saadeIawael
Bac files

For more useful BAC files tap the link !

BY

SAB

القائمة

اضغط على الأزرار للانتقال إلى اللإختبارات

مدارس الأوائل النموذجيّة الخاصة

المذاكرة الأولى في مادة الرياضيات

للصف الثالث الثانوي العلمي (2022–2023)

الاسم :........

النموذج : A

الدرجة: 600

أولاً : أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول : ليكن f تابعاً معرّفاً واشتقاقياً على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ خطّه البياني C_f ، جدول تغيّراته هو الآتي :

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	e	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty \,\|\|\, -\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

❶ جد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه .
ثمّ استنتج معادلة كل مستقيم مقارب أفقي أو شاقولي لخطّه البياني C_f. وهل يوجد للخط C_f مستقيم مقارب مائل في جوار $-\infty$ ؟ علل إجابتك .

❷ استنتج حلول كلاً من المتراجحات الآتية: $f(x)<0$ و $f(x)\geq 0$ و $f'(x)\leq 0$.

❸ جد كلاً من النهايات الآتية : $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{f(x)}$ و $\lim\limits_{x\to 0} f(f(x))$ و $\lim\limits_{x\to -\infty}\ln(f(x))$.

السؤال الثاني: $ABCD$ رباعي وجوه . و M هي النقطة المحقّقة للعلاقة : $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$
أثبت أنّ الأشعة $\overrightarrow{BM}$ و $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BD}$ مرتبطة خطياً، ثمّ حدّد أي وجهٍ من وجوه رباعي الوجوه تنتمي إليه النقطة M .

السؤال الثالث : a و b و c ثلاثة أعداد عقدية متمايزة تحقّق : $|a|=|b|=|c|$

❶ تحقّق أنّ $a\bar{a}=b\bar{b}=c\bar{c}$.

❷ ليكن العدد العقدي : $w=\bar{b}c-b\bar{c}$.أثبت أنّ w تخيّلي بحت .

❸ ❒ أثبت أنّ $(b+c)\cdot(\bar{b}-\bar{c})=w$.

❒ تحقّق أنّ $\dfrac{b+c}{b-c}=\dfrac{w}{|b-c|^2}$.

❒ استنتج أنّ العدد $\dfrac{b+c}{b-c}$ تخيّلي بحت .

السؤال الرابع: أجب عن السؤالين الآتيين :

❶ حل المعادلة الآتية : $\ln x^2+\ln^2 x+1=0$

❷ ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x)=x-x\ln(1+\dfrac{1}{x})$

a) جد $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

b) أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=x-1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

ثانياً : حل التمارين الأربعة الآتية : (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول : ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}^*$ وفق: $f(x)=\dfrac{(1-x)E(x)}{x}$.

❶ اكتب $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$ (لا تحوي $E(x)$) على المجال $[\frac{1}{2},2]$.

❷ هل f مستمر عند $x=1$ ؟ علّل إجابتك .

❸ هل f مستمر على المجال $[\frac{1}{2},2]$ ؟ علّل إجابتك .

❹ ادرس نهاية التابع f عند $+\infty$.

يوجد صفحة ثانية يرجى قلب الصفحة

التمرين الثاني :

❶ بفرض $z \neq -i$ و $|z| = 1$ ولنعرّف العدد العقدي $w = i\dfrac{z-i}{z+i}$ أثبت أن w حقيقي .

❷ ليكن z عدد عقدي يحقّق $\arg(z) = \theta$ حيث $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$
ولنعرّف العدد العقدي $z_1 = (z + \overline{z}) \cdot z$ استنتج $\arg(z_1)$ بدلالة θ .

التمرين الثالث :

لتكن المعادلة : $4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - 3(3+i\sqrt{3})z - 4 = 0 \qquad (E)$

❶ جد الجذرين التربيعيين للعدد العقدي $6 + 6\sqrt{3}i$.

❷ تحقّق أنّ $-\dfrac{1}{2}$ حل للمعادلة (E) .

❸ عيّن العددين a و b إذا علمت أنّ المعادلة (E) تكتب بالشكل : $(2z+1)(2z^2+az+b) = 0$ ثمّ حل المعادلة (E).

❹ اكتب حلول المعادلة E ولتكن z_1 و z_2 و z_3 بالشكل الأسي . وبفرض $|z_3| = 1$ تحقّق أنّ $z_3^{\,2} = z_1 \cdot z_2$.

التمرين الرابع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$ وفق: $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

❶ ادرس نهاية f عند $-\infty$. واشرح التأويل الهندسي لهذه النتيجة .

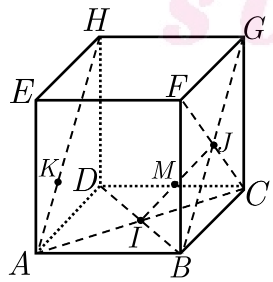
❷ أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته : $y = 2x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$. ثمّ ادرس وضع C بالنسبة إلى Δ

❸ لتكن النقطتان M و M' من الخط C اللتان فاصلتاهما x_0 و $-x_0$ بالترتيب .
أثبت أنّ $f(x_0) - f(-x_0) = 2x_0$ ثمّ استنتج أنّ المستقيم (MM') يوازي المستقيم $y = x$.

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين : (100درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه يساوي 2 . فيه النقطتان I و J مركزي الوجهين $ABCD$ و $BCGF$ على الترتيب والنقطة M منتصف $[IJ]$ و النقطة K تحقّق $\overrightarrow{AK} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AH}$

ولنختر المعلم $(A; \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE})$



❶ جد إحداثيات كل من رؤوس المكعّب وإحداثيات النقاط I و J و M و K .

❷ أثبت أنّ النقاط B و C و M و H تقع في مستوٍ واحد .

❸ أثبت أنّ النقاط C و M و E لا تقع على استقامةٍ واحدة
وتحقّق أنّ المستوي (EMC) هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$.

❹ أثبت أنّ المستقيم (DJ) يوازي المستوي (AFK) .

❺ اكتب معادلة الكرة التي مركزها M وتمس المستوي $(ABCD)$.

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق : $f(x) = \dfrac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}$

❶ جد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واستنتج معادلة كل مستقيم مقارب أفقي أو شاقولي لخطّه البياني C .

❷ أثبت أنّ $f'(x) = \dfrac{-\ln x}{4x\sqrt{x}}$ أياً تكن $x \in]0,+\infty[$ ثمّ نظّم جدولاً بتغيّرات التابع f.

❸ استنتج من جدول تغيّرات التابع f مجموعة حلول المتراجحة $\ln x < 2(\sqrt{x} - 1)$.

❹ جد نقطة تقاطع الخط C مع محور الفواصل .

❺ ارسم الخط C .

....انتهت الأسئلة...

أولاً : أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية :

السؤال الأول :

① f معرفة على $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

2 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = e$

2 ومنه $\boxed{y=e}$ مستقيم مقارب أفقي .

2 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

2 $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$

2 $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$

2 ومنه $\boxed{x=1}$ مستقيم مقارب شاقولي

2 ولا يوجد لـ f مستقيم مقارب مائل في جوار $-\infty$

2 لأن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = e$

② حلول المتراجحة $f(x) < 0$

2+2 $x\in]1,+\infty[\setminus\{3\}$

حلول المتراجحة $f(x) \geq 0$ هي

2+2 $x\in]-\infty,1[\cup\{3\}$

حلول المتراجحة $f'(x) \leq 0$ هي

2+2 $x\in]-\infty,0]\cup[3,+\infty[$

2+2 ③ $\lim_{x\to3}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

2 $\lim_{x\to0} f(x) = 1^+$

2 $\lim_{x\to0} f(f(x)) = \lim_{X\to1^+} f(X) = -\infty$

2 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = e$

2 $\lim_{x\to-\infty} \ln(f(x)) = \lim_{X\to e} \ln(X) = 1$

40

السؤال الثاني :

$\vec{AM} = 3\vec{AB} - \vec{AC} - \vec{AD}$

5+5 $\vec{AM} = 3\vec{AB} - \vec{AB} - \vec{BC} - \vec{AB} - \vec{BD}$

5 $\vec{AM} = \vec{AB} - \vec{BC} - \vec{BD}$

5 $\vec{AB} + \vec{BM} = \vec{AB} - \vec{BC} - \vec{BD}$

5 $\vec{BM} = -\vec{BC} - \vec{BD}$

5 فالأشعة $\vec{BD}$ ، $\vec{BC}$ ، $\vec{BM}$ مرتبطة خطياً

5 فالنقاط B ، C ، D ، M تقع في مستوٍ واحد

5 أي $M\in(BCD)$

40

السؤال الثالث :

① $|a|=|b|=|c|$

2 $|a|^2=|b|^2=|c|^2$

2 $a\bar{a}=b\bar{b}=c\bar{c}$

② $w=\bar{b}c-b\bar{c}$

3 $\bar{w}=b\bar{c}-\bar{b}c$

3 $\bar{w}=-(\bar{b}c-b\bar{c})$

$\bar{w}=-w$

3 ومنه w تخيلي بحت

③ إثبات : $(b+c)(\bar{b}-\bar{c})=w$

$P_1=(b+c)(\bar{b}-\bar{c})$

3 $=b\bar{b}-b\bar{c}+c\bar{b}-c\bar{c}$

3 $=\bar{b}c-b\bar{c}=w=P_2$

3 $\frac{b+c}{b-c}=\frac{(b+c)(\overline{b-c})}{(b-c)(\overline{b-c})}$

3+3 $=\frac{(b+c)(\bar{b}-\bar{c})}{|b-c|^2}=\frac{w}{|b-c|^2}$

3+3 $\overline{\left(\frac{b+c}{b-c}\right)}=\overline{\left(\frac{w}{|b-c|^2}\right)}=\frac{\bar{w}}{|b-c|^2}$

3 $=-\frac{w}{|b-c|^2}=-\left(\frac{b+c}{b-c}\right)$

3 ومنه $\frac{b+c}{b-c}$ تخيلي بحت .

40

السؤال الرابع:

① $\ln x^2 + \ln^2 x + 1 = 0$

■ المعادلة معرّفة عندما

2 $x^2>0$ ، $x>0$

2 $x\in\mathbb{R}^*$ ، $x\in]0,+\infty[$

2 ومنه $x\in]0,+\infty[=D_1$

2 $2\ln x + (\ln x)^2 + 1 = 0$

$(\ln x)^2 + 2\ln x + 1 = 0$

2 $(\ln x+1)^2=0$

2 $\ln x + 1 = 0$

2 $\ln x = -1$

2 $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$ مقبول

$\boxed{x=\frac{1}{e}}$

$S=\{\frac{1}{e}\}$

② $f(x)=x - x\ln(1+\frac{1}{x})$

a) أوجد $\lim_{x\to0} f(x)$

2 نلاحظ أن $\lim_{x\to0} f(x)$ هي حالة عدم تعيين

من الشكل $0\times\infty$ نزيلها:

2 $f(x)=x-x\ln(\frac{x+1}{x})$

2 $f(x)=x-x(\ln(x+1)-\ln x)$

2+2 $f(x)=\underbrace{x}_{\to0}-\underbrace{x}_{\to0}\underbrace{\ln(x+1)}_{\to0}+\underbrace{x\ln x}_{\to0}$

علماً $\lim_{x\to0} x\ln x = 0$ (مبرهنة) فإن

2 $\lim_{x\to0} f(x)=0$

2 b) $f(x)-y_\Delta = -x\ln(1+\frac{1}{x})+1$

2 $f(x)-y_\Delta = -\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}+1$

2 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{X\to0}\frac{\ln(1+X)}{X}=1$

2 ومنه $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta) = -1+1=0$

2 ومنه نستنتج Δ الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

40 ## ثالثاً: حل التمارين الأربعة الآتية:

التمرين الأول: $f(x)=\frac{(1-x)E(x)}{x}$

① 4 4 4
$$f(x)=\begin{cases}0 & ; x\in[\frac{1}{2},1[\\ \frac{1-x}{x} & ; x\in[1,2[\\ -1 & ; x=2\end{cases}$$

② 4 $\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}(0)=0$

4 $f(1)=\frac{1-1}{1}=0$

4 بما أن $\lim_{x\to1^-}f(x)=f(1)$

4 فإن f مستمر عند (1)

③ التابع $x\longmapsto 0$ مستمر على $[\frac{1}{2},1[$

التابع $x\longmapsto\frac{1-x}{x}$ مستمر على $[1,2[$

حتى يكون f مستمراً على $[\frac{1}{2},2]$ يجب أن يكون مستمراً عند 1 وعند 2

ووجدنا أن f مستمر عند 1 حسب الطلب السابق

لندرس استمرار f عند 2

4+2 $\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}(\frac{1-x}{x})=-\frac{1}{2}\neq f(2)=-1$

2 وبالتالي f ليس مستمراً عند 2

4 ومنه أصبح f ليس مستمراً على $[\frac{1}{2},2]$.

