نهاية تابع مركب :

لتكن التوابع التالية : h , g , f

فإن $f = g(h(x)) \xrightarrow[\text{بالشكل}]{\text{تكتب}} f = g \circ h(x)$ يلي

إذا طلب : $\lim\limits_{x \to a} g(h(x))$ نهاية النهاية

1] يوجد $\lim\limits_{x \to a} h(x) = b$

2] نفرض $h(x) = X$

3] فيكون $\lim\limits_{x \to a} g(h(x)) = \lim\limits_{X \to b} g(X)$

تدريب : ليكن التابع

$$f(x) = \frac{x-3}{x+5} \quad ; \quad x \in]-5 , +\infty[$$

1] احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2] استنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} f(f(x))$ بعد كتابة $f(f(x))$ بدلالة x

الحل :

1] البسط = المقام $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

2] ① $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ ② نفرض $f(x) = X$

③ تصبح النهاية $\lim\limits_{x \to +\infty} f(f(x)) = \lim\limits_{X \to 1} f(X) = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$

يعني نبدل مكان كل x بـ $f(x)$

$$f(f(x)) = \frac{f(x)-3}{f(x)+5} = \frac{\frac{x-3}{x+5} - 3}{\frac{x-3}{x+5} + 5} = \frac{\frac{x-3-3x-15}{\cancel{x+5}}}{\frac{x-3+5x-25}{\cancel{x+5}}} = \frac{-2x-18}{6x+22}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(f(x)) = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$$

Scanned by CamScanner

تدريب: $g(x)=\dfrac{3x-1}{x-3}$, $x\in\,]3,+\infty[$

1] احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2] استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} g(g(x))$

3] أعد حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(g(x))$ بعد كتابة $g(g(x))$ بدلالة x

الحل: ① درجة البسط = درجة المقام ⇐ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=3$

② أ- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=3$ ثم نفرض $g(x)=X$

ب- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(g(x))=\lim\limits_{x\to 3} g(x)=\dfrac{8}{0}=+\infty$

$$g(g(x))=\frac{3g(x)-1}{g(x)-3}=\frac{3\cdot\frac{3x-1}{x-1}-1}{\frac{3x-1}{x-3}-3}=\frac{\frac{9x-3}{x-3}-1}{\frac{3x-1}{x-3}-3}$$

$$g(g(x))=\frac{\frac{9x-3}{x-3}-1}{\frac{3x-1}{x-3}-3}=\frac{\frac{9x-3-x+3}{\cancel{x-3}}}{\frac{3x-1-3x+9}{\cancel{x-3}}}$$

$$g(g(x))=\frac{8x}{8}=x$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(g(x))=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

المقارب المائل

تذكرة : المقارب الأفقي

$$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = b$$

نسمي $y = b$ مقارب أفقي للخط C في جوار $\mp\infty$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

نسمي $x = a$ مقارب شاقولي للخط C

ونوجد هذه المقاربات من خلال دراسة نهايات أطراف مجموعة التعريف

اذا حصلنا من خلال الدراسة على $\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \infty$ لا يوجد مقارب

$\lim_{x \to a} f(x) = b$ يوجد نقطة مقاربة (a, b)

المقارب المائل : ← هو مستقيم يشبه يقترب من C ولا يمسه

← معادلته $y = ax + b$

← لإثبات أنه مقارب مائل يجب أن نبرهن

$$\lim_{x \to \mp\infty} (f(x) - y) = 0$$

مقارب

← لدراسة الوضع النسبي للمقارب المائل : يعني هل هو فوق C أم تحته ندرس

$f(x) - y = ???$ المقدار

يعدم | لا يعدم
في الحلقة الصادرة | ندرسه في المجال المعطاة
 | في D.P وذلك بأخذ القيم

اذا كان :

$f(x) - y < 0 \implies y$ تحت C

$f(x) - y > 0 \implies y$ فوق C

تدريب: $f(x) = 2x + 3 + \frac{10}{x-1}$; $x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

أثبت أن $y = 2x+3$ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$ ثم ادرس وضعه النسبي

