

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول: $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وفيها $u_0 = 1$ ، والمطلوب :
احسب u_3 ثم احسب المجموع $S = u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8$

السؤال الثاني: لتكن المتتالية :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2 \end{cases}, v_n = u_n + 3$$

- ① برهن v_n متتالية هندسية وعين أساسها.
② اكتب عبارة v_n ثم استنتج u_n بدلالة n

السؤال الثالث: ادرس اطراد المتتاليتين $(y_n)_{n \geq 0}$ ، $(x_n)_{n \geq 0}$ المعرفتين

وفق : $x_n = \frac{4n+5}{n+1}, y_n = \frac{4n+1}{n+2}$

السؤال الرابع: أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة تدريجياً بالعلاقات :

$u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}, u_0 = 0$ متزايدة تماماً.

السؤال الخامس: لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً وفق :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$$

- ① اثبت بالتدرج أن $u_n > 0$ أي أن العدد الطبيعي n
② أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $v_n = \frac{1}{u_n}$ متتالية حسابية وكتب عبارة v_n بدلالة n واستنتج عبارة u_n

السؤال السادس: $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية معرفة وفق : $u_0 = 1, u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{2u_n+6}$ عند كل $n \geq 0$

- ① أثبت أن التابع $x \rightarrow \frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً واستنتج أن $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ أي أن العدد الطبيعي n
② أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متناقصة تماماً

السؤال السابع: : نعرف المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ كما يأتي : $u_0 = 1, u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}$

- ① أثبت أن $0 \leq u_n \leq 4$ أي أن العدد الطبيعي n
② أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متزايدة .

انتهت الأسئلة .. ☺

مع أطيب الامنيات لكم بالنجاح ♥

المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ ← الحد الأول u_1

حسابية

2 4 6 8 10 12 ...

كل حد يتبع عن سابقه [بإضافة] العدد 2

$r=2$ ← [أساسه المتتالية]

* القانون:

$$u_n - u_{n-1} = (n - (n-1))r$$

* برهان حسابية:

$$u_{n+1} - u_n = \text{عدد}$$

* قانون المجموع:

$$S = \frac{\text{عدد الحدود} \times (\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول})}{2}$$

هندسية

2 4 8 16 32 64 ...

كل حد يتبع عن سابقه [بضرب] بالعدد 2

$q=2$ ← [أساسه المتتالية]

* القانون:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = q^{n-(n-1)}$$

* برهان الهندسية:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \text{عدد}$$

* قانون المجموع:

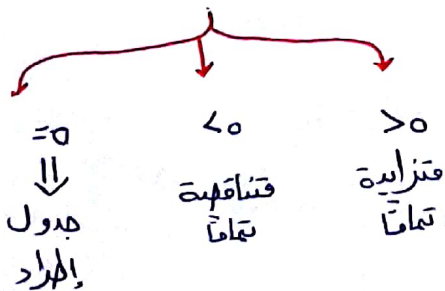
$$S = \text{الحد الأول} \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

دراسة الأهراد

الاستقافة

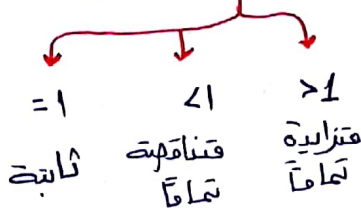
نفرضه $f(x) = \dots$

ثم نشق $f'(x)$



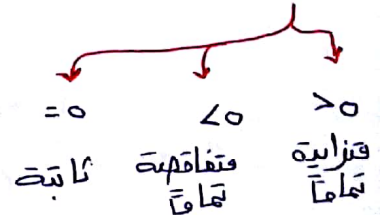
معياري المقسمة

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \heartsuit$$



معياري الطرح

$$u_{n+1} - u_n = \heartsuit$$



سلام تجميع اختصار المتاليات

* السؤال الأول: $q = 2$ $u_0 = 1$

$$\frac{u_3}{u_0} = q^{3-0}$$

$$\frac{u_3}{1} = q^3 \quad \text{نفرقنا}$$

$$u_3 = (2)^3 \times 1 = 8$$

$$S = u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8$$

$$S = u_3 \times \frac{1-q^6}{1-q}$$

$$= 8 \times \frac{1-2^6}{1-2} = 8 \times \frac{1-64}{-1}$$

$$= 8 \times \frac{-36}{-1} = 8 \times 36 = 504$$

* السؤال الثاني:

□ الشرط:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_{n+1} + 3}{u_n + 3}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} u_n - 2 + 3}{u_n + 3} = \frac{\frac{1}{3} u_n + 1}{u_n + 3}$$

* دائماً طرح أمثال u_n عامل مشترك

$$= \frac{\frac{1}{3} [u_n + 3]}{u_n + 3} = \frac{1}{3} \in \mathbb{R}$$

← المتاليه هندسيه أساسه $q = \frac{1}{3}$

2

$$\frac{u_n}{u_0} = q^{n-0}$$

$$u_0 = u_0 + 3 = 1 + 3 = 4$$

$$\frac{u_n}{4} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\Rightarrow u_n = 4 \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\Rightarrow u_n = 4 \frac{1}{3^n} = \frac{4}{3^n}$$

$$u_n = u_{n+3} \quad \text{لدينا}$$

$$\Rightarrow u_n = u_{n-3}$$

$$u_n = \frac{4}{3^n} - 3$$

* السؤال الثالث:

$$y_n = \frac{4n+1}{n+2}$$

نفرقنا تابع

$$f(x) = \frac{4x+1}{x+2}$$

التابع مستمر واشتقاقه $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$$f'(x) = \frac{4(x+2) - 1(4x+1)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{4x+8-4x-1}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2} > 0$$

← التابع f متزايد تماماً

← المتاليه $(u_n)_{n \geq 0}$ متزايده تماماً

$$X_n = \frac{4n+5}{n+1}$$

نفرق تابع :

$$f(x) = \frac{4x+5}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{4(x+1) - 1(4x+5)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{4x+4 - 4x-5}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{(x+1)^2} < 0$$

≤ التابع متناقص تماماً فالمتتالية متناقصة تماماً

* السؤال الرابع :

$$U_{n+1} > U_n \iff \text{برهان قزائية تماماً} \iff$$

البرهان : 1- نبرهن صحة العلاقة من أجل $n=0$ أي سنبرهن

$$U_1 > U_0$$

$$1 > 0 \quad (\text{حقيقة})$$

2- نفرهن صحة العلاقة من أجل n :

$$U_{n+1} > U_n \quad (\text{حقيقة}) \quad \star$$

3- نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$ أي سنبرهن

$$U_{n+2} > U_{n+1}$$

البرهان : ننتقل من * :

$$U_{n+1} > U_n$$

نربح ≤

$$U_{n+1}^2 > U_n^2$$

نضيف 1 :

$$1 + U_{n+1}^2 > 1 + U_n^2$$

نجد

$$\sqrt{1 + U_{n+1}^2} > \sqrt{1 + U_n^2}$$

$$U_{n+2} > U_{n+1}$$

≤ المتتالية قزائية تماماً

* يجب أن تكون العلاقة التالية متراجمة
تنتقل من * ونعمل عمليات
لتوصلنا إلى العلاقة

* السؤال الخامس :

$$U_n > 0 \quad \square$$

$$U_{n+1} = \frac{U_n}{1+U_n}$$

نطبق اقليدس :

$$\frac{1}{1+x} = \frac{x}{x+1} \implies \frac{x}{1+x} = 1 + \frac{-1}{1+x}$$

$$\implies U_{n+1} = 1 + \frac{-1}{1+U_n}$$

1- نبرهن صحة العلاقة من أجل العدد 0

$$U_0 > 0 \quad \text{أي سنبرهن}$$

$$1 > 0 \quad (\text{حقيقة})$$

2- نفرهن صحة العلاقة من أجل n أي

$$U_n > 0 \quad \star$$

3- نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$ أي

$$U_{n+1} > 0 \quad \text{سنبرهن}$$

استنتاج u_n :

$$u_n \cdot u_n = 1$$

$$u_n = \frac{1}{u_n} = \frac{1}{n+1}$$

* السؤال السادس:

$f(x) \xrightarrow{x} \frac{3x+2}{2x+6}$ * \square

التابع مستمر واستقرافي على $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$

$$f'(x) = \frac{3(2x+6) - 2(3x+2)}{(2x+6)^2}$$

$$= \frac{6x + 18 - 6x - 4}{(2x+6)^2}$$

$$= \frac{14}{(2x+6)^2} > 0$$

فالتابع متزايد تمامًا

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \quad *$$

1- نبرهن صحة العلاقة من أجل العدد 0

أي سنبرهن:

$$\frac{1}{2} \leq u_0 \leq 1$$

$$\frac{1}{2} \leq 1 \leq 1 \quad (\text{حقيقة})$$

2- نعلمت صحة العلاقة من أجل n أي:

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \quad *$$

3- نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$ أي:

سنبرهن:

$$\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$$

البرهان: نثبت من \square $u_n > 0$

$$\square \Rightarrow 1 + u_n > 1$$

نقلب ونغير
الحدود $\Rightarrow \frac{1}{1+u_n} < 1$

نضرب بـ (-) و
نضرب الكسور $\frac{-1}{1+u_n} > -1$

نضيف $\square \Rightarrow 1 + \frac{-1}{1+u_n} > 0$

$$u_{n+1} > 0$$

$$u_n = \frac{1}{u_n} \quad (\text{حسابية}) \quad \square 2$$

سنبرهن: عندنا $u_{n+1} - u_n =$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{1+u_n}} - \frac{1}{u_n}$$

$$= \frac{1+u_n}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n}{u_n} = 1 \in \mathbb{R}$$

$\square r=1$ المتتالية حسابية وأساسها

*

$$u_n - u_0 = (n - 0)r$$

$n \leftarrow$ عدد
كامل

$$u_n - u_0 = n(r)$$

$$u_n - 1 = n(1)$$

$$u_n = n + 1$$

نهور الألفاظ:

$$f(u_n) > f(u_{n+1})$$

$$u_{n+1} > u_{n+2}$$

* السؤال السابع:

$$0 \leq u_n \leq 4$$

□

نبرهن صحة العلاقة من أجل $E(0)$:

$$0 \leq u_0 \leq 4$$

$$0 \leq 1 \leq 4$$

حقيقة

نفرق $E(n)$.

$$\square \quad 0 \leq u_n \leq 4$$

نبرهن $E(n+1)$ أي سنبرهن:

$$0 \leq u_{n+1} \leq 4$$

ننطلق من □

$$0 \leq u_n \leq 4$$

$$12 \leq 12 + u_n \leq 16$$

□₁₂₊

$$\sqrt{12} \leq \sqrt{12 + u_n} \leq \sqrt{16}$$

~~□~~

ونكن $\sqrt{12} < 0$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 4$$

حقيقة

البهران: ننطلق من □*

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$$

نهور الألفاظ:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_n) \leq f(1)$$

$$\frac{1}{2} \leq u_{n+1}$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{3u_{n+2}}{2u_n + 6} \leq \frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{8} < 1 \quad \text{ولكن}$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{3u_{n+2}}{2u_n + 6} \leq 1$$

$$\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$$

□ معيار المتناقضية:

$$u_n > u_{n+1}$$

1- نبرهن صحة العلاقة من أجل العدد 0

$$u_0 > u_1$$

$$1 > \frac{5}{8} \quad (\text{حقيقة})$$

2- نبرهن صحة العلاقة من أجل n أي:

$$u_n > u_{n+1} \quad \square \text{ حقيقة}$$

3- نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$ أي:

سنبرهن

$$u_{n+1} > u_{n+2}$$

البهران: ننطلق من □*

$$u_n > u_{n+1}$$

شرط التناقص: $U_{n+1} < U_n$

نبرهن صحة العلاقة من أجل $n=0$

$$U_1 < U_0$$

نقدّم صحة العلاقة من أجل n

$$U_{n+1} < U_n$$

نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$ أي
سنبرهن

$$U_{n+2} < U_{n+1}$$

البرهان نندلج فيه:

نكتب الأضراس

$$P(U_{n+1}) < P(U_n)$$

$$\Rightarrow U_{n+2} < U_{n+1}$$

وهو المطلوب \Leftarrow المتتالية متناقصة

تماماً .