A	مادة الرياضيات	سلم تصحيح - المذاكرة الأولى – شتاء 2022-2023

(4) $f(x) = \frac{(1-x)E(x)}{x}$

4 $x-1 < E(x) \le x$

لأن x في جوار $+\infty$ فإذا ضربنا

المتراجحة بـ $(1-x)$ سوف تتغير جهة التراجح

4 $(x-1)(1-x) > (1-x)E(x) \ge x(1-x)$

نقسم على x (موجب)

2 $\frac{-(x-1)^2}{x} > f(x) \ge 1-x$

2 ومنه $\frac{-(x-1)^2}{x} > f(x)$

وبما أن

4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-(x-1)^2}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$

فإن استنادا إلى مبرهنة المقارنة عند اللانهاية

4 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

60 **التمرين الثاني:**

(1) $w = i\,\frac{z-i}{z+i}$

4 $\bar{w} = -i\,\frac{\bar{z}+i}{\bar{z}-i}$

4 بما أن $|z|=1$ فإن $\bar{z} = \frac{1}{z}$

4 $\bar{w} = -i\,\frac{\frac{1}{z}+i}{\frac{1}{z}-i}$

4 $\bar{w} = -i\,\frac{1+iz}{1-iz}$

4 $\bar{w} = i\,\frac{-1-iz}{1-iz}$

4+4 $\bar{w} = i\,\frac{i^2-iz}{-i^2-iz}$

4 $\bar{w} = i\,\frac{-i(z-i)}{-i(z+i)}$

4 $\bar{w} = i\,\frac{z-i}{z+i} = w$

4 ومنه w حقيقي.

(2) $\arg(z) = \theta$ ، $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

$z_1 = (z+\bar{z})\cdot z$

4 عند نعوض نجد :

$z+\bar{z} = 2x$

وبما أن z يقع في الربع الثاني يكون

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

4 فإن $x<0$

$z_1 = (2x)\cdot z$

4 $\arg(z_1) = \arg((2x)\cdot z)$

4 $\arg(z_1) = \arg(2x) + \arg(z)$

4 $\boxed{\arg(z_1) = \pi + \theta}$

60

A | مادة الرياضيات | سلم تصحيح - المذاكرة الأولى – شتاء 2022-2023

التمرين الثالث :

1) نفرض $w^2 = 6+6\sqrt{3}\,i$ 2

نضع $w = x+yi$

$(x+yi)^2 = 6+6\sqrt{3}\,i$

$x^2-y^2+2xyi = 6+6\sqrt{3}\,i$

2 $\boxed{x^2-y^2=6}$

$2xy = 6\sqrt{3}$

2 $\boxed{xy=3\sqrt{3}}$

$|w^2| = |6+6\sqrt{3}\,i|$

$|w|^2 = \sqrt{36+108} = \sqrt{144} = 12$

2 $\boxed{x^2+y^2=12}$

أصبح لدينا جملة المعادلات الآتية

$$\begin{cases} x^2+y^2=12 & (1) \\ x^2-y^2=6 & (2) \\ x\cdot y=3\sqrt{3} & (3) \end{cases}$$

■ بجمع (1) و (2) نجد :

2 $2x^2=18$

$x^2=9$

2 $\boxed{x=3}$ ، $\boxed{x=-3}$

■ بطرح (2) من (1) نجد :

2 $2y^2=6$

$y^2=3$

2 $\boxed{y=\sqrt{3}}$ ، $\boxed{y=-\sqrt{3}}$

■ بما أن $x\cdot y=3\sqrt{3}$ ومنه x و y لهما الإشارة ذاتها :

2 $w_1 = 3+\sqrt{3}\,i$

2 $w_2 = -3-\sqrt{3}\,i$

وهي الجذران التربيعيان للعدد $6+6\sqrt{3}\,i$

طريقة (2) : نكتب $6+6\sqrt{3}\,i$ بالشكل الأسي

$r=\sqrt{36+108}=12$

$\cos\theta = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ ، $\sin\theta = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ؛ $\theta \in [0,2\pi[$ ، $\theta = \frac{\pi}{3}$

$6+6\sqrt{3}\,i = 12\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

$w^2 = 12\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

نفرض $w = r\,e^{i\theta}$

$(r\,e^{i\theta})^2 = 12\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

$r^2\,e^{2i\theta} = 12\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

$r^2=12 \Rightarrow \boxed{r=2\sqrt{3}}$

$2\theta = \frac{\pi}{3}+2\pi k$

$\theta = \frac{\pi}{6}+\pi k \;;\; k\in\{0,1\}$

$\boxed{\theta=\frac{\pi}{6}}$ لما $k=0$

$w_1 = 2\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$

$\theta = \frac{7\pi}{6}$ لما $k=1$

$w_2 = 2\sqrt{3}\,e^{i\frac{7\pi}{6}}$

2) لنعوض $z=-\frac{1}{2}$ في المعادلة (E)

$4\left(-\frac{1}{2}\right)^3-6i\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^2-3(3+i\sqrt{3})\left(-\frac{1}{2}\right)-4$

2 $= -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}\,i+\frac{9}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i-4$

2 $=0$

ومنه $-\frac{1}{2}$ حل للمعادلة (E).

3) $(2z+1)(2z^2+az+b)=0$

$4z^4+2az^2+2bz+2z^2+az+b=0$

2 $4z^4+(2a+2)z^2+(2b+a)z+b=0$

بالمطابقة مع المعادلة (E) نجد

$$\begin{cases} 2a+2=-6\sqrt{3}\,i & (1) \\ 2b+a=-3(3+i\sqrt{3}) & (2) \\ b=-4 & (3) \end{cases}$$

2 2 2

من (1) نجد أن $2a=-2-6\sqrt{3}\,i$

2 $\boxed{a=-1-3\sqrt{3}\,i}$

A	مادة الرياضيات	2022-2023 المذاكرة الأولى – شتاء	سلم تصحيح -

من (3) : $\boxed{b=-4}$

نتحقق بالتعويض في (2) فنجد

$2(-4)-1-3\sqrt{3}i = -9-3\sqrt{3}i$ 2

$= -3(3+i\sqrt{3})$

محققة

فالمعادلة (E) تكتب بالشكل

$(2z+1)(2z^2+(-1-3\sqrt{3}i)z-4)=0$ 2

إما: $2z+1=0$

$\boxed{z_1 = -\frac{1}{2}}$ (صحيح)

أو: $2z^2+(-1-3\sqrt{3}i).z-4=0$

$a=2,\ b=-1-3\sqrt{3}i,\ c=-4$

$\Delta = b^2-4ac$ 2

$\Delta = (-1-3\sqrt{3}i)^2-4(2)(-4)$

$\Delta = 1+6\sqrt{3}i-27+32$

$\Delta = 6+6\sqrt{3}i = (3+\sqrt{3}i)^2$ 2

$z_2 = \frac{1+3\sqrt{3}i+3+\sqrt{3}i}{2(2)}$

$\boxed{z_2 = 1+\sqrt{3}i}$ 2

$z_3 = \frac{1+3\sqrt{3}i-3-\sqrt{3}i}{2(2)}$

$\boxed{z_3 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$ 2

(4)

$z_1 = -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^{i\pi}$ 2

$z_2 = 1+\sqrt{3}i$

$r = |z_2| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$, $\theta \in]-\pi, \pi]$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$

2 $\boxed{z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}}$

$z_3 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

2 $\boxed{z_3 = e^{\frac{2\pi}{3}i}}$

2 $\boxed{z_3^2 = e^{\frac{4\pi}{3}i}}$

$z_1 \cdot z_2 = \frac{1}{2}e^{i\pi} \cdot 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$

2 $z_1 \cdot z_2 = e^{i(\pi+\frac{\pi}{3})} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

ومنه

2 $\boxed{z_3^2 = z_1 \cdot z_2}$

60 **التمرين الرابع:**

$f(x) = x+\sqrt{x^2-1}$

(1) نحسب: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3 حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

لإزالتها نضرب بالمرافق ونقسم عليه

3 $f(x) = \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$

3 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

التأويل الهندسي لهذه النتيجة

3 هو أن المستقيم $\boxed{y=0}$ مستقيم مقارب أفقي للخط C في جوار $-\infty$

(2) $f(x)-y_\Delta = \sqrt{x^2-1}-x$ 2

3 $f(x)-y_\Delta = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}$

3 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta) = 0$

3 ومنه المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

لدراسة وضع C بالنسبة إلى D: y = x
ندرس إشارة الفرق:

$f(x) - y_D = \sqrt{x^2-1} - x$

نحل $f(x) - y_D = 0$

3 $\sqrt{x^2-1} - x = 0$

$\sqrt{x^2-1} = x$

3 شرط الحل: $x \geq 0$

نربع الطرفين

$x^2 - 1 = x^2$

3 $-1 = 0$

مستحيلة الحل
(بما أن $f(x) - y_D$ مستمرة على مجموعة تعريفه
فإن $f(x) - y_D$ يحافظ على إشارة واحدة
في كل مجال من مجالات مجموعة تعريفه)

x	$-\infty$ … -1	-1 … 1	1 … $+\infty$
3 $f(x) - y_D$	$+$		$-$
3 الوضع النسبي	C يقع فوق D		C يقع تحت D

3 (3) $f(x_0) = x_0 + \sqrt{x_0^2-1}$

3 $f(-x_0) = -x_0 + \sqrt{x_0^2-1}$

ومنه

3 $f(x_0) - f(-x_0) = x_0 - (-x_0) = 2x_0$

3 النقطة $M(x_0, f(x_0))$
$M'(-x_0, f(-x_0))$
لنحسب ميل المستقيم (MM')

3 $m_{(MM')} = \dfrac{f(x_0) - f(-x_0)}{x_0 - (-x_0)}$

3 $m_{(MM')} = \dfrac{2x_0}{2x_0} = 1$

3 فالمستقيم (MM') يوازي المستقيم $y = x$ لأن لهما الميل ذاته

60

الحل الثالث: حل المسألتين الآتيتين:

المسألة الأولى:

2+2 (1) $A(0,0,0)$ ، $E(0,0,2)$
2+2 $B(2,0,0)$ ، $F(2,0,2)$
2+2 $D(0,2,0)$ ، $H(0,2,2)$
2+2 $C(2,2,0)$ ، $G(2,2,2)$
2+2 $I(1,2,0)$ ، $J(2,1,1)$
2+2 $M(\frac{3}{2},1,\frac{1}{2})$ ، $K(0,\frac{2}{3},\frac{2}{3})$

2 (2) $\overrightarrow{BC}(0,2,0)$
2 $\overrightarrow{BH}(-2,2,2)$
2 $\overrightarrow{BM}(\frac{-1}{2},1,\frac{1}{2})$

نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BH}$
غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما
غير متناسبة $(\frac{0}{-2} \neq \frac{2}{2})$
فالنقاط B و C و H تعيّن مستوي وحيد
أي تعيّن مستوي وحيد (BCH)

حتى تنتمي النقطة M إلى المستوي (BCH)
يجب أن تكون الأشعة:
$\overrightarrow{BM}$ و $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BH}$ مرتبطة خطياً.
لنثبت أن عددين حقيقيين a و b يحققان

$\overrightarrow{BM} = a\,\overrightarrow{BC} + b\,\overrightarrow{BH}$

2 $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

2 $\begin{cases} -2b = -\frac{1}{2} & (1) \\ 2a + 2b = 1 & (2) \\ 2b = \frac{1}{2} & (3) \end{cases}$

لنأخذ $\{(1), (2)\}$
2 من (1) نجد أن $\boxed{b = \frac{1}{4}}$
نعوض في (2)

$2a + \frac{1}{2} = 1$

2 $\boxed{a = \frac{1}{4}}$

نتحقق بالمعادلة (3)

$2(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$

2 $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ محققة.

