



تمرين $ABCD$ رباي

وهو وليكن E كدر حقيقتي

I منتصف $[AB]$ و J منتصف

$[CD]$

النقطتان E و F مرفئانه

$$\vec{BF} = \frac{1}{4} \vec{BC}, \quad \vec{AE} = \frac{1}{4} \vec{AD}$$

و أثيراً H منتصف $[EF]$

أثبت النقاط I و J و H على استقامة واحدة

(الكل)

$$\vec{AE} = \frac{1}{4} \vec{AD} = \frac{1}{4} (\vec{AE} + \vec{ED}) = \frac{1}{4} \vec{AE} + \frac{3}{4} \vec{ED}$$

$$\frac{3}{4} \vec{AE} + \frac{1}{4} \vec{DE} = \vec{0} \Rightarrow 3 \vec{AE} + \vec{DE} = \vec{0}$$

(E, 1/4) مركز ايجاد مناسبة (A, 1) (D, 1)

$$\vec{BF} = \frac{1}{4} \vec{BC} = \frac{1}{4} (\vec{BF} + \vec{FC}) \Rightarrow 3 \vec{BF} + \vec{FC} = \vec{0}$$

(F, 3/4) مركز ايجاد (B, 1) (C, 1)

كندت خط فاصلة بينية مركز ايجاد الرباعي هو مركز ايجاد

وهو منتصف EF أي H

تم التحميل من موقع علوم للجميع

I منتصف AB \Leftrightarrow مركز ابعاد $(I, 2) \in (A, 1) (B, 1)$

J منتصف CD \Leftrightarrow مركز ابعاد $(J, 2) \in (C, 1) (D, 1)$

مركز ثقله فاصلة طبيعية مركز ابعاد الرباعي

$(H, 4)$ هي مركز ابعاد $(I, 2) (J, 2)$

فالنقاط I, J, H على استقامة واحدة



موقع العلوم للجميع

تم التحميل من موقع علوم للجميع

<https://www.3lom4all.com>

لدينا القطان $B(7, -2, 10), A(2, 1, -2)$

والشعاعان $\vec{u}(2, -1, 10), \vec{v}(-3, 1, 2)$

أثبت الأثمة $\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}$ مرتبطة فعلياً

$$\vec{AB} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$$

$$(5, -3, 2) = \alpha(2, -1, 10) + \beta(-3, 1, 2)$$

$$(5, -3, 2) = (2\alpha - 3\beta, -\alpha + \beta, 2\alpha + 2\beta)$$

$$2\alpha - 3\beta = 5 \quad (1)$$

$$-\alpha + \beta = -3 \quad (2)$$

$$2\beta = 2 \Rightarrow \beta = 1$$

$$-\alpha + 1 = -3 \Rightarrow -\alpha = -4 \Rightarrow \alpha = 4$$

$$2(4) - 3(1) = 5$$

$$9 = 5$$

فالأثمة $\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}$ مرتبطة فعلياً
أكتب معادلة المستوى الذي يقبل $\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}$ شعاعاً

توجيه له

بفرص $\vec{n}(a, b, c)$

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow 2a - b = 0 \quad (3)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \Rightarrow 5a - 3b + 2c = 0 \quad (4)$$

تم التحميل من موقع علوم للجميع

بغير ض $a=1$ ← معومي (٧) و (٤)

$$2(1) - b = 0 \Rightarrow b = 2$$

$$5(1) - 3(2) + 2c = 0$$

$$-1 + 2c = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

معادلة مستوى

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$1(x - 2) + 2(y - 1) + \frac{1}{2}(z + 2) = 0$$

$$x + 2y + \frac{1}{2}z - 3 = 0$$

$$2x + 4y + z - 6 = 0$$

(٣) اكتب التمثيل الوسيطي لطبق A الذي يقبل الأشعة المتوازية مع \vec{v} بالانقطة A

$$\begin{cases} x = x_A + at = 2 + 2t \\ y = y_A + bt = 1 - t \\ z = z_A + ct = -2 \end{cases}$$

(الكل)

تم التحميل من موقع علوم للجميع

تمرين ① اكتب معادلة الكرة (S) التي
 مركزها (0) مبدأ الإحداثيات ونصف
 قطرها (√3)

معادلة كرة

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3$$

② تحقق أنه المستوى M الذي معادلته

$$x - y + z + 3 = 0$$

$$\text{dist}(0, M) = \frac{|x - y + z + 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|0 - 0 + 0 + 3|}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

R = dist(0, M)
 فالمستوى ليس كرة

لدينا النقاط $A(1,1,5)$, $B(1,2,1)$, $C(4,0,0)$
 ① أثبت النقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة

تمرين 1

$$\vec{AB} (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \Rightarrow \vec{AB} (0, 1, -4)$$

الكل

$$\vec{AC} (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A) \Rightarrow \vec{AC} (3, -1, -5)$$

العلاقات المميزة مرتبطة
 $\frac{0}{3} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{-4}{-5}$

