مذاكرة نهايات رقم ١ الاسم:

الدرجة العظمى : ٣٠٠ المدة: ساعة

◀ **السؤال الأول:** احسب نهاية التابع f عند a في كل من الحالات الآتية :

1) $f(x)=\frac{\sin(\pi\sqrt{1-x})}{x}$ $a=0$ 2) $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x+1}-1}$ $a=0$

3) $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ $a=2$ 4) $f(x)=\sqrt{x^2-2}-x$ $a=+\infty$

◀ **السؤال الثاني:** أثبت أن :

1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}=2\sqrt{2}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{x+9}-3}=6$

◀ **السؤال الثالث:**

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $[0,+\infty[$ وفق : $f(x)=E(x)+(x-E(x))^2$

١) اكتب عبارة $f(x)$ بصورة مستقلة عن $E(x)$ على المجال $[0\,,2[$.

٢) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

٣) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f(f(x))$.

٤) ادرس استمرارية التابع عند النقطة التي فاصلتها $x=1$.

◀ **السؤال الرابع:**

f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=2x+1$ أوجد التقابل العكسي f^{-1} .

◀ **السؤال الخامس :**

- برهن أن المعادلة $x^2+\sqrt{x-1}-2=0$ تقبل حلاً وحيداً في $[1,+\infty[$.
- احصر حل المعادلة في مجال طوله يساوي الواحد .

◀ **السؤال السادس:**

١) أثبت أن المستقيم الذي معادلته $\Delta: y=2x+1$ مقارب مائل للخط البياني C_f للتابع f المعرف وفق :

$$f(x)=\frac{2x^2-7x-3}{x-4}$$

٢) ادرس الوضع النسبي بين C_f و مقاربه Δ .

◀ **السؤال السابع:**

إذا علمت أن $x-\frac{x^3}{6}\le\sin x\le x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$

فاحسب:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

-انتهت الأسئلة-

◀ السؤال الأول :

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi\sqrt{1-x})}{x} = \frac{0}{0}$

حالة عدم تعيين نزيلها بالاستفادة من الخاصة : $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi\sqrt{1-x})}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi - \pi\sqrt{1-x})}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi(1-\sqrt{1-x}))}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\pi\left(1-\sqrt{1-x}\right)\right)}{\pi\left(1-\sqrt{1-x}\right)} . \frac{\pi\left(1-\sqrt{1-x}\right)}{x}$$

بالضرب بالمرافق و الإصلاح :

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\pi\left(1-\sqrt{1-x}\right)\right)}{\pi\left(1-\sqrt{1-x}\right)} . \frac{\pi\left(1-\sqrt{1-x}\right)}{x} . \frac{\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{\left(1+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\pi\left(1-\sqrt{1-x}\right)\right)}{\pi\left(1-\sqrt{1-x}\right)} . \frac{\pi(x)}{x} . \frac{1}{\left(1+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\pi\left(1-\sqrt{1-x}\right)\right)}{\pi\left(1-\sqrt{1-x}\right)} . \frac{\pi}{\left(1+\sqrt{1-x}\right)} = (1)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

لأن :

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{0}{0}$

حالة عدم تعيين نزيلها بالضرب بالمرافق :

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sqrt{x+1}-1} . \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x+1-1} . \frac{\sqrt{x+1}+1}{1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x} . \frac{\sqrt{x+1}+1}{1} = \lim_{x\to 0} 2\left(\sqrt{x+1}+1\right) = 2(2) = 4$$

3) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{0}{0}$

حالة عدم تعيين نزيلها :

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

4) $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2-2} - x\right) = \infty - \infty$

حالة عدم تعيين نزيلها بالضرب بالمرافق :

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2-2} - x\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-2} - x\right)\left(\sqrt{x^2-2} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2-2} + x\right)}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - 2 - x^2}{\left(\sqrt{x^2-2} + x\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-2}{\left(\sqrt{x^2-2} + x\right)} = \frac{-2}{+\infty} = 0$$

◄السؤال الثاني:

1) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin 2x}{\sqrt{2\sin^2(\frac{x}{2})}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin 2x}{\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$

بما أن $x\to0^+$ فإن $\sin\frac{x}{2}\geq0$ أي : $\left|\sin\frac{x}{2}\right|=+\sin\frac{x}{2}$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin 2x}{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sin 2x}{2x}.\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.\frac{2x}{\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)(4)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1)(1)(4)=2\sqrt{2}$$

لأن :

$$\lim_{t\to0}\frac{\sin(t)}{t}=1$$

طريقة ثانية : لدينا : $\sin 2x=2\sin x\cos x=2\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\cos x$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin 2x}{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{2\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\cos x}{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{4\left(\cos\frac{x}{2}\right)\cos x}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{4(\cos 0)\cos 0}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt{x+9}-3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt{x+9}-3}.\frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+9}+3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\left(\sqrt{x+9}+3\right)=(1)(6)=6$

