الجزء الثاني	اختبار وحدة	المدة : ساعة ونصف
الثالث الثانوي العلمي	الأعداد العقدية	الدرجة : 300

حل المسألة التالية:

❶ **حل معادلة من الدرجة الثالثة**

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية إذا علمت أنها تقبل حلاً تخيلياً بحتاً:

$$z^3 + (2-2i)z^2 - 2z + 8 + 4i = 0$$

❷ **التطبيق الهندسي للمعادلة**

إذا كانت A, B, C النقاط التي تمثل الأعداد العقدية a, b, c حلول السابقة :

① ارسم في جملة متعامدة نظامية النقاط A, B, C ، استنتج طبيعة المثلث ABC.

② أثبت أن مجموعة النقاط $M(z)$ التي تحقق : $(z+1)(\bar{z}+2i)$ عدداً حقيقياً بحتاً تمثل مستقيم d ، اكتب معادلته وارسمه.

③ أثبت أن d يمثل محور أحد أضلاع المثلث ABC.

❸ **التطبيق الجبري للمعادلة**

① اختصر المقدار $t = \dfrac{e^{2\theta i} - e^{-2\theta i}}{e^{\theta i} - e^{-\theta i}}$ ، وحدد متى يكون المقدار موجوداً ، هل يمكن أن يكون t أحد حلول المعادلة السابقة.

② اختصر المقدار $w = \sqrt{2}.\left(\dfrac{1+\cos\varphi - i\sin\varphi}{1+\cos\varphi + i\sin\varphi}\right)$ ، وحدد متى يكون المقدار موجوداً ، ثم عيّن φ ليكون w أحد حلول المعادلة السابقة.

③ في حالة : $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ، اكتب w بالشكل الأسي ، ثم احسب w^{100}.

السبت 2016/10/01	انتهت الأسئلة	أيهم الشاعر

المدة : ساعة ونصف	حل اختبار وحدة	الجزء الثاني
الدرجة : 300	الأعداد العقدية	الثالث الثانوي العلمي

حل المسألة التالية:

❶ حل معادلة من الدرجة الثالثة

$$z^3 + (2-2i)z^2 - 2z + 8 + 4i = 0 \quad \ldots (1)$$

بما أن المعادلة تقبل حلاً تخيلياً بحتاً فإن $\bar{z} = -z$ ، نوجد مرافق المعادلة السابقة:

$$\overline{z^3 + (2-2i)z^2 - 2z + 8 + 4i} = \bar{0}$$

$$\overline{z^3} + (2+2i)\overline{z^2} - 2\bar{z} + 8 - 4i = 0$$

$$-z^3 + (2+2i)z^2 + 2z + 8 - 4i = 0 \quad \ldots (2)$$

بجمع (1) و(2) نجد: $4z^2 + 16 = 0$ وبالتالي $\boxed{z = 2i}$ الحل التخيلي للمعادلة.

بإستخدام القسمة الإقليدية نجد أن المعادلة (1) تكتب بالشكل: $(z-2i)(z^2 + 2z + 4i - 2) = 0$

وبالتالي $z^2 + 2z + 4i - 2 = 0$ ...

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(1)(4i-2) = 4 - 16i + 8 = 12 - 16i$$

نوجد الجذور التربيعية للعدد العقدي Δ فنجد : $\begin{cases} x^2 - y^2 = 12 \\ 2xy = -16 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$ أي أن $x^2 = 16$ فتكون $x = \pm 4$

