مذاكرة النهايات و الاستمرار

الاسم:

الدرجة العظمى : ٣٠٠

المدة :ساعة

السؤال الأول :

في كل من الحالات الآتية ، عين m ليكون التابع f المعطى مستمراً على مجموعة تعريفه :

$$1) f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1} & x\neq 0\\ m & x=0\end{cases}$$

$$2) f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos(x)-1}{\cos^2(x)-1} & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}m & x=0\end{cases}$$

$$3) f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1} & x\neq 1\\ m & x=1\end{cases}$$

$$4) f(x)=\begin{cases}3x-2 & x\leq 1\\ 2x^2-mx & x>1\end{cases}$$

السؤال الثاني :

f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ وفق : $f(x)=\frac{x^2+3x+1}{x+2}$

اكتب معادلة المقارب المائل للخط البياني C_f في جوار $+\infty$.

السؤال الثالث :

f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=\sqrt{x^2+2x\sin x+\sin^2 x}$

١) بين أن التابع f يكتب بالشكل : $f(x)=|x+\sin x|$

٢) استنتج نهاية التابع عند $+\infty$.

السؤال الرابع :

f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق : $f(x)=\frac{3x+1}{x-1}$

١) احسب نهايات التابع عند أطراف مجموعة تعريفه ، واكتب معادلة كل مقارب وجدته .

٢) أوجد A التي تحقق : إذا كان $x>A$ كان $f(x)$ في المجال $]2.95\,,3.05[$.

السؤال الخامس :

f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}$

١) احسب $a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

٢) احسب $b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$.

٣) أثبت أن $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$ ثم فسر النتيجة هندسياً .

٤) أثبت أن $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+(ax+b))=0$ ثم فسر النتيجة هندسياً .

السؤال السادس :

ادرس الوضع النسبي بين المنحنيين C_f و C_g حيث :

$$f(x)=2x^2+x-1 \quad , \quad g(x)=x^2+3x-2$$

-انتهت الأسئلة-

السؤال الأول :

١) التابع f مستمر على المجالين $[-1\,,0[$ و $]0,+\infty[$ و حتى يكون مستمراً على المجال $[-1\,,+\infty[$ يجب أن يكون مستمراً عند الصفر أي يجب تحقق الشرط : $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x+1-1}\left(\sqrt{x+1}+1\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\left(\sqrt{x+1}+1\right) = 2$$

$$f(0) = m \quad \ggg \quad \boxed{m=2}$$

٢) التابع f مستمر على المجالين $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$ و حتى يكون مستمراً على $\mathbb{R}$ يجب أن يكون مستمراً عند الصفر أي يجب تحقق الشرط : $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{\cos^2(x)-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\cos(x)-1}}{\cancel{(\cos(x)-1)}(\cos(x)+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{(\cos(x)+1)} = \frac{1}{2}$$

$$f(0) = \frac{1}{2}m \quad \ggg \quad \frac{1}{2}m = \frac{1}{2} \quad \ggg \quad \boxed{m=1}$$

٣) التابع f مستمر على المجالين $]-\infty,1[$ و $]1,+\infty[$ و حتى يكون مستمراً على $\mathbb{R}$ يجب أن يكون مستمراً عند الواحد أي يجب تحقق الشرط : $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\left(x^2+x+1\right) = 3$$

$$f(1) = m \quad \ggg \quad \boxed{m=3}$$

٤) التابع f مستمر على المجالين $]-\infty,1[$ و $]1,+\infty[$ و حتى يكون مستمراً على $\mathbb{R}$ يجب أن يكون مستمراً عند الواحد أي يجب تحقق الشرط : $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left(2x^2 - mx\right) = 2 - m$$

$$f(1) = 3(1) - 2 = 1 \quad \ggg \quad 2 - m = 1 \quad \ggg \quad \boxed{m=1}$$

السؤال الثاني :

بإجراء القسمة الإقليدية : $f(x) = x + 1 - \frac{1}{x+2}$ فالمستقيم Δ الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$ لأن :

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_\Delta) = \lim_{x\to+\infty}\left(x + 1 - \frac{1}{x+2} - x - 1\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x+2}\right) = 0$$

طريقة ثانية : بفرض أن معادلة المقارب $y = ax + b$:

$$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+1}{x(x+2)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+1}{x^2+2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x+1}{x+2} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x+1-x^2-2x}{x+2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x+2} = 1$$

إذن معادلة المقارب المائل هي $y = x + 1$ لأن :

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_\Delta) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x+2}\right) = 0$$

السؤال الثالث :

١) $f(x)=\sqrt{x^2+2x\sin x+\sin^2 x}=\sqrt{(x+\sin x)^2}=|x+\sin x|$

٢) $-1\le \sin x\le 1$ إذن :

$$x-1\le x+\sin x\le 1+x$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty\end{cases}\ \ggg\ \lim_{x\to+\infty}(x+\sin x)=+\infty$$

نستنتج أن :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\left|\lim_{x\to+\infty}(x+\sin x)\right|=|+\infty|=+\infty$$

السؤال الرابع :

١) $D_f=]-\infty\,,1[\cup]1\,,+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=3\ ,\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=3\ ,\quad \lim_{x\to1^+}f(x)=+\infty\ ,\quad \lim_{x\to1^-}f(x)=-\infty$$

$y=3$ مقارب أفقي للخط C_f في جوار $+\infty$ و $-\infty$.