وبالتالي $\vec{BM} = \frac{1}{4}\vec{BC} + \frac{1}{4}\vec{BH}$ 2

فالأشعة $\vec{BM}$ ، $\vec{BC}$ و $\vec{BH}$ 2

مرتبطة خطياً

فالنقاط M ، B ، C ، H تقع في مستوٍ واحد 2

③ $\vec{EM}\left(\frac{3}{2}, 1, -\frac{3}{2}\right)$ 2

$\vec{EC}(2, 2, -2)$ 2

نجد مركبات الشعاعين $\vec{EM}$ و $\vec{EC}$

غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة 2

$\left(\frac{\frac{3}{2}}{2} \neq \frac{1}{2}\right)$

فالنقاط E ، M ، C لا تقع على استقامة واحدة فهي تحدد المستوي (EMC) 2

M منتصف [IJ] فرضاً ومنه 2

$MI = MJ$ ... ① 2

$CI = \frac{1}{2}CA = \frac{1}{2}\times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$

$CJ = \frac{1}{2}CF = \frac{1}{2}\times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$ 2

② ... $CI = CJ$ 2

$EI = \sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2+(2-0)^2}$

$EI = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$ 2

$EJ = \sqrt{(2-0)^2+(1-0)^2+(2-1)^2}$

$EJ = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$ 2

ومنه $EI = EJ$ ③ 2

من ① و ② و ③ نجد أن المستوي (EMC) هو المستوي المحوري للقطعة [IJ] 2

④ $\vec{DJ}(2, -1, 1)$ 2

$\vec{AF}(2, 0, 2)$ 2

$\vec{AK}\left(0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 2

لنبحث عن عددين حقيقيين a و b تحققان

$\vec{DJ} = a\vec{AF} + b\vec{AK}$ 2

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$ 2

$$\begin{cases} 2a = 2 & (1) \\ \frac{2}{3}b = -1 & (2) \\ 2a + \frac{2}{3}b = 1 & (3) \end{cases}$$ 2 2 2

لنأخذ المعادلتين (1) و (2)

من (1) نجد أن $\boxed{a=1}$ 2

ومن (2) نجد أن $\boxed{b=-\frac{3}{2}}$ 2

نتحقق بالتعويض في (3) فنجد

$2(1) + \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2}\right) =$ 2

$2 - 1 = 1$

محققة

ومنه $\vec{DJ} = \vec{AF} - \frac{3}{2}\vec{AK}$ 2

فالأشعة $\vec{DJ}$ ، $\vec{AF}$ ، $\vec{AK}$ مرتبطة خطياً

فالمستقيم (DJ) يوازي المستوي (AFK) 2

⑤ نصف قطر الكرة هو بعد M عن المستوي (ABCD)

ومنه $R = z_M = \frac{1}{2}$ 2

معادلة الكرة المطلوبة هي :

$$\boxed{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + \left(z-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}}$$ 2

100

المسألة الثانية:

$$f(x)=\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}$$

① f معرفة ومستمرة واشتقاقية على $]0,+\infty[$

4 $\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$

4 مستقيم مقارب شاقولي $\boxed{x=0}$

عند $+\infty$: نلاحظ أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ هي حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

وبالتالي:

4 $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

4 $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2}\frac{\ln(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}$

4 $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

4 $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X}=0$

4 $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=0$

4 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

4 ومنه مستقيم مقارب أفقي $\boxed{y=0}$ عند $+\infty$.

4 ② $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(2\sqrt{x})-2\frac{1}{2\sqrt{x}}(2+\ln x)}{4x}$

4 $f'(x)=\frac{\cancel{\frac{2}{\sqrt{x}}}-\cancel{\frac{2}{\sqrt{x}}}-\frac{\ln x}{\sqrt{x}}}{4x}$

4 $f'(x)=\frac{-\ln x}{4x\sqrt{x}}$

نجعل $f'(x)=0$

4 $-\ln x=0$

$\ln x=0$

4 $\boxed{x=1}$

4 $f(1)=\frac{2}{2}=1$

4	x	0		1	$+\infty$
4	$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$
4	$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	1	↘ 0

③ $\ln x<2(\sqrt{x}-1)$

المتراجحة محققة من أجل $x\in]0,+\infty[$

نكتب المتراجحة بدلالة $f(x)$

$\ln x<2\sqrt{x}-2$

4 $2+\ln x<2\sqrt{x}$

نقسم طرفي المتراجحة على $2\sqrt{x}$

4 $\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}<1$

4 $f(x)<1$

نلاحظ من جدول تغيرات الـ f

4 أن جميع حلول المتراجحة $f(x)<1$ هي $x\in]0,1[\cup]1,+\infty[$

④ نحل $f(x)=0$

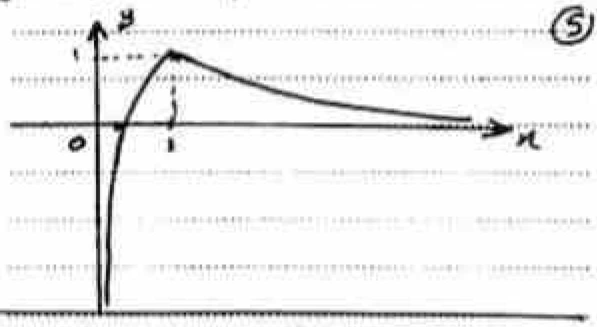
$2+\ln x=0$

4 $\ln x=-2$

ومنه $x=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$

4 نقطة تقاطع C مع محور الفواصل هي $(\frac{1}{e^2},0)$

4 ⑤



100 انتهت الأجوبة

مدارس الأوائل النموذجية الخاصة

المذاكرة الأولى في مادة الرياضيات — الاسم :........

للصف الثالث الثانوي العلمي (2022–2023) — النموذج : B — الدرجة: 600

أولاً : أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف والاشتقاقي على $I =]-\infty, -1[$. جدول تغيّراته هو الآتي:

x	$-\infty$		-2		-1
$f'(x)$		$-$	0	$-$	‖
$f(x)$	2	↘	0	↘	$-\infty$ ‖

❶ جِد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه

واستنتج معادلة كل مستقيم مقارب أفقي أو شاقولي لخطه البياني.

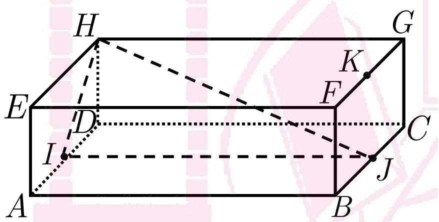
❷ أثبت أنّ للمعادلة $f(x) = -1$ حل وحيد في I .

❸ هل للخط C مستقيمات مقاربة مائلة ؟ علل إجابتك .

❹ ما حلول المتراجحة $f(x) > 0$ ؟

❺ احسب $\lim\limits_{x \to (-2)^-} \dfrac{1}{f(x)}$.

السؤال الثاني:



$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات .

ولتكن النقاط: I و J و K منتصفات الأحرف:

$[AD]$ و $[BC]$ و $[FG]$ على الترتيب

❶ أثبت أنّ $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{IG}$.

❷ أثبت اكتب $\overrightarrow{AK}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IH}$. واستنتج أنّ المستقيم (AK) يوازي المستوي (IJH) .

السؤال الثالث :

في حالة $z \neq 1$ نضع $w = \dfrac{iz}{z-1}$ عيّن مجموعة الأعداد العقدية z التي تجعل w تخيلياً بحتاً .

السؤال الرابع:

❶ حل المعادلة الآتية : $\ln|x-3| + \ln|x+3| = \ln(8x)$.

❷ ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$ وفق العلاقة : $f(x) = x + 2 - \ln(\dfrac{x-1}{x+2})$

أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y = x + 2$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$. ثمّ ادرس وضع C بالنسبة إلى Δ .

ثانياً : حل التمارين الأربعة الآتية : (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول :

أجب عن السؤالين الآتيين :

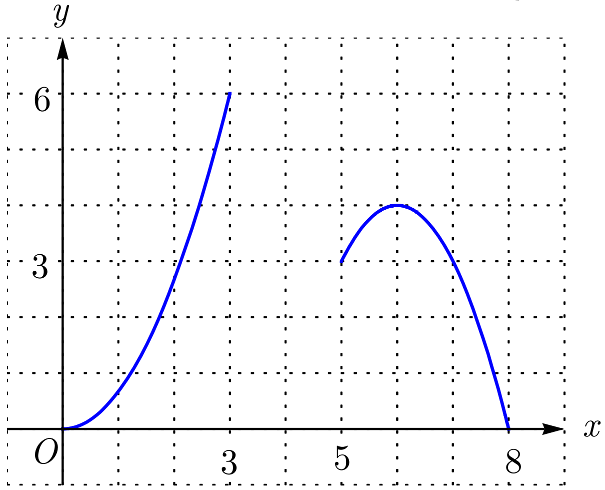
❶ جد عددين عقديين p و q كي تقبل المعادلة : $pz^2 + (-1+3i)z + q = 0$

العددين : $z_1 = -2i$ و $z_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$ جذرين لها .

❷ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة الآتية : $z^2 - 4iz + 5 = 0$.

يوجد صفحة ثانية يرجى قلب الصفحة

التمرين الثاني : في الشكل المجاور: جزء من الخط البياني C للتابع f المعرّف على $[0,8]$ وفق العلاقة :



$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x^2 & : x\in[0,3]\\ ax+b & : x\in]3,5[\\ 4-(x-6)^2 & : x\in[5,8]\end{cases}$$

عيّن a و b إذا علمت أنّ التابع f مستمر على المجال $[0,8]$.

التمرين الثالث : لتكن الأعداد العقدية : $z_1=1+i\sqrt{3}$ و $z_2=e^{-i\frac{\pi}{4}}$ و $z_3=e^{i\frac{\pi}{12}}$.

❶ اكتب z_1 بالشكل الأسي .

❷ اكتب z_2 بالشكل الجبري .

❸ تحقّق أنّ $z_1\cdot z_2=2z_3$ ثمّ استنتج z_3 بالشكل الجبري .

❹ استنتج كلاً من $\sin\frac{\pi}{12}$ و $\cos\frac{\pi}{12}$.

التمرين الرابع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x)=\dfrac{x^3+2\cos^2 x-2}{x^2}$

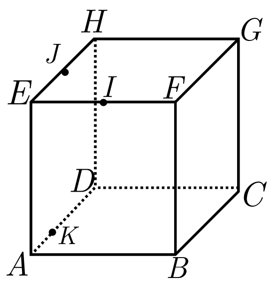
❶ احسب $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.

❷ أثبت أنّ للخط C مستقيم مقارب مائل Δ اكتب معادلته.

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين : (100درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: $ABCDEFGH$ مكعّب . I منتصف $[EF]$ و J منتصف $[EH]$

K نقطة تحقّق $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$. لنختر المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$



❶ جد إحداثيات جميع رؤوس المكعب وإحداثيات النقاط I و J و K .

❷ تحقّق أنّ $\overrightarrow{HF}$ و $\overrightarrow{HK}$ هما شعاعا توجيه المستوي .

❸ تحقّق أنّ المستقيم (AE) لا يوازي المستوي (FHK) .

❹ لتكن النقطة $M(0,0,m)$ من المستقيم (AE) . عيّن m حتى تنتمي النقطة M إلى المستوي (FHK) .

