقيقية α, β, γ

حتى يكون D م.أ.م

$(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$

حتى يكون D م.أ.م لـ A, B, C

يجب تحقق العلاقة

$\vec{AD} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}$

$(0, 4, 0) = \alpha(4, 0, 0) + \beta(4, 4, 0)$

$(0, 4, 0) = (4\alpha + 4\beta, 4\beta, 0)$

$4\alpha + 4\beta = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = 0$

$4\beta = 4 \Rightarrow \boxed{\beta = 1} \Rightarrow$

$0 = 0$ محققة

$\Rightarrow \alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = -1$

$\vec{AD} = -1 \vec{AB} + 1 \vec{AC}$

حسب تعريف المستوي تكون

D م.أ.م لـ

$(B, -1), (C, 1)$

$(A, 1 - (-1) - 1) \to A(, 1)$

$\alpha = 1 , \beta = -1 , \gamma = 1$

النموذج A　مركز المنير التعليمي　معهد ابي الفداء　معهد حماه الأول

بالجد و العمل نحقق الأمل

المستقيمات و المستويات في الفراغ

المدة : ساعة ونصف

2021　الاختبار الرابع　الدرجة العظمى : 300

توزيع الدرجات (الأول 40 + الثاني 40 + الثالث 50 + الرابع 80 + الخامس 90)

السؤال الأول : في معلم متجانس لتكن النقطتان $A\left(2,-1,3\right),B\left(4,3,1\right)$ ولتن I منتصف القطعة AB

عين المعادلة الديكارتية لمجموعة النقاط M التي تحقق $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{AB}=0$ ثم بين طبيعة تلك المجموعة

السؤال الثاني : ادرس الوضع النسبي المستقيم d مع المستوي P

$$d:\begin{cases}x=t+1\\ y=2t+1\\ z=8t-3\end{cases} \quad : t\in\mathbb{R} \qquad \text{و} \qquad P: 2x+3y-z=0$$

السؤال الثالث : ليكن المستويان p و Q معادلتيهما :

$$P: x+2y-z+1=0$$
$$Q: 2x+4y-2z+26=0$$

① أثبت أن المستويين p و Q متوازيين ثم احسب البعد بين المستويين p و Q

② اكتب معادلة كرة S مركزها $A(2,1,-1)$ و تمس المستوي $P: x+2y-z+1=0$

السؤال الرابع : في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط : $A(1,-1,-2)$,$B(1,-2,-3)$,$C(2,0,0)$

① برهن أن النقاط A ,B ,C تعين مستو ثم تحقق أن المعادلة الديكارتية له هي : $x+y-z-2=0$

② ليكن المستويان p و Q معادلتيهما :

$$P: x-y-2z=0$$
$$Q: 3x+2y-z+10=0$$

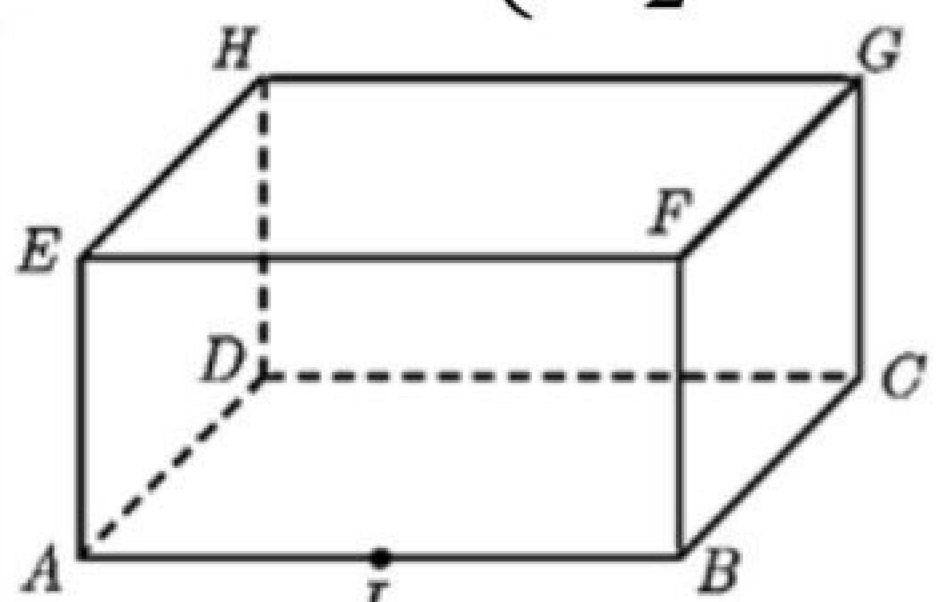
أثبت أن المستويان p و Q يتقاطعان بفصل مشترك

هو مستقيم d التمثيلات الوسيطية له هي : $d:\begin{cases}x=-2+t\\ y=-2-t\\ z=t\end{cases} : t\in\mathbb{R}$

③ ادرس تقاطع المستويات (ABC) و p و Q　④ احسب بعد النقطة $A(1,-1,-2)$ عن المستقيم d

السؤال الخامس : $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات ،فيه $AB=2$ و $BC=GC=1$

لتكن النقطة I منتصف $[AB]$ في المعلم المتجانس $\left(A,\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$



1- عين طبيعة المثلث (IFH) واحسب مساحته .

2- أثبت أن معادلة المستوي (IFH) هي $x+2y-z-1=0$

3- عين تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من E ويعامد المستوي (IFH)،

4- واستنتج احداثيات J المسقط القائم للنقطة E على المستوي (IFH).

5- اثبت ان المستوي (IFH) يقطع الكرة $x^2+y^2+(z-1)^2=4$ بدائرة استنتج نصف قطرها ومركزها

6- احسب حجم الهرم الذي رأسه E وقاعدته IFH .

((انتهت الأسئلة))

مع التمنيات بالنجاح و التوفيق للجميع　　المدرّس : كاسر خليل عتيق

السؤال الأول

$I\left(\frac{2+4}{2}, \frac{-1+3}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$

$I(3, 1, 2)$

$\vec{n} = \vec{AB}(2, 4, -2)$

$M(x, y, z) \in P \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{IM} = 0$

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$2(x-3) + 4(y-1) - 2(z-2) = 0$

$2x - 6 + 4y - 4 - 2z + 4 = 0$

$2x + 4y - 2z - 6 = 0$ $\boxed{\div 2}$

$\boxed{x + 2y - z - 3 = 0}$

$\vec{MI} \cdot \vec{AB} = 0$

مجموعة النقاط M تمثل مستوٍ مار من I (في حالة I منتصف [AB]) وعمودي على القطعة [AB] المستوي [AB]

إذاً مستوي محوري القطعة [AB]

السؤال الثاني

$\vec{n_p}(2, 3, -1)$

$\vec{u_d}(1, 2, 8)$

$\vec{n} \cdot \vec{u} = 8 - 8 = 0$

$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$

إما d يوازي P

أو d محتوى في P

نبحث من معادلات d في P

$2x + 3y - z = 0$

$2(t+1) + 3(2t+1) - 8t + 3 = 0$

$2t + 2 + 6t + 3 - 8t + 3 = 0$

$8 = 0$

مستحيلة

إذاً d لا يشترك مع P بأية نقطة

هو يوازيه

$d \parallel P$

السؤال الثالث

$P: x + 2y - z + 1 = 0$

$Q: 2x + 4y - 2z + 26 = 0$

$\vec{n}_p(1,2,-1)$

$\vec{n}_Q(2,4,-2)$

$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{-1}{-2}$

إذاً $\vec{n}_p$ و $\vec{n}_Q$ مرتبطان

خطياً لتناسب مركباتهما

فالمستويان P و Q متوازيان.

المستوي P:

$x+2y-z+1=0$

نفرض

$x=0$

$y=0$

$0+0-z+1=0$

$-z=-1$

$\Longrightarrow \boxed{z=1}$

$A(0,0,1) \in P$

نحسب بعد A عن المستوي Q

$$dist(A,Q)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{|2(0)+4(0)-2(1)+26|}{\sqrt{4+16+4}}$$

$$=\frac{24}{\sqrt{24}}=\sqrt{24}$$

البعد بين P و Q

2] كرة مركزها $A(2,1,-1)$

$P: x+2y-z+1=0$

$S: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

$$R=dist(A,P)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{|1(2)+2(1)-(-1)+1|}{\sqrt{1+4+1}}$$

$$=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

$S: (x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=6$

السؤال الرابع

$\vec{AB}(0,-1,-1)$

$\vec{AC}(1,1,2)$

$\frac{0}{1} \neq \frac{-1}{1}$

$\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطان خطياً

لعدم تناسب مركباتهما فالنقاط

ليست على استقامة واحدة

تعين مستوياً $P(ABC)$

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n} \cdot \vec{AB} = -b - c = 0$ —— (1)

$\vec{n} \cdot \vec{AC} = a + b + 2c = 0$ —— (2)

من [1] $\boxed{b = -c}$

$a - c + 2c = 0$

$a + c = 0$

$\Longrightarrow \boxed{a = -c}$

نفرض: $c = -1$

$\Leftarrow b = 1$

$\Leftarrow a = 1$

$\vec{n}(1, 1, -1)$

$M(x, y, z) \in P(ABC) \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{AM} = 0$

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$1(x - 1) + 1(y + 1) - 1(z + 2) = 0$

$x - \cancel{1} + y + \cancel{1} - z - 2 = 0$

$\boxed{x + y - z - 2 = 0}$ $P(ABC)$

$P: x - y - 2z = 0$ [2]

$Q: 3x + 2y - z + 10 = 0$

$\vec{n}_P(1, -1, -2)$
$\vec{n}_Q(3, 2, -1)$
$\left.\right\} \frac{1}{3} \neq \frac{-1}{2}$

$\vec{n}_P$ و $\vec{n}_Q$ غير مرتبطان خطياً لعدم تناسب مركباتها

فالمستويان P و Q يتقاطعان بعضهما مشترك هو المستقيم d بالحل المشترك:

$x - y - 2z = 0$

$3x + 2y - z + 10 = 0$

نضرب المعادلة (1) بـ [2]

$2x - 2y - 4z = 0$
$3x + 2y - z + 10 = 0$ (+)

$5x - 5z + 10 = 0$ $(\div 5)$

$x - z + 2 = 0$

$\boxed{x = -2 + z}$

نعوض في [2]

$3(-2 + z) + 2y - z + 10 = 0$

$-6 + 3z + 2y - z + 10 = 0$

$2z + 2y + 4 = 0$ $\boxed{\div 2}$

$z + y + 2 = 0$

$$\boxed{y = -2 - z}$$

نفترض z وسيط حقيقي بدلالة t

$$d: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 - t \\ z = t \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}$$

$\boxed{3}$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_{(ABC)}(1, 1, -1) \\ \vec{v}_d(1, -1, 1) \end{array}\right\}$$

$\vec{n} \cdot \vec{v} = -1 \neq 0$

d تقاطع P بنقطة I

نعوض d في P

$x + y - z - 2 = 0$

$-2 + \cancel{t} - 2 - \cancel{t} - t - 2 = 0$

$-t - 6 = 0$

$\Rightarrow \boxed{t = -6}$

نعوض في d:

$$\begin{cases} x = -2 - 6 = -8 \\ y = -2 + 6 = 4 \\ z = -6 \end{cases}$$

$I(-8, 4, -6)$

المستويات (ABC) و P و Q تتقاطع بنقطة I

$\boxed{4}$

نفرض $A' \in d$

$A'(-2+t, -2-t, t)$

$\vec{AA'}(-3+t, -1-t, t+2)$

حتى تكون A' المسقط القائم لـ A على d عندما

$\vec{AA'} \cdot \vec{v} = 0$

حيث $\vec{v}(1, -1, 1)$

$(-3+t)(1) + (-1-t)(-1) + (t+2)(1) = 0$

$-3 + t + 1 + t + t + 2 = 0$

$3t = 0 \Rightarrow \boxed{t = 0}$

$$\begin{cases} x = -2 + 0 = -2 \\ y = -2 - 0 = -2 \\ z = 0 \end{cases}$$

$A'(-2, -2, 0)$ المسقط القائم لـ A على d

فيكون بعد A عن d هو طول AA'

$$AA' = \sqrt{(-2-1)^2+(-2+1)^2+(0+2)^2}$$

$$AA' = \sqrt{9+1+4}$$

$$= \sqrt{14}$$

السؤال الخامس:

$(A, \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

$A(0,0,0)$ $B(2,0,0)$ $D(0,1,0)$ $C(2,1,0)$

$E(0,0,1)$ $F(2,0,1)$ $H(0,1,1)$ $G(2,1,1)$

I منتصف $[AB]$

$I(1,0,0)$

1

$$IF = \sqrt{(2-1)^2+(0-0)^2+(1-0)^2}$$

$$IF = \sqrt{2}$$

$$IH = \sqrt{(0-1)^2+(1-0)^2+(1-0)^2}$$

$$IH = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$FH = \sqrt{(0-2)^2+(1-0)^2+(1-1)^2}$$

$$= \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5}$$

$$(FH)^2 = (IF)^2 + (IH)^2$$

$$5 \stackrel{?}{=} 2+3$$

$$\boxed{5 = 5}$$

المثلث IFH قائم في $\hat{I}$ حسب عكس فيثاغورث

مساحة المثلث القائم = $\frac{\text{جداء الضلعين القائمين}}{2}$

$$S = \frac{IF \cdot IH}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2}$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

$\overrightarrow{IF}(1,0,1)$

$\overrightarrow{IH}(-1,1,1)$

$\frac{1}{-1} \neq \frac{0}{1}$

$\overrightarrow{IF}$ و $\overrightarrow{IH}$ غير مرتبطان خطياً لعدم تناسب مركباتها

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{IF} = a + c = 0$ ——— (1)

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{IH} = -a + b + c = 0$ ——— (2)

$\boxed{a = -c}$ من (1)

نعوض في (2)

$-(-c) + b + c = 0$

$c + b + c = 0$

$2c + b = 0$

$\boxed{b = -2c}$

نعطي $c = -1$:

$a = 1$

$b = 2$

$\Leftarrow \vec{n}(1,2,-1)$

$M(x,y,z) \in (IFH) \Rightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{IM} = 0$

$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

$1(x-1) + 2(y-0) - 1(z-0) = 0$

$x - 1 + 2y - z = 0$

$\boxed{x + 2y - z - 1 = 0}$ ——— (IFH)

3) $E(0,0,1)$

$\vec{v} = \vec{n}(1,2,-1)$

$$d\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 0 + 2t \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = 1 - t \end{cases}$$

4) نعوض معادلات d في (IFH)

$x + 2y - z - 1 = 0$

$t + 2(2t) - (1-t) - 1 = 0$

$t + 4t - 1 + t - 1 = 0$

$6t - 2 = 0$

$6t = 2 \Rightarrow \boxed{t = \frac{1}{3}}$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = 2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \\ z = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{cases} J\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$\boxed{5}$

$x^2+y^2+(z-1)^2=4$

$R=2$

$ج(0,0,1)$

$$f=dist(ج,IHF)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{|0+2(0)-(1)-1|}{\sqrt{1+4+1}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt6}$$

$f=\frac{2}{\sqrt6} < R=2$

إذاً المستوي يقطع $f<R$

الكرة بدائرة Γ

نصف قطرها r

$r^2+f^2=R^2$

$r^2+\frac{4}{6}=4$

$r^2=4-\frac{4}{6}$

$\Rightarrow r^2=\frac{10}{3} \Rightarrow r=\sqrt{\frac{10}{3}}$

مركزها $ج$ هو المسقط القائم لـ $ج$ على المستوي IFH

وهو النقطة $J(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$

$ج' = J(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$

المسقط القائم لـ $ج$ على المستوي

إذاً المستوي IFH يقطع الدائرة

Γ بدائرة مركزها $J(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$

نصف قطرها $r=\sqrt{\frac{10}{3}}$

$\boxed{6}$

حجم الهرم $=\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع

* مساحة القاعدة مثلث قائم $S=\frac{\sqrt6}{2}$

* الارتفاع $= f=dist(ج,IFH)$

$=\frac{2}{\sqrt6}$

$V=\frac{1}{3}S_b\times h$

$=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt6}{2}\times\frac{2}{\sqrt6}=\boxed{\frac{1}{3}}$

انتهى السلم

بالجد و العمل
نحقق الأمل

النموذج B **مركز المنير التعليمي** معهد ابي الفداء معهد حماه الأول

المستقيمات و المستويات في الفراغ

المدة : ساعة ونصف

2021 الاختبار الرابع الدرجة العظمى : 300

توزيع الدرجات (الأول 60 + الثاني 70 + الثالث 70 + الرابع 100)

السؤال الأول : في معلم متجانس $O(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقاط $A(1,2,-1)$ و $B(2,3,0)$ و $C(-1,0,0)$

1- أعطِ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) بدلالة الوسيط t .

2- لتكن M نقطة متحولة على المستقيم (AB) أوجد المقدار CM^2 بدلالة t ثم عين قيمة t التي تجعل المقدار CM^2 أصغر ما يمكن ، ثم استنتج بعد C عن المستقيم (AB).

السؤال الثاني: الكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم d' ثم **ادرس وضع المستقيمين d و d'**

$$d' : \begin{cases} 3x - y - 2z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \quad , \quad d : \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2t - 1 \end{cases} \quad : t \in \mathbb{R}$$

ثم اكتب معادلة المستوي المحدد بالمستقيمين d و d'

السؤال الثالث : في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نتأمل النقاط $A(1, 1, 1)$ و $B(3, 2, 0)$ و $C(1, 0, 1)$

ليكن P المستوي المار بالنقطة B ويقبل $\overrightarrow{AB}$ شعاعاً ناظماً ،

وليكن المستوي Q الذي معادلته : $x - y + 2z + 4 = 0$.

1- أثبت أن $2x + y - z - 8 = 0$ هي معادلة المستوي P .

2- ليكن d المستقيم الذي يقبل تمثيلاً وسيطياً

$$d: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 7 - 5t \quad ; \ t \in R \\ z = 1 - 3t \end{cases}$$

(a) أثبت أن المستقيم d هو الفصل المشترك للمستويين P و Q .