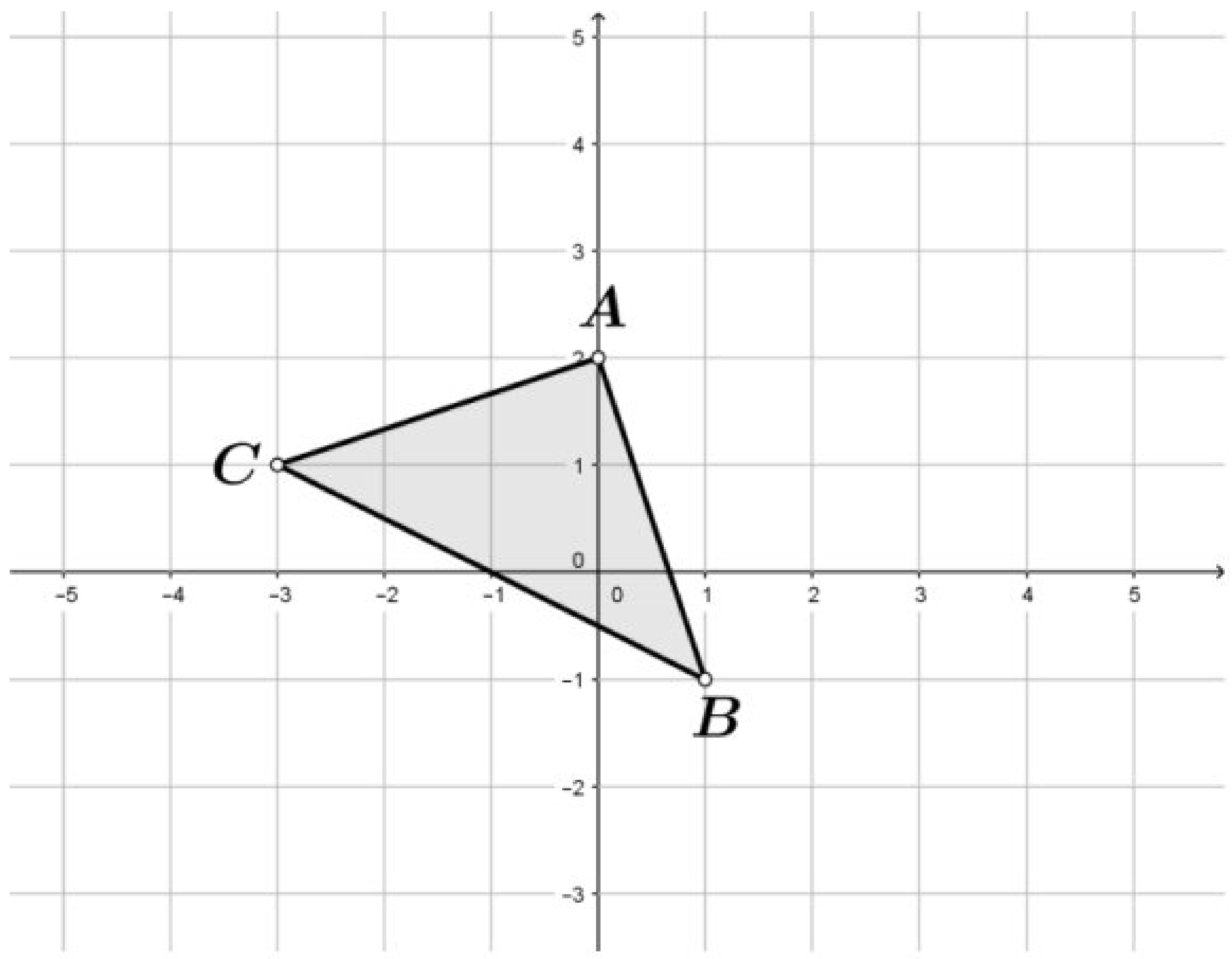
ومنه $y^2 = 4$ فتكون $y = \pm 2$ وبما أن $x.y < 0$ فإن $\Delta = (4-2i)^2$ وبالتالي تكون الحلول:

$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+4-2i}{2} = 1 - i \,,\; z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-4+2i}{2} = -3 + i$$

وبالتالي فإن حلول المعادلة (1) هي: $\{2i, 1-i, -3+i\}$

❷ التطبيق الهندسي للمعادلة

① لدينا $A(0,2), B(1,-1), C(-3,1)$ تمثل بالشكل:



$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{AB}(1,-3)\\ \overrightarrow{AC}(-3,-1)\\ \overrightarrow{BC}(-4,2)\end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l}AB=\sqrt{10}\\ AC=\sqrt{10}\\ BC=\sqrt{20}\end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\begin{smallmatrix}AB=AC\\ BC^2=AB^2+AC^2\end{smallmatrix}\right)$$

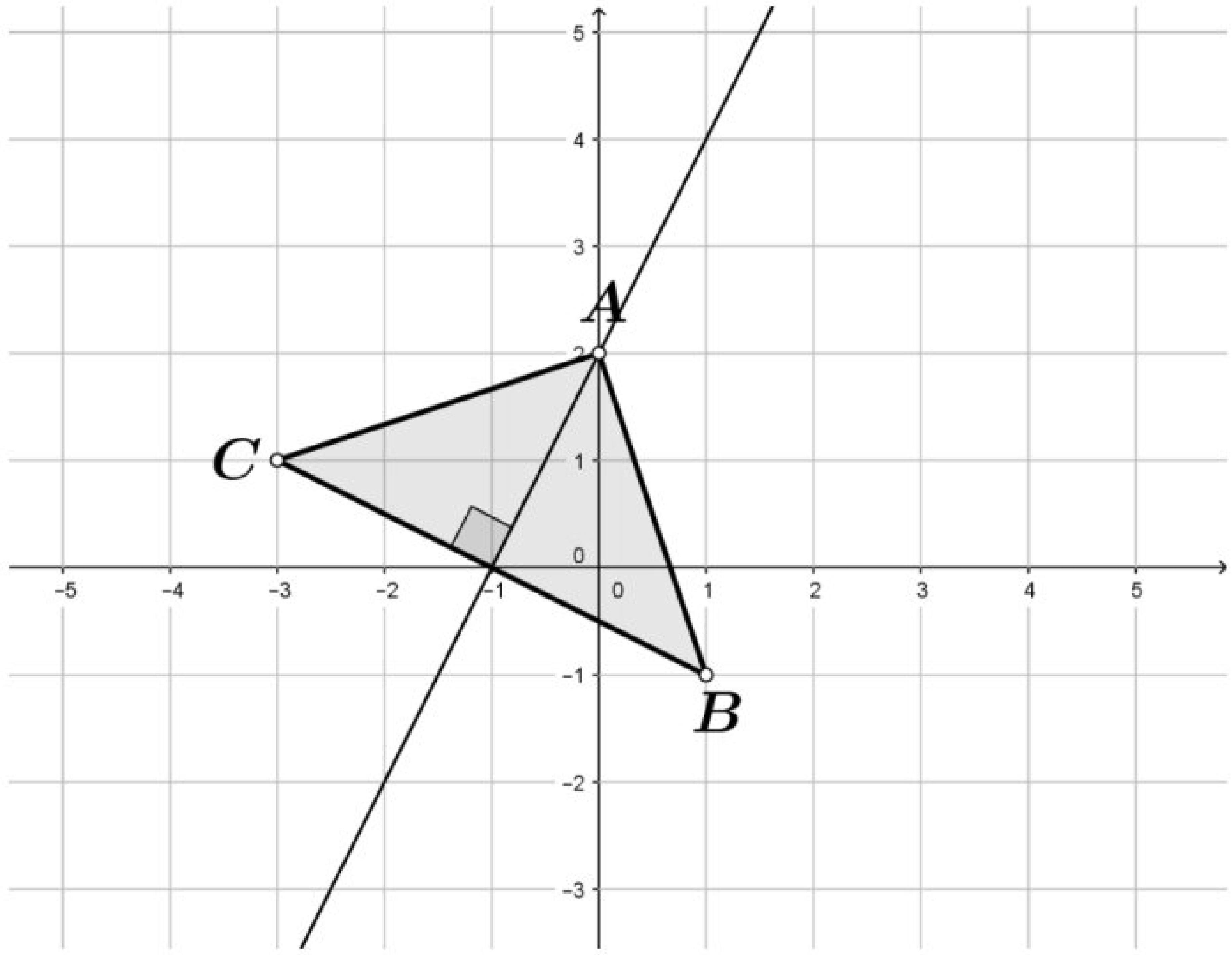
فالمثلث ABC قائم ومتساوي الساقين رأسه A.

