مبرهنات المقارنة:

مبرهنة الإحاطة الأولى: تنص هذه المبرهنة أنه إذا كان لدينا ثلاث توابع f و g و h معرفة على مجال $I =]b, +\infty[$ وتحقق على هذا المجال

$$\forall x \in I \; ; \; g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

وكان

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = l$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = l$ فإن حيث l = عدد

$$\lim f(x) = l$$

المسائل: نستخدم مبرهنة الإحاطة في إيجاد نهاية تابع يحقق متراجحة أو في إيجاد نهاية تابع يحقق $\sin \infty$ و $\cos \infty$ حيث أن

$-1 \leq \cos x \leq 1$ أو $0 \leq \sin^2 x \leq 1$

$-1 \leq \sin x \leq 1$ $0 \leq \cos^2 x \leq 1$

تدريب: احسب نهاية التابع f المعرّف على $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ وفق:

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ عند $a = 0$ و $a = \infty$

الحل:

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{\sin(0)}{0} = \frac{0}{0}$ ع.ت

$\lim f(x) = 1$ حسب المبرهنة   نستخدم مبرهنة $\sin$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\sin \infty}{\infty}$ حالة عدم تعيين

تحتاج إحاطة لإزالتها لأنه يوجد لدينا $\sin\infty$

نعلم أن $-1 \leq \sin x \leq 1$ نقسم على $x > 0$ في جوار $+\infty$

بالقسمة على الطرفين $\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{-1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x} \Rightarrow$

$\lim\limits_{x \to +\infty}(-\frac{1}{x}) = \frac{-1}{\infty} = 0$ و $\lim\limits_{x \to \infty}(\frac{1}{x}) = 0 \Rightarrow$ حسب الإحاطة فإن $\Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

تدريب 2: احسب نهاية f المعرفة على $]0, +\infty[$

$$f(x) = \frac{1 + \cos x}{x^2} \qquad a = +\infty$$

الحل:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1 + \cos \infty}{\infty}$$ تحتاج إحاطة

$-1 \leq \cos x \leq 1$ نضيف (1) إلى الطرفين

$$1 - 1 \leq 1 + \cos x \leq 1 + 1 = 2$$

$$\frac{0}{x^2} \leq \frac{1 + \cos x}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}$$ نقسم على x^2

$$\lim_{x \to +\infty} (0) = 0 \quad \text{و} \quad \lim\left(\frac{2}{x^2}\right) = \frac{2}{\infty} = 0$$

فإن حسب مبرهنة الإحاطة

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

تدريب 3: ليكن f تابع يحقق:

$$\frac{3x - 1}{x + 2} \leq f(x) \leq \frac{3x + 7}{x + 3}$$

احسب نهاية f عند $+\infty$

الحل: باستخدام مبرهنة الإحاطة

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x - 1}{x + 2}\right) = \lim\left(\frac{3x}{x}\right) = 3$$

$$\lim\left(\frac{3x + 7}{x + 3}\right) = \lim\left(\frac{3x}{x}\right) = 3$$

ومنه

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$$ حسب مبرهنة الإحاطة

مبرهنة المقارنة الثانية: ليكن لدينا f و g تابعين ولنفرض $I =]b, +\infty[$ أنه عند كل x من I تتحقق المتراجحة $|f(x) - l| \leq g(x)$ ولنفرض أن

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ فإن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$

تدريب: ليكن f تابع يحقق:

$|f(x) - 1| \leq \frac{1}{x^2}$ احسب نهاية f عند $+\infty$

الحل: نفرض $g(x) = \frac{1}{x^2}$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \frac{1}{\infty} = 0$

وحسب مبرهنة المقارنة الثانية $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

تدريب: ليكن f تابع يحقق $|f(x) + 3| \leq \frac{x}{x^2+1}$ احسب نهاية f عند $+\infty$

نفرض $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \lim\left(\frac{x}{x^2}\right) = \frac{1}{\infty} = 0$

فإن $\lim f(x) = -3$ حسب مبرهنة الإحاطة الثانية

لا أخاف من محاولاتي المستمرة بل أخاف من توقفي عن المحاولة

مبرهنة المقارنة الثالثة:

ليكن f و g تابعين معرفين على مجال $I =]b, +\infty[$

① اذا كان $f(x) \geq g(x)$ عند كل x من I وكان

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \implies \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

② اذا كان $f(x) \leq g(x)$ و كان $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ كان

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

في المسائل: للتفريق بين المقارنة ① و ③ اذا كان نهاية الطرفين l عدد كان يجب استخدام الإحاطة ① واذا كان نهاية الطرفين $+\infty$ أو $-\infty$ نستخدم الإحاطة أو المقارنة الثالثة

تدريب: احسب نهاية f المعرّف على IR وفقا:

$f(x) = \cos x + x$ عند $+\infty$ و $-\infty$

الحل: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \cos \infty + \infty$ تحتاج إحاطة

$-1 \leq \cos x \leq 1$ نضيف x للطرفين

$x - 1 \leq \cos + x \leq x + 1$

$x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$

(نلاحظ أن نهاية الطرفين هي $+\infty$ لذلك نستخدم المقارنة (3).)