(b) أثبت أن النقطة $J(2, 2, -2)$ هي المسقط القائم للنقطة C على المستقيم d

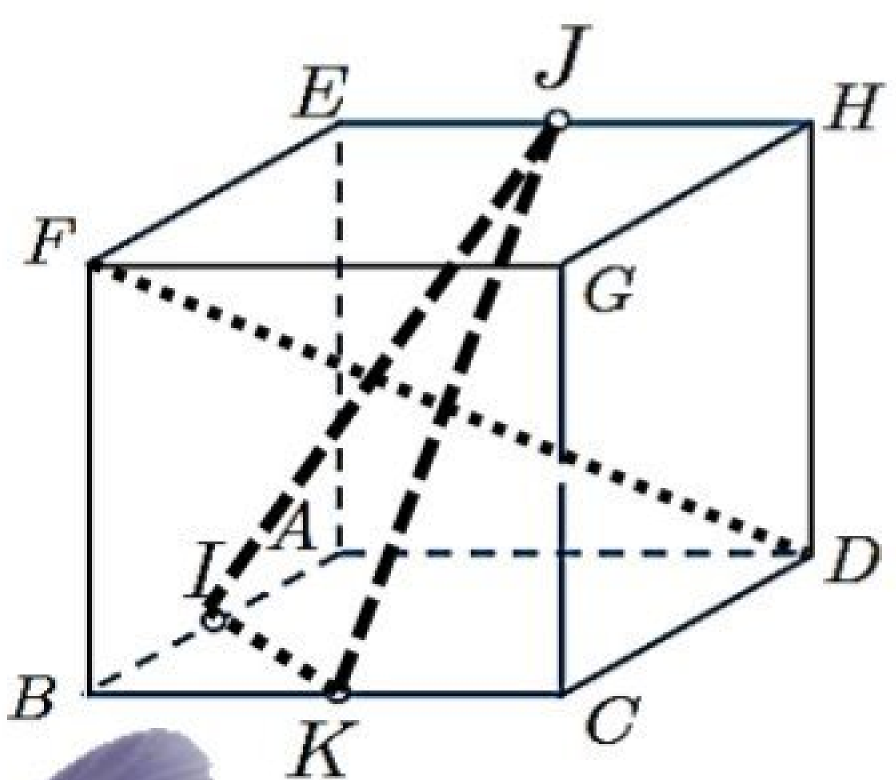
واستنتج بعد النقطة C عن المستقيم d

3- اكتب معادلة الكرة التي مركزها $C(1, 0, 1)$ وتمس المستقيم d .

السؤال الرابع : ***ABCDEFGH* مكعب طول حرفه (2)**

فيه I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[EH]$ و K منتصف $[BC]$

وليكن المعلم المتجانس $\left(A: \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$



1 ***أوجد احداثيات رؤوس المكعب و K, I, J***
2 ***اثبت ان المستقيم (FD) عمودي على المستوي (IJK)***
3 ***اكتب معادلة المستوي (IJK)***
4 ***أوجد التمثيلات الوسيطية للمستقيم (FD)***
5 ***أوجد احداثيات D' نقطة تقاطع المستقيم (FD) مع المستوي (IJK)***
6 **اكتب معادلة الكرة التي مركزها F و تمس المستوي (IJK)**

((انتهت الأسئلة))

مع التمنيات بالنجاح و التوفيق للجميع **المدرس : كاسر خليل عتيق**

السؤال الأول:

$o(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$A(1,2,-1)$ ، $B(2,3,0)$ ، $C(-1,0,0)$

I أعط تمثيل وسيطي للمستقيم (AB) بدلالة t

يستقيم يمر بنقطة A أو B وله شعاع توجيه

$\vec{AB}(1,1,1)$

$$(AB):\begin{cases} x = t+2 \\ y = t+3 \\ z = t \end{cases} \quad ; t \in R$$

2 لتكن M نقطة متحولة في (AB) أوجد المقدار CM^2 بدلالة t ثم عين قيمة t التي تجعل CM^2 أصغر ما يمكن، ثم استنتج بعد C عن المستقيم (AB)

$M(x,y,z) \in (AB) \Rightarrow$

$M(t+2, t+3, t)$

$\Rightarrow \vec{CM}(t+3, t+3, t)$

$(CM)^2 = (t+3)^2 + (t+3)^2 + t^2$

$= t^2+6t+9+t^2+6t+9+t^2$

$= 3t^2+12t+18$

$= 3(t^2+4t)+18$

$= 3(t^2+4t+4-4)+18$

$= 3(t+2)^2 - 12 + 18$

$= 3(t+2)^2 + 6$

نحصل على أقصر بعد عندما $t=-2$

بعد C عن (AB) هو:

$|CM| = \sqrt{6}$

السؤال الثاني:

أكتب المعادلات الوسيطية لـ d' ثم ادرس وضع المستقيمين d, d'

$$d':\begin{cases} 3x - y - 2z = 1 & (1) \\ -x + y + z = 0 & (2) \end{cases}$$

بالجمع

$2x - z = 1 \Rightarrow$

$\boxed{z = 2x - 1}$

نعوض في (2)

$x - y - 2x + 1 = 0$

$-x - y + 1 = 0 \Rightarrow$

$\boxed{y = -x + 1}$

بفرض $x = s$ وسيط حقيقي

$$d':\begin{cases} x = s \\ y = -s+1 \\ z = 2s-1 \end{cases}$$

* دراسة الوضع النسبي:

$\vec{u}_d(1,-1,2)$

$\vec{u}_{d'}(1,-1,2)$ $\quad \frac{1}{1} = \frac{-1}{-1} = \frac{2}{2}$

المركبات متناسبة $\Leftarrow$

$\vec{u}_d$ ، $\vec{u}_{d'}$ مرتبطان خطياً

إذاً إما $d \parallel d'$ أو d ، d' منطبقان

بالحل المشترك لمعادلات d, d'

$s = t$ (1)

$-s+1 = -t$ (2)

$2s-1 = 2t-1$ (3)

من (3) نجد:

$2s = 2t \Rightarrow t = s$

نعوض في (2)

$-t+1 = -t \Rightarrow 1 \neq 0$

مستحيلة الحل إذاً d, d' متوازيان

السؤال الثاني:

2) أكتب معادلة المستوي المحدد بالمستقيمين d ، d'

مستوي نقطة منه $\overset{A}{B}$ و S شعاعه الناظم $\vec{n}(a,b,c)$

نعطي $t=0 \Leftarrow A(0,0,-1)$

نعطي $S=0 \Leftarrow B(0,1,-1)$

$\vec{u}_d(1,-1,2)$ و $\vec{AB}(0,1,0)$

بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم للمستوي P

$\vec{n} \times \vec{AB} = 0 \Rightarrow a + b + 0 = 0 \Rightarrow b = 0$

$\vec{n} \times \vec{u}_d = 0 \Rightarrow a - b + 2c = 0 \Rightarrow$

$a - 0 + 2c = 0$

$\Rightarrow a = -2c$

نعطي $c = 1 \Rightarrow a = -2$

$\vec{n}(-2,0,1)$

بفرض $M(x,y,z) \in P \Rightarrow$

$\vec{AM}(x,y,z+1)$

$P: \vec{n} \times \vec{AM} = 0$

$-2(x) + 0(y) + 1(z+1) = 0$

$P: \boxed{-2x + z + 1 = 0}$

السؤال الثالث البحث

معلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$C(1,0,1)$ ، $B(3,2,0)$ ، $A(1,1,1)$

P مستوي مار من B ويقبل $\vec{AB}$ شعاع ناظم له

$Q: x - y + 2z + 4 = 0$

1) أثبت أن $2x + y - z - 8 = 0$ هي معادلة P

P مستوي مار من $B(3,2,0)$ و $\vec{AB}(2,1,-1)$ ناظم

$M(x,y,z) \in P \Rightarrow \vec{BM}(x-3,y-2,z)$

$\vec{n} \times \vec{BM} = 0 \Rightarrow \vec{AB} \times \vec{BM} = 0$

$2(x-3) + 1(y-2) - 1(z) = 0$

$2x + y - z - 6 - 2 = 0$

$\boxed{2x + y - z - 8 = 0} \ldots P$

2) ليكن d المستقيم الذي معادلته

$$d: \begin{cases} x = t+1 \\ y = 7-5t \\ z = 1-3t \end{cases} \quad ; \ t \in R$$

a) أثبت أن d هو الفصل المشترك للمستويين P ، Q

طريقة 1: حتى يكون d هو الفصل المشترك لـ P ، Q يجب أن تحقق معادلتيهما

$P: 2x + y - z - 8 = 0$

$\Rightarrow 2(t+1) + 7 - 5t - 1 + 3t - 8 \overset{?}{=} 0$

$2t + 2 - 2t - 2 = 0$

$0 = 0$ محققة

$Q: x - y + 2z + 4 = 0$

$\Rightarrow t + 1 - 7 + 5t + 2(1-3t) + 4 = 0$

$6t - 2 + 2 - 6t = 0$

$0 = 0$ محققة

إذاً d هو الفصل المشترك للمستويين P ، Q

تتمة السؤال الثالث:

2) (a) طريقة 2 لإثبات أن d هو الفصل المشترك

$P: 2x + y - z - 8 = 0$

$Q: x - y + 2z + 4 = 0$

بالجمع:

$3x + z - 4 = 0$

$\boxed{z = -3x + 4}$

نعوض في P:

$2x + y + 3x - 4 - 8 = 0$

$5x + y - 12 = 0$

$\boxed{y = -5x + 12}$

بفرض $x = t + 1$ وسيطاً

$$d: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -5(t+1) + 12 \\ z = -3(t+1) + 4 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

$$d: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -5t + 7 \\ z = -3t + 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

(b) أثبت أن $J(2,2,-2)$ هي مسقط قائم لـ C على d واستنتج بُعد C عن d

بفرض $J(x,y,z)$ هي المسقط القائم للنقطة C على المستقيم d فهي تحقق معادلته

$J(t+1, -5t+7, -3t+1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{CJ}(t, 7-5t, -3t)$

$\vec{u}_d(1, -5, -3)$

$\overrightarrow{CJ} \cdot \vec{u}_d = 0$

$1(t) - 5(7-5t) - 3(-3t) = 0$

$\Rightarrow t - 35 + 25t + 9t = 0$

$35t = 35 \Rightarrow \boxed{t = 1}$

$\boxed{J(2, 2, -2)}$

بُعد C عن d هو:

$\overrightarrow{CJ}(1, 2, -3)$

$|\overrightarrow{CJ}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

3) اكتب معادلة الكرة التي مركزها $C(1,0,1)$ وتمس المستقيم d

$C(1,0,1)$ ← كرة

$R = CJ = \sqrt{14}$

$S: (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$

$$\boxed{S: (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 14}$$

السؤال الرابع:

مكعب طول حرفه 2

I منتصف $[AB]$

J منتصف $[EH]$

K منتصف $[BC]$

$(A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE})$

1) أوجد إحداثيات رؤوس المكعب

$A(0,0,0), B(2,0,0), D(0,2,0), C(2,2,0)$

$E(0,0,2), F(2,0,2), H(0,2,2), G(2,2,2)$

$A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $D(0,2,0)$, $C(2,2,0)$

$E(0,0,2)$, $F(2,0,2)$, $H(0,2,2)$, $G(2,2,2)$

$I(1,0,0)$, $J(0,1,2)$, $K(2,1,0)$

2) أثبت أن (FD) عمودي IJK

$\overrightarrow{FD}(-2,2,-2)$

$\overrightarrow{IJ}(-1,1,2)$

$\overrightarrow{IK}(1,1,0)$ $\quad \frac{-1}{1} \neq \frac{1}{1}$

المركبات غير متناسبة ⇐

$\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ غير مرتبطان خطياً

⇐ النقاط I, J, K ليست على استقامة واحدة وهي تعين مستوي IJK

$\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{IJ} = -2(-1)+2(1)+(-2)(2)$

$= 2+2-4 = 0$

$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{FD} \perp \overrightarrow{IJ}}$

$\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{IK} = -2(1)+2(1)+(-2)(0)$

$= -2+2+0 = 0$

$\boxed{\overrightarrow{FD} \perp \overrightarrow{IK}}$

إذاً (FD) عمودي IJK

لأنه عمودي مستقيمين متقاطعين فيه

3) اكتب معادلة المستوي (IJK)

مستوي نقطة I ناظمه $\overrightarrow{FD}(-2,2,-2)$

$M(x,y,z) \in (IJK)$

$\overrightarrow{IM}(x-1, y, z)$

$\overrightarrow{FD} \times \overrightarrow{IM} = 0$

$-2(x-1)+2(y)-2(z)=0$

$-2x+2y-2z+2=0$ $\quad \div -1$

$\boxed{x - y + z - 1 = 0}$: (IJK)

4) أوجد تمثيلات وسيطية لـ (FD)

مستقيم يمر بنقطة F أو D

وشعاع توجيه $\overrightarrow{FD}(-2,2,-2)$

$$(FD): \begin{cases} x = -2t \\ y = 2t + 2 \\ z = -2t \end{cases} ; t \in R$$

5) أوجد إحداثيات D' نقطة تقاطع (FD) مع المستوي (IJK).

$(IJK) \perp (FD)$

D' مسقط قائم لـ D على المستوي

$D'(x,y,z) \in (FD) \Rightarrow$

$D'(-2t, 2t+2, -2t)$

$D' \in (IJK) \Rightarrow$

$-2t - 2t - 2 - 2t - 1 = 0$

$-6t - 3 = 0 \Rightarrow$

$-6t = +3 \Rightarrow \boxed{t = \frac{-1}{2}}$

$\boxed{D'(1,1,1)}$

6) معادلة كرة مركزها F وتمس المستوي (IJK).

كرة مركزها $F(2,0,2)$

R هو بعد F عن (IJK)

$R = dist(F, IJK)$

$= \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$= \frac{|2-0+2-1|}{\sqrt{1+1+1}} = \boxed{\sqrt{3}}$

$S: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2$

$S: (x-2)^2+y^2+(z-2)^2 = 3$

إعداد المدرس: كاسر خليل عتيق

بالجد و العمل
نحقق الأمل

النموذج A **مركز المنير التعليمي** معهد ابي الفداء معهد حماه الأول

الهندسة

المدة : ساعة ونصف

الاختبار الداعم

2021 الدرجة العظمى : 300

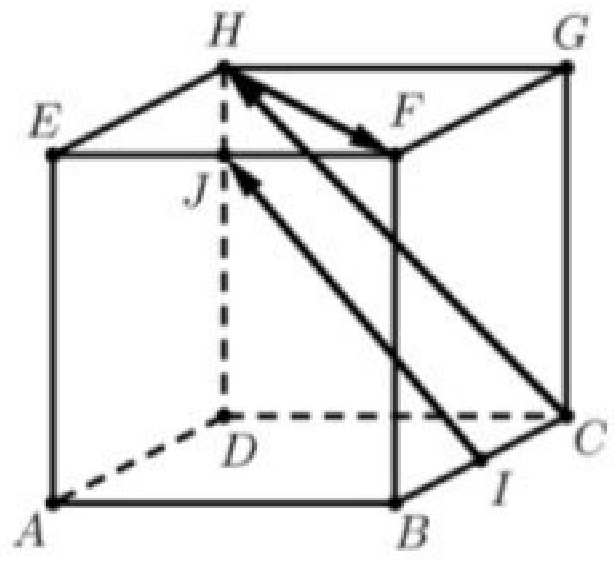
توزيع الدرجات (الأول 50 + الثاني 70 + الثالث 100 + الرابع 80)

السؤال الأول : ليكن لدينا المستقيمان : $L:\begin{cases}x=-1\\ y=1-t \quad : t\in\mathbb{R}\\ z=1-2t\end{cases}$ و $L':\begin{cases}x=4-5k\\ y=3-2k \quad : k\in\mathbb{R}\\ z=-1+2k\end{cases}$

1. أثبت أن المستقيمين L, L' متقاطعين في نقطة يطلب تعيين احداثياتها
2. أوجد معادلة المستوي المحدد بالمستقيمين L, L' المتقاطعين

السؤال الثاني : $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 1

فيه I منتصف $[BC]$ و J منتصف $[EF]$ المطلوب:



1) اثبت ان $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{CH}+\frac{1}{2}\overrightarrow{HF}$

2) استنتج ان المستقيم (IJ) يوازي المستوي (CHF)

3) أثبت أن النقطة K المعرفة بالعلاقة : $2\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{AG}$

هي مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(B;\alpha)$ و $(C;\beta)$ و $(G;\gamma)$ و أوجد عوامل التثقيل α,β,γ

السؤال الثالث: نزود الفضاء بمعلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ و نفرض إحداثيات النقاط A, B, C, D

معطاة بالشكل : $A(1,2,0)$, $B(1,1,2)$, $C(3,4,1)$, $D(-8,1,2)$ و المطلوب :

① أثبت أن النقاط A, B, C تعين مستوٍ P_1 ، اكتب معادلته .