❺ بما أنّ المستقيم (AE) لا يوازي المستوي (FHK). استنتج نقطة تقاطعهما . معللاً إجابتك .

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=x^2(1-2\ln x)$

❶ جِدْ نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه .

❷ أثبت أنّ $f'(x)=-4x\ln x$ أياً تكن $x\in]0,+\infty[$ ثمّ نظّم جدولاً بتغيّرات f .

❸ أوجد نقطة تقاطع C مع محور الفواصل ثمّ ارسم ما وجدته من مستقيمات مقاربة ثمّ ارسم C .

❹ استنتج رسم الخط البياني C_1 للتابع f_1 المعيّن بالعلاقة : $f_1(x)=x^2(-1+2\ln(-x))$.

انتهت الأسئلة

أولاً: أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية:

السؤال الأول:

1) f مستمرة على $I =]-\infty, -1[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ 4

ومنه $\boxed{y=2}$ مستقيم مقارب أفقي للخط C في جوار $-\infty$ 4

$\lim\limits_{x\to-1} f(x) = -\infty$ 4

ومنه $\boxed{x=-1}$ مستقيم مقارب شاقولي 4

2) في المجال $]-\infty,-1[$ يكون f مستمراً 2

ومتناقصاً تماماً عليه 2

ومنه $f(]-\infty,-1[) =]-\infty, 2[$ 2

و $-1 \in]-\infty, 2[$

فللمعادلة $f(x) = -1$ حل وحيد α

في المجال $I =]-\infty,-1[$ 2

3) يقع الخط C تحت مستقيمه المقارب بجوار $-\infty$ 4

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2^-$ 4

4) حلول المتراجحة $f(x) > 0$ هي

$x \in]-\infty, -2[$ 4

5) $\lim\limits_{x\to(-2)^-} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ 4

40

السؤال الثاني:

4×3 1) $\vec{AK} = \vec{AI} + \vec{IG} + \vec{GK}$

4 $\vec{AK} = \vec{IG}$

2)

5 $\vec{AK} = \vec{IG}$

5 $= \vec{IH} + \vec{HG}$

5 $= \vec{IH} + \vec{IJ}$

$\vec{AK} = \vec{IH} + \vec{IJ}$

5 فالأشعة $\vec{AK}$ و $\vec{IH}$ و $\vec{IJ}$ مرتبطة خطياً

4 فالمستقيم (AK) يوازي المستوي (IJH)

40

السؤال الثالث:

$w = \frac{iz}{z-1}$

5 يكون w تخيلياً بحتاً إذا وفقط إذا كان $\bar{w} = -w$

5 $\overline{\left(\frac{iz}{z-1}\right)} = \frac{-iz}{z-1}$

5 $\frac{-i\bar{z}}{\bar{z}-1} = \frac{-iz}{z-1}$

5 $-i\bar{z}(z-1) = iz(\bar{z}-1)$

5 $-i\cancel{\bar{z}z} + i\bar{z} = -i\cancel{z\bar{z}} + iz$

$i\bar{z} = iz$

5 $\bar{z} = z$

5 ومنه z حقيقي، باستثناء $z=1$

5 مجموعة الأعداد العقدية z تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية عدا $\{1\}$

40

السؤال الرابع:

① $\ln|x-3| + \ln|x+3| = \ln(8x)$

المعادلة معرّفة عندما

2 $|x-3|>0$ و $|x+3|>0$ و $8x>0$

2 $x\neq 3$ و $x\neq -3$ و $x>0$

2 ومنه $x\in]0,+\infty[\setminus\{3\}=D_1$

2 $\ln(|x-3|\cdot|x+3|) = \ln(8x)$

2 $\ln(|x^2-9|) = \ln(8x)$

$|x^2-9| = 8x$

إما:

2+2 $x^2-9=-8x$

$x^2+8x-9=0$

$(x+9)(x-1)=0$

2+2 مرفوض $\boxed{x=-9}$

مقبول $\boxed{x=1}$

أو:

$x^2-9=8x$

$x^2-8x-9=0$

$(x-9)(x+1)=0$

$x-9=0 \Rightarrow \boxed{x=9}$ مقبول

2+2 $x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$ مرفوض

$S=\{1,9\}$

② $f(x)=x+2-\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$

إثبات أن $D: y=x+2$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

2 $f(x)-y_D = -\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$

2 $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)=1$

2 $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)=\lim_{X\to 1}\ln X=0$

2 ومنه $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_D)=0$

2 فالمستقيم $D: y=x+2$ مستقيم مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

لدراسة وضع C بالنسبة إلى D ندرس إشارة الفرق:

$f(x)-y_D = -\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$

نحل $f(x)-y_D=0$

$\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)=0$

2 $\frac{x-1}{x+2}=1$

$x-1=x+2$

مستحيل $-1=2$

(لا يوجد نقط مشتركة بين D و C)

x	$-\infty$ … -2	-2 … 1	1 … $+\infty$
$f(x)-y_D$	$-$		$+$
الوضع النسبي	C تحت D		C فوق D

40

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية:

التمرين الأول:

① $p z^2 + (-1+3i) z + q = 0$

5 $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} = \frac{1-3i}{p}$

$-2i + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i = \frac{1-3i}{p}$

5 $\frac{1}{2} - \frac{3}{2} i = \frac{1-3i}{p}$

5 $p = \frac{1-3i}{\frac{1}{2} - \frac{3}{2} i}$

$p = \frac{1-3i}{\frac{1-3i}{2}} = 2$

5 $\boxed{p=2}$

5 $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$

5 $-2i\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\right) = \frac{q}{p}$

5 $-i + 1 = \frac{q}{2}$

5 $\boxed{q = 2-2i}$

② $z^2 - 4iz + 5 = 0$

$a = 1 ,\ b = -4i ,\ c = 5$

5 $\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-4i)^2 - 4(1)(5)$

$= -16 - 20$

5 $= -36 < 0$

5 $z_1 = \frac{4i + 6i}{2} = 5i$

5 $z_2 = \frac{4i - 6i}{2} = -i$

60

التمرين الثاني:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} x^2 & : x \in [0,3] \\ ax+b & : x \in]3,5[\\ 4-(x-6)^2 & : x \in [5,8] \end{cases}$$

2 الحل: التابع $x \longmapsto \frac{2}{3}x^2$ مستمر على $[0,3]$

2 التابع $x \longmapsto ax+b$ مستمر على $]3,5[$

2 التابع $x \longmapsto 4-(x-6)^2$ مستمر على $[5,8]$

4 حتى يكون f مستمراً على $[0,8]$

يجب أن يكون مستمراً عند 3 وعند 5

الاستمرار عند (3)

5 $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (ax+b) = 3a+b$

5 $f(3) = \frac{2}{3}(9) = 6$

5 الشرط: $\lim_{x \to 3^+} f(x) = f(3)$

5 ① $\boxed{3a+b = 6}$

الاستمرار عند (5):

5 $\lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^-} (ax+b) = 5a+b$

5 $f(5) = 4-(5-6)^2 = 3$

5 الشرط: $\lim_{x \to 5^-} f(x) = f(5)$

5 ② $\boxed{5a+b = 3}$

بطرح (2) من (1) نجد

5 $-2a = 3$

$\boxed{a = -\frac{3}{2}}$

نعوض في (1)

$-\frac{9}{2} + b = 6$

5 $b = 6 + \frac{9}{2} = \boxed{\frac{21}{2}}$

من أجل $a = -\frac{3}{2}$ و $b = \frac{21}{2}$ فإن f مستمر على $[0,8]$

60

التمرين الثالث :

$z_1 = 1+\sqrt{3}i$

$z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$z_3 = e^{i\frac{\pi}{12}}$

① $z_1 = 1+\sqrt{3}i$

4 $r = |z_1| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

4 $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$

4 $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ⎬ $\theta \in$ (الربع الأول) ، $\theta = \frac{\pi}{3}$

4 $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

② $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$

4 $z_2 = \cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})$

4 $\boxed{z_2 = +\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i}$

③ 4 $z_1 \cdot z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}$

4 $z_1 \cdot z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$

4 ومنه $z_1 \cdot z_2 = 2z_3$

4 $(1+i\sqrt{3})\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i) = 2z_3$

4 $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{6}}{2}i + \frac{\sqrt{6}}{2} = 2z_3$

$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}i = 2z_3$

4 $\boxed{z_3 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i}$

4) بالمقارنة بين الشكل الجبري والأسي للعدد z_3 نجد

4 $e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$

$\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$

4 $\boxed{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

4 $\boxed{\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

60

التمرين الرابع :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق

$f(x) = \frac{x^3 + 2\cos^2 x - 2}{x^2}$

1) نلاحظ أن $\lim_{x\to 0} f(x)$ في حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

4 $f(x) = x + \frac{2\cos^2 x - 2}{x^2}$

4 $f(x) = x - \frac{2(1-\cos^2 x)}{x^2}$

4 $f(x) = x - 2\frac{\sin^2 x}{x^2}$

4 $f(x) = x - 2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$

4 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

4 ومنه $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = -2}$

2) $f(x) = x + \frac{2\cos^2 x - 2}{x^2}$

4 نعرف $D: y = x$

$f(x) - y_D = \frac{2\cos^2 x - 2}{x^2}$ 4

$0 \le \cos^2 x \le 1$ 4

نضرب بالعدد (2)

$0 \le 2\cos^2 x \le 2$ 4

نطرح (2)

$-2 \le 2\cos^2 x - 2 \le 0$ 4

نقسم على x^2

$\frac{-2}{x^2} \le f(x) - y_D \le 0$ 4

وبما أن

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-2}{x^2}\right) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (0) = 0 \end{cases}$$

فاستناداً إلى مبرهنة الإحاطة (1) نجد: 4

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y_D) = 0$$

ومنه مستقيم مقارب $D: \boxed{y = x}$ مائل للخط C في جوار $+\infty$. 4

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: 60

المسألة الأولى:

3+3 (1) $A(0,0,0)$ ، $E(0,0,1)$

3+3 $B(1,0,0)$ ، $F(1,0,1)$

3+3 $D(0,1,0)$ ، $H(0,1,1)$

3+3 $C(1,1,0)$ ، $G(1,1,1)$

3+3 $I(\frac{1}{2},0,1)$ ، $J(0,\frac{1}{2},1)$

3 $K(0,\frac{1}{4},0)$

3 (2) $\vec{HF}(1,-1,0)$

3 $\vec{HK}(0,-\frac{3}{4},-1)$

3 نلاحظ أن الشعاعين $\vec{HF}$ و $\vec{HK}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة

$\left(\frac{-1}{-\frac{3}{4}} \neq \frac{0}{-1}\right)$

3 ومنه الشعاعان يعينان المستوي (FHK)

(3) لنبحث عن عددين حقيقيين a, b حيث:

$\vec{AE} = a\,\vec{HF} + b\,\vec{HK}$

3 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{4} \\ -1 \end{pmatrix}$

3 $\begin{cases} a = 0 & (1) \\ -a - \frac{3}{4}b = 0 & (2) \\ -b = 1 & (3) \end{cases}$

3 من (1) $\boxed{a = 0}$

3 من (3) $\boxed{b = -1}$

نعوض في (2)

3 $0 + \frac{3}{4} = 0$ مستحيلة

3 فالأشعة $\vec{AE}$ و $\vec{HF}$ و $\vec{HK}$ ليست مرتبطة خطياً

4 أي المستقيم (AE) لا يوازي المستوي (FHK)

3 (4) $\vec{HM}(0,-1,m-1)$

3 $\vec{HM} = a\,\vec{HF} + b\,\vec{HK}$

3 $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ m-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -a - \frac{3}{4}b \\ -b \end{pmatrix}$

3 $\begin{cases} a = 0 & (1) \\ -a - \frac{3}{4}b = -1 & (2) \\ -b = m-1 & (3) \end{cases}$

3 من (1) $\boxed{a = 0}$

3 نعوض في (2) نجد: $0 - \frac{3}{4}b = -1$

$\boxed{b = \frac{4}{3}}$

3 يجب أن تتحقق المعادلة (3)