② $$(z+1)(\bar{z}+2i)=(x+iy+1)(x-iy+2i)$$
$$=x^2-xyi+2xi+xyi+y^2-2y+x-iy+2i$$

يكون $(z+1)(\bar{z}+2i)$ عدداً حقيقياً بحتا إذا كان $2x-y+2=0$ وهي معادلة المستقيم d.

③ لدينا $m_{BC}=-\frac{1}{2}$ و $m_d=2$ ومنه $m_{BC}.m_d=-1$ وبالتالي $d\perp BC$ ..

منتصف $[BC]$ هي النقطة $(-1,0)$ وهي تحقق معادلة d وبالتالي فإن d محور الضلع $[BC]$.



❸ **التطبيق الجبري للمعادلة**

① $$t=\frac{e^{2\theta i}-e^{-2\theta i}}{e^{\theta i}+e^{-\theta i}}=\frac{2i\sin 2\theta}{2\cos\theta}=i\,\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta}=2i\sin\theta$$

المقدار معرّف بشرط $\cos\theta\neq 0$ ومنه $\theta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$

بما أن t عدداً تخيلياً بحتاً فهو يجب يطابق حل المعادلة $2i$ وبالتالي فإن $\sin\theta=1$ ومنه

$\theta=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ وهذا مرفوض ، وبالتالي t لا يمكن أن يكون حل للمعادلة (1).

②

$$w=\sqrt{2}.\left(\frac{1+\cos\varphi-i\sin\varphi}{1+\cos\varphi+i\sin\varphi}\right)=\sqrt{2}.\left(\frac{1+\cos\varphi-i\sin\varphi}{1+\cos\varphi+i\sin\varphi}\right)\left(\frac{1+\cos\varphi-i\sin\varphi}{1+\cos\varphi-i\sin\varphi}\right)$$

$$=\sqrt{2}.\frac{(1+\cos\varphi)^2-2\sin\varphi(1+\cos\varphi)i-\sin^2\varphi}{(1+\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi}$$

$$=\sqrt{2}.\frac{(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)-2i(\sin\varphi+\sin\varphi\cos\varphi)}{2(1+\cos\varphi)}$$

$$=\sqrt{2}.\frac{(1+2\cos\varphi+2\cos^2\varphi-1)-2i\sin\varphi(1+\cos\varphi)}{2(1+\cos\varphi)}$$

$$=\sqrt{2}.\frac{2\cos\varphi(1+\cos\varphi)-2i\sin\varphi(1+\cos\varphi)}{1+\cos\varphi}$$

$$=\sqrt{2}.(\cos\varphi-i\sin\varphi)$$

يكون المقدار

موجوداً بشرط $1+\cos\varphi+i\sin\varphi\neq 0$ أي أن:

$$\left.\begin{array}{c}1+cos\,\varphi\neq 0\\ sin\,\varphi\neq 0\end{array}\right\}\Longrightarrow\varphi\neq\pi+2\pi k$$

لا يمكن أن يكون w مساوياً $2i$ لأنه ليس تخيلياً بحتاً ، وإذا كان مساوياً $-3+i$ لا يمكن تعيين φ لأنها ليست نسب لزاوية شهيرة ، أما إذا كان مساوياً $1-i$ فإن $\varphi=\frac{\pi}{4}$

③ في حالة : $\varphi=\frac{\pi}{4}$ ، فإن w يكتب بالشكل: $w=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ وبالتالي:

$$w^{100}=2^{50}.\left(e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^{100}=2^{50}.e^{25\pi i}=-2^{50}$$

السبت 2016/10/01	انتهى الحل	أيهم الشاعر