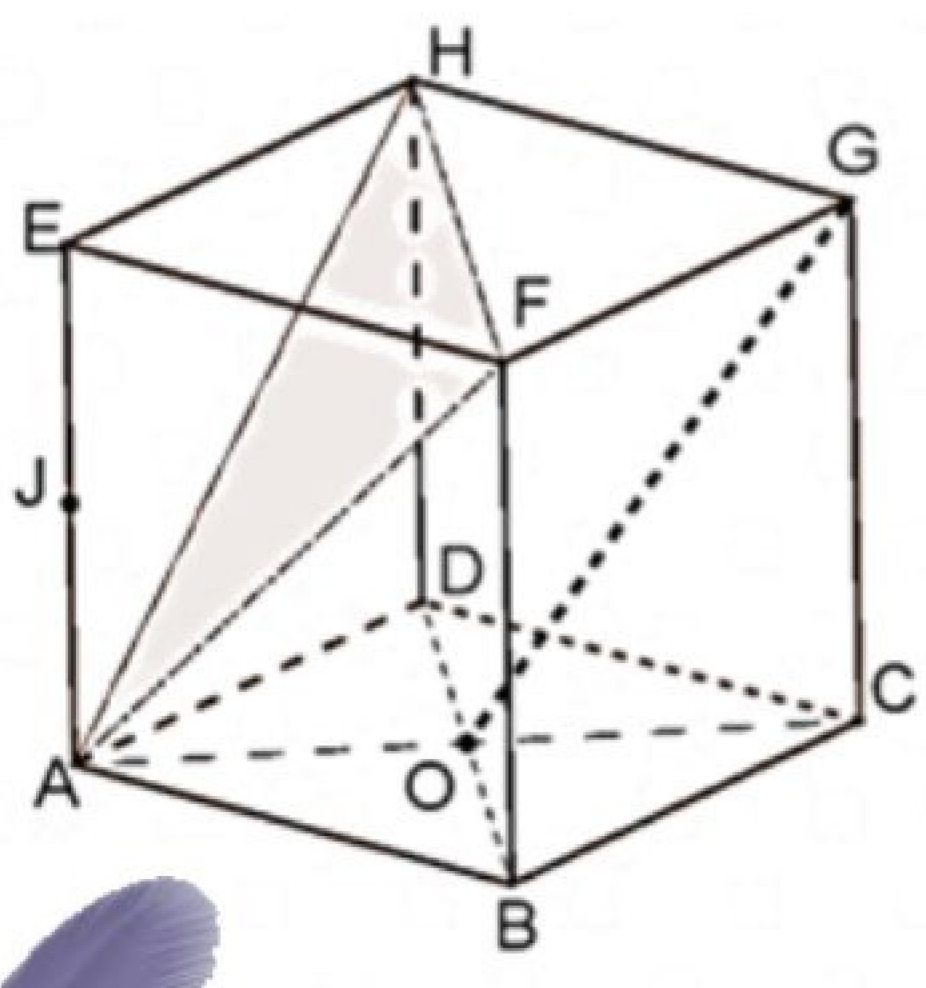
② احسب بعد النقطة D عن المستوي (ABC)

③ استنتج نوع المثلث (ABC) ثم احسب مساحته و احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$

④ اكتب معادلة كرة مركزها D و تمس المستوي (ABC)

⑤ اكتب معادلة P_2 المستوي المار من النقطتين A و B و يعامد المستوي : $Q: x-y+z+2=0$

السؤال الرابع : $ABCDEFGH$ مكعب



a) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{JF}.\overrightarrow{JB}$ و $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OG}$

b) وليكن المعلم المتجانس $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$

وبفرض O مركز الوجه $ABCD$ و J منتصف AE

1) أثبت أن المستقيم OG يوازي المستوي AFH .

2) أثبت أن المستقيم OJ يعامد المستوي AFH ،

3) اكتب معادلة الاسطوانة التي مركزي قاعدتيها B و F وتمر من D .

4) اكتب معادلة الكرة التي مركزها O وتمر من النقطة j

((انتهت الأسئلة))

مع التمنيات بالنجاح و التوفيق للجميع

المدرس : كاسر خليل عتيق

السؤال الأول :

$$L' : \begin{cases} x = 4 - 5k \\ y = 3 - 2k \\ z = -1 + 2k \end{cases} ; k \in \mathbb{R} \quad ; \quad L : \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

① أثبت أن المستقيمين L , L' متقاطعان في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.

$$\left.\begin{matrix} \vec{v}(0,-1,-2) \\ \vec{v'}(-5,-2,2) \end{matrix}\right] \quad \frac{0}{-5} \neq \frac{-1}{-2}$$

$\vec{v}$, $\vec{v'}$ غير مرتبطان خطياً.

L , L' غير متوازيين ← متقاطعان / متخالفان) لا كل السؤال

$4 - 5k = -1 \rightarrow 5 = 5k \Rightarrow \boxed{k = 1}$

$3 - 2k = 1 - t \qquad 3 - 2 = 1 - t \qquad 1 = 1 - t \Rightarrow \boxed{t = 0}$

$-1 + 2k = 1 - 2t$ للتحقق نعوض في (3

$-1 + 2 = 1 - 0$

$1 = 1$ محقق

$t = 0$

ومنه L , L' مستقيمان متقاطعان نعوض $k = 1$

$$L : \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 - 0 = 1 \\ z = 1 - 0 = 1 \end{cases} \quad I(-1,1,1)$$

② أوجد معادلة المستوي المحدد بالمستقيمين L , L' المتقاطعين

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ نجد

$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow 0 - b - 2c = 0 \Rightarrow \boxed{b = -2c} \quad \boxed{c = -\frac{b}{2}}$

$\vec{n} \cdot \vec{v'} = 0 \Rightarrow -5a - 2b + 2c = 0$

نجد $-5a - 3b = 0 \Rightarrow -3b = 5a \Rightarrow b = \frac{-5}{3}a \Rightarrow \boxed{a = \frac{-3}{5}b}$

نعطي $b = 10$ ومنه $a = -6$ و $c = -5$

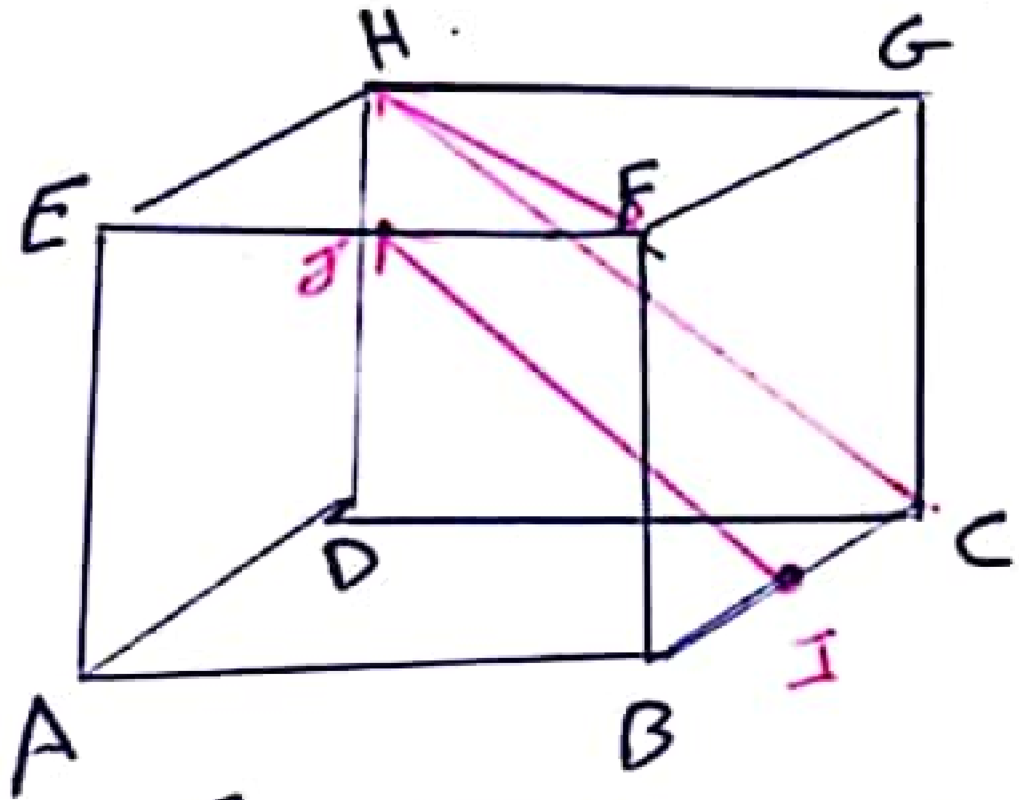
$$\vec{n}(-6,10,-5)$$

$M(x,y,z) \in P : \vec{n} \cdot \vec{IM} = 0$

$-6(x+1) + 10(y-1) - 5(z-1) = 0$

$-6x - 6 + 10y - 10 - 5z + 5 = 0$

$\boxed{6x - 10y + 5z + 11 = 0}$ — P



السؤال الثاني: مكعب طول حرفه 1

منتصف I [BC]

J = [EF]

① أثبت أن $\vec{IJ} = \vec{CH} + \frac{1}{2}\vec{HF}$

$$\ell_1 = \vec{IJ} = \vec{IC} + \vec{CH} + \vec{HF} + \vec{FJ}$$
$$= \frac{1}{2}\vec{BC} + \vec{CH} + \vec{HF} + \frac{1}{2}\vec{FE}$$
$$= \frac{1}{2}(\vec{FE} + \vec{EH}) + \vec{CH} + \vec{HF}$$
$$= \frac{1}{2}\vec{FH} + \vec{CH} + \vec{HF}$$
$$= -\frac{1}{2}\vec{HF} + \vec{CH} + \vec{HF}$$
$$= \vec{CH} + \frac{1}{2}\vec{HF} = \ell_2$$

② استنتج أن المستقيم (IJ) يوازي المستوي (CHF)

وجدنا $\vec{IJ} = \vec{CH} + \frac{1}{2}\vec{HF}$

بما أن الشعاعين $\vec{HF}$ ، $\vec{CH}$ غير مرتبطين خطياً (يحددان مستوي)

و الأشعة $\vec{HF}$ ، $\vec{CH}$ ، $\vec{IJ}$ مرتبطة خطياً

الحامل $\vec{IJ}$ موازٍ للمستوي أو منطبق

إذاً (IJ) يوازي المستوي (CHF)

③ أثبت أن النقطة K المعرفة بالعلاقة $2\vec{AK} = \vec{CB} + \vec{CA} + 3\vec{AG}$

هي مركز أبعاد متناسبة للنقاط (B,α) . (C,β) . (G,γ)

وأوجد قيم الثوابت α ، β ، γ

$$2\vec{AK} = \vec{CB} + \vec{CA} + 3\vec{AG}$$
$$-2\vec{KA} = \vec{KB} - \vec{KC} + \vec{KA} - \vec{KC} + 3\vec{KG} - 3\vec{KA}$$
$$\cancel{-2\vec{KA}} = \vec{KB} - 2\vec{KC} \cancel{-2\vec{KA}} + 3\vec{KG}$$

$$\vec{KB} - 2\vec{KC} + 3\vec{KG} = \vec{0}$$ $1-2+3 \neq 0$

K مركز الأبعاد المتناسبة $(B,1)$, $(C,-2)$, $(G,3)$

$\alpha = 1$, $\beta = -2$, $\gamma = 3$

السؤال الثالث:

$A(1,2,0)$, $B(1,1,2)$, $C(3,4,1)$, $D(-8,1,2)$

① أثبت أن النقاط A, B, C تعين مستوٍ P_1 واكتب معادلته.

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}(0,-1,2)\\ \overrightarrow{AC}(2,2,1)\end{array}\right] \quad \frac{0}{2} \neq \frac{-1}{2}$

$\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطان خطياً

النقاط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة فهي تعين مستوٍ (ABC)

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow \quad -b+2c=0 \Rightarrow \boxed{b=2c}$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \Rightarrow \quad 2a+2b+c=0$

$2a+4c+c=0 \Rightarrow \boxed{a=-\frac{5}{2}c}$

نعوض $c=-2$ فيكون $a=5$ و $b=-4$ ومنه $\vec{n}(5,-4,-2)$

$M(x,y,z)\in P_1 : \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$5(x-1)-4(y-2)-2(z-0)=0$

$5x-5-4y+8-2z=0$

$\boxed{5x-4y-2z+3=0} \text{ — } P_1$

② احسب بعد النقطة D عن المستوي (ABC)

$$dist(D,P_1)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{|5(-8)-4(1)-2(2)+3|}{\sqrt{25+16+4}}$$

$$=\frac{|-40-4-4+3|}{\sqrt{45}}=\frac{45}{\sqrt{45}}=\sqrt{45}$$

$$=\sqrt{9\times5}=3\sqrt{5}$$

③ استنتج نوع المثلث (ABC) ثم احسب حجم رباعي الوجوه ABCD

$$\left.\begin{array}{l}\vec{AB}(0,-1,2)\\ \vec{AC}(2,2,1)\end{array}\right]\qquad \vec{AB}\cdot\vec{AC}=0-2+2=0 \text{ (تعامد)}$$

$AB=\sqrt{0+1+4}=\sqrt{5}$ ، ABC مثلث قائم في A

$AC=\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=3$

$$S=\frac{AB\cdot AC}{2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$V=\frac{1}{3}S_{(ABC)}\cdot h \qquad , \quad h=dist(D,ABC)=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{5}}{2}(3\sqrt{5})$$

$$V=\frac{15}{2}.$$

④ اكتب معادلة كرة مركزها D وتمس المستوي (ABC)

$R=dist(D,ABC)=\sqrt{45}$

$S: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

$(x+8)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=45$

5) اكتب معادلة المستوي P_2 المار بـ A و B ويعامد $Q: x-y+z+2=0$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{AB}(0,-1,2)\\ \vec{n_Q}(1,-1,1)\end{array}\right]\quad \frac{0}{1}\neq\frac{-1}{-1}$$

$\vec{AB}$ ، $\vec{n_Q}$ غير مرتبطين خطياً

نفرض $\vec{n_2}(a,b,c)$ ناظم المستوي P_2

$\vec{n_2}\cdot\vec{AB}=0 \Rightarrow 0-b+2c=0 \Rightarrow b=2c$

$\vec{n_Q}\cdot\vec{n_2}=0 \Rightarrow a-b+c=0 \Rightarrow$

نفرض $\boxed{c=1}$ فإن $\boxed{b=2}$ ومنه $a-2+1=0$ ، $\boxed{a=1}$

$\vec{n}(1,2,1)$

$M(x,y,z)\in P_2: \quad \vec{n}\cdot\vec{AM}=0$

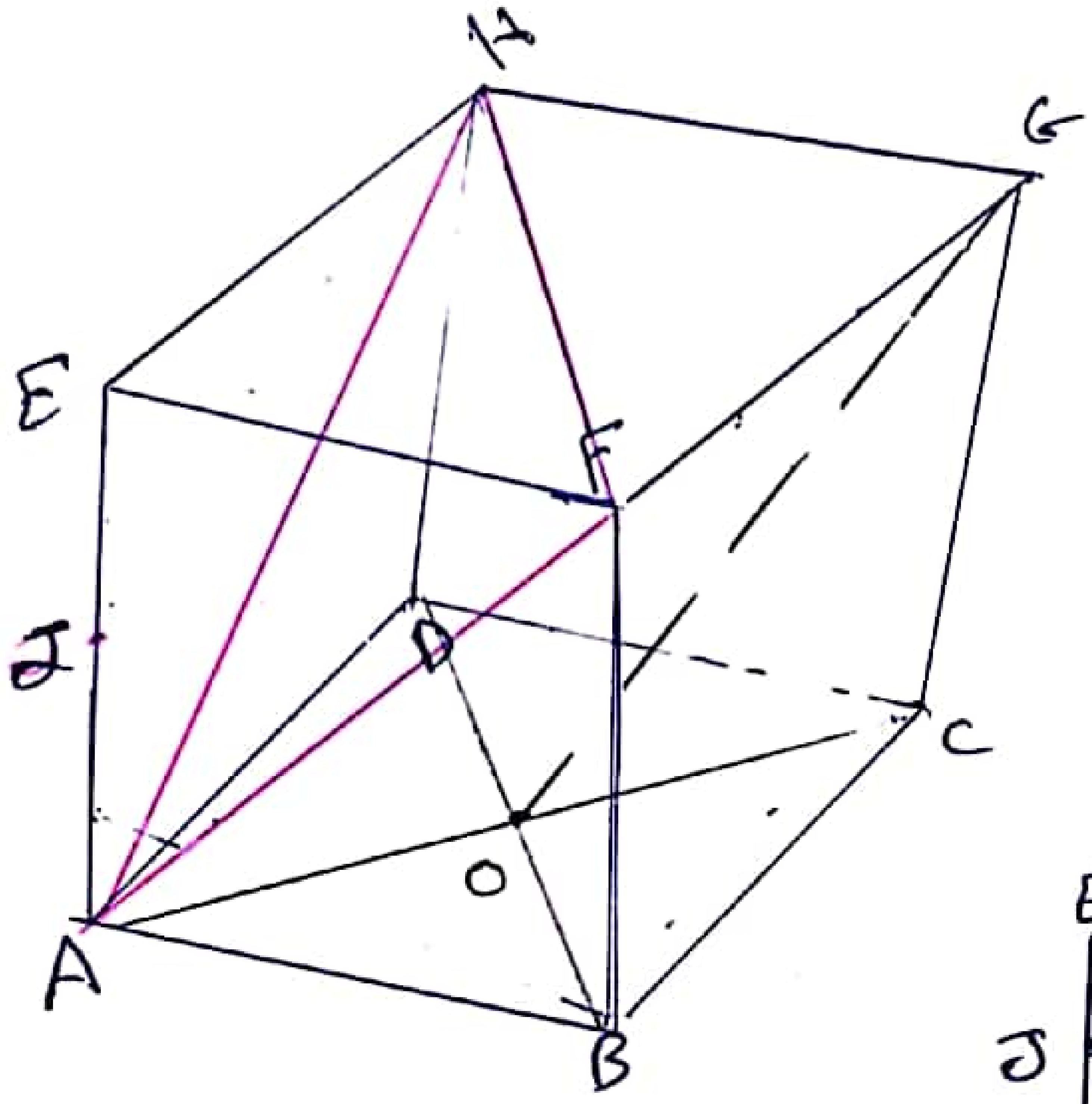
$1(x-1)+2(y-2)+1(z-0)=0$

$x-1+2y-4+z=0$

$x+2y+z-5=0$

السؤال الرابع : مكعب

J منتصف AE



a) احسب الجداء السلمي

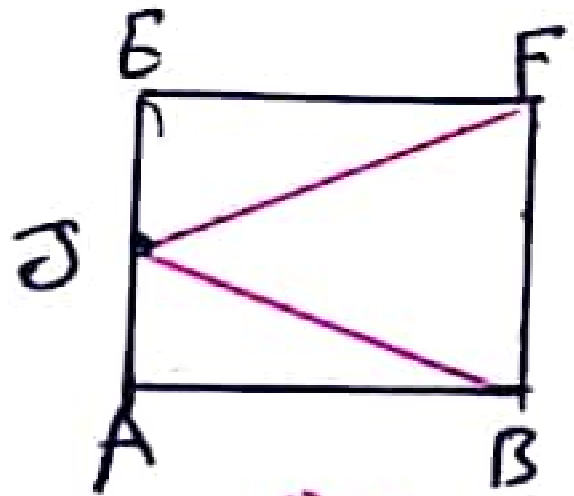
$\vec{OC}\cdot\vec{OG}$ و $\vec{JF}\cdot\vec{JB}$

$$\overset{\text{أ}}{\vec{OC}}\cdot\overset{\text{ها}}{\vec{OG}} = \vec{OC}\cdot\vec{OC}$$

$$= (\vec{OC})^2$$

$$= \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{a^2}{2}$$



نفرض طول ضلع المكعب a

$$\vec{JF}\cdot\vec{JB} = (\vec{JE}+\vec{EF})\cdot(\vec{JA}+\vec{AB})$$

$$= \underbrace{\vec{JE}\cdot\vec{JA}}_{\text{متعاكسان}} + \underbrace{\vec{JE}\cdot\vec{AB}}_{\text{متعامد}} + \underbrace{\vec{EF}\cdot\vec{JA}}_{\text{متعامد}} + \underbrace{\vec{EF}\cdot\vec{AB}}_{\text{مع ولهما}}$$

$$= \frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}(-1) + 0 + 0 + a\cdot a\cdot(1)$$

$$= -\frac{a^2}{4} + a^2 = \frac{3}{4}a^2$$

b) معلم متجانس $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

1) اثبات ان (OG) يوازي المستوي AFH

$A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$ $D(0,1,0)$, $C(1,1,0)$

$E(0,0,1)$ $F(1,0,1)$ $H(0,1,1)$ $G(1,1,1)$

$J(0,0,\frac{1}{2})$ J منتصف $[AE]$

$O(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$ O مركز الوجه ABCD [O منتصف $[AC]$]