$-\frac{4}{3} = m - 1$

$m = 1 - \frac{4}{3}$

3 $\boxed{m = -\frac{1}{3}}$ وهي قيمة m التي تجعل M تنتمي إلى المستوي (FHK)

B | مادة الرياضيات | سلم تصحيح - **المذاكرة الأولى** – شتاء 2022-2023

⑤ $M(-\frac{1}{5}, 0, 0)$

3 $M \in (AE)$
3 $M \in (FHK)$

3 ومنه M هي نقطة تقاطع المستقيم (AE) مع المستوي (FHK)

100 **المسألة الثانية :**

$f(x) = x^2(1 - 2\ln x)$

① f مستمر على $]0, +\infty[$

4+4 عند 0: $f(x) = x(x - 2x\ln x)$

4 $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

عند $+\infty$: $f(x) = x^2(1 - 2\ln x)$

$\lim_{x \to +\infty}(x^2) = +\infty$
$\lim_{x \to +\infty}(1 - 2\ln x) = -\infty$

4 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

② f مشتق ومستمر واشتقاقي على $]0, +\infty[$

4 $f'(x) = 2x(1 - 2\ln x) + \left(\frac{-2}{x}\right)(x^2)$

4 $f'(x) = 2x - 4x\ln x - 2x$

4 $f'(x) = -4x\ln x$

$f'(x) = 0$ نجد

4 $-4x\ln x = 0$

مرفوض $x = 0$ إما

4 $\ln x = 0$ أو

4+4 $\boxed{x = 1}$, $f(1) = 1$

4 | x | 0 | | 1 | | $+\infty$
4 | $f'(x)$ | | + | 0 | − |
4 | $f(x)$ | 0 | ↗ | 1 | ↘ | $-\infty$

③ لإيجاد نقطة تقاطع C مع محور الفواصل نضع $f(x) = 0$

4 $x^2(1 - 2\ln x) = 0$

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ مرفوض

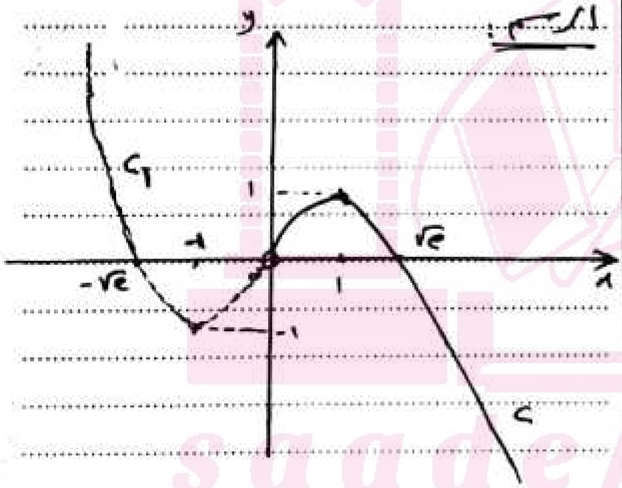
4 أو $1 - 2\ln x = 0$

$\ln x = \frac{1}{2}$

4 $x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

4 $(\sqrt{e}, 0)$

الرسم :

4+4 

④ $f_1(x) = x^2(-1 + 2\ln(-x))$

4 $f(-x) = (-x)^2(1 - 2\ln(-x))$

4 $f(-x) = x^2(1 - 2\ln(-x))$

4 $-f(-x) = -x^2(1 - 2\ln(-x))$

$-f(-x) = x^2(-1 + 2\ln(-x))$

4 $-f(-x) = f_1(x)$

$f_1(x) = -f(-x)$

4 C_1 هو نظير C بالنسبة إلى $O(0,0)$

$(x, y) \to (-x, -y)$

100 انتهت الأجوبة

مدارس الأوائل النموذجية الخاصة

المذاكرة الأولى في مادة الرياضيات

الاسم :........

للصف الثالث الثانوي العلمي (2022–2023) النموذج : C الدرجة: 600

أولاً : أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف والاشتقاقي على $]-2,+\infty[$ جدول تغيّراته هو الآتي :

x	-2		2		6		8		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-5	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

❶ جد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه . ثمّ استنتج معادلة كل مستقيم مقارب أفقي أو شاقولي لخطّه البياني C_f.

❷ ما حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟

❸ ما حلول المتراجحة $f(x)\le 0$ ؟

❹ ما حلول المتراجحة $f'(x)\ge 0$ ؟

❺ جد $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{f(x)}$.

السؤال الثاني:

في الفراغ المنسوب إلى معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$\mathcal{P}$ مستوٍ يمر بالنقطة $A(5,-2,1)$. شعاعا توجيهه هما $\vec{u}(1,2,0)$ و $\vec{v}(-2,0,1)$.

والمستقيم d يمر بالنقطة $B(-1,0,3)$ والموجّه بالشعاع $\vec{w}(4,4,-1)$.

(الهدف إثبات أنّ المستقيم d يوازي المستوي $\mathcal{P}$ ولا يشترك معه بأي نقطة)

❶ أثبت أنّ الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مرتبطة خطياً .

❷ أثبت أنّ الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطة خطياً . وهل النقطة B تنتمي إلى $\mathcal{P}$ ؟

❸ علل لماذا المستقيم d يوازي المستوي $\mathcal{P}$ ولا يشترك معه بأي نقطة ؟

السؤال الثالث :

ليكن العدد العقدي : $z=\dfrac{-\sqrt{2}}{1+i}e^{i\frac{\pi}{3}}$

❶ اكتب z بالشكل الأسي .

❷ ليكن w عدداً عقدياً ما أثبت أنّ العدد $A=\dfrac{\overline{w}-z w}{i-iz}$ تخيلي بحت .

السؤال الرابع: حل المتراجحة الآتية : $\ln(4x^2-8x+3)\ge \ln(-4x+2)$

ثانياً : حل التمارين الأربعة الآتية : (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول :

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق :

$$f(x)=\begin{cases} x\cdot\sin\dfrac{1}{x} & : x\neq 0\\ m+2 & : x=0\end{cases}$$

عيّن قيمة العدد الحقيقي m التي تجعل f مستمراً على $\mathbb{R}$.

يوجد صفحة ثانية يرجى قلب الصفحة

التمرين الثاني : ليكن كثير الحدود $P(z)=z^3-(4+i)z^2+(7+i)z-4$

❶ احسب $P(1)$ و عيّن a و b إذا علمت أنّ $P(z)=(z-1)(z^2+az+b)$.

❷ حل المعادلة $P(z)=0$.

❸ إذا كان z_1 و z_2 جذري المعادلة $z^2+az+b=0$ تمثّلهما النقطتان A و B أثبت أنّ المثلث OAB قائم .

التمرين الثالث : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]-\infty,-1[\cup[0,+\infty[$ وفق : $f(x)=x+\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

❶ أثبت أنّ للخط C مقارب مائل Δ معادلته $y=x+1$.

❷ ادرس وضع C بالنسبة إلى Δ .

التمرين الرابع: ليكن $\alpha=e^{i\frac{2\pi}{7}}$ وبفرض $S=\alpha+\alpha^2+\alpha^4$ و $T=\alpha^3+\alpha^5+\alpha^6$.

❶ أثبت أنّ العددين S و T مترافقان .

❷ أثبت أنّ $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6=0$.

❸ أثبت أنّ $S+T=-1$ و $S\times T=2$ واستنتج أنّ S و T هما جذرا المعادلة $Z^2+Z+2=0$.

❹ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $Z^2+Z+2=0$.

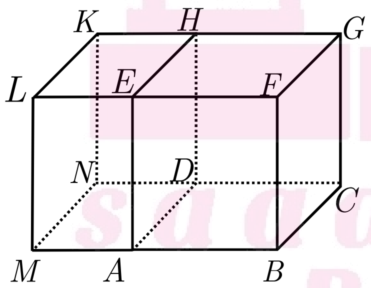
❺ بفرض $\operatorname{Im}(S)>0$ استنتج أنّ : $\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{8\pi}{7}=\dfrac{-1}{2}$ و $\sin\dfrac{2\pi}{7}+\sin\dfrac{4\pi}{7}+\sin\dfrac{8\pi}{7}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين : (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: في الشكل المجاور $ABCDEFGH$ مكعّب طول ضلعه يساوي 2

ومتوازي المستطيلات $AMNDLEHK$ فيه $AM=1$.

لنختر المعلم $(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE})$



❶ أعطِ إحداثيات الرؤوس جميعها في المعلم المعطى .

❷ عيّن نقطة J من المستقيم (AB) متساوية البعد عن K و G .

❸ عيّن موقع النقطة Q التي تحقّق : $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{LK}$

❹ اكتب معادلة الكرة التي مركزها O منتصف $[AG]$ وتمس المستوي $(ABCD)$.

❺ اكتب معادلة الأسطوانة الناتجة عن دوران الضلع $[LM]$ من المستطيل $AMLE$ حول المستقيم (AE) دورة كاملة .

❻ لتكن النقطة I منتصف $[AB]$. هل يوجد عددان حقيقيان α و β يحقّقان : $\overrightarrow{KD}=\alpha\overrightarrow{EG}+\beta\overrightarrow{EI}$ ؟

ثمّ بيّن فيما إذا كان المستقيم (KD) يوازي المستوي (EGI) أم لا ؟ معللاً إجابتك .

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,e[\cup]e,+\infty[$ وفق : $f(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln x)}$

❶ جِد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه . واستنتج معادلة كل مستقيم مقارب أفقي أو شاقولي لخطّه البياني .

❷ ادرس تغيّرات التابع f و نظّم جدولاً به .

❸ ارسم ما وجدته من مستقيمات مقاربة ثمّ ارسم الخط البياني C .

❹ استنتج رسم الخط البياني C_1 للتابع f_1 المعيّن بالعلاقة : $f_1(x)=\dfrac{1}{x(-1-\ln\frac{1}{x})}$

.... انتهت الأسئلة ....

أولاً: أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية:

السؤال الأول:

① f معرفة على $]-2,+\infty[$

$\lim_{x\to -2} f(x) = +\infty$ 5

ومنه $\boxed{x=-2}$ مستقيم مقارب شاقولي 5

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ 5

② المعادلة $f(x)=0$ لها حل $\boxed{x=2}$ 5

③ حلول المتراجحة $f(x)\le 0$ هي: $x\in[2,+\infty[$ 5

④ حلول المتراجحة $f'(x)\ge 0$ هي: $x\in[6,8]\cup\{2\}$ 5+5

⑤ $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ 5

40

السؤال الثاني:

① $\vec{u}(1,2,0)$ ، $\vec{v}(-2,0,1)$ ، $\vec{w}(4,4,-1)$

لنبحث عن عددين حقيقيين b ، a يحققان: 2

$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

$\begin{pmatrix}4\\4\\-1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ 2

$\begin{pmatrix}4\\4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a-2b\\2a\\b\end{pmatrix}$ 2

$\begin{cases} a-2b=4 & (1)\\ 2a=4 & (2)\\ b=-1 & (3)\end{cases}$ 2

لنأخذ المعادلتين (3) و(2)؟

2 من (3) نجد أن $\boxed{b=-1}$

2 ومن (2) نجد $\boxed{a=2}$

2 نتحقق بالتعويض في (1)

$2-2(-1)=2+2=4$

محققة

2 ومنه $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$

2 فالأشعة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{w}$ مرتبطة خطياً

2 ② $\vec{AB}(-6,2,2)$

لنبحث عن عددين حقيقيين b, a يحققان:

2 $\vec{AB} = a\vec{u} + b\vec{v}$

2 $\begin{pmatrix}-6\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a-2b\\2a\\b\end{pmatrix}$

2 $\begin{cases} a-2b=-6 & (1)\\ 2a=2 & (2)\\ b=2 & (3)\end{cases}$

2 من (3) نجد $\boxed{b=2}$

2 ومن (2) نجد $\boxed{a=1}$

2 نتحقق بالتعويض في (1) فنجد

$1-4=-3\neq -6$ غير محققة

2 فالأشعة $\vec{AB}$ ، $\vec{u}$ ، $\vec{v}$

ليست مرتبطة خطياً

2 والنقطة B لا تنتمي إلى المستوي P.