لدينا $x - 1 \leq f(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty \implies \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$ حسب المقارنة 3

عند $-\infty$ نعلم أن: $f(x) \leq x + 1$

$$\lim_{x \to -\infty} (x+1) = -\infty \implies \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

تدريب 2 : ليكن f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق :

$f(x) = x^2 + \sin x$ احسب نهاية f عند $\mp\infty$

نحتاج إعادة $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty + \sin(\infty)$

نعلم أن

$-1 \leq \sin x \leq 1$ نضيف x^2 للطرفين

$x^2 - 1 \leq x^2 + \sin x \leq x^2 + 1$

$x^2 - 1 \leq f(x) \leq x^2 + 1$ (نلاحظ أن نهاية الطرفين $+\infty$)

لذلك $x^2 - 1 \leq f(x)$

حسب المقارنة (3) $\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 1) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

وعند $(-\infty)$ (نلاحظ أن نهاية الطرفين عند $-\infty$ هي $+\infty$ لذلك نأخذ f مع التابع الأصغر)

$x^2 - 1 \leq f(x)$

حسب المقارنة (3) $\lim_{x \to -\infty} (x^2 - 1) = (-\infty)^2 = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

تدريب : ص 46 (1) أجب عن الأسئلة الآتية

(1) f تابع يحقق $\frac{3x + 7}{x - 1} \geq f(x) \geq \frac{3x + \cos x}{x}$ ما نهاية f عند $+\infty$؟

الحل :

$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x + \cos x}{x}\right) = \frac{3(\infty) + \cos(\infty)}{\infty}$

نحتاج إحاطة للتابع $g(x) = \frac{3x + \cos x}{x}$

نعلم أن $-1 \leq \cos x \leq 1$ نضيف $3x$

$3x - 1 \leq 3x + \cos x \leq 3x + 1$

نقسم على $x > 0$ الموجبة في جوار $+\infty$

$\frac{3x - 1}{x} \leq \frac{3x + \cos x}{x} \leq \frac{3x + 1}{x}$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{x}\right)=3$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{x}\right)=3$ $\Rightarrow$ $\lim\left(\frac{3x+\cos x}{x}\right)=3$

حسب مبرهنة الإحاطة (١)

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+7}{x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{x}\right)=3$

عندئذٍ لدينا

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=3$ حسب الإحاطة (١١)

② أثبت أن $\frac{1}{x+1}\geqslant\frac{\cos x}{x+1}\geqslant\frac{-1}{x+1}$ استنتج $\lim_{x\to}\frac{\cos x}{x+1}$

عند $+\infty$. ثم ادرس بالمثل نهاية التابع ذاته عند $-\infty$

الحل: نعلم أن $1\geqslant\cos x\geqslant-1$ نقسم على $x+1>0$ في جوار $+\infty$

$\frac{1}{x+1}\geqslant\frac{\cos x}{x+1}\geqslant\frac{-1}{x+1}$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{x+1}\right)=\frac{-1}{\infty}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{\infty}=0$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cos x}{x+1}\right)=0$ حسب مبرهنة الإحاطة

عند $-\infty$: $1\geqslant\cos x\geqslant-1$ نقسم على $x+1<0$ في جوار $-\infty$

$\frac{1}{x+1}\leqslant\underbrace{\frac{\cos x}{x+1}}_{f(x)}\leqslant\frac{-1}{x+1}$ (قلبنا إشارة التراجح لأننا قسمنا على مقدار سالب)

$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-1}{x+1}\right)=\frac{1}{\infty}=0$

$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{\infty}=0$ $\Rightarrow$ $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$

حسب مبرهنة الإحاطة (١)

③ f تابع يحقق $|f(x)-3| \le \frac{1}{x+1}$ أياً كان $x>0$ ما نهاية f عند $+\infty$ ؟

نفرض $g(x)=\frac{1}{x+1}$ ⟸ $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{\infty}=0$ عندئذٍ

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$ حسب مبرهنة المقارنة (2)

④ f تابع يحقق $f(x)\ge\frac{1}{4}x^2$ أياً كان $x<0$ احسب نهاية f عند $-\infty$ ؟

الحل: $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{4}(-\infty)^2=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ حسب المقارنة (3)

⑤ أثبت أن $(x^2-5\sin x \ge x^2-5)$ استنتج من المتراجحة السابقة نهاية $x^2-5\sin x$ عند $x\to+\infty$ و عند $-\infty$ أي $(f(x)=x^2-5\sin x)$

الحل: $f(x)=x^2-5\sin x$

نعلم أن $-1\le\sin x\le 1$ نضرب الطرفين بـ -1

$1\ge-\sin x\ge-1$ نضرب الطرفين بـ 5

$5\ge-5\sin x\ge-5$ نضيف x^2

$x^2+5\ge x^2-5\sin x\ge x^2-5$

عند $+\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty}(x^2-5)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

عند $-\infty$: $\lim_{x\to-\infty}(x^2-5)=+\infty$

حسب المقارنة (3) ⟸ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

رحمت الله قنديلي ... فأوقده فمل تظن بيراع الدرهن تطفئ

الأستاذ : أحمد تكروري

موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧

2) ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,+\infty[$ وفق $f(x)=\sqrt{1+x}-\sqrt{x}$

1) تحقق أن $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$ أياً يكن $x \geq 0$

2) استنتج أن $\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ في حالة $x>0$

3) ما نهاية $f(x)$ عند $+\infty$

الحل: 1) نضرب ونقسم على مرافق الجذر

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}{1}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1+x-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$$ وهو المحقق

قاعدة رياضية
$\sqrt{x+1} \geq \sqrt{2}$
يمكن أن يساويه في حال
∞

2) أولاً: $\sqrt{x+1} \geq \sqrt{x}$ نضيف للطرفين $\sqrt{x}$

$\sqrt{x+1}+\sqrt{x} \geq 2\sqrt{x}$ نقلب الأطراف

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\shortparallel$$

$$f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ثانياً: نضيف $\sqrt{1+x}$ للطرفين $\Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{1+x} \leq 2\sqrt{x+1}$ نقلب الأطراف

$$\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq f(x)$$

من أولاً وثانياً نجد أن:

$$\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{1+x}}&=\frac{1}{\infty}=0\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}&=\frac{1}{\infty}=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$ حسب مبرهنة الإحاطة