$\vec{AF}(1,0,1)$

$\vec{AH}(0,1,1)$

$\frac{0}{1} \neq \frac{1}{1}$

$\vec{AH}$, $\vec{AF}$ غير مرتبطان خطياً

نطلب أن نحدد α ، β

$$\vec{OG} = \alpha \vec{AF} + \beta \vec{AH}$$

$$\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1\right) = \alpha(1,0,1) + \beta(0,1,1)$$

$$\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1\right) = (\alpha, \beta, \alpha+\beta)$$

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2} &= \alpha \\ \tfrac{1}{2} &= \beta \end{aligned}\right]$$

$1 = \alpha + \beta$ للتأكد نعوض ③ $1 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}$

محققة $1 = 1$

$$\boxed{\vec{OG} = \tfrac{1}{2}\vec{AF} + \tfrac{1}{2}\vec{AH}}$$

$\vec{AH}$ ، $\vec{AF}$ ، $\vec{OG}$ مرتبطة خطياً

على OG موازي المستوي أو محتوى فيه اذاً

(OG) يوازي المستوي (AFH)

② أثبت أن المستقيم (OJ) يعامد المستوي AFH

$\vec{OJ}\left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$

$$\vec{OJ}\cdot\vec{AF} = -\tfrac{1}{2} + 0 + \tfrac{1}{2} = 0$$

$$\vec{OJ}\cdot\vec{AH} = 0 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 0$$

(OJ) عمودي على مستقيمين متقاطعين من المستوي فهو عمودي على المستوي (AFH)

③ أكتب معادلة الأسطوانة التي تمر بالنقاط B, F, D

$B(1,0,0)$ محور الدوران (OZ)

$F(1,0,1)$ $R = BD = a\sqrt{2} = \sqrt{2}$

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad , \quad a \leq z \leq b$$

$$x^2 + y^2 = 2 \qquad 0 \leq z \leq 1$$

④ أكتب معادلة كرة مركزها O وتمر بالنقطة J

$$R = OJ = \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}} = \sqrt{\tfrac{3}{4}} \qquad O\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0\right)$$

$$S: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

$$\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \tfrac{3}{4}$$

بالجد و العمل نحقق الأمل

النموذج A   **مركز المنير التعليمي**   معهد ابي الفداء   معهد حماه الأول

الأعداد العقدية و تطبيقاتها

المدة : ساعة ونصف

2021   الاختبار الخامس   الدرجة العظمى : 300

توزيع الدرجات (الأول 40 + الثاني 60 + الثالث 60 + الرابع 70 + الخامس 70)

السؤال الأول : ليكن العدد العقدي $z = e^{i\theta}$ و ليكن u عدد عقدي ما أثبت أن $w = \dfrac{u - z\,\bar{u}}{1-z}$ عدد حقيقي

السؤال الثاني : ① اكتب العدد العقدي : $Z = (1-\sqrt{3})(\cos\frac{\pi}{4} + i\ \sin\frac{\pi}{4})$ بالشكل الأسي

② اكتب بالشكل الجبري العدد العقدي $w = (\sqrt{3}+i)^4$

③ أوجد الجذور التربيعية للعدد العقدي $Z = -8 - 6i$ بالشكل الجبري

السؤال الثالث : ليكن كثير الحدود : $p(z) = z^3 - 8z^2 + 22z - 20$

① أثبت أن $z_0 = 2$ حل للمعادلة $p(z) = 0$

② عين كثير الحدود $Q(z)$ يحقق $p(z) = (z-2)Q(z)$

③ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $Q(z) = 0$

④ بفرض النقاط A و B و C تمثل جذور المعادلة احسب أطوال أضلاع المثلث ABC و حدد نوعه

السؤال الرابع : نزود المستوي العقدي بمعلم متجانس مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$ لدينا النقاط A و B و C

التي تمثلها الأعداد العقدية : $a = 2$ و $b = -1+i$ و $c = 1-3i$

① أحسب $\dfrac{c-a}{b-a}$ و استنتج طبيعة المثلث ABC

② عين العدد العقدي d الممثل للنقطة D التي تجعل $ABDC$ مربع

③ جد العدد العقدي b' الممثل للنقطة B' صورة B و فق تحاك مركزه A و نسبته $k = 3$

④ عين ε مجموعة النقاط $M \neq B$ التي تجعل $\dfrac{Z_M - Z_C}{Z_M - Z_B}$ عدد تخيلي بحت

⑤ عين مجموعة النقاط $M(Z)$ التي تحقق : $|Z - 2| = |Z - 1 + 3i|$

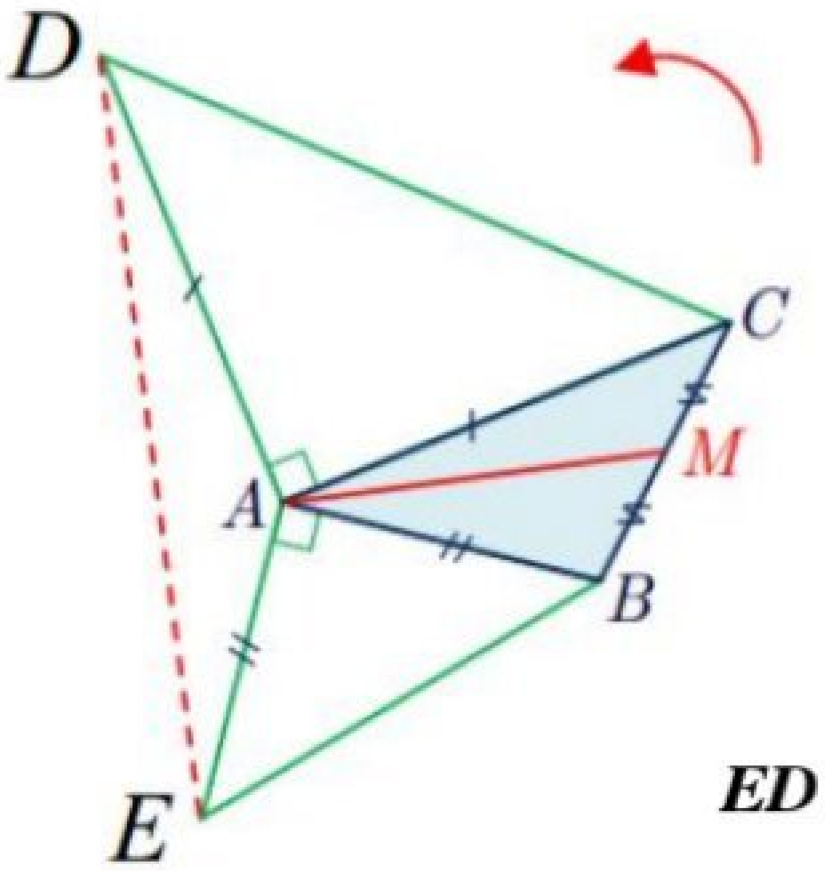
السؤال الخامس : نتأمل في المستوي مثلث ABC مباشر التوجيه كيفياً

لتكن M منتصف $[BC]$ و ليكن ACD, AEB

مثلثين قائمان في A و متساويا الساقين مباشرين

نختار معلم مباشر مبدأه النقطة A

و نرمز c, b إلى العددين العقديين اللذين يمثلان النقطتين C, B



① احسب بدلالة c, b الأعداد العقدية m, d, e الممثلة للنقاط M, D, E بالترتيب

② احسب $\dfrac{d-e}{m-a}$ ثم استنتج أن (AM) هو ارتفاع في المثلث AED و أن $ED = 2AM$

③ بفرض A هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(D,2)$ و $(E,3)$ و $(C,1)$ و $(B,1)$

احسب $\dfrac{c}{b}$ ثم احسب قياس الزاوية $B\hat{A}C$

((انتهت الاسئلة))

مع التمنيات بالنجاح للجميع   المدرس : كاسر خليل عتيق

السؤال الأول

$z = e^{i\theta}$ وليكن u عدد عقدي

أثبت أن

$$w = \frac{u - z\bar{u}}{1-z}$$

عدد حقيقي.

بما أن $z = e^{i\theta}$ فإن $|z| = 1$

ومنه $\bar{z} = \frac{1}{z}$

لنوجد مرافق w

$$\bar{w} = \frac{\bar{u} - \bar{z}u}{1-\bar{z}}$$

$$\bar{w} = \frac{\bar{u} - \frac{1}{z}u}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z\bar{u} - u}{z-1}$$

$$= \frac{-(u - z\bar{u})}{-(1-z)} = \frac{u - z\bar{u}}{1-z} = w$$

وجدنا $\bar{w} = w$ فهو عدد حقيقي

السؤال الثاني

(1) اكتب العدد العقدي

$$z = (1-\sqrt{3})(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

$$z = (1-\sqrt{3})\, e^{\frac{\pi}{4}i}$$

عدد سالب

$$z = -1(\sqrt{3}-1)\, e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$z = (\sqrt{3}-1)\, e^{(\pi+\frac{\pi}{4})i}$$

$$\boxed{z = (\sqrt{3}-1)\, e^{\frac{5\pi}{4}i}}$$

(2) اكتب بالشكل الجبري العدد

$$w = (\sqrt{3} + i)^4$$

$$w = \left[2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right]^4$$

ربع أول

$$w = \left[2\left(e^{\frac{\pi}{6}i}\right)\right]^4$$

$$w = (2)^4 e^{\frac{4\pi}{6}i} = 16\, e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

$$= 16\left[\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right]$$

ثاني

$$= 16\left[-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$\boxed{w = -8 + 8\sqrt{3}\, i}$$

(3) أوجد الجذور التربيعية للعدد العقدي $z = -8 - 6i$ بالجبري

طريقة (1): بفرض $w^2 = z$ ربع 3

و مربع 3 ... 1 ... مربع 1

لـ الفرق 8

$$= 1 - 6i - 9 = 1 - 6i + 9i^2$$

بالجذر $= (1-3i)^2$

إذاً $w_1 = 1 - 3i$

أو $w_2 = -1 + 3i$

طريقة (2)

بفرض $z = x + iy$ فيكون

$x^2 - y^2 = -8$ —(1)

$x^2 + y^2 = \sqrt{64+36} = 10$ —(2)

$2xy = -6$ —(3)

بالجمع (1) مع (2) نجد $x^2 = 1 \Leftarrow \boxed{x = \pm 1}$

بطرح (1) من (2) نجد $y^2 = 9 \Leftarrow \boxed{y = \pm 3}$

من (3) نجد أن الجذرين مختلفان بالإشارة

فيكون $z_1 = 1 - 3i$ ، $z_2 = -1 + 3i$

السؤال الثالث

$P(z) = z^3 - 8z^2 + 22z - 20$

(1) أثبت أن $z_0 = 2$ حل للمعادلة

$P(z) = 0$

نعوض كل z بـ 2

$P(2) = (2)^3 - 8(2)^2 + 22(2) - 20$

$= 8 - 32 + 44 - 20$

$= 52 - 52 = 0$

إذاً $z_0 = 2$ حل للمعادلة

(2) عين كثير حدود $Q(z)$ يحقق

$P(z) = (z-2)\,Q(z)$

$$
\begin{array}{r|l}
 & z^2 - 6z + 10 \\
z-2 & z^3 - 8z^2 + 22z - 20 \\
 & \mp z^3 \pm 2z^2 \\
\hline
 & -6z^2 + 22z - 20 \\
 & \pm 6z^2 \mp 12z \\
\hline
 & 10z - 20 \\
 & \mp 10z \pm 20 \\
\hline
 & 0 \quad 0
\end{array}
$$

$P(z) = (z-2)(z^2 - 6z + 10)$

$Q(z) = z^2 - 6z + 10$

(3) حل في C المعادلة $Q(z) = 0$

$z^2 - 6z + 10 = 0$

إكمال لمربع كامل $z^2 - 6z + 9 - 9 + 10 = 0$

$(z-3)^2 + 1 = 0$

$(z-3)^2 - i^2 = 0$

$(z - 3 + i)(z - 3 - i) = 0$

إما $z = 3 - i$

أو $z = 3 + i$

(4) بفرض النقاط A، B، C تمثل جذور المعادلة احسب أطوال أضلاع المثلث ABC وحدد نوعه

$z_A = 2$ ، $z_B = 3 - i$ ، $z_C = 3 + i$

$A(2,0)$ ، $B(3,-1)$ ، $C(3,1)$

$AB = \sqrt{(3-2)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{1+1} = \boxed{\sqrt{2}}$

$AC = \sqrt{(3-2)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{1+1} = \boxed{\sqrt{2}}$

$BC = \sqrt{(3-3)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{0+4} = \boxed{2}$

نلاحظ أن $AB = AC \neq BC$

مثلث متساوي الساقين

وحسب $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$

عكس فيثاغورث $4 = 2 + 2$

$4 = 4$

المثلث قائم في A

إذاً المثلث قائم في A ومتساوي الساقين

السؤال الرابع: نزود المستوي بمعلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$

النقاط A ، B ، C تمثل بالأعداد $a=2$ ، $b=-1+i$ ، $c=1-3i$

① احسب $\frac{c-a}{b-a}$ واستنتج طبيعة المثلث ABC

$$\frac{c-a}{b-a}=\frac{1-3i-2}{-1+i-2}=\frac{-1-3i}{-3+i}$$

$$=\frac{(-1-3i)(-3-i)}{(-3+i)(-3+i)}=\frac{3+i+9i+3i^2}{9+1}$$

$$=\frac{10i}{10}=i=e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$c-a=e^{\frac{\pi}{2}i}(b-a)$$

C صورة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين

② عيّن العدد العقدي d الممثل للنقطة D التي تجعل ABDC مربع

$$\vec{AB}=\vec{CD} \Rightarrow b-a=d-c$$

$$-3+i=d-1+3i$$

$$d=-3+i+1-3i$$

$$\boxed{d=-2-2i}$$

③ جد العدد العقدي b' الممثل للنقطة B' صورة B وفق تحاكٍ مركزه A ونسبته $k=3$

$$b'-a=k(b-a)$$

$$b'-2=3(-1+i-2)$$

$$b'=-6+3i+2$$

$$\boxed{b'=-4+3i}$$

4) عين Σ مجموعة النقاط $M \neq B$ التي تجعل $\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}$ تخيلياً بحتاً

$$W = \frac{z_M - z_C}{z_M - z_B} \text{ تخيلي بحت}$$

حالتان: ① $W = 0$ عندما $z_M - z_C = 0$

$z_M = z_C$

Σ تمثل نقطة وحيدة C

② $\arg(W) \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$

$(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM}) \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$

$\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{CM}$ متعامدان

$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$

⟸ Σ تمثل دائرة قطرها $[BC]$ ماعدا النقطة B

5) عين مجموعة النقاط $M(z)$ التي تحقق $|z - 1 + 3i| = |z - 2|$

$|z - (1 - 3i)| = |z - (2)|$

$|z_M - z_C| = |z_M - z_A|$

$CM = AM$

مجموعة النقاط تمثل محور القطعة المستقيمة $[AC]$

السؤال الخامس:

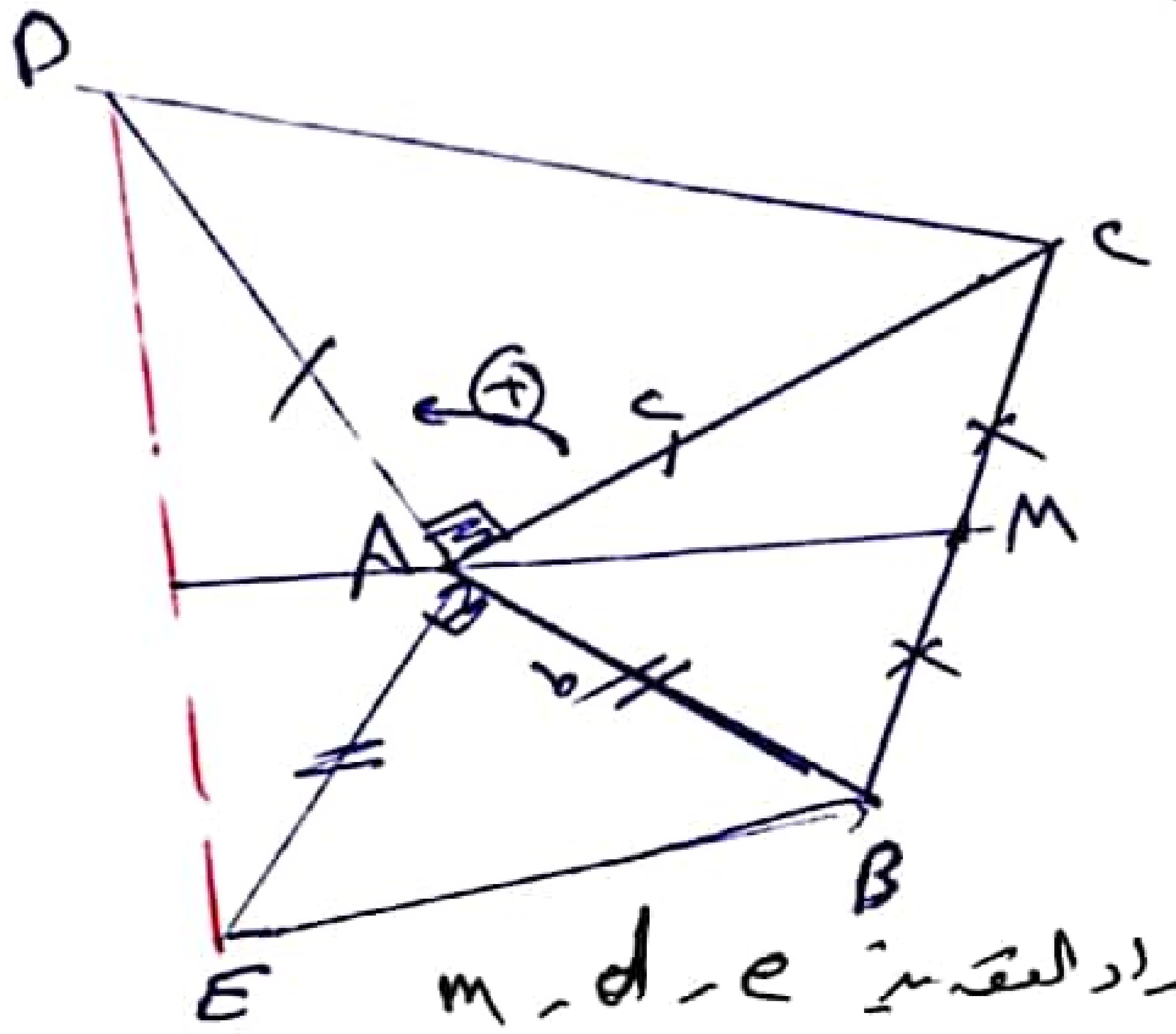
ABC مثلث مباشر التوجيه كيفي

M منتصف [BC]

AEB ، ACD مثلثان قائمان في A ومتساويا الساقين مباشرين

نختار معلم مباشر مبدؤه A

نرمز b ، c للعددين المركبين الممثلين للنقطتين B ، C



(1) احسب بدلالة b و c الأعداد العقدية m ، d ، e الممثلة للنقاط M ، D ، E بالترتيب

الحل: M منتصف [BC]

$$m=\frac{b+c}{2}$$

ACD قائم في A ومتساوي الساقين

$$(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{2}$$

D صورة C وفق دوران مركزه المبدأ A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$d=e^{\frac{\pi}{2}i}c \Rightarrow \boxed{d=ic}$$

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE})=-\frac{\pi}{2}$$

E صورة B وفق دوران مركزه المبدأ A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

$$e=e^{-\frac{\pi}{2}i}\cdot b \Rightarrow \boxed{e=-ib}$$

(2) احسب $\frac{d-e}{m-a}$ ثم استنتج أن (AM) هو ارتفاع في المثلث AED وأن ED = 2AM

$$\frac{d-e}{m-a}=\frac{ic+ib}{\frac{b+c}{2}-0}=\frac{i(b+c)}{\frac{b+c}{2}}=2i=2e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$\arg\left(\frac{d-e}{m-a}\right)=\frac{\pi}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{AM},\overrightarrow{ED})=\frac{\pi}{2}$$

(AM) عمودي على (ED) ~~...~~ (AM) ارتفاع للمثلث AED

$$\left|\frac{d-e}{m-a}\right|=2 \Rightarrow \frac{ED}{AM}=2 \Rightarrow \boxed{ED=2AM}$$

س) نفرض A هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة
$(B,1)$, $(C,1)$, $(E,3)$ $(D,2)$

ا) احسب $\frac{c}{b}$ ثم احسب قياس الزاوية $B\hat{A}C$

2د جـ نفرض مركز الأبعاد المتناسبة

$$\frac{1.b+1.c+3e+2d}{1+1+3+2}=a$$

$$\frac{b+c+3(-ib)+2(ic)}{7}=0$$

$$b+c-3bi+2ic=0$$

$$c+2ic=-b+3bi$$

$$c(1+2i)=b(-1+3i)$$

$$\frac{c}{b}=\frac{-1+3i}{1+2i}=\frac{(-1+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$$

$$=\frac{-1+2i+3i-6i^2}{1+4}=\frac{5+5i}{5}$$

$$\frac{c}{b}=1+i$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{4}$$

$$B\hat{A}C=\frac{\pi}{4}$$

بالجد و العمل نحقق الأمل

النموذج B   **مركز المنير التعليمي**   **معهد ابي الفداء**   **معهد حماه الأول**

الأعداد العقدية و تطبيقاتها

المدة : ساعة ونصف

2021   الاختبار الخامس   الدرجة العظمى : 300

توزيع الدرجات (الأول 50 + الثاني 50 + الثالث 60 + الرابع 80 + الخامس 60)

السؤال الأول : ليكن العددان العقديان : $a = 1 + i\sqrt{3}\ ,\ b = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i}$ ممثلين للنقطتين A, B

● اكتب العدد a بالشكل الأسي ثم احسب $\frac{a}{b}$ بالشكل الأسي

● اكتب العدد b بالشكل الجبري ثم احسب $\frac{a}{b}$ بالشكل الجبري ثم استنتج قيمة كل من $\cos\frac{\pi}{12}\ ,\ \sin\frac{\pi}{12}$

السؤال الثاني : تحقق أن $z_1 = 3\,i$ حلاً للمعادلة : $Z^4 + 6\,Z^3 + 19\,Z^2 + 54\,Z + 90 = 0$

ثم أوجد باقي حلول المعادلة

السؤال الثالث : ليكن العدد العقدي : $Z = \dfrac{1+\sqrt{3}\ i}{\sqrt{3}+\ i}$ ① اكتب Z بالشكل الأسي ② برهن أن $Z^{24} = 1$

③ أوجد الجذرين التربيعيين للعدد Z بالشكل الأسي

السؤال الرابع: نزود المستوي العقدي بمعلم متجانس مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$ لدينا النقاط A و B و C

التي تمثلها الأعداد العقدية : $a = 2i$ و $b = 1 - i$ و $c = -3 + i$

① احسب أطوال أضلاع المثلث ABC ثم استنتج طبيعة المثلث ABC واحسب مساحته

② عين العدد العقدي d الممثل للنقطة D التي تجعل $ABDC$ مربع

③ جد العدد العقدي b' الممثل للنقطة B' صورة B و فق دوران ربع دورة مباشرة حول A

④ جد العدد العقدي c' الممثل للنقطة C' صورة C و فق تناظر مركزي مركزه B

⑤ عين Δ مجموعة النقاط $M \neq B$ التي تجعل $\dfrac{Z_M - Z_C}{Z_M - Z_B}$ عدد حقيقي

السؤال الخامس: نتأمل في مستو مزود بمعلم متجانس مباشر $(A;\vec{u},\vec{v})$ المثلث ABC

ننشئ عليه مثلثات قائمة و متساوية الساقين و مباشرة التوجيه ACN و BCM و ALB

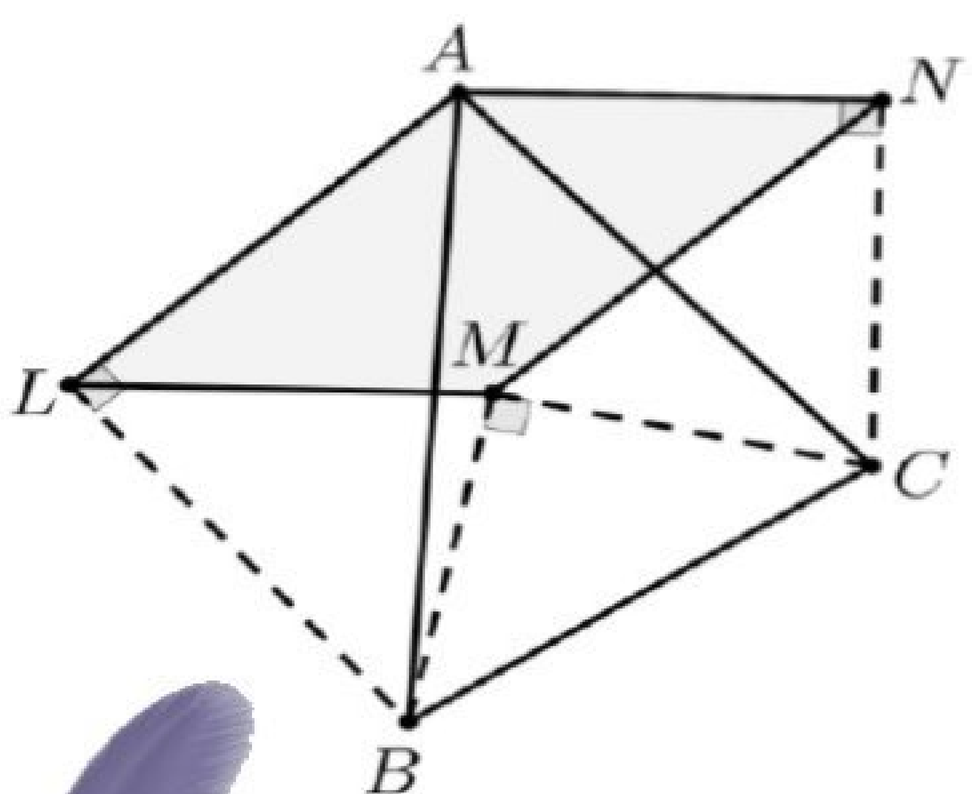
نرمز للأعداد العقدية التي تمثل النقاط A, B, C, L, M, N بالترتيب a, b, c, ℓ, m, n و المطلوب :

① أثبت أن : $\ell = \frac{1}{2} b\,(1 - i)$

ثم أوجد الأعداد العقدية m, n

② أثبت أن : $\ell = m - n$

③ استنتج طبيعة الرباعي $ALMN$



((انتهت الاسئلة))

مع التمنيات بالنجاح للجميع   المدرس : كاسر خليل عتيق

السؤال الأول:

ممثلهما A, B ، $a = 1 + i\sqrt{3}$ ، $b = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i}$

(1) اكتب العدد a بالشكل الأسي ثم احسب $\frac{a}{b}$ بالشكل الأسي:

$$a = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\, e^{\frac{\pi}{3}i}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2\, e^{\frac{\pi}{3}i}}{\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i}} = \frac{2}{\sqrt{2}}\, e^{\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)i} = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{12}i}$$

(2) اكتب العدد b بالشكل الجبري ثم احسب $\frac{a}{b}$ بالشكل الجبري

واستنتج $\sin\frac{\pi}{12}$ ، $\cos\frac{\pi}{12}$

$$b = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$= 1 + i$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i} = \frac{(1 + i\sqrt{3})(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)}$$

$$= \frac{1 - i + i\sqrt{3} - i^2\sqrt{3}}{1 + 1} = \frac{1 + \sqrt{3} + i(-1 + \sqrt{3})}{2}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)$$

بالمطابقة بين الشكلين الجبري والأسي لـ $\frac{a}{b}$

$$\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{12}i} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)$$

$$e^{\frac{\pi}{12}i} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} + i\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)$$

بالمطابقة

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \text{و} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

السؤال الثاني : تحقق أن $z_1 = 3i$ حلاً للمعادلة :

$$z^4 + 6z^3 + 19z^2 + 54z + 90 = 0$$

ثم أوجد باقي حلول المعادلة

(الحل) حل المعادلة يجب أن يحققها

$$(3i)^4 + 6(3i)^3 + 19(3i)^2 + 54(3i) + 90 \stackrel{?}{=} 0$$

$$81i^4 + 6(27i^3) + 19(9i^2) + 162i + 90 \stackrel{?}{=} 0$$

$$81 - \cancel{164i} - 171 + \cancel{162i} + 90 \stackrel{?}{=} 0$$

$0 = 0$ محققة

إذاً $z = 3i$ هو حل للمعادلة

المعاملات الحدود الأربع والثابت حقيقية عندئذ $\bar{z}_1 = -3i$ هو أيضاً حل للمعادلة $p(z) = 0$

عندئذ يوجد كثير حدود Q من الدرجة الثانية بحيث

$$p(z) = (z - z_1)(z - \bar{z}_1)\,Q(z)$$
$$= (z - 3i)(z + 3i)\,Q(z)$$
$$= (z^2 + 9)\,Q(z)$$

$$Q(z) = \frac{p(z)}{z^2 + 9}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & z^2 + 6z + 10 \\
\hline
z^2 + 9 & z^4 + 6z^3 + 19z^2 + 54z + 90 \\
 & \mp z^4 \qquad\quad \mp 9z^2 \\
\hline
 & +6z^3 + 10z^2 + 54z + 90 \\
 & 6z^3 \qquad\quad + 54z \\
\hline
 & +10z^2 + 90 \\
 & 10z^2 + 90 \\
\hline
 & 0 \quad 0
\end{array}$$

السؤال الثالث:

$$Z = \frac{1+\sqrt{3}\,i}{\sqrt{3}+i}$$

① اكتب Z بالشكل الأسي

$$Z = \frac{1+\sqrt{3}\,i}{\sqrt{3}+i} = \frac{2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)} = \frac{2e^{\frac{\pi}{3}i}}{2e^{\frac{\pi}{6}i}}$$

$$Z = e^{\frac{\pi}{6}i}$$

② برهن أنه $Z^{24}=1$

$$Z^{24} = e^{24\frac{\pi}{6}i} = e^{4\pi i} = e^{0i} = 1$$

③ أوجد الجذرين التربيعيين للعدد Z بالشكل الأسي

نفرض $W = re^{i\theta}$ جذر تربيعي لـ Z

$$W^2 = Z$$

$$r^2e^{2\theta i} = e^{\frac{\pi}{6}i}$$

$$r^2 = 1 \longrightarrow \boxed{r=1}$$

$$2\theta = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

$$\theta = \frac{\pi}{12} + \pi k \quad : k=0,1$$

$$k=0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{12} \Rightarrow W_1 = 1e^{\frac{\pi}{12}i}$$

$$k=1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{12}+\pi = \frac{13\pi}{12} \Rightarrow W_2 = e^{\frac{13\pi}{12}i}$$

السؤال الرابع: $a = 2i \quad , \quad b = 1 - i \quad , \quad c = -3 + i$

① احسب أطوال أضلاع المثلث ABC ثم استنتج نوع المثلث ABC واحسب مساحته

$$AB = |b - a| = |1 - i - 2i| = |1 - 3i| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$AC = |c - a| = |-3 + i - 2i| = |-3 - i| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$BC = |c - b| = |-3 + i - 1 + i| = |-4 + 2i| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

نلاحظ
$$\begin{cases} AB = AC \neq BC \\ (AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2 \end{cases}$$
المثلث قائم في A ومتساوي الساقين

$$S = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{\sqrt{10}\sqrt{10}}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

② عيّن العدد العقدي d الممثل للنقطة D التي تجعل ABDC م أ

$$\vec{AB} = \vec{CD}$$

$$b - a = d - c \Rightarrow 1 - 3i = d + 3 - i$$

$$1 - 3i - 3 + i = d$$

$$\boxed{d = -2 - 2i}$$

③ جد العدد العقدي b' الممثل للنقطة B' صورة B وفق دوران ربع دورة مباشر حول A

$$b' - a = e^{\frac{\pi}{2} i}(b - a)$$

$$b' - 2i = i(1 - i - 2i)$$

$$b' - 2i = i - 3i^2$$

$$b' = i + 3 + 2i$$

$$\boxed{b' = 3 + 3i}$$

(4) جد العدد العقدي c' الممثل للنقطة c' صورة C وفق تناظر مركزه B

$$z' = -z + 2w$$

$$c' = -c + 2b$$

$$c' = 3 - i + 2 - 2i$$

$$c' = 5 - 3i$$

(5) عين Δ مجموعة النقاط $M \neq B$ التي يكون لأجلها $\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}$ عدد حقيقي

$$W = \frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}$$ عدد حقيقي

نميز حالتين

(1) $W = 0$ منه $z_M - z_C = 0$

$z_M = z_C$

Δ تمثل نقطة واحدة C

(2) $\arg(W) \in \{0, \pi\}$

$$(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM}) \in \{0, \pi\}$$

$\overrightarrow{BM}$ ، $\overrightarrow{CM}$ مرتبطان خطياً

النقاط M ، B ، C تقع على استقامة واحدة

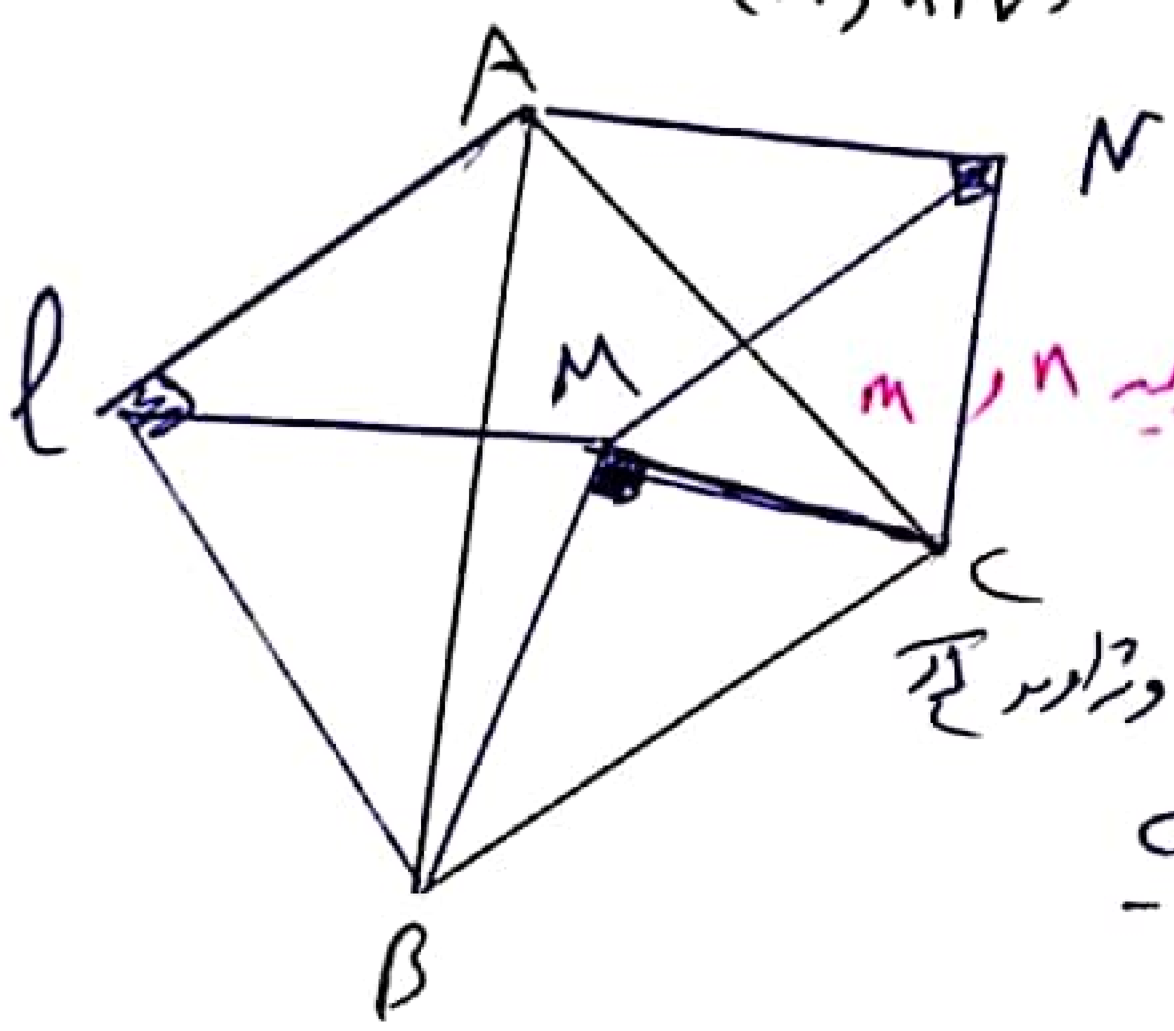
أي Δ تمثل مستقيم (BC) ماعدا النقطة B

السؤال الخامس :