$x=1$ مقارب شاقولي للخط C_f في جوار $+\infty$ و $-\infty$.

٢) $|f(x)-c|<r$

نصف قطر المجال: $r=\frac{b-a}{2}=\frac{3.05-2.95}{2}=0.05$

مركز المجال : $c=\frac{b+a}{2}=\frac{3.05+2.95}{2}=3$

$$|f(x)-3|<0.05\ \ggg\ \left|\frac{3x+1}{x-1}-3\right|<0.05\ \ggg\ \left|\frac{3x+1-3x+3}{x-1}\right|<0.05$$

$$\frac{4}{|x-1|}<0.05\ \ggg\ \frac{|x-1|}{4}>\frac{100}{5}\ \ggg\ |x-1|>80$$

إما $1-x>80$ أي $x<-79$

أو $x-1>80$ أي $x>81$ ومنه $A=81$ (أو أي عدد أكبر من ٨١)

السؤال الخامس : ١)

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x}$$

بما أن $x\to+\infty$ إذن $x>0$ أي : $|x|=+x$:

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}{\cancel{x}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}=1$$

(٢

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}+x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x(2+\frac{2}{x})}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+x}\right)$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}\right)=\frac{2+0}{1+1}=1$$

(٣

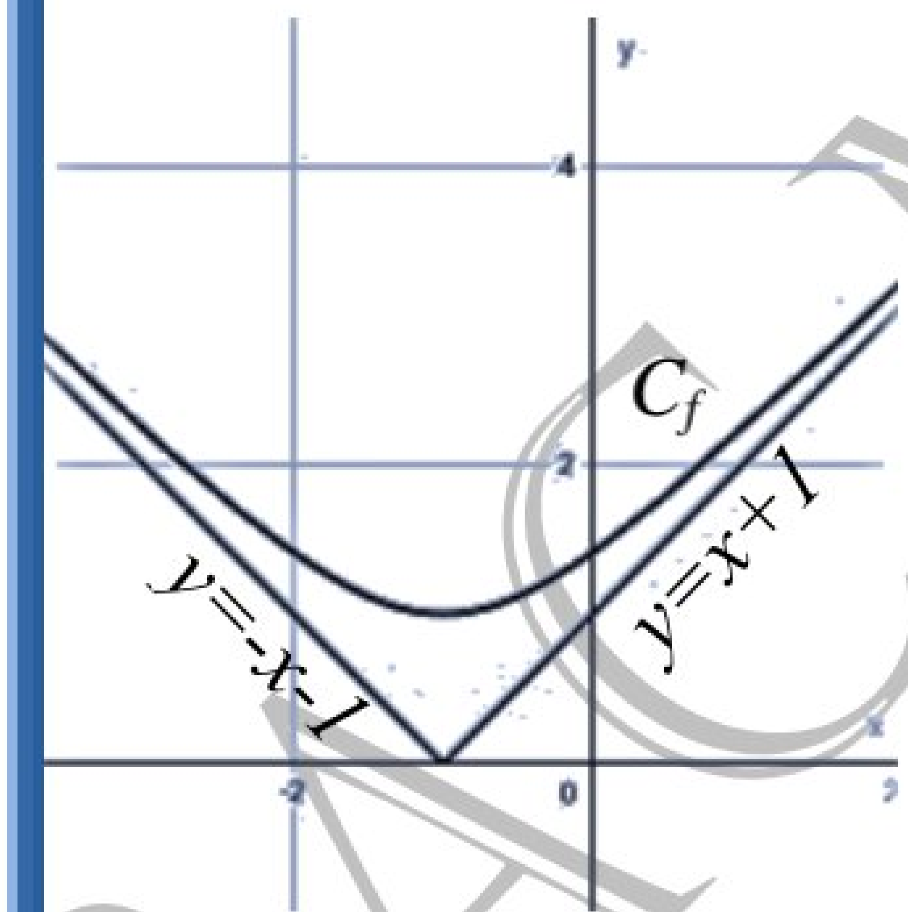
$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x+1))=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+1+1}-(x+1)\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x+1)^2+1}-(x+1)\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(x+1)^2+1-(x+1)^2}{\sqrt{(x+1)^2+1}+(x+1)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+1}+(x+1)}\right)=0$$

فالمستقيم Δ الذي معادلته $y=x+1$ مقارب مائل ل C_f في جوار $+\infty$.

(٤

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(-x-1))=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{(x+1)^2+1}+(x+1)\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+1}-(x+1)}\right)=0$$

فالمستقيم Δ الذي معادلته $y=-x-1$ مقارب مائل ل C_f في جوار $-\infty$.



السؤال السادس :

دراسة الوضع النسبي بين المنحنيين C_f و C_g حيث :

$$f(x)=2x^2+x-1 \qquad , \qquad g(x)=x^2+3x-2$$

ندرس إشارة الفرق :

$$f(x)-g(x)=2x^2+x-1-(x^2+3x-2)=x^2-2x+1=(x-1)^2\geq 0$$
$$f(x)-g(x)\geq 0 \ \ \ggg \ \ f(x)\geq g(x)$$

C_f فوق C_g .

ويتقاطع C_f مع C_g في النقطة التي فاصلتها $x=1$ أي في النقطة $A(1,2)$.

-انتهى الحل-