◄السؤال الثالث:

(١ $f(x)=\begin{cases}x & x\in[0,1[\\ 1+(x-1)^2 & x\in[1,2[\end{cases}$

(٢

$$x-1<E(x)\leq x\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$-x\leq-E(x)<1-x$$

نضيف x : $0\leq x-E(x)<1$

نربع : $0\leq\left(x-E(x)\right)^2<1$

نضيف $E(x)$:

$$E(x)\leq E(x)+\left(x-E(x)\right)^2<1+E(x)$$

$$E(x)\leq f(x)<1+E(x)\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

نقسم على $x>0$:

$$\frac{E(x)}{x}\leq\frac{f(x)}{x}<\frac{1}{x}+\frac{E(x)}{x}$$

ولكن من العلاقة (١) نجد : $\frac{x-1}{x}<\frac{E(x)}{x}\leq1$

ولأن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}=1$

وحسب مبرهنة الإحاطة نجد أن

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{E(x)}{x}=1 \qquad \ggg \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\frac{E(x)}{x}=0+1=1$$

إذن حسب مبرهنة الإحاطة نجد أن

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$$

٣) من العلاقة (2) نجد أن :

$$E(x)<f(x)\leq 1+E(x)$$

ولدينا $x-1<E(x)\leq x$ أي إن

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty\end{cases} \qquad \ggg \lim_{x\to+\infty}E(x)=+\infty$$

ومنه نجد :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\big(E(x)\big)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(E(x)+1)=+\infty\end{cases} \qquad \ggg \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

حسب مبرهنة الإحاطة . نستنتج أن

$$\lim_{x\to+\infty}f(f(x))=\lim_{t\to+\infty}f(t)=+\infty$$

٤) يجب تحقق الشرط :

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=f(1)$$

► $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x)=1$

► $f(1)=1+(1-1)^2=1$

الشرط محقق فالتابع مستمر عند النقطة التي فاصلتها $x=1$

◄ **السؤال الرابع:**

$$y=2x+1$$

نستبدل كل x ب y و كل y ب x :

$$x=2y+1 \ \ggg\ y=\frac{x-1}{2} \ \ggg\ f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$$

للتحقق من صحة الحل يجب تحقق العلاقة $f^{-1}(f(x))=x$

$$f^{-1}(f(x))=\frac{f(x)-1}{2}=\frac{2x+1-1}{2}=\frac{2x}{2}=x$$ محققة

◄ **السؤال الخامس :**

$$f(x)=x^2+\sqrt{x-1}-2$$

f معرف و مستمر على المجال $[1,+\infty[$ ولدينا :

$$f'(x)=2x+\frac{2}{2\sqrt{x-1}}>0$$

فالتابع مطّرد تماماً على $[1,+\infty[$ (متزايد تماماً) و الشرط الأول محقق

$$f(1)=-1 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

$$f(1).\lim_{x\to+\infty}f(x)<0$$

و الشرط الثاني محقق . فالمعادلة $x^2 + \sqrt{x-1} - 2 = 0$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $[1, +\infty[$ حسب مبرهنة القيمة الوسطى .

$$f(2) = 4 + 1 - 2 = 3$$

$$f(1).f(2) = -3 < 0$$

إذن حل المعادلة ينتمي إلى المجال $]1,2[$.

◄ **السؤال السادس :**

١) بإجراء القسمة الإقليدية نجد أن $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x-4}$ ولدينا $f(x) - y_\Delta = \frac{1}{x-4}$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - y_\Delta) = \lim_{x\to\pm\infty}(\frac{1}{x-4}) = 0$$

فالمستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x + 1$ مستقيم مقارب مائل للخط البياني C_f في جوار $+\infty$ و $-\infty$.

٢) $f(x) - y_\Delta = \frac{1}{x-4}$ ننظم جدول الإشارة :

X	$-\infty$	4	$+\infty$
$x - 4$	$- - - -$	0	$+ + + +$
$f(x) - y_\Delta$	$- - - -$	$\|\|$	$+ + + +$
C_f	C_f تحت Δ		C_f فوق Δ

◄ **السؤال السابع :**

$$x - \frac{x^3}{6} \le \sin x \le x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$-x + \frac{x^3}{6} \ge -\sin x \ge -x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}$$

نضيف x :

$$+\frac{x^3}{6} \ge x - \sin x \ge +\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}$$

نقسم على $x^3 > 0$:

$$+\frac{1}{6} \ge \frac{x - \sin x}{x^3} \ge +\frac{1}{6} - \frac{x^2}{120}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}\left(+\frac{1}{6}\right) = +\frac{1}{6} \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left(+\frac{1}{6} - \frac{x^2}{120}\right) = +\frac{1}{6} \end{cases} \ggg \lim_{x\to 0^+}\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

حسب مبرهنة الإحاطة .

-انتهى الحل-