فهماً فالنقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة

② أثبت أنه متادلة المستوي ABC بتعريف $x + 3y - 3z - 4 = 0$
 فرض $A(1,1,5)$ الكل

$$C(4,0,0)$$

$$4 + 3(0) - 3(0) - 4 = 0$$

إذن C ينتمي للمستوي

$$x + 3y - 3z - 4 = 0$$

إذن A, B, C متادلة مستوي

$$1 + 3(1) - 3(5) - 4 = 0$$

إذن A ينتمي للمستوي

$$B(1,2,1)$$

$$1 + 3(2) - 3(1) - 4 = 0$$

إذن B ينتمي للمستوي

3) ليكن المستويان P و Q

$$P: x + 2y - z - 4 = 0$$

$$Q: 2x + 3y - 2z - 5 = 0$$

أثبت أن المستويين يتقاطعان بالفعل المشترك لـ

$$d \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases}$$

نفرض في P

الحل

$$t - 2 + 2(3) - t - 4 = 0$$

$$0 = 0 \text{ صحيحة إذنه } d \in P$$

نفرض في Q

$$2(t - 2) + 3(3) - 2t - 5 = 0$$

$$0 = 0 \text{ صحيحة إذنه } d \in Q$$

إذنه لهما فصل مشترك لـ P و Q

4) المسبب A من مستقيم لـ

$$M(t-2, 3, t)$$

الكل، بفرض $M(x, y, z)$ من لـ

$$AM^2 = (t-3)^2 + 4 + t^2$$

$$\in AM^2 = (t-2-1)^2 + (3-1)^2 + (t-0)^2$$

$$AM^2 = 2(t-3t + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}) + 13 \Leftrightarrow AM^2 = 2t^2 - 6t + 13$$

$$t = 3 \Leftrightarrow t = 3 = 0 \Leftrightarrow AM^2 = 2(t-3)^2 + \frac{13}{2}$$

$$AM^2 = \frac{13}{2} \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

اكتب شعاري توجيهي للمستقيمين

$$\begin{cases} x=N & N \in \mathbb{R} \\ y=-3N-3 \end{cases} \quad (a)$$

$$\begin{cases} x=t+1 \\ y=3t+2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (b)$$

$$z=-N+1$$

$$z=-3t+3$$

رصد المستقيمة (b) يقعا في مستواحد

$$\vec{u}(1, -3, -3) \quad \vec{v}(1, -3, -1)$$

$$\frac{1}{1} = \frac{-3}{-3} \neq \frac{-3}{-1}$$

فهما يمتدوا في مستواين مختلفين

$$N-t=1 \quad (1)$$

$$-3N+3t=5 \quad (2)$$

$$-N+3t=2 \quad (3)$$

نضرب (1) بـ 3

$$3N-3t=3 \quad (4)$$

$$N=5 \quad (5)$$

$$-3\left(\frac{5}{2}\right) + 3\left(\frac{3}{2}\right) = 5$$

$$-3 = 5 \quad \text{منه} \quad -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 5 \quad \text{فالمستقيمان يقعا في مستواين مختلفين}$$

تم التحميل من موقع علوم للجميع

تبرين: في علم متباين $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

$E(1, -1, 1), D(0, 4, 0), C(4, 0, 0), B(1, 0, -1), A(2, 1, 3)$

$\vec{CE}, \vec{CD}, \vec{AB}$ الحل:

$$\vec{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \Rightarrow \vec{AB}(-1, -1, -4)$$

$$\vec{CD}(x_D - x_C, y_D - y_C, z_D - z_C) \Rightarrow \vec{CD}(-4, 4, 0)$$

$$\vec{CE}(x_E - x_C, y_E - y_C, z_E - z_C) \Rightarrow \vec{CE}(-3, -1, 1)$$

ج) أثبت التقاط C و D و E ليست كل استقامة واحدة الحل:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{CD}(-4, 4, 0) \\ \vec{CE}(-3, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-4}{-3} \neq \frac{4}{-1} \neq \frac{0}{1}$$

التقاط غير متقاطعا بالتقاطع C, D, E ليست كل استقامة واحدة

علوم الحاسوب

تم التحميل من موقع علوم للجميع

<https://www.3lom4all.com>

⑤ أثبت أنه (AB) يامد المستوي CDE
 الكلي
 $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$
 $= -1(-4) + 1(1)(1) + (-4)(0) = 0$
 $\vec{CD} \perp \vec{AB}$
 $\vec{AB} \cdot \vec{CE} = (-1)(-3) + (1)(-1) + (-4)(1) = 0$
 $\vec{CE} \perp \vec{AB}$
 فانه AB يامد مستر CDE
 ④ اكتب معادلة المستوي CDE
 الكلي
 $C(4,0,0) \quad \vec{n} = \vec{AB}(-1, 1, -4)$
 $a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$
 $-1(x-4) + 1(y-0) - 4(z-0) = 0$
 $-x - y - 4z + 4 = 0$
 ⑤ اصيبير B عن المستوي (CDE)
 الكلي
 $\text{dist}(B, CDE) = \frac{|-x - y - 4z + 4|}{\sqrt{1+1+16}} = \frac{7}{\sqrt{18}}$