(لأن $A\in P$ والأشعة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{AB}$

ليست مرتبطة خطياً

فإن $B\notin P$)

③ بما أن الأشعة $\vec{u}$ و$\vec{v}$ و$\vec{w}$

مرتبطة خطياً فإن المستقيم d يوازي

2 المستوي P.

ومن $B\in d$ و $B\notin P$

2 فالمستقيم d يوازي P ولا يشترك معه

بأي نقطة.

40

سلم تصحيح - المذاكرة الأولى – شتاء 2022-2023 مادة الرياضيات

السؤال الثالث:

$z = \frac{-\sqrt{3}...}{1+i} e^{i\frac{\pi}{3}}$

5 ① $z = \frac{\sqrt{2} e^{i\pi}}{\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$

$z = e^{i(\pi - \frac{\pi}{4})} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$

$z = e^{i\frac{3\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$

5 $\boxed{z = e^{i\frac{13\pi}{12}}}$

② $A = \frac{\bar{w} - zw}{i - iz}$

يكون A تخيلياً بحتاً إذا كان

لنثبت ذلك $\bar{A} = -A$

5 $\bar{A} = \frac{w - \bar{z}\bar{w}}{-i + i\bar{z}}$

5 لدينا: $|z| = |e^{i\frac{13\pi}{12}}| = 1$

فإن $\bar{z} = \frac{1}{z}$

$\bar{A} = \frac{w - \frac{1}{z}\bar{w}}{-i + i\frac{1}{z}}$

5 $\bar{A} = \frac{\frac{wz - \bar{w}}{z}}{\frac{-iz + i}{z}}$

5 $\bar{A} = \frac{wz - \bar{w}}{-iz + i}$

5 $\bar{A} = \frac{-(\bar{w} - wz)}{i - iz} = -A$

5 ومنه A تخيلي بحت.

40

السؤال الرابع:

$\ln(4x^2 - 8x + 3) \geq \ln(-4x + 2)$

5 ■ شرط الحل: $-4x + 2 > 0$

5 $-4x > -2$

$x < \frac{1}{2}$

$x \in]-\infty, \frac{1}{2}[= D_1$

5 ■ $4x^2 - 8x + 3 \geq -4x + 2$

5 $4x^2 - 4x + 1 \geq 0$

5 $(2x - 1)^2 \geq 0$

5 متراجحة محققة دوماً

أي أن $x \in \mathbb{R} = D_2$

■ مجموعة حلول المتراجحة المعطاة هي

5 $x \in D_1 \cap D_2$

$x \in]-\infty, \frac{1}{2}[\cap]-\infty, +\infty[$

$x \in]-\infty, \frac{1}{2}[$

5 $S =]-\infty, \frac{1}{2}[$

40

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية:

التمرين الأول:

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ m + 2 & ; x = 0 \end{cases}$$

5 التابع: $x \mapsto x \sin\frac{1}{x}$ مستمر على $\mathbb{R}^*$

حتى يكون f مستمراً على $\mathbb{R}$

5 يجب أن يكون f مستمراً عند (0)

أي يجب أن نحقق

5 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

5 $f(0) = m + 2$

(2)

عندما $x \neq 0$ يكون:

5 $g(x) = f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}$

5 $|g(x)| = |x \cdot \sin\frac{1}{x}|$

5 $= |x| \cdot |\sin\frac{1}{x}| \leq |x| \cdot (1)$

لأن $|\sin\frac{1}{x}| \leq 1$

5 $|g(x) - 0| \leq |x|$

5 $\lim_{x \to 0} |x| = 0$

نستنتج أن حسب مبرهنة الإحاطة

5 $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$

الشرط هو:

5 $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

5 $0 = m + 2$

5 ومنه $\boxed{m = -2}$

وهي قيمة m التي تجعل f مستمراً على $\mathbb{R}$.

60

التمرين الثاني:

$P(z) = z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4$

① $P(1) = (1)^3 - (4+i)(1)^2 + (7+i)(1) - 4$

2 $P(1) = 1 - 4 - i + 7 + i - 4$

2 $P(1) = 0$

$P(z) = (z-1)(z^2 + az + b)$

2 $P(z) = z^3 + az^2 + bz - z^2 - az - b$

2 $P(z) = z^3 + (a-1)z^2 + (b-a)z - b$

بالمطابقة مع $P(z)$ المفروضة نجد أنّ:

2 $\begin{cases} a-1 = -4-i & (1) \\ b-a = 7+i & (2) \\ -b = -4 & (3) \end{cases}$

لنأخذ المعادلتين $\{(1),(3)\}$

2 من (1) نجد أنّ: $\boxed{a = -3-i}$

2 ومن (3) نجد $\boxed{b = 4}$

نتحقق بالتعويض في (2) فنجد:

2 $4 - (-3-i) = 7+i$ محقق

2 ومنه $P(z) = (z-1)(z^2 + (-3-i)z + 4)$

② $P(z) = 0$

$(z-1) \cdot (z^2 + (-3-i)z + 4) = 0$

2 $z - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{z = 1}$

أو $z^2 + (-3-i)z + 4 = 0$

$a = 1,\ b = -3-i,\ c = 4$

2 $\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-3-i)^2 - 4(1)(4)$

$= 9 + 6i - 1 - 16$

2 $\Delta = -8 + 6i$

2 نفرض $\Delta = w^2 = -8 + 6i$

حيث w أحد الجذرين التربيعيين للعدد $-8+6i$

$(x+yi)^2 = -8 + 6i$

$x^2 - y^2 + 2xyi = -8 + 6i$

2 $\boxed{x^2 - y^2 = -8}$

$2xy = 6$

2 $\boxed{xy = 3}$

$|w^2| = |-8 + 6i|$

$x^2 + y^2 = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$

2 $\boxed{x^2 + y^2 = 10}$

C	مادة الرياضيات	سلم تصحيح - المذاكرة الأولى – شتاء 2022-2023

أ صبح لدينا المعادلات الثلاث الآتية:

$$\begin{cases} x^2+y^2=10 & (1) \\ x^2-y^2=-8 & (2) \\ x\cdot y=3 & (3) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد

$2x^2=2$

$x^2=1$

$\boxed{x=1}$ $\boxed{x=-1}$

بطرح (2) من (1) نجد

$2y^2=18$

$y^2=9$

$\boxed{y=3}$ $\boxed{y=-3}$

من (3) نجد أن $x\cdot y=3>0$

وحيث x, y لهما نفس الإشارة

$w_1=1+3i$ 2

$w_2=-1-3i$ 2

$\Delta=(1+3i)^2$ 2

$z_2=\dfrac{3+i+1+3i}{2}$ 2

$\boxed{z_2=2+2i}$ 2

$z_3=\dfrac{3+i-1-3i}{2}$ 2

$\boxed{z_3=1-i}$ 2

(3) $A(2,2)$ 2

$B(1,-1)$ 2

$O(0,0)$

$\vec{OA}(2,2)$, $\vec{OB}(1,-1)$ $\vec{OA}\cdot\vec{OB}=(2)(1)+(2)(-1)=0$ 2

$\vec{OB}$ يعامد $\vec{OA}$ 2

المثلث OAB قائم في O.

التمرين الثالث:

$f(x)=x+\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ 2

5 (1) $f(x)-y_D=\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}-1$

5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=1$ 2

5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}=\lim\limits_{X\to1}\sqrt{X}=1$

5 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y_D)=1-1=0$ 2

5 ومنه $D: y=x+1$ مستقيم مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=1$ 2 2 2

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}=\lim\limits_{X\to1}\sqrt{X}=1$ 2

5 $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-y_D)=1-1=0$ 2

5 ومنه $D: \boxed{y=x+1}$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$ 2 2

(2) لندرس وضع C بالنسبة إلى D 2

ندرس إشارة الفرق: 2

$f(x)-y_D=\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}-1$

نضع $f(x)-y_D=0$

$\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}=1$ 2

5 $\dfrac{x}{x+1}=1$ 2

60

سلم تصحيح - المذاكرة الأولى – شتاء 2022-2023	مادة الرياضيات	C

$x = x+1$

5 $a = 1$ مقبولة

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f(x)-g(x)$	$+$			$-$
الوضع النسبي	C فوق D			C تحت D

التمرين الرابع: 60

$\alpha = e^{i\frac{2\pi}{7}}$

(1) $S = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4$

$T = \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6$

2 $\bar S = \bar\alpha + \bar\alpha^2 + \bar\alpha^4$

2 $\bar S = e^{-i\frac{2\pi}{7}} + e^{-i\frac{4\pi}{7}} + e^{-i\frac{8\pi}{7}}$

2 $\bar S = e^{i(-\frac{2\pi}{7}+2\pi)} + e^{i(-\frac{4\pi}{7}+2\pi)} + e^{i(-\frac{8\pi}{7}+2\pi)}$

2 $\bar S = e^{i\frac{12\pi}{7}} + e^{i\frac{10\pi}{7}} + e^{i\frac{6\pi}{7}}$

2 $\bar S = \alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^3 = T$

فالعددان S و T مترافقان.

طريقة ثانية: نستعمل $\alpha^7 = 1$

2 $\alpha^7 = \left(e^{i\frac{2\pi}{7}}\right)^7 = e^{i2\pi} = e^{0i} = 1$

2 $\bar S = \bar\alpha + \bar\alpha^2 + \bar\alpha^4$

2 $\bar S = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^4}$

2 $\bar S = \frac{\alpha^6}{\alpha^7} + \frac{\alpha^5}{\alpha^7} + \frac{\alpha^3}{\alpha^7}$

2 $\bar S = \alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^3 = T$

(2)

2 $\underbrace{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6}_{7} =$

مجموع سبعة حدود

2 متتالية هندسية أساسها α

وحدها الأول 1

2 $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6 = 1 \cdot \frac{1-\alpha^7}{1-\alpha}$

2 $= \frac{0}{1-\alpha} = 0$

2 $\left(\alpha^7 = e^{i2\pi} = e^{0i} = 1 \quad \text{لأن}\right)$

(3)

2 $S+T = \alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6 = -1$

$\left(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6 = 0 \quad \text{لأن}\right)$

2 $S \times T = (\alpha+\alpha^2+\alpha^4)(\alpha^3+\alpha^5+\alpha^6)$

2 $= \alpha^4+\alpha^6+\alpha^7+\alpha^5+\alpha^7+\alpha^8+\alpha^7+\alpha^9+\alpha^{10}$

2 $= \alpha^4+\alpha^6+1+\alpha^5+1+\alpha\alpha^7+1+\alpha^2\alpha^7+\alpha^3\alpha^7$

2 $= 3+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6$

2 $= 3-1 = 2$

2 المعادلة: $z^2+z+2=0$

2 $z^2-(S+T)z+S\times T=0$

2 $(z-S)(z-T)=0$

2 إما $\boxed{z=S}$ أو $\boxed{z=T}$

2 ومنه S و T هي جذرا المعادلة المعطاة.

