الوحدة: ..... التاريخ: .....

2023

المتتاليات

المتتالية هي تابع منطلقه (مجموعة تعريفه) $\underline{N}$ ومستقره $\underline{R}$

$N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$N^* = N \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

وبشكل عام نرمز للمتتالية $(U_n)_{n \geq n_0}$

حيث n_0 من N وتعطى بنص المسألة ونسمي الـ U_n الحد ذو الدليل n

طرق تعريف المتتالية:

أولاً: تعريف صريح: $U_n = f(U_n)$

مثال: لتكن لدينا المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ وفق: $U_n = \frac{2n}{n+3}$

$U_5 = \frac{2(5)}{5+3} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$ / $U_0 = \frac{2(0)}{0+3} = \frac{0}{3} = 0$

ثانياً: تعريف بالتدرج: حد البدء U_0

$U_{n+1} = f(U_n)$

مثال: لتكن لدينا المتتالية الآتية: $(U_n)_{n \geq 0}$

$U_0 = 3, U_{n+1} = 2U_n + 3$

$U_1 = 2U_0 + 3 = 2(3) + 3 = 9$

$U_2 = 2U_1 + 3 = 2(9) + 3 = 21$

$U_3 = 2U_2 + 3 = 2(21) + 3 = 45$

أنواع المتتاليات:

- المتتالية الحسابية: كل حد ينتج عن سابقه بإضافة عدد حقيقي r ويسمى أساس المتتالية

2 و 5 و 8 و 11 و 14 ... الحد الأول هو 2

والأساس $r = 3$

الأستاذ: محمد أحمد للتواصل: 0964848890

Scanned by CamScanner

سؤال امتحاني: لإثبات متتالية حسابية:

$U_{n+1} - U_n =$ عدد ثابت

أو: $U_{n+1} = U_n +$ عدد ثابت

القانون الأساسي:

$$U_m - U_p = (m-p) \times r$$

أي: $U_m = U_p + (m-p) \times r$

U_m: هو ماذا دليل m

U_p: هو ماذا دليل p

r: أساس المتتالية.

فائدة القانون الأساسي:

1) كتابة U_n بدلالة n

2) حساب هو ما عرفة هو أو أساس

3) حساب الأساس r بمعرفة أي حدين.

قانون المجموع:

$$S = \frac{n}{2}(a+l)$$

a: هو الحد الأول في المجموع.

l: هو الحد الأخير في المجموع.

n: هو عدد الحدود وسيأتي

الدليل الأخير - الدليل الأول + 1

المتتالية الهندسية:

كل حد ينتج عن سابقه بضربه بعدد حقيقي q وليس أساس المتتالية

3, 6, 12, 24, 48

الحد الأول هو 3 والأساس $q = 2$

الأستاذ: محمد أحمد
للتواصل: 0964848890

Scanned by CamScanner

لإثبات أن المتتالية هندسية: عددثابت $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ (حقيقي)

أو: $U_{n+1} = U_n \times q$.

القانون الأساسي:

$$\frac{U_m}{U_p} = q^{m-p}$$

أو: $U_m = U_p \cdot q^{m-p}$

U_m: حدّ ما دليله m

U_p: حد آخر دليله p

q: أساس المتتالية.

حالات القانون الأساسي:

1) كتابة U_n بدلالة n

2) حساب حد ما بمعرفة حد آخر وأساس.

3) حساب الأساس بمعرفة أي حدين.

قانون المجموع:

$$S = a \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

a: هو الحد الأول في المجموع

q: أساس المتتالية

n: هو عدد الحدود ويساوي

الدليل الأخير - الدليل الأول + 1

المتتالية المطردة:

$U_{n+1} > U_n$ متزايدة تماماً، $U_{n+1} \geq U_n$ متزايدة.

$U_{n+1} < U_n$ متناقصة تماماً، $U_{n+1} \leq U_n$ متناقصة.

$U_{n+1} = U_n$ ثابتة.

الأستاذ: محمد أحمد
للتواصل: 0964848890

Scanned by CamScanner

كيف ندرس جهة إطراد المتتالية:

1) معيار الطرح (حسب الفرق):

$U_{n+1} - U_n =$ عدد

الحدد:

a) $0 <$ عدد (موجب) متتالية متزايدة تماماً.

b) $0 >$ عدد (سالب) متتالية متناقصة تماماً.

c) $0 =$ عدد متتالية ثابتة.

2) معيار النسبة:

$\frac{U_{n+1}}{U_n} =$ عدد

الحدد:

a) $1 <$ عدد $\Rightarrow$ المتتالية متزايدة تماماً.

b) $1 >$ عدد $\Rightarrow$ المتتالية متناقصة تماماً.

c) $1 =$ عدد $\Rightarrow$ المتتالية ثابتة

3) معيار الاشتقاق:

$U_n = f(U_n)$

مثال:

$U_n = n + 2 \Rightarrow f(x) = x + 2$

وهنا نشتق $f'(x)$.

a) $f'(x) > 0$ التابع متزايد تماماً وبالتالي متتالية متزايدة

b) $f'(x) < 0$ التابع متناقص تماماً وبالتالي متتالية متناقصة

أ. محمد أحمد

Scanned by CamScanner

الوحدة: ..... التاريخ: .....

البرهان بالتدريج أو بالاستقراء الرياضي...

(1) نثبت أن القضية صحيحة من أجل $n = n_0$ حيث n_0 تذكر بالمسألة إما $n_0 = 0$ أو $n_0 = 1$ أو ....

(2) نفرض أن القضية صحيحة من أجل n أي $E(n)$

(3) نبرهن أن القضية صحيحة من أجل $n+1$ أي $E(n+1)$

ملاحظة (1):

لإثبات الخطوة الثالثة:

إما أن نبدأ بالخطوة (2) ونغير الطرفين بإضافة حدود أو ضرب حدود حتى الوصول إلى الخطوة الثالثة حتى الوصول للطرف الآخر (مع الاستفادة من 2)

ملاحظة: إذا كانت a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من (1) متتالية حسابية فإن:

$$b = \frac{a+c}{2}$$

ملاحظة: إذا كانت a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من (2) متتالية هندسية فإن:

$$b^2 = a \cdot c$$

« بالتوفيق والنجاح الدائم »

الأستاذ: محمد أحمد للتواصل: 0964848890

Scanned by CamScanner