⑥ اكتب معادلة كرة التي
 مركزها B ويمس المستوي
 CDE
 الكلي
 $(x-x_B)^2 + (y-y_B)^2 + (z-z_B)^2 = R^2$
 $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = \frac{49}{18}$



الموقع التعليمي
علوم للجميع

تم التحميل من موقع علوم للجميع

<https://www.3lom4all.com>

ب) في ملام متجانس $(K, \vec{A}, \vec{A}, \vec{A})$

نأخذ النقطتين $A(1,0,1)$, $B(0,1,1)$

① اكتب تمثيل تمثيل وسيط للمستقيم المار من A ويقبل شعاع توجيه $\vec{u}(2,2,1)$

② أثبت المستقيمان (AB) , \vec{u} متعامدان

$$\text{تمثيل وسيط } \begin{cases} x = x_A + at = 1 + 2t \\ y = y_A + bt = 0 + 2t = 2t \\ z = z_A + ct = 1 + t \end{cases}$$

$$\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

$$\vec{AB} = (-1, 1, 0)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{AB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$= 2(-1) + 2(1) + 1(0) = 0$$

متعامدان $\vec{AB} \perp \vec{u}$

تم التحميل من موقع علوم الجميع

<https://www.3lom4all.com>

تمرين:

$D(-4, 2, 1)$, $C(3, 1, -2)$, $B(2, 2, 3)$, $A(1, 0, -1)$

(1) أثبت $\triangle ABC$ قائم واسب مافته
الحل:
 $\vec{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \Rightarrow \vec{AB}(1, 2, 4)$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

$$\vec{AC}(2, 1, -1) \Rightarrow AC = \sqrt{6}$$

$$\vec{BC}(1, -1, -5) \Rightarrow BC = \sqrt{27}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad \text{سب كس فيثاغورث!}$$

$$\sqrt{27}^2 = \sqrt{21}^2 + \sqrt{6}^2 \Rightarrow 27 = 27 \Rightarrow A \text{ المثلث قائم في } A$$

$$S = \frac{\text{مساحة ضلعين قائمين}}{2} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{\sqrt{21} \cdot \sqrt{6}}{2} = \frac{3\sqrt{14}}{2}$$



الموقع التعليمي

علوم للجميع

تم التحميل من موقع علوم للجميع

<https://www.3lom4all.com>

(2) أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2, -3, 1)$ ناظم على المستوى ABC واعني ماد لسته

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 2(1) + (-3)(2) + 1(4) = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AC} = 2(2) + (-3)(1) + 1(-1) = 0$$

إذنه \vec{n} ناظم لمستوي

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$2x - 3y + z - 1 = 0$$

(3) امسب يد النقطة D من المستوى ABC ثم امسب عمم ربايي (D, ABC) و هو 0

$$h = \text{dist}(D, ABC) = \frac{|1 - 8 - 6 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

$$\text{عمم ربايي رصوه} = \frac{1}{3} \times \text{ارتفاع} \times \text{مساحة قاعدة} = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{14} \times \frac{\sqrt{14}}{2} = 7$$



الموقع التعليمي

علوم للجميع

تم التحميل من موقع علوم للجميع

<https://www.3lom4all.com>

تمرين
 ABCD رباعي متوازي
 G مركزه
 المطلوب اثبات ان $\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} - \vec{MD} = 3\vec{GA}$

الحل
 نعلم ان $\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} - \vec{MD} = 3\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} - \vec{MD}$
 نعلم ان $\vec{MA} - \vec{MB} = \vec{BA}$
 $\vec{MA} - \vec{MC} = \vec{CA}$
 $\vec{MA} - \vec{MD} = \vec{DA}$
 بالتالي $\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} - \vec{MD} = \vec{BA} + \vec{CA} + \vec{DA} = 3\vec{GA}$
 وبما ان G مركز ABC فان $\vec{GA} = \frac{1}{3}(\vec{BA} + \vec{CA} + \vec{DA})$
 بالتالي $\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} - \vec{MD} = 3\vec{GA}$

وبالتالي مجموعة النقاط M هي الفراغ حول
 كرة مركزها G ونصف قطرها GA

الموقع التعليمي

علوم للجميع

تم التحميل من موقع علوم للجميع

<https://www.3lom4all.com>

تمرین اکتب معادلة مستوي

موري لـ AB حيث

$$B(1, 4, 3), A(5, 2, 1)$$

$$\vec{n} = \vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \quad \text{الكل}$$

$$\vec{n}(-4, 2, 2)$$

$$C(3, 3, 1) \left\{ \begin{array}{l} x_c = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+5}{2} = 3 \\ y_c = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{4+2}{2} = 3 \\ z_c = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{3+1}{2} = 2 \end{array} \right.$$

معادلة مستوي موري

$$a(x - x_c) + b(y - y_c) + c(z - z_c) = 0$$

$$-4(x - 3) + 2(y - 3) + 2(z - 2) = 0$$

$$-4x + 2y + 2z + 2 = 0$$

تم التمرين من موقع www.3lom4all.com لجميع