تمرين ٩ صفحة ١٢٣ :

لكي نثبت أنّ العدد Z حقيقيّ لدينا ثلاث طرائق:

❶ نثبت أنّ .... $= \text{Im}(Z)$ ❷ نثبت أنّ $arg(Z) = \ldots\ (2\pi)$ أو $arg(Z) = \ldots\ (2\pi)\ \ldots =$.

❸ نثبت أنّ $\overline{Z} = Z$.

نختار لهذا التمرين الأسلوب الثالث لأنّ $|Z| = 1$ و $|w| = 1$ وبالتالي $\overline{Z} = \frac{1}{z}$ و $\overline{w} = \frac{1}{w}$ بأخذ المرافق لطرفيّ العلاقة المعطاة:

$$\overline{Z} = \frac{\overline{Z} + \overline{w}}{1 + \overline{w}\,\overline{z}} = \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{w}}{1 + \frac{1}{wz}} = \frac{\frac{w+z}{zw}}{\frac{wz+1}{zw}} \quad : \quad z.w \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{Z} = \frac{w+z}{wz+1} = Z$$

ومنه Z عدد حقيقيّ.

تمرين ١٥ صفحة ١٢٤ :

في حالة عدد عقديّ $Z \neq -1$ نضع $Z = \frac{2+\overline{z}}{1+\overline{z}}$ ونفترض أنّ $z = x + iy$ و $Z = X + iY$

حيث: x, y, X, Y هي أعداد حقيقيّة.

❶ احسب X, Y بدلالة العددين x, y.

❷ أثبت أنّ مجموعة النقط $M(z)$ التي يكون عندها Z حقيقياً هي مستقيم محذوف منه نقطة.

❸ أثبت أنّ مجموعة النقط $M(z)$ التي يكون عندها Z تخيلياً بحتاً هي دائرة محذوف منها نقطة.

①

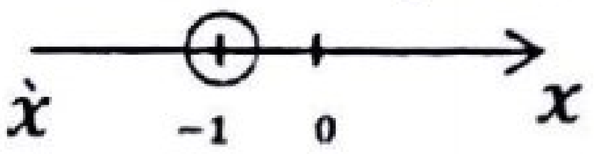
$$Z = \frac{2 + x - iy}{1 + x - iy} = \frac{[2 + x - iy]\,[1 + x + iy]}{[1 + x - iy]\,[1 + x + iy]}$$

$$Z = \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{x^2 + y^2 + 3x + 2}{(x+1)^2 + y^2} + i\ \frac{y}{(x+1)^2 + y^2}$$

$$X = \frac{x^2 + y^2 + 3x + 2}{(x+1)^2 + y^2}\ ,\ \ Y = \frac{y}{(x+1)^2 + y^2}$$

② $Y = 0 \Rightarrow y = 0 \Leftrightarrow Im(Z) = 0 \Leftrightarrow$ (Zحقيقي) ومجموعة النقاط هي نقاط المستقيم المحمول على محور الفواصل

ولكن من شرط المسألة: $Z \neq -1$ أي $Z \neq (-1 + 0\,i)$ أي عدا النقطة $(-1, 0)$.



③ Z تخيلي بحت $\Leftrightarrow Re(Z) = 0 \Leftrightarrow X = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + +3x + 2 = 0$ دائرة عدا النقطة $(-1, 0)$

(لاحظ أنّ النقطة تقع على الدائرة)

تمرين ٢ صفحة ١٢٢ :

❶ اكتب بالشكل الأسيّ حلول المعادلة: $\left(Z^2 + 3\sqrt{3}Z + 9\right)\left(Z^2 - 3\sqrt{3}Z + 9\right) = 0$

❷ أثبت أنّ النقاط: A, B, C, D التي تمثّل جذور المعادلة السابقة هي رؤوس مستطيل.

توجيه للحل: يمكن الحل بالإتمام لمربع كامل أو باستخدام المميز Δ فنجد أنّ أحد الجذور $Z_A = \frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}i$

ولاحظ أنّ بقية الجذور هي: $Z_B = \overline{Z_A}\ ,\ Z_D = -\overline{Z_A}\ ,\ Z_C = -Z_A$

- اكتب Z_A بالشكل الأسيّ ثم استنتج الشكل الأسيّ لكلّ من الجذور الأخرى.
- أثبت أنّ: $\frac{Z_A + Z_C}{2} = \frac{Z_D + Z_B}{2}$ ، واستنتج أنّ $ABCD$ متوازي أضلاع.
- أثبت أنّ: $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{BA}$ أو أنّ $CA = DB$ (بالإفادة من التناظر بالنسبة للمحور $\acute{x}x$).
- استنتج أخيراً أنّ $ABCD$ مستطيل.

تمرين ١٢ صفحة ١٢٤ :

ليكن θ عدداً حقيقياً من المجال $]-\pi, +\pi[$ ، نُعرّف: $t = \dfrac{e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$

❶ احسب المقادير $\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\dfrac{2t}{1-t^2}$, $\dfrac{1+t^2}{1-t^2}$ بدلالة النسب المثلثية للعدد θ .

❷ أثبت صحّة العلاقات: $\sin(\theta) = \dfrac{2tan(\frac{\theta}{2})}{1+tan^2(\frac{\theta}{2})}$, $\cos(\theta) = \dfrac{1-tan^2(\frac{\theta}{2})}{1+tan^2(\frac{\theta}{2})}$, $\tan(\theta) = \dfrac{2tan(\frac{\theta}{2})}{1-tan^2(\frac{\theta}{2})}$

توجيه للحل:

① بداية أثبت أنّ:

$$\left(e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^2 = e^{i(\theta)} + e^{-i(\theta)} + 2$$

$$1 + t^2 = \frac{2\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)}{\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)^2}$$

$$1 - t^2 = \frac{4}{\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)^2}$$

$$\frac{2t}{1+t^2} = i\,tan(\theta) \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.(I)$$

$$\frac{2t}{1-t^2} = i\,sin(\theta) \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.(II)$$

$$\frac{1+t^2}{1-t^2} = cos(\theta) \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.(III)$$

② أفد من دستوري أويلر في إثبات أنّ: $t = i\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ .... ⊛

③ بالتعويض من جديد للعلاقة ⊛ في (I) و (II) و (III) والموازنة: استنتج المطلوب في ❷.