$(A, \vec{u}, \vec{v})$ معلم متعامد

مثلثات قائمة ومتساوية الساقين :

ALB , BCM , ACN



(1) اثبات أن $\ell = \frac{1}{2} b(1-i)$ ثم أوجد n , m

~~ALB~~ $(\overrightarrow{\ell B}, \overrightarrow{\ell A}) = \frac{\pi}{2}$

الحل: A صورة B وفق دوران مركزه ℓ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$a - \ell = e^{\frac{\pi}{2}i}(b - \ell)$$

$$-\ell = i(b - \ell)$$

$$-\ell = ib - i\ell$$

$$-\ell + i\ell = ib$$

$$\ell(-1+i) = ib$$

$$\ell = \frac{ib}{-1+i} = \frac{ib(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{b(-i-i^2)}{1+1}$$

$$\boxed{\ell = \frac{b}{2}(1-i)}$$

BCM مثلث قائم في M ومتساوي الساقين $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = \frac{\pi}{2}$

C صورة B وفق دوران مركزه M وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$c - m = e^{\frac{\pi}{2}i}(b - m)$$

$$c - m = i(b - m)$$

$$c - ib = m - im$$

$$c - ib = m(1-i)$$

$$m = \frac{c - ib}{1 - i} = \frac{(c - ib)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$m = \frac{c(1+i) + b(-i-i^2)}{1+1}$$

$$\boxed{m = \frac{1}{2}\left[c(1+i) + b(1-i)\right]}$$

ACN مثلث قائم في N

$$(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NC}) = \frac{\pi}{2}$$

C صورة A وفق دوران مركزه N وزاويته $\frac{\pi}{2}$

A مبدأ

$$c - n = e^{\frac{\pi}{2}i}(a - n)$$

$$c - n = i(-n)$$

$$c = n - in$$

$$c = n(1 - i)$$

$$n = \frac{c}{1-i} = \frac{c(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$\boxed{n = \frac{c}{2}(1+i)}$$

2) أثبت أن $\ell = m - n$

$$\ell_1 = \ell = \frac{b}{2}(1-i)$$

$$\ell_2 = m - n = \cancel{\frac{c}{2}(1+i)} + \frac{b}{2}(1-i) - \cancel{\frac{c}{2}(1-i)}$$

$$= \frac{b}{2}(1-i)$$

$$\Longrightarrow \ell_1 = \ell_2$$

$$\boxed{\ell = m - n}$$

3) استنتج طبيعة الرباعي ALMN

$$\ell = m - n$$

$$\ell - a = m - n$$

$$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{NM}$$

ALMN هو متوازي أضلاع

بالجد و العمل نحقق الأمل

النموذج A **مركز المنير التعليمي** معهد ابي الفداء معهد حماه الأول

التحليل التوافقي و الاحتمالات

المدة : ساعة ونصف

2021 الاختبار التاسع الدرجة العظمى : 300

توزيع الدرجات (الأول 60 + الثاني 40 + الثالث 60 + الرابع 60 + الخامس 80)

السؤال الأول : في منشور ثنائي الحد $(x^2+\frac{1}{x})^5$

① أوجد أمثال x ② أوجد الحد الثالث

السؤال الثاني :إذا علمت أن المتحولين العشوائيين X,Y مستقلان احتمالياً

أكمل الجدول المجاور الذي يمثل القانون الاحتمالي للمتحولين X,Y

X \ Y	1	2	3	قانون X
0				0.6
1		0.16		
قانون Y	0.5			

السؤال الثالث: الجدول غير المكتمل الموضح هو القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X الذي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية

k	0	1	2	3
$p(X=k)$	$\frac{27}{64}$			

1- ما عدد اختبارات التجربة ؟

2 - اكتب صيغة القانون الاحتمالي بدلالة k ثم أكمل الجدول

3 - احسب التوقع الرياضي و تباين المتحول العشوائي ؟

السؤال الرابع: $ABCDEFG$ مضلع سباعي محدب

① ما عدد الأشعة غير الصفرية التي نحصل عليها من الوصل بين رأسين من رؤوس السباعي

② ما عدد المثلثات التي نحصل عليها من الوصل بين ثلاث رؤوس للسباعي

③ ما عدد أقطار السباعي ④ ما عدد نقاط تقاطع أقطار السباعي السابق

السؤال الخامس: مغلف يحوي (6) بطاقات مرقمة على النحو $(1\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,\ -1\ ,\ -1)$

نسحب من المغلف بطاقتين عشوائيا" على التتالي مع الإعادة ، والمطلوب :

1- إذا علمت أن مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين صفر فما احتمال سحب بطاقتين تحملان الرقم ذاته؟

2- نعرف متغير عشوائي X يدل على مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين أوجد مجموع قيم المتغير العشوائي X واكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي ثم احسب التباين و الإنحراف المعياري

((انتهت الأسئلة))

مع التمنيات بالنجاح و التوفيق للجميع المدرس : كاسر خليل عتيق

السؤال الأول: في منشور $(x^2+\frac{1}{x})^5$ ، $a = x^2$ ، $b = \frac{1}{x}$ ، $n = 5$

① أوجد أمثال x

② أوجد الحد الثالث

$$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} \cdot b^r$$

$$= \binom{5}{r} (x^2)^{5-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r$$

$$= \binom{5}{r} x^{10-2r} \, x^{-r}$$

$$T_r = \binom{5}{r} x^{10-3r}$$

نحصل على أمثال x نضع $10-3r=1$

$9=3r \rightarrow \boxed{r=3}$

$$T_3 = \binom{5}{3} x^{10-9} = 10x$$

أمثال x هو $\boxed{10}$

الحد الثالث

$$T_2 = \binom{5}{2} x^{10-6} = 10x^4$$

السؤال الثاني: X ، Y مستقلان

أكمل الجدول

$X \backslash Y$	1	2	3	قانون X
0	0,30	0,24	0,06	$\boxed{0,6}$
1	0,20	$\boxed{0,16}$	0,04	0,4
قانون Y	$\boxed{0,5}$	0,4	0,1	

السؤال الثالث: X يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية

K	0	1	2	3
$P(X=K)$	$\frac{27}{64}$			

① ما عدد اختبارات التجربة

$n=3$

② اكتب صيغة القانون الاحتمالي للمتحول X ثم أكمل الجدول

$$P(X=K) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

لدينا $P(X=0) = \frac{27}{64}$

$$\binom{3}{0} p^0 q^3 = \frac{27}{64}$$

$$1 \times 1 \times q^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

$$\boxed{q = \frac{3}{4}} \Rightarrow \boxed{p = \frac{1}{4}}$$

$$P(X=1) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{16} = \frac{27}{64}$$

$$P(X=2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 = 3 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$$

$$P(X=3) = \binom{3}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1 \cdot \frac{1}{64} \cdot 1 = \frac{1}{64}$$

K	0	1	2	3
$P(X=K)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

③ احسب التوقع والتباين والانحراف المعياري

$$E(X) = n \cdot p = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$V(X) = n \cdot p \cdot q = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{3}{4}$$

السؤال الرابع مضلع سباعي محدب

(1) ما عدد الأشعة غير الصفرية التي تصل بين رؤوس المضلع

$P^2_n = P^2_7 = 7\times 6 = 42$

(2) ما عدد المثلثات التي رؤوسها من رؤوس المضلع السباعي

$\binom{n}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = 35$

(3) ما عدد الأقطار للمضلع السباعي

عدد الأقطار = عدد القطع المستقيمة مطروحاً منه عدد الأضلاع

$\binom{n}{2} - n = \binom{7}{2} - 7$

$= 21 - 7 = 14$

(4) ما عدد نقاط تقاطع الأقطار

نقاط تقاطع الأقطار ... $n=7$ داخل المضلع

$\binom{n}{4} = \binom{7}{4} = \binom{7}{3} = 35$

$D_n = \binom{n}{4} + n = 35 + 7$

$= 42$

السؤال الخامس

$-1, -1, 0, 1, 1, 1$

نسحب بطاقتين مع الإعادة

(1) إذا علمت أن مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين صفر فما احتمال سحب بطاقتين تحملان الرقم ذاته

نفرض A حدث مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين 0

B حدث البطاقتين تحملان الرقم ذاته

$A\cap B \to (0,0)$

$A \to (-1,1)_{\times 2}, (0,0)$

$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}\times 2 + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}}$$

$$= \frac{\frac{1}{36}}{\frac{12+1}{36}} = \boxed{\frac{1}{13}}$$

(2) ليكن X المتحول العشوائي الدال على مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين أوجد مجموعة قيم المتحول X اكتب جدول قانون الاحتمال احسب توقعه الرياضي ثم احسب تباينه والانحراف المعياري

نفكر بسحب بطاقتين

$X(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$-1-1=-2$

$-1+0=-1$

$-1+1=0$

$0+0=0$

$0+1=1$

$1+1=2$

$-1,-1$: $P(X=-2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{36}$

$-1,0$: $P(X=-1) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} \times 2 = \frac{4}{36}$

$-1,1$ / $0,0$: $P(X=0) = \frac{2}{6} \times \frac{3}{6} \times 2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{13}{36}$

$0,1$: $P(X=1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} \times 2 = \frac{6}{36}$

$1,1$: $P(X=2) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{36}$

x_i	-2	-1	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{9}{36}$

$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

$= \frac{-8-4+0+6+18}{36}$

$= \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$V(X) = \frac{16+4+0+6+36}{36} - \left(\frac{1}{3}\right)^2$

$= \frac{62}{36} - \frac{1}{9} = \frac{58}{36}$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{58}}{6}$

بالجد و العمل نحقق الأمل

النموذج B **مركز المنير التعليمي** معهد ابي الفداء معهد حماه الأول

التحليل التوافقي و الاحتمالات

المدة : ساعة ونصف

2021 الاختبار التاسع الدرجة العظمى : 300

توزيع الدرجات (الأول 60 + الثاني 40 + الثالث 60 + الرابع 50 + الخامس 90)

السؤال الأول : في مدرسة 6 مدرسين و 4 مدرسات أرادت إدارة المدرسة اختيار لجنة مؤلفة من ثلاث أشخاص

1) بكم طريقة يمكن اختيار هذه اللجنة إذا علمت أنها تضم مدرسين اثنين و مدرسة واحدة
2) بكم طريقة يمكن اختيار رئيس و نائب و امين سر لهذه اللجنة
3) أرادت ادارة المدرسة توزيع 5 جوائز على المدرسات الأربع في عيد الأم بحيث كل مدرسة تحصل على جائزة على الأقل بكم طريقة يتم التوزيع ؟

السؤال الثاني : في فضاء احتمالي $(\Omega , P(\Omega) , P)$ إذا كان A , B حدثين مستقلين احتمالياً فأثبت أن الحدثين A , B' مستقلين احتمالياً

السؤال الثالث: يسدد كل من لاعبي كرة القدم ميسي و رونالدو مرة واحدة على المرمى

اذا كان احتمال عدم تسجيل أي هدف من قبل اللاعبين $\frac{3}{25}$

واحتمال أن يسجل اللاعب ميسي فقط هدفاً يساوي $\frac{7}{25}$

1) احسب احتمال ان يسجل ميسي هدفاً 2) احسب احتمال ان يسجل رونالدو هدفاً

السؤال الرابع : في مدينتنا حماه يمارس 30 % لعبة كرة اليد نعلم أن مدينتنا تضم نسبة 60 % من الذكور منهم 45 % يلعبون كرة اليد نختار شخص بشكل عشوائي من السكان

نرمز (M للذكر و W للأنثى و H لمن يلعب كرة اليد)

1. انشئ مخطط شجري
2. احسب احتمال أن تكون انثى تمارس لعبة كرة اليد

السؤال الخامس : يحوي مغلف (7) بطاقات مرقمة بالأعداد { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 }

نسحب من المغلف عشوائياً ثلاث بطاقات بالتتالي دون إعادة و المطلوب :

1. ما احتمال ظهور البطاقة ذات الرقم 2 بين البطاقات المسحوبة ؟
2. إذا علمت أن مجموع أرقام البطاقات الثلاث المسحوبة فردي ، ما احتمال أن تكون البطاقة ذات الرقم (2) بينها
3. نعرف متحول عشوائي X يدل على الرقم الاصغر بين أرقام البطاقات الثلاث المسحوبة اكتب قيم المتحول العشوائي X و اكتب جدول توزيعه و احسب توقعه الرياضي و التباين

((انتهت الأسئلة))

مع التمنيات بالنجاح و التوفيق للجميع المدرس : كاسر خليل عتيق

السؤال الأول: في مدرسة 6 مدرسين و 4 مدرسات أرادت إدارة المدرسة اختيار لجنة مؤلفة من ثلاثة أشخاص

(1) بكم طريقة يمكن اختيار هذه اللجنة إذا علمت أنها تضم مدرسين اثنين و مدرسة واحدة

$$\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{1} = \frac{6\times5}{2\times1}\times4 = 15\times4 = 60$$

(2) بكم طريقة يمكن اختيار رئيس ونائب وأمين سر

$$P_{10}^{3} = 10\times9\times8 = 720$$

(3) أرادت إدارة المدرسة توزيع 5 جوائز على المدرسات الأربع في عيد الأم بحيث كل مدرسة تحصل على جائزة على الأقل بكم طريقة يتم التوزيع.

الخطوة الأولى: اختيار جائزتين من 5 للوضع في كيس: $\binom{5}{2}=10$

الخطوة الثانية: توزيع 4 أكياس على 4 أستاذات

$$4! = 4\times3\times2\times1 = 24$$

حسب المبدأ الأساسي بالعد

$$\binom{5}{2}\cdot 4! = 10\times24 = 240$$

السؤال الثاني: في فضاء احتمالي $(\Omega, P(\Omega), P)$

إذا كان A, B حدثان مستقلان احتمالاً فأثبت أن الحدثين A و B' مستقلان احتمالاً.