يجب أن نبرهن أن

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y) = 0$$

نحقق

$$\lim_{x \to +\infty} \left(2x + 3 + \frac{10}{x-1} - 2x - 3\right) = 0$$

لدراسة الوضع النسبي

ندرس إشارة المقدار $f(x) - y = \frac{10}{x-1}$ للإشارة

1) على المجال $]-\infty, 1[$

$f(x) - y < 0$

y تحت C

2) على المجال $]1, +\infty[$

$f(x) - y > 0$

y فوق C

تذكرة:

عندما يكون درجة البسط ≥ درجة المقام نطبق القسمة الإقليدية

البسط	المقام

$f(x) =$ الناتج $+$ $\frac{\text{الباقي}}{\text{المقام}}$

تدريب : $f(x) = \dfrac{2x^2 - 7x - 3}{x - 4}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$

$x \in]-\infty , 4[\cup]4 , +\infty[$

① اكتب $f(x)$ بالشكل $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-4}$

② أثبت أن $y = 2x + 1$ مقارب مائل لـ C في جوار $\mp\infty$

③ ادرس الوضع النسبي لـ y مع C

الحل : ① درجة البسط > درجة المقام نطبق القسمة الإقليدية

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 - 7x - 3 & x - 4 \\ \hline -2x^2 \pm 8x & 2x + 1 \\ x - 3 & \\ -x \pm 4 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

باقي 1

$a = 2$, $b = 1$, $c = 1$

$f(x) = 2x + 1 + \dfrac{1}{x-4}$

② يجب أن نبرهن أن $\lim\limits_{x \to \mp\infty} (f(x) - y) = 0$

محقق $\lim\limits_{x \to \mp\infty} \left(2x+1 + \dfrac{1}{x-4} - 2x - 1\right) = 0$

③ ندرس المقدار : $f(x) - y = \dfrac{1}{x-4}$

ينعدم

$]4 , +\infty[$ (5) $]-\infty , 4[$ (0)

$f(x) - y > 0$ $f(x) - y < 0$

يقع C فوق y يقع C تحت y

تدريب: $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x+3}$; $x \in \mathbb{R}\setminus\{-3\}$

$x \in]-\infty, -3[\cup]-3, +\infty[$

① اكتب f بالشكل $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+3}$

② أثبت أن $y = 2x-6$ مقارب لـ C في جوار $\pm\infty$

③ ادرس الوضع النسبي لـ C مع y

الحل: ① درجة البسط > درجة المقام نطبق القسمة الإقليدية

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x-6 \\
\hline
x+3 & 2x^2+1 \\
 & -2x^2 \mp 6x \\
\hline
 & -6x+1 \\
 & -6x \mp 18 \\
\hline
 & 19 \quad \text{باقي}
\end{array}
$$

$f(x) = 2x - 6 + \dfrac{19}{x+3}$; $a = 2$, $b = -6$, $c = 19$

② يجب أن نبرهن أن:

$\lim\limits_{x \to \mp\infty} (f(x) - y) = 0$

$\lim (2x \cancel{-6} + \dfrac{19}{x+3} - 2x \cancel{+6}) = 0$ محقق

③ الوضع النسبي ادرس

$f(x) - y = \dfrac{19}{x+3}$

على المجال $]-\infty, -3[$ $^{-100}$

$f(x) - y < 0$

$\Leftarrow$ C تحت y

على المجال $]-3, +\infty[$ ^{100}

$f(x) - y > 0$

$\Leftarrow$ C فوق y

تدريب: $f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; $x \in]-\infty, +\infty[$

① أثبت أن $y = x+1$ مقارب لـ c في جوار $+\infty$

② ادرس الوضع النسبي له مع c

الحل: ① نحسب المستقيم الشكل الطرق

$h(x) = f(x) - y_\Delta$

$h(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - x - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$

$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \frac{\infty}{\infty} - 1$ ع.ت.ع

$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}} - 1 = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1$

$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}} - 1 = 1 - 1 = 0$

محقق

② الوضع النسبي

$h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$ ندرس المقدار لا ينعدم

على المجال $]-\infty, 0, +\infty[$

$h(x) = f(x) - y_\Delta < 0$

y تحت c

عندما يطلب إيجاد معادلة المقارب المائل ماذا نفعل ؟؟

هناك حالتين   حالة ① عامة

صيغة السؤال : أوجد معادلة المقارب المائل للتابع $f(x)$

$$\left.\begin{array}{l} ① \lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \\ ② \lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax] = b \end{array}\right\}$$