(4) $z^2+z+2=0$

$a=1,\ b=1,\ c=2$

2 $\Delta = b^2-4ac$

2 $\Delta = 1-4(1)(2) = -7 < 0$

للمعادلة جذران في $\mathbb{C}$

2 $\sqrt{-\Delta} = \sqrt{7}$

2 $z_1 = \frac{-b+\sqrt{-\Delta}\,i}{2a} = \frac{-1+\sqrt{7}\,i}{2} = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i$

2 $z_2 = \bar z_1 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

C	مادة الرياضيات	سلم تصحيح - المذاكرة الأولى – شتاء 2022-2023

(5) لأن $Im(z) > 0$ فإن

2 $S = z_1$

$\alpha + \alpha^2 + \alpha^4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i$

2 $e^{i\frac{2\pi}{7}} + e^{i\frac{4\pi}{7}} + e^{i\frac{8\pi}{7}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i$

2 $\left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7}\right) + i\left(\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}\right)$

$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i$

ومنه

2 $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{2}$

2 $\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}$

60 **ثالثاً : حل المسألة الآتية :**

3+3 (1) $A(0,0,0)$ ، $E(0,0,2)$

3+3 $B(2,0,0)$ ، $F(2,0,2)$

3+3 $D(0,2,0)$ ، $H(0,2,2)$

3+3 $C(2,2,0)$ ، $G(2,2,2)$

3+3 $M(-1,0,0)$ ، $N(-1,2,0)$

3+3 $L(-1,0,2)$ ، $K(-1,2,2)$

3 (2) : $J(x,0,0)$

3 $JK = JG$

$JK^2 = JG^2$

3 $(x+1)^2 + (0-2)^2 + (0-2)^2 = (x-2)^2 + (0-2)^2 + (0-2)^2$

$\cancel{x^2} + 2x + 1 + 4 + 4 = \cancel{x^2} - 4x + 4 + 4 + 4$

3 $6x = 3$

$x = \frac{1}{2}$

3 $\boxed{J\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)}$

---

(3) $\vec{AQ} = \vec{AM} + \vec{DH} + \vec{LK}$

3 $\vec{AQ} = \vec{AM} + \vec{ML} + \vec{LK}$

3 $\vec{AQ} = \vec{AK}$

3 ومنه $Q = K$

3 (4) $O(1,1,1)$

3 $R = 1$

3 $\boxed{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1}$

3+3 (5) $0 \le z \le 2$, $x^2 + y^2 = 1$

3 (6) $I(1,0,0)$

3 $\vec{KD}(1,0,-2)$

3 $\vec{EG}(2,2,0)$

3 $\vec{EI}(1,0,-2)$

نلاحظ أن الشعاعين $\vec{EG}$ و $\vec{EI}$

غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة

$\left(\frac{2}{1} \ne \frac{2}{0}\right)$ فهما مستقلان ويعينان المستوي (EGI)

$\vec{KD} = \alpha \vec{EG} + \beta \vec{EI}$

2 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

2 $\begin{cases} 2\alpha + \beta = 1 & (1) \\ 2\alpha = 0 & (2) \\ -2\beta = -2 & (3) \end{cases}$

2 من (2) نجد $\alpha = 0$

1 ومن (3) نجد $\beta = 1$

نتحقق من المعادلة (1) نجد :

2 $2(0) + 1 = 1$

محققة $1 = 1$

2 $\vec{KD} = 0\vec{EG} + \vec{EI}$

2 إذاً الأشعة $\vec{KD}$ و $\vec{EG}$ و $\vec{EI}$ مرتبطة خطياً

فالمستقيم (KD) يوازي المستوي (EGI)

60

المسألة الثانية:

$f(x)=\frac{1}{x(1-\ln x)}$

1) f معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق على $]0,e[\cup]e,+\infty[$

الحل:

$f(x)=\frac{1}{x-x\ln x}$ 4

$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$ 4

ومنه $\boxed{x=0}$ مستقيم مقارب شاقولي 4

$\lim_{x\to e^-} f(x)=+\infty$ 4

$\lim_{x\to e^+} f(x)=-\infty$ 4

$\boxed{x=e}$ مستقيم مقارب شاقولي 4

$\lim_{x\to +\infty} f(x)=0$ 4

ومنه $\boxed{y=0}$ مستقيم مقارب أفقي 4

2) $f'(x)=\frac{0-\left(1(1-\ln x)-\frac{1}{x}x\right)}{x^2(1-\ln x)^2}$ 4

$f'(x)=\frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ 4

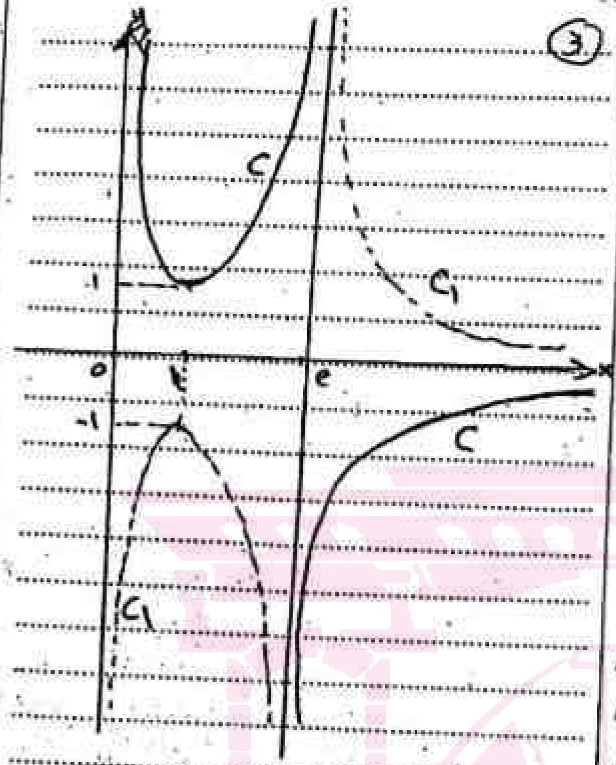
$f'(x)=0$ لـ $\ln x=0$ 4

ومنه $\boxed{x=1}$ 4

$f(1)=1$ 4

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗ $+\infty$	‖ $-\infty$	↗	0

3)



4)

$f_1(x)=\frac{1}{x(-1-\ln\frac{1}{x})}$

$f_1(x)=\frac{1}{x(-1+\ln x)}$

$f_1(x)=\frac{-1}{x(1-\ln x)}=-f(x)$

$f_1(x)=-f(x)$

ومنه C_1 هي نظيرة C بالنسبة لمحور الفواصل $(x,y)\to(x,-y)$ 4

انتهت الإجابة

الاسم :........

مدارس الأوائل النموذجية الخاصة

المذاكرة الأولى في مادة الرياضيات

للصف الثالث الثانوي العلمي (2022-2023)   النموذج : D الدرجة: 600

أولاً : أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف والاشتقاقي على $I =]-\infty, 3]$ جدول تغيراته هو الآتي :

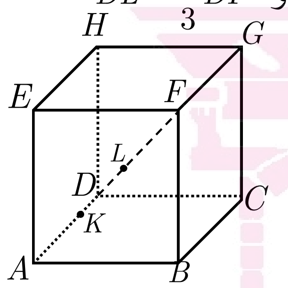
x	$-\infty$		1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$

❶ جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ واستنتج معادلة المستقيم المقارب .

❷ جد $f(]-\infty,3])$ ثمّ استنتج إشارة $f(x)$.

❸ بفرض $x \mapsto E(x)$ تابع الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x . احسب $E(f(x))$

السؤال الثاني: $ABCDEFGH$ مكعب . النقطتان K و L تحقّقان : $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$



ولنختر المعلم $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

❶ جِدْ إحداثيات النقاط C و G و K و L .

❷ أثبت أنّ الشعاعين $\overrightarrow{CG}$ و $\overrightarrow{CK}$ غير مرتبطين خطياً .

❸ هل $\overrightarrow{CL}$ و $\overrightarrow{CG}$ و $\overrightarrow{CK}$ مرتبطة خطياً ؟ علل إجابتك .

وبيّن فيما إذا كانت النقطة L تنتمي إلى المستوي (CGK) .

السؤال الثالث: حل المتراجحة الآتية: $2\ln^2 x + 5\ln x - 7 \le 0$

السؤال الرابع: z_1 عدد عقدي طويلته تساوي 2 وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

z_2 عدد عقدي طويلته تساوي 4 وزاويته $\frac{-\pi}{6}$.

❶ احسب كلاً من $|z_1 \cdot z_2|$ و $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ و $|z_1{}^5|$.

❷ احسب $\arg(z_1 \cdot z_2)$ و $\arg(\frac{z_1}{z_2})$ و $\arg(z_1{}^5)$.

ثانياً : حل التمارين الأربعة الآتية : (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول : ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق : $f(x) = \frac{2x-3}{1-x}$

❶ ما نهاية f عند $+\infty$ و عند $-\infty$ ؟

❷ أعطِ عدداً حقيقياً A يحقّق الشرط : إذا كان $x < A$ كان $f(x) \in]-2.01, -1.99[$.

❸ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$.

التمرين الثاني :

❶ ليكن z عدداً عقدياً ما، وليكن u عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد.

أثبت أنّ $\frac{u\overline{z} - z}{iu - i}$ عددٌ تخيّلي بحت .

❷ ليكن العددان العقديان : z و w :

نفترض أنّ $|1 - z\overline{w}|^2 = |z - w|^2$ أثبت أنّه إمّا أن يكون $|z| = 1$ أو $|w| = 1$.

يوجد صفحة ثانية يرجى قلب الصفحة

التمرين الثالث :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]-\infty,-1]\cup[2,+\infty[$ وفق $f(x)=\sqrt{x^2-x-2}$

❶ احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

❷ اكتب ثلاثي الحدود x^2-x-2 بالصيغة القانونية (متمماً إلى مربع كامل) .

❸ استنتج وجود مقارب مائل Δ للخط C في جوار $-\infty$. اكتب معادلته . وادرس وضع الخط C بالنسبة إليه.

التمرين الرابع:

❶ حل في C المعادلة : $z^2-3\sqrt{3}z+9=0$. واكتب الحلول بالشكل الأسي .

❷ لتكن النقاط : A و B و C و D التي تمثّل بالترتيب الأعداد العقدية :

$a=3e^{i\frac{\pi}{6}}$ و $b=3e^{-i\frac{\pi}{6}}$ و $c=-a$ و $d=-b$ اكتب كلاً من c و d بالشكل الأسي .

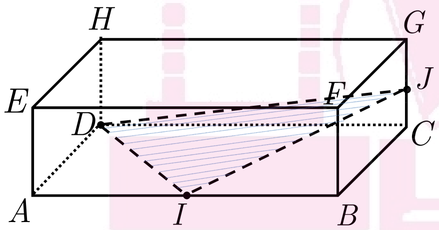
ثمّ وضّع النقاط في مستوٍ محدث بمعلمٍ متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ثمّ أثبت أنّ الرباعي $ABCD$ مستطيل .

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين : (100درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى :

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB=4$ و $BC=2$ و $CG=2$.

والنقطتان I و J منتصفا $[AB]$ و $[CG]$ بالترتيب .



❶ أثبت أنّ الأشعة $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BG}$ مرتبطة خطياً .

❷ لنختر معلماً متجانساً : $(A;\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE})$

جد إحداثيات جميع النقاط . ما نوع المثلث DIJ ؟

❸ لتكن النقطة $T(2,2,\frac{1}{2})$ اكتب معادلةً للكرة S التي مركزها T وتمر من النقطة I .

ثمّ تحقّق أنّ الكرة S تقبل $[DJ]$ قطراً فيها .

❹ احسب مساحة الرباعي $IBCD$ ثمّ استنتج حجم الهرم $J-IBCD$.

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=\ln(\frac{x}{x+1})$

❶ جِد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واستنتج معادلة كل مستقيم مقارب أفقي أو شاقولي لخطّه البياني C .

❷ ادرس تغيّرات التابع f و نظّم جدولاً به .

❸ ارسم ما وجدته من مستقيمات مقاربة ثمّ ارسم C .

❹ ليكن العددان a و b حيث $0<a<b$. قارن بين العددين $A=\ln(\frac{a}{a+1})$ و $B=\ln(\frac{b}{b+1})$.

❺ استنتج رسم الخط البياني C_1 للتابع f_1 المعيّن بالعلاقة : $f(x)=\ln x-\ln(x+1)$ من الخط البياني C للتابع f .

....انتهت الأسئلة..