لنثبت أن $P(A\cap B') = P(A)\cdot P(B')$ ؟؟

$$\ell_1 = P(A\cap B') = P(A) - P(A\cap B)$$

لكن A, B مستقلان احتمالاً بالفرض

$$= P(A) - P(A)\cdot P(B)$$

$$= P(A)[1-P(B)] = P(A)\cdot P(B') = \ell_2$$

إذاً: A و B' حدثان مستقلان احتمالاً

السؤال الثالث : يسدد كل من لاعبي كرة القدم ميسي ورونالدو ضربة واحدة على المرمى

اذا كان احتمال عدم تسجيل أي هدف من قبل اللاعبين $\frac{3}{25}$

واحتمال ان يسجل اللاعب ميسي فقط هدف هو $\frac{7}{25}$

احسب احتمال ان يسجل ميسي هدف

" " " رونالدو هدف

الحل : نفرض A حدث يسجل ميسي هدف

B " " رونالدو هدف

B , A حدثان مستقلان

$$P(A' \cap B') = \frac{3}{25} \Longrightarrow P(A') \cdot P(B') = \frac{3}{25} \quad (1)$$

$$P(A \cap B') = \frac{7}{25} \Longrightarrow P(A) \cdot P(B') = \frac{7}{25} \quad (2)$$

بجمع المعادلتين (1) مع (2)

$$P(A') \cdot P(B') + P(A) \cdot P(B') = \frac{10}{25}$$

$$[\underbrace{P(A') + P(A)}_{1}] \cdot P(B') = \frac{10}{25}$$

$$P(B') = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

ومنه $P(B) = 1 - \frac{10}{25} = \frac{15}{25}$

$$\boxed{P(B) = \frac{3}{5}}$$

نعوض في (2)

$$P(A) \cdot \frac{10}{25} = \frac{7}{25}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{7}{10}}$$

السؤال الرابع:

في مدينة حماه يمارس 30% لعبة كرة اليد

نعلم أن مدينتنا تضم نسبة 60% من الذكور

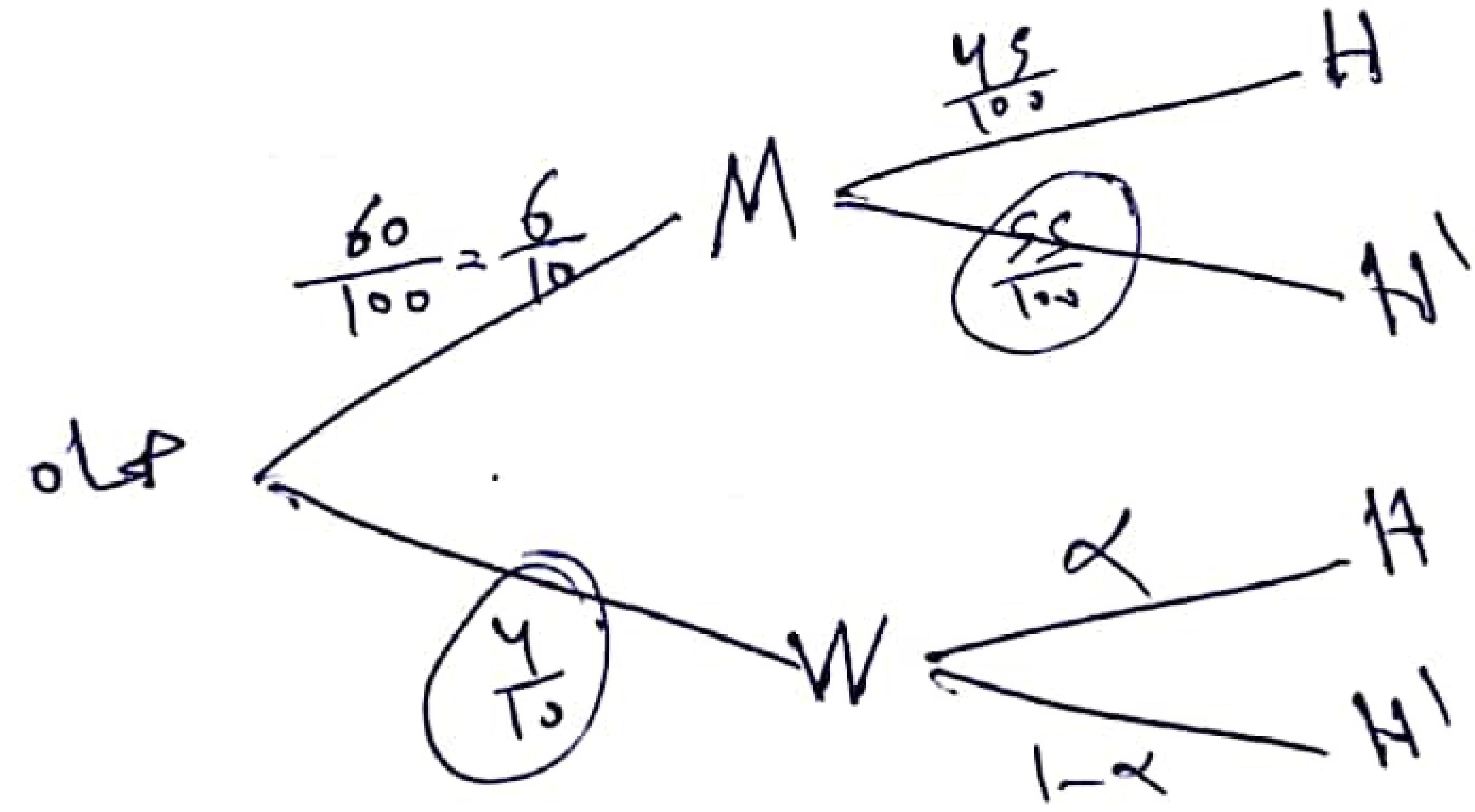
منهم 45% يلعبون كرة اليد

نختار شخص بشكل عشوائي من المدينة

نرمز (M ذكر - W أنثى - H يلعب كرة اليد)

① ارسم مخطط تجربة

② احسب احتمال أن تكون أنثى علماً أنها تمارس لعبة كرة اليد



$$P(H)=\frac{30}{100}$$

$$P(H|W)=??$$

$$P(M\cap H)+P(W\cap H)=\frac{30}{100}$$

$$\frac{6}{10}\times\frac{45}{100}+\frac{4}{10}\times\alpha=\frac{30}{100}$$

$$\frac{27\cancel{0}}{100\cancel{0}}+\frac{4\alpha}{10}=\frac{30}{100}$$

$$\frac{4\alpha}{10}=\frac{3}{100}$$

$$\alpha=\frac{3}{40}$$

$$P(H|W)=\frac{3}{40}$$

السؤال الأول: يحوي صندوق (7) بطاقات مرقمة بالأعداد

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

نسحب من الصندوق عشوائياً ثلاث بطاقات دون إعادة

① ما احتمال ظهور البطاقة ذات الرقم 2 بين البطاقات المسحوبة

نعرّف A حدث ظهور البطاقة ذات الرقم 2 بين البطاقات المسحوبة.

$A \to \boxed{2}\boxed{}\boxed{}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\binom{1}{1}\binom{6}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$$

② إذا علمت أن مجموع أرقام البطاقات الثلاث المسحوبة فردي فما احتمال أن تكون البطاقة ذات الرقم 2 بينها.

نعرّف B حدث مجموع أرقام البطاقات الثلاث المسحوبة فردي

$A \cap B \to (F + 2 + Z \neq 2)$

$B \to (F + F + F)$ أو $(F + Z + Z)$

$\underbrace{\overset{F}{4} \quad \overset{Z}{3}}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

$$= \frac{\binom{4}{1}\binom{1}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{3} + \binom{4}{1}\binom{3}{2}}$$

$$= \frac{4 \times 1 \times 2}{4 + 4 \times 3} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

3) نعرف متحول عشوائي X يدل على الرقم الاصغر بين أرقام البطاقات الثلاث المسحوبة اكتب قيم المتحول العشوائي X
اكتب جدول توزيعه واحسب توقعه الرياضي والتباين والانحراف المعياري

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{1}{1}\binom{6}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{15}{35}$$

$\boxed{1}\ \boxed{>1}\ \boxed{>1}$

$$P(X=2) = \frac{\binom{1}{1}\binom{5}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{10}{35}$$

$\boxed{2}\ \boxed{>2}\ \boxed{>2}$

$$P(X=3) = \frac{\binom{1}{1}\binom{4}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{6}{35}$$

$\boxed{3}\ \boxed{>3}\ \boxed{>3}$

$$P(X=4) = \frac{\binom{1}{1}\binom{3}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{3}{35}$$

$\boxed{4}\ \boxed{>4}\ \boxed{>4}$

$$P(X=5) = \frac{\binom{1}{1}\binom{2}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{35}$$

$\boxed{5}\ \boxed{>5}\ \boxed{>5}$

k	1	2	3	4	5
$P(X=k)$	$\frac{15}{35}$	$\frac{10}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{1}{35}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \frac{15+20+18+12+5}{35} = \frac{70}{35} = 2$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{15+40+54+48+25}{35} - (2)^2$$

$$= \frac{182}{35} - 4 = \frac{182-140}{35} = \frac{42}{35}$$

$$V(X) = \frac{6}{5}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{6}{5}} = \frac{\sqrt{30}}{5}$$

اختبارات 2021 | مركز المنير التعليمي | معهد ابي الفداء | معهد حماه الأول

النموذج A

الشامل جزء ثاني

المدة : 3 ساعة

المدرس : كاسر خليل عتيق | 2021 | الدرجة العظمى : 600

أولاً : أجب عن أربع أسئلة من الأسئلة الخمسة الآتية : (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: ليكن X المتغير العشوائي المحدد بالجدول الآتي :

k	-2	-1	0	1	2
$p(X=k)$	$\frac{1}{10}$	a	b	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

عين a و b إذا علمت أن $E(x)=0$

السؤال الثاني : في أحد الامتحانات يطلب من الطالب الإجابة عن خمسة من ثمانية أسئلة

1. بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة
2. بكم طريقة يمكنه الاختيار اذا كانت الاسئلة الثلاثة الأولى اجبارية

السؤال الثالث : في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا نقطتين $A(1,1,1)$ و $B(1,3,5)$

أوجد معادلة المجموعة ε المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

، ماطبيعة المجموعة ε

السؤال الرابع : حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $Z^2=-15-8i$

ثانياً : حل التمارين الأربعة الآتية : (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الاول: لتكن النقاط C, B , A اربع نقاط تمثلها بالترتيب الاعداد العقدية

$$a=-2i \qquad b=4+i \qquad c=8+4i$$

1) اثبت ان النقاط تقع على استقامة واحدة C, B , A

2) ماذا تشكل مجموعة النقاط $M(z)$ اذاكان $W=\frac{a-m}{b-m}$ تخيلي بحت

3) اكتب بالصيغة العقدية للتحاكي H الذي مركزه $\Omega(2-i)$ ونسبته $k=2$

ثم أوجد صورة النقطة A وفق H

4) عين طبيعة التحويل الهندسي الذي يقرن النقطة B بالنقطة A

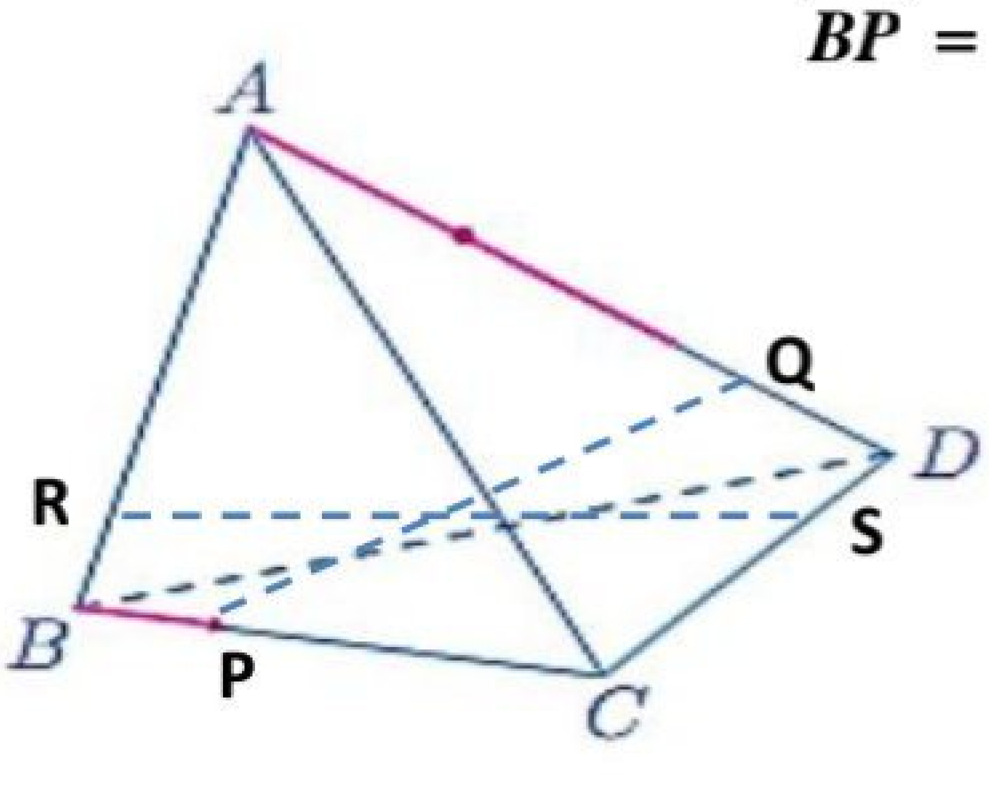
① $b-1=a-i$ ② $b+i=ia-1$

السؤال الثاني: $ABCD$ رباعي وجوه فيه النقاط P,R,I,K تحقق $\overrightarrow{BP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$

و $\overrightarrow{BR}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{DS}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$

و G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1),(B,4),(C,1),(D,3)$

و المطلوب : أثبت أن المستقيمان $(RS),(PQ)$ متقاطعان



يتبع في الصفحة التالية ....

<u>السؤال الثالث</u> : في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

نتأمل النقاط $A(1,-1,-1)$ و $B(-1,1,1)$ و $C(0,1,-2)$ و $D(-3,-2,-1)$

① أثبت أن النقاط A, B, C تعين مستو ثم أوجد المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC)

② أوجد احداثيات النقطة D' المسقط القائم للنقطة D على المستوي (ABC)

<u>التمرين الرابع</u> : حل في المعادلة : $2z^3-(6+4i)z^2+(5+12i)z-10i=0$

اذا علمت أنها تقبل حلا تخيليا بحتاً

ثالثاً : حل المسألتين الآتيتين :   (100 درجة لكل مسألة)

<u>المسألة الأولى</u> : يحوي صندوق على (8) بطاقات مرقمة كما يلي : 3 , 3 , 3 , 3 , 2 , 2 , 0 , 0

نسحب عشوائياً بطاقتين على التتالي – دون إعادة –

أ- إذا علمنا أن مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين أكبر تماماً من 4 فما احتمال أن يكون مجموعهما زوجياً

ب – بفرض E حدث البطاقة تحمل الرقم (2) بين البطاقات المسحوبة

B حدث مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين زوجي .

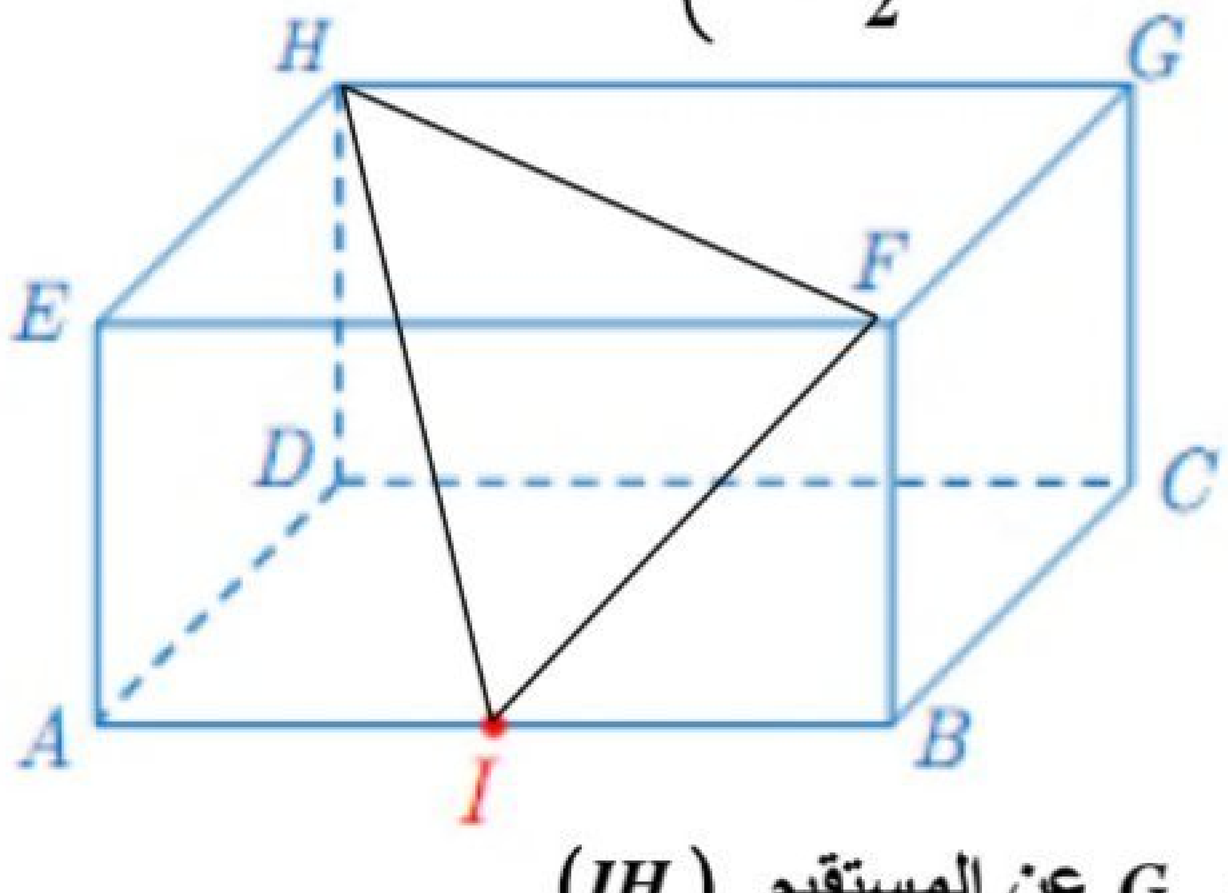
بين فيما إذا كان الحدثان E , B مستقلان عشوائياً

جـ - نفرض X متغيراً عشوائياً يدل على مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين

اكتب مجموعة قيم المتغير X و أوجد جدول توزيعه و احسب التوقع الرياضي له

<u>المسألة الثانية</u>: $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB=2$ و $AD=AE=1$

I منتصف $[AB]$ نختار معلم متجانس : $\left(A\ ;\ \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AD}\ ,\ \overrightarrow{AE}\right)$



① أوجد احداثيات النقاط I, F, H, G

② أكتب معادلة المستوي (IFH)

③ احسب بعد G عن المستوي (IFH)

ثم اكتب معادلة الكرة التي مركزها G

و تمس المستوي (IFH)

④ اكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم (IH) ثم احسب بعد G عن المستقيم (IH)

⑤ هل ينتمي المسقط القائم للنقطة G على المستوي (IFH) إلى المستقيم (IH) ؟

————————————((انتهت الأسئلة))————————————

مع التمنيات بالنجاح و التوفيق للجميع   مدرس المادة : كاسر خليل عتيق

أولاً | **السؤال الأول:** X متحول عشوائي محدود له

k	-2	-1	0	1	2
$p(X=k)$	$\frac{1}{10}$	a	b	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

عين a و b إذا علمت أن $E(X)=0$

الحل: نعلم أن $\sum_{i=1}^{5} p_i = 1$

$$\frac{1}{10}+a+b+\frac{2}{10}+\frac{1}{10}=1$$

$$(1) \longrightarrow \boxed{a+b=\frac{6}{10}}$$

ولكن $E(X)=0$

$$-\frac{2}{10}+(-1)(a)+\cancel{(0)(b)}+(1)\left(\frac{2}{10}\right)+2\left(\frac{1}{10}\right)=0$$

$$\cancel{-\frac{2}{10}}-a+\cancel{\frac{2}{10}}+\frac{2}{10}=0$$

$$\boxed{a=\frac{2}{10}}$$

نعوض في (1)

$$\frac{2}{10}+b=\frac{6}{10} \Longrightarrow \boxed{b=\frac{4}{10}}$$

السؤال الثاني: في أحد الامتحانات طلب من الطالب الإجابة عن خمسة من ثمانية أسئلة

(1) بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة

$$\binom{8}{5}=\binom{8}{3}=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$$