معادلة المقارب المائل هي : $y = ax + b$

تدريب :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \quad ; \quad x \in]-\infty , +\infty[$$

أوجد معادلة المقارب المائل لـ C في جوار $+\infty$

الحل : معادلة المقارب المائل هي : $y = ax + b$

ونبحث عن a , b من خلال

$$① \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{ع.ت}$$

نزيلها بإخراج x^2 عامل مشترك من الجذر

$$= \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x} = \frac{+\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{1+0} = 1 = a$$

$$② \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = b \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = \infty - \infty \quad \text{ع.ت}$$

نضرب ونقسم على المرافق الجذر

$$= \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1} + x} = \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = \frac{1}{\infty}$$

$$= 0 = b$$

إذاً المقارب المائل $y = x$

Scanned by CamScanner

حالة ② حاجة إذا طلب أولاً اكتب بالصيغة القانونية يعني (الإتمام إلى مربع كامل) نتبع :

① نكتب ما داخل الجذر بالصيغة القانونية

②
$$\sqrt{(\text{كذا})^2 + ??} = \pm \text{كذا} \sqrt{1 + \frac{??}{(\text{كذا})^2}}$$

③ إذا كان
$$\lim_{x \to \mp\infty} \frac{f(x)}{\text{كذا}} = 1$$

④ المقارب المائل هو $y = \text{كذا}$

تدريب :
$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$$

1) اكتب ما داخل الجذر بالصيغة القانونية
2) استنتج وجود مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$

الحل : ①
$$x^2 + 4x + 5 \quad \text{نضيف ثم نطرح} \quad \left(\frac{\text{أمثال } x}{2}\right)^2$$

$$x^2 + 4x + 4 - 4 + 5$$

$$(x+2)^2 + 1 \implies f(x) = \sqrt{(x+2)^2 + 1}$$

② نخرج ما أمكننا إلى خارج الجذر

$$f(x) = \sqrt{(x+2)^2\left[1 + \frac{1}{(x+2)^2}\right]} = (x+2) \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{(x+2)^2}}$$

نقسم الطرفين على $(x+2)$

$$\implies \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{(x+2)} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{(x+2)^2}} = 1$$

إذاً المقارب المائل هو : $y = x + 2$

Scanned by CamScanner

تدريب:

$$g(x) = \frac{1}{3+2\sin x}$$

1)- أثبت محدودية $g(x)$

2)- استنتج نهاية كلاً من

① - $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{3+2\sin x} = x^2 \cdot g(x)$

② - $\lim_{x \to +\infty} \frac{x+\sin x}{3+2\sin x} = (x+\sin x) g(x)$

الحل: ① $-1 \leq \sin x \leq +1 \xRightarrow{\text{نضرب بـ } 2} -2 \leq 2\sin x \leq +2$

نضيف 3 للأطراف $1 \leq 3+2\sin x \leq 5$

نقلب الأطراف (تقلب جهة المتراجحة)

$1 \geq \frac{1}{3+2\sin x} \geq \frac{1}{5} \Rightarrow 1 \geq g(x) \geq \frac{1}{5}$

② انطلاقاً من $1 \geq g(x) \geq \frac{1}{5} \xRightarrow{\text{نضرب الأطراف بـ } x^2} x^2 \geq x^2 \cdot g(x) \geq \frac{x^2}{5}$

بأخذ ① مع ② نجد أن

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{5} = +\infty \quad ③ \xRightarrow{\text{حسب مبرهنة الإحاطة}} \lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot g(x) = +\infty$

نعلم أن $-1 \leq \sin x \leq +1 \xRightarrow{\text{نضيف } x} x-1 \leq x+\sin x \leq x+1$

$\Leftarrow$ نضرب الأطراف بـ $g(x)$ $(x-1)g(x) \leq (x+\sin x)(g(x)) \leq (x+1)(g(x))$

بأخذ ② و ③ نجد أن:

$\lim_{x \to +\infty} (x-1)(g(x)) = +\infty \quad ③ \xrightarrow{\text{حسب مبرهنة الإحاطة}} \lim_{x \to +\infty} (x+\sin x)(g(x)) = +\infty$

المستقيمات المقاربة الأفقية والشاقولية :

نحصل على المقاربات من النهايات

$1) \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ لا مقاربات

$2) \lim_{x \to a} f(x) = b$ نقطة مقاربة (a , b)

$3) \lim_{x \to \pm a} f(x) = \pm\infty$ مقارب شاقولي $x = a$

$yy' \parallel$

حالة خاصة : $x = 0$ مقارب شاقولي هو yy'

وضعه النسبي :

$x \to \pm a$ يمين مقارب C

$x \to a$ يسار مقارب C

$4) \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$ مقارب أفقي $y = b$

$xx' \parallel$

حالة خاصة : $y = 0$ مقارب أفقي هو xx'

وضعه النسبي : ندرس المقدار $f(x) - b = ??$

لا ينعدم

ينعدم

ندرس على المجالات المعطاة في D_f في الحلقة القادمة

وذلك بأخذ القيم $\Leftarrow$ C فوق b $\Leftarrow$ $f(x) - b > 0$

$f(x) - b < 0 \Rightarrow b$ تحت C

تدريب (1):

$f(x) = \frac{2x^2+1}{x+3}$ ، $x \in]-\infty,-3[\cup]-3,+\infty[$

د.ك.ع المقاربات الأفقية والشاقولية وادرس وضعها النسبي

الحل:

$\boxed{1}$ $\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \frac{2x^2}{x} = 2x = \mp\infty$

لا يوجد مقاربات أفقية

$\boxed{2}$ $\lim_{x \to -3^-} f(x) = -\infty$

$x = -3$ مقارب شاقولي للخط c

و c على يسار المقارب

$\boxed{3}$ $\lim_{x \to -3^+} f(x) = +\infty$

$x = -3$ مقارب شاقولي للخط c

و c على يمين المقارب

تدريب (2):

$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ ، $x \in]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

د.ك.ع المقاربات الأفقية والشاقولية وادرس وضعها النسبي

الحل:

$\boxed{1}$ $\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \frac{2x}{x} = 2$

$y = 2$ مقارب أفقي للخط c في جوار $\mp\infty$

لدراسة وضع النسبي للتابع مع المقارب ندرس المقدار

$f(x) - 2 =$

$\frac{2x+1}{x-1} - 2 = \frac{2x+1-2x+2}{x-1} = \frac{3}{x-1}$ لا ينعدم

$]-\infty,1[$: $f(x)-2 < 0$ ، c تحت المقارب

$]1,+\infty[$: $f(x)-2 > 0$ ، c فوق المقارب

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \dfrac{3}{0^-} = -\infty$

عوضنا في المقام عدداً أصغر من 1

فتصبح المقام سالب صغير جداً سالب

$x=1$ مقارب شاقولي للخط c و ~~منطبق~~ c على يسار المقارب

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \dfrac{3}{0^+} = +\infty$

عوضنا في المقام عدداً أكبر من 1

$x=1$ مقارب شاقولي للخط c و c على يمين المقارب

تدريب ③ : $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$; $x \in]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$

دل على المقاربات الأفقية والشاقولية وادرس وضعها

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{x \to \mp\infty} f(x) = \dfrac{x}{x} = 1$

$y=1$ مقارب أفقي للخط c في جوار $\mp\infty$

الوضع النسبي : ندرس المقدار $f(x) - 1$

$\dfrac{x+1}{x-3} - 1 = \dfrac{x+1-x+3}{x-3} = \dfrac{4}{x-3}$ لا يعدم

$]-\infty, \overset{0}{3}[$ $\qquad$ $]\overset{5}{3}, +\infty[$

$f(x) - y < 0$ $\qquad$ $f(x) - y > 0$

c تحت المقارب $\qquad$ c فوق المقارب

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \dfrac{4}{0^-} = -\infty$

$x=3$ مقارب شاقولي للخط c و c على يسار المقارب

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \dfrac{4}{0^+} = +\infty$

$x=3$ مقارب شاقولي للخط c و c على يمين المقارب