(2) بكم طريقة يمكنه الاختيار إذا كانت الأسئلة الثلاث الأولى إجبارية

$$\binom{3}{3}\binom{5}{2}=1\times\binom{5}{2}=10$$

السؤال الثالث: في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، $A(1,1,1)$ ، $B(1,3,5)$

أوجد معادلة المجموعة Σ المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ ما طبيعة المجموعة Σ

الحل

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$$

$$(1-x,1-y,1-z)\cdot(1-x,3-y,5-z)=0$$

$$(1-x)(1-x)+(1-y)(3-y)+(1-z)(5-z)=0$$

$$1-2x+x^2+3-4y+y^2+5-6z+z^2=0$$

$$\Sigma:\ \boxed{x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+9=0}$$

$$x^2-2x+1+y^2-4y+4+z^2-6z+9=-9+1+4+9$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=5$$

Σ تمثل كرة مركزها $\Omega(1,2,3)$

نصف قطرها $R=\sqrt{5}$

السؤال الرابع: حل في $\mathbb{C}$ المعادلة

$$z^2=-15-8i$$

$$=a^2-b^2-2a\cdot bi$$

طريقة ٢

$a\cdot b = 4$

$a=1$ ، $b=4$

$a^2=1$ ، $b^2=16$

$$z^2=1-8i-16$$

$$z^2=1-8i+16i^2$$

$$z^2=(1-4i)^2$$

إما $z=1-4i$

أو $z=-1+4i$

طريقة 2

$$z^2 = -15 - 8i$$

$$(x+iy)^2 = \overset{a}{-15} \overset{b}{-8i}$$

$$x^2 - y^2 = a = -15 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{225+64} = \sqrt{289} = 17 \quad (2)$$

$$x \cdot y = \frac{b}{2} = -4 \quad (3)$$

نجمع (1) مع (2)　نطرح (1) من (2)　فرد

$x = \pm 1$ ومنه $x^2 = 1$ ومنه $2x^2 = 2$

$y = \mp 4$ ومنه $y^2 = 16$ ومنه $2y^2 = 32$

$x \cdot y < 0$

x و y مختلفان بالإشارة

$$z_1 = 1 - 4i$$
$$z_2 = -1 + 4i$$

ثانياً　التمرين الأول

$A(a = -2i)$, $B(b = 4+i)$, $C(c = 8+4i)$

(1) اثبت أن النقاط A , B , C تقع على استقامة واحدة

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{8+4i+2i}{4+i+2i} = \frac{8+6i}{4+3i} = \frac{2\cancel{(4+3i)}}{\cancel{4+3i}}$$

$$\frac{c-a}{b-a} = 2 = 2e^{0i}$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$$

$\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطياً

النقاط A , B , C تقع على استقامة واحدة

② ماذا تشكل مجموعة النقاط $M(z)$ إذا كان $w=\frac{a-m}{b-m}$ تخيلية بحتة

$w=\frac{a-m}{b-m}$ تخيلي بحت

نميز حالتين: ① $w=0$ عندها $a-m=0$ ومنه $a=m$

مجموعة النقاط M تمثل نقطة واحدة هي A

② $\arg(w)\in\{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\}$

$(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA})\in\{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\}$

$\overrightarrow{MB}$ و $\overrightarrow{MA}$ متعامدان

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

مجموعة النقاط M تمثل دائرة قطرها $[AB]$ ماعدا النقطة B

③ اكتب بالصيغة العقدية للتحاكي H الذي مركزه $\Omega(w=2-i)$ ونسبته $k=2$ ثم أوجد صورة النقطة A وفق H

$z'-w=k(z-w)$

$z'-2+i=2(z-2+i)$

$a'-2+i=2(a-2+i)$

$a'=2(-2i-2+i)+2-i$

$a'=2(-i-2)+2-i$

$a'=-2i-4+2-i$

$\boxed{a'=-2-3i}$

④ عيّن طبيعة التحويل الهندسي الذي يقرن النقطة B بالنقطة A

① $b-1=a-i$

$b=a-i+1$

$b=a+w$

B صورة A وفق الانسحاب شعاعه $\vec{w}(1,-1)$

② $b+i=ia-1$

$b-(-i)=i(a-\frac{1}{i})$

$b-(-i)=i(a+i)$

$b-(-i)=e^{\frac{\pi}{2}i}(a-(-i))$

B صورة A وفق دوران مركزه $\Omega(w_0=-i)$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

السؤال الثاني: ABCD رباعي وجوه

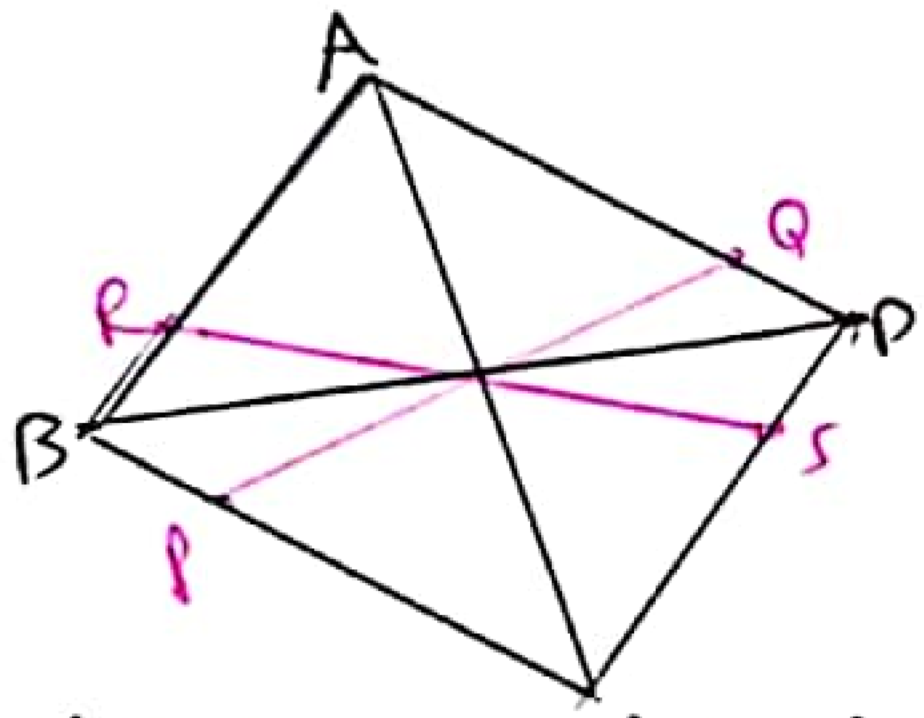
$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BR}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DS}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$(A,1)$, $(B,4)$, $(C,1)$, $(D,3)$

أثبت أن المستقيمين (PQ) , (RS) متقاطعان



الحل) بما أن $\overrightarrow{BP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$

فإن P هو مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(C,1)$, $(B,4)$ مثقلة $(P,5)$

بما أن $\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$

فإن Q هو مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(D,3)$, $(A,1)$ مثقلة $(Q,4)$

حسب الخاصة التجميعية فإن G هو م.أ.م لـ $(P,5)$, $(Q,4)$

$\overrightarrow{PG}=\frac{4}{9}\overrightarrow{PQ}$ $\quad$ $G\in(PQ)$

بما أن $\overrightarrow{BR}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BA}$ فإن R هو م.أ.م لـ $(A,1)$, $(B,4)$ مثقلة $(R,5)$

بما أن $\overrightarrow{DS}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ فإن S هو م.أ.م لـ $(C,1)$, $(D,3)$ مثقلة $(S,4)$

حسب الخاصة التجميعية فإن

G هو م.أ.م لـ $(R,5)$, $(S,4)$

$\overrightarrow{RG}=\frac{4}{9}\overrightarrow{RS}$ $\quad$ $G\in(RS)$

إذاً المستقيمان (PQ) , (RS) متقاطعان ببعضهما في G

السؤال الثالث

$A(1,-1,-1)\ ,\ B(-1,1,1)\ \ C(0,1,-2)\ \ D(-3,-2,-1)$

① أثبت أن A ، B ، C تعين مستوياً ثم أوجد معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}(-2,2,2)\\ \overrightarrow{AC}(-1,2,-1)\end{array}\right] \quad \frac{-2}{-1} \neq \frac{2}{2}$$

$\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطان خطياً

لعدم تناسب مركباتها

النقاط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة فهي تعين مستوي (ABC)

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow -2a+2b+2c=0$$

$$-a+b+c=0$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \Rightarrow -a+2b-c=0$$

بالجمع

$$-2a+3b=0$$

$b=\frac{2}{3}a$ نعطي $a=3$ فنجد $b=2$ نعوض

$$-3+2+c=0 \rightarrow c=1$$

$$\vec{n}(3,2,1)$$

$M(x,y,z)\in(ABC)\ :\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$3(x-1)+2(y+1)+1(z+1)=0$$

$$3x-3+2y+2+z+1=0$$

$$3x+2y+z=0$$

② أوجد إحداثيات النقطة D' المسقط القائم للنقطة D على المستوي (ABC)

نكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم d المار من $D(-3,-2,-1)$

و العمودي على المستوي $\vec{v}=\vec{n}(3,2,1)$ (موجه له)

$$d_1\begin{cases}x=-3+3t\\ y=-2+2t\\ z=-1+t\end{cases}\ ;\ t\in R$$

نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم d بالمستوي (ABC)

$$3(-3+3t)+2(-2+2t)+(-1+t)=0$$

$$-9+9t-4+4t-1+t=0$$

$$-14+14t=0 \Rightarrow t=1$$

نعوض t بالمعادلات الوسيطية

$$\begin{cases} x=-3+3=0 \\ y=-2+2=0 \\ z=-1+1=0 \end{cases} \qquad D'(0,0,0)$$

المسقط القائم لـ D هو 1 ط

التمرين الرابع

حل المسألة C

$$2Z^3-(6+4i)Z^2+(5+12i)Z-10i=0$$

اذا علمت انها تقبل حلاً تخيلياً بحتاً

نفك الأقواس +1

$$2Z^3-6Z^2-4iZ^2+5Z+12iZ-10i=0$$

$$2Z^3-6Z^2+5Z \quad -4iZ^2+12iZ-10i=0$$

$$Z(2Z^2-6Z+5)-2i(2Z^2-6Z+5)=0$$

$$(2Z^2-6Z+5)(Z-2i)=0$$

إما $Z-2i=0 \Rightarrow Z=2i$

أو $2Z^2-6Z+5=0$

$$\Delta=b^2-4ac=36-4(2)(5)=36-40=-4<0$$

$$\sqrt{-\Delta}=\sqrt{4}=2$$

$$Z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{6-2i}{2(2)}=\frac{6}{4}-\frac{2}{4}i=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$Z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\overline{Z_1}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$S=\left\{2,\ \frac{3}{2}-\frac{1}{2}i,\ \frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right\}$$

المسألة الأولى: يحوي صندوق على (8) بطاقات مرقمة كما يلي

0, 0, 2, 2, 3, 3, 3, 3

نسحب عشوائياً بطاقتين دون إعادة:

(1) إذا علمنا أن مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين أكبر تماماً من 4 فما احتمال أن يكون مجموعهما زوجياً:

نفرض A حدث مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين أكبر تماماً من 4

B = = = = زوجي

$A\cap B \rightarrow (3,3)$

$A \rightarrow (2,3)$ أو $(3,3)$

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$

$$=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{2}{1}\binom{4}{1}+\binom{4}{2}}=\frac{6}{8+6}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$$

(2) نفرض E حدث البطاقات تحمل رقم 2 بين البطاقات المسحوبة

B = مجموع رقمي البطاقتين زوجي

بين فيما إذا كان الحدثان B ، E مستقلان احتمالياً.

$E \rightarrow (2,2)$ أو $(2,0)$ أو $(2,3)$

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(\Omega)}=$$

$$=\frac{\binom{2}{2}+\binom{2}{1}\binom{2}{1}+\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{8}{2}}=\frac{1+4+8}{28}=\frac{13}{28}$$

$B \rightarrow (Z+Z)$ أو $(F+F)$ $\left(\frac{F}{4}\ \frac{Z}{4}\right)$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{\binom{4}{2}+\binom{4}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{6+6}{28}=\frac{12}{28}=\frac{3}{7}$$

$A\cap B \rightarrow (2,2)$ أو $(2,0)$

$$P(A\cap B)=\frac{\binom{2}{2}+\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{8}{2}}=\frac{5}{28}$$

$$P(A)\cdot P(B)=\frac{13}{28}\cdot\frac{3}{7}=\frac{39}{196}\neq P(A\cap B)$$

A ، B غير مستقلان احتمالياً.

3) نعرف X متحول عشوائي يمثل مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين اكتب مجموعة قيم متحول X وأوجد قانون احتماله واحسب توقعه الرياضي

0 , 0 , 2 , 2 , 3 , 3 , 3 , 3

نسحب بطاقتين

$0+0=0$

$0+2=2$

$0+3=3$

$2+2=4$

$2+3=5$

$3+3=6$

$$X(\Omega)=\{0,2,3,4,5,6\}$$

$$P(X=0)=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{1}{28}$$

$$P(X=2)=\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{8}{2}}=\frac{4}{28}$$

$$P(X=3)=\frac{\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{8}{2}}=\frac{8}{28}$$

$$P(X=4)=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{1}{28}$$

$$P(X=5)=\frac{\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{8}{2}}=\frac{8}{28}$$

$$P(X=6)=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{6}{28}$$

k	0	2	3	4	5	6	Σ
$P(X=k)$	$\frac{1}{28}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{8}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{8}{28}$	$\frac{6}{28}$	1

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i=\frac{0+8+24+4+40+36}{28}$$

$$=\frac{112}{28}=\boxed{4}$$

المسألة الثانية: متوازي مستطيلات فيه $AB=2$ ، $AD=AE=1$
I منتصف $[AB]$ نختار معلماً متجانساً $(A, \frac{1}{2}\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

① أوجد إحداثيات النقاط I, F, H, G

$(A, \frac{1}{2}\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

$A(0,0,0)$ $B(2,0,0)$, $D(0,1,0)$ $C(2,1,0)$

$E(0,0,1)$ $\boxed{F(2,0,1)}$ $\boxed{H(0,1,1)}$ $\boxed{G(2,1,1)}$

$\boxed{I(1,0,0)}$ I منتصف $[AB]$

② أكتب معادلة المستوي (IFH)

$$\left.\begin{array}{l}\vec{IF}(1,0,1)\\ \vec{IH}(-1,1,1)\end{array}\right] \quad \frac{1}{-1} \neq \frac{0}{1}$$

$\vec{IH}$, $\vec{IF}$ غير مرتبطان خطياً

نعرف $\vec{n}(a,b,c)$ حيث:

$\vec{n}\cdot\vec{IF}=0 \Rightarrow a+0+c=0$

$\vec{n}\cdot\vec{IH}=0 \Rightarrow -a+b+c=0$

نعطي $a=1$ نجد $\boxed{c=-1}$ ومنه $-1+b-1=0$

$\vec{n}(1,2,-1)$ ومنه $\boxed{b=2}$

$M(x,y,z)\in(IFH)$: $\vec{n}\cdot\vec{IM}=0$

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$1(x-1)+2(y-0)-1(z-0)=0$

$\boxed{x+2y-z-1=0}$ — (IFH)

③ احسب بعد G عن المستوي (IFH)
ثم أكتب معادلة الكرة التي مركزها G وتمس المستوي (IFH)

$$dist(G, IFH)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{|2+2(1)-1-1|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{2}{\sqrt{6}}$$

$R^2=dist^2=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

$S:\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=\frac{2}{3}$

4) أكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم (IH)

ثم احسب بعد G عن المستقيم (IH)

$\vec{v} = \overrightarrow{IH}(-1,1,1)$ $\qquad I(1,0,0)$

$$(IH): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

$G(2,1,1)$

$G' \in (IH) \to G'(1-t, t, t)$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{GG'}(-1-t, t-1, t-1) \\ \vec{v}(-1, 1, 1) \end{array}\right]$$

لتكن G' المسقط القائم لـ G على (IH)

$\vec{v} \cdot \overrightarrow{GG'} = 0$

$(-1)(-1-t) + (1)(t-1) + (1)(t-1) = 0$

$\cancel{1} + t + t \cancel{- 1} + t - 1 = 0$

$3t = 1 \to t = \frac{1}{3}$

$$\left.\begin{cases} x = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{3} \end{cases}\right] \quad G'\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

بعد G عن المستقيم (IH)

$$GG' = \sqrt{\left(\frac{2}{3}-2\right)^2 + \left(\frac{1}{3}-1\right)^2 + \left(\frac{1}{3}-1\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

5) هل يمثل المسقط القائم للنقطة G على المستوي (IFH) الى المستقيم (IH)

كلا

لأن

$dist(G, IFH) \neq GG'$

كحتى

ملاحظة هامة:

عزيزي الطالب هذه النماذج الامتحانية مكملة للنماذج السابقة

وجميع النماذج الاختبارية التي عرضناها في هذا العام

والأعوام السابقة هي تمارين هامة وشاملة

الهدف منها تغطية جميع أفكار الكتاب

وهي ليست توقعات بل هي بعض التمارين الهامة

التي يجب عليكم أعزاءي الطلاب الالمام بها

كما أن سلالم التصحيح المرفقة تعرض فقط

بعض طرائق الحل وليس جميع الطرائق

أرجوا من الله التوفيق لي ولكم طلابي وطالباتي

و أتمنى ممن ينتبه إلى أي ملاحظة على هذا العمل

أن يعلمنا به لتدارك الخطأ ان وقع

أخيراً أتقدم بالشكر الجزيل لكل من شارك أو شاركت

بإنجاز هذا العمل جعله الله في صحيفة أعمالنا

أحبتي لا تنسونا من صالح دعائكم

المدرس: كاسر خليل عتيق