أولاً: أجب عن الأسئلة الآتية:

8 ① $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$

8 يوجد مستقيم مقارب أفقي

8 ② $f(]-\infty,3]) = [\frac{1}{2},1[$

8 بالتالي إشارة $f(x)$ موجبة تماماً

8 ③ $E(f(x)) = 0$

$f(x) \in [\frac{1}{2},1[$ 2-8

40

السؤال الثاني:

① $C(1,1,0)$

2 $G(1,1,1)$

2 $K(0,\frac{2}{3},0)$

2 $D(0,1,0)$

2 $F(1,0,1)$

2 $\overrightarrow{DF}(1,-1,1)$

2 $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$

2 نفرض $L(x,y,z)$

2 $\begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2 $\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y-1 = -\frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3} \\ z = \frac{1}{3} \end{cases}$

2 $L(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})$

2 ② $\overrightarrow{CG}(0,0,1)$

2 $\overrightarrow{CK}(-1,-\frac{1}{3},0)$

2 نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{CG}$ و $\overrightarrow{CK}$ غير مرتبطين خطياً لأنه

2 لا يمكن أن يكون أحدهما مضروب بعدد حقيقي

2 ③ $\overrightarrow{CL}(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

لنثبت عن عددين حقيقيين a, b يحققان:

2 $\overrightarrow{CL} = a\overrightarrow{CG} + b\overrightarrow{CK}$

2 $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

2 $\begin{cases} -b = -\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{b = \frac{2}{3}} \\ -\frac{1}{3}b = -\frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{b=1} \\ a = \frac{1}{3} \end{cases}$ $\frac{2}{3} \neq 1$ تناقض

2 فالأشعة $\overrightarrow{CL}$ و $\overrightarrow{CG}$ و $\overrightarrow{CK}$ ليست مرتبطة خطياً

فالنقطة L لا تنتمي إلى المستوي (CGK)

40

السؤال الثالث:

حل المتراجحة الآتية:

$2\ln^2 x + 5\ln x - 7 \le 0$

3 $x>0$ المتراجحة معرفة عندما $x \in]0,+\infty[$

$2\ln^2 x + 5\ln x - 7 \le 0$

هذه متراجحة من الدرجة الثانية بالمجهول $\ln x$ شرط أن:

$2\ln^2 x + 5\ln x - 7 = 0$

3 $a=2 \;,\; b=5 \;,\; c=-7$

$\Delta = b^2 - 4ac$

3 $\Delta = 25 - 4(2)(-7)$

$\Delta = 25 + 56$

$\Delta = 81$

3 $\sqrt{\Delta} = 9$

إما $\ln x = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

3 $\ln x = \dfrac{-5+9}{2(2)} = 1$

3 $\ln x = 1$

3 $\boxed{x = e}$

أو $\ln x = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

3 $\ln x = \dfrac{-5-9}{2(2)}$

3 $\ln x = -\dfrac{7}{2}$

3 $x = e^{-\frac{7}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e^7}}$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e^7}}$		e		$+\infty$
$2\ln^2 x+5\ln x-7$ (3)		$+$	0	$-$	0	$+$	
المتراجحة (3)		~~		محققة		~~	

4 $x \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{e^7}}, e\right]$

40

السؤال الرابع:

$\arg(z_1) = \dfrac{2\pi}{3}$, $|z_1| = 2$

$\arg(z_2) = -\dfrac{\pi}{6}$, $|z_2| = 4$

4+4 (1) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2| = (2)\times(4) = 8$

4+4 $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

2+2 $|z_1^5| = |z_1|^5 = 2^5 = 32$

4 (2) $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

$= \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6}$

4 $= \dfrac{\pi}{2}$

4 $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

$= \dfrac{2\pi}{3} - \left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$= \dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6}$

4 $= \dfrac{5\pi}{6}$

2 $\arg(z_1^5) = 5\arg(z_1) = 5\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$

2 $= \dfrac{10\pi}{3}$

40

D	مادة الرياضيات	سلم تصحيح - المذاكرة الأولى – شتاء 2022-2023

ثانياً: حل التمارين الآتية:

التمرين الأول:

ليكن f تابعاً الثابت على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

وعرفه: $f(x)=\dfrac{2x-3}{1-x}$

① $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x}{-x}\right)=-2$ 3

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$ 3

② $f(x)\in\,]-2.01,-1.99[$

هذا يعني:

نصفتها $|f(x)-(-2)|<0.01$ 3

$|f(x)-(-2)|<0.01$ 3+3

$|f(x)+2|<\dfrac{1}{100}$ 3

$\left|\dfrac{2x-3}{1-x}+2\right|<\dfrac{1}{100}$ 3

$\left|\dfrac{2x-3+2(1-x)}{1-x}\right|<\dfrac{1}{100}$ 3

$\left|\dfrac{-1}{1-x}\right|<\dfrac{1}{100}$ 3

$\dfrac{1}{|1-x|}<\dfrac{1}{100}$ 3

نقلب الطرفين

$|1-x|>100$ 3

نعلم أن x في جوار $-\infty$ ($x<A$ مثلاً)

$|1-x|=1-x$ فإن 3

$1-x>100$ 3

3 $-x>99$

$x<-99$

4 ومنه $\boxed{A=-99}$

(أو أي عدد أصغر منه).

③ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(f(x)))$

4 ■ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$

5 ■ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))=\lim\limits_{X\to-2} f(X)$

5 $=\dfrac{2(-2)-3}{1-(-2)}=-\dfrac{7}{3}$

60 التمرين الثاني:

① بعرض $w=\dfrac{u\bar{z}-z}{iu-i}$

ليكون w تخيلياً بحتاً

3 يلزم أن $\bar{w}=-w$ للشمول

5 $\bar{w}=\dfrac{\bar{u}z-\bar{z}}{-i\bar{u}+i}$

بما أن $|u|=1$

5 فإن $\bar{u}=\dfrac{1}{u}$

5 $\bar{w}=\dfrac{\frac{1}{u}z-\bar{z}}{\frac{-i}{u}+i}$

5 $\bar{w}=\dfrac{\frac{z-u\bar{z}}{u}}{\frac{-i+iu}{u}}$

5 $\bar{w}=\dfrac{z-u\bar{z}}{-i+iu}$

D | مادة الرياضيات | سلم تصحيح - المذاكرة الأولى – شتاء 2022-2023

$\bar{w} = \frac{-(u\bar{z} - z)}{|u-1|}$

5 $\bar{w} = -w$

منه w تخيلي بحت

$|z-w|^2 = |1-z\bar{w}|^2$ (2)

3 $(z-w)\overline{(z-w)} = (1-z\bar{w})\overline{(1-z\bar{w})}$

3 $(z-w)(\bar{z}-\bar{w}) = (1-z\bar{w})(1-\bar{z}w)$

3 $z\bar{z} - z\bar{w} - w\bar{z} + w\bar{w} =$

3 $1 - \bar{z}w - z\bar{w} + z\bar{z}w\bar{w}$

3 $|z|^2 + |w|^2 = 1 + |z|^2|w|^2$

$|z|^2 - |z|^2|w|^2 = 1 - |w|^2$

3 $|z|^2(1-|w|^2) = 1-|w|^2$

3 $|z|^2(1-|w|^2) - (1-|w|^2) = 0$

3 $(1-|w|^2)(|z|^2-1) = 0$

إما $1-|w|^2 = 0$

$|w|^2 = 1$

3 $\boxed{|w| = 1}$

أو $|z|^2 - 1 = 0$

$|z|^2 = 1$

3 $\boxed{|z| = 1}$

60

التمرين الثالث:

3 $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-x-2) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ (1)

3 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$

3 $x^2 - x - 2 = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 2$ (2)

3 $= (x-\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$

3 $f(x) = \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}}$ (3)

نعوض: $y = \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2} = |x-\frac{1}{2}|$

3 بجوار $-\infty$ نكتب: $D: y = -x+\frac{1}{2}$

3 $f(x) - y_D = \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}} - (-x+\frac{1}{2})$

3 $f(x) - y_D = \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}} + (x-\frac{1}{2})$

نضرب بالمرافق ونقسم عليه:

3 $f(x) - y_D = \frac{-\frac{9}{4}}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}} - (x-\frac{1}{2})}$

3 $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - y_D) = 0$

منه المستقيم $D: y = -x+\frac{1}{2}$

3 مقارب مائل للمنحني C في جوار $-\infty$

لدراسة وضع C بالنسبة إلى D

ندرس إشارة الفرق:

$f(x) - y_D = \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}} + (x-\frac{1}{2})$

3 $f(x) - y_D = 0$

3 $\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}} + (x-\frac{1}{2}) = 0$

3 $\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}} = -(x-\frac{1}{2})$

شرط الثاني :

3 $-(x-\frac{1}{2}) \geq 0$

$(x-\frac{1}{2}) \leq 0$

$x \leq \frac{1}{2}$

3 $x \in]-\infty, \frac{1}{2}]$

شرط الطبيعي :

$(x-\cancel{\frac{1}{2}})^2-\frac{9}{4} = (x-\cancel{\frac{1}{2}})^2$

3 مستحيلة $-\frac{9}{4} = 0$

3 x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
3 $f(x) \geq 0$	$-$			$+$
3 الضمني	تحقق D			تحقق D

60

التمرين الرابع :

① $z^2 - 3\sqrt{3}\, z + 9 = 0$

3 $\Delta = (3\sqrt{3})^2 - 4(1)(9)$

$\Delta = 27 - 36 = -9 < 0$

3 للمعادلة حلان في C

3 $\sqrt{-\Delta} = \sqrt{9} = 3$

$z_1 = \frac{3\sqrt{3}+3i}{2}$

3 $\boxed{z_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i}$

3 $\boxed{z_2 = \bar{z}_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i}$

3 $z_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

3 $r = |z_1| = \sqrt{\frac{27}{4}+\frac{9}{4}} = 3$

3 $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3 $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$

$\theta \in$ الربع الأول , $\theta = \frac{\pi}{6}$

3 $\boxed{z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{6}}}$

3 $z_2 = \bar{z}_1 = 3e^{-i\frac{\pi}{6}}$

② $a = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$

$b = 3e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$c = -a = -3e^{i\frac{\pi}{6}}$

3 $c = e^{i\pi}\, 3 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$

3 $c = 3e^{i\frac{7\pi}{6}}$

$d = -b = -3e^{-i\frac{\pi}{6}}$

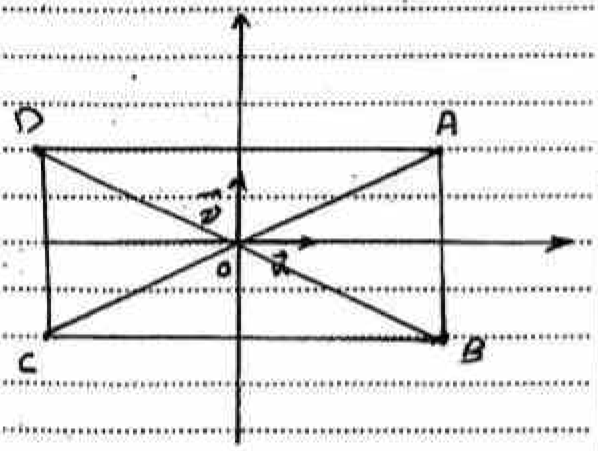
3 $d = 3e^{i\pi} \cdot e^{-i\frac{\pi}{6}}$

3 $d = 3e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$A(3; \frac{\pi}{6})$, $B(3; -\frac{\pi}{6})$

$C(3; \frac{7\pi}{6})$, $D(3; \frac{5\pi}{6})$

3



حيث $c = -a$

3 فإن النقاط A و O و C تقع على استقامة واحدة

وحيث $d = -b$

3 فإن النقاط B و O و D تقع على استقامة واحدة

3 وبما أن $OA = OC = OB = OD$

3 فإن قطرا الرباعي ABCD متناصفان ومتساويان فهو مستطيل

60 **ثالثاً: حل المسائل الآتية:**

المسألة الأولى:

① 3 $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IG}$

3 $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EG}$

3 $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC}$

3 $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{AC}$

3 $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AC}$

3 $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

3 فالأشعة $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{BG}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطياً

② 3+3 $A(0,0,0)$ ، $E(0,0,2)$

3+3 $B(4,0,0)$ ، $F(4,0,2)$

3+3 $D(0,2,0)$ ، $H(0,2,2)$

3+3 $C(4,2,0)$ ، $G(4,2,2)$

3+3 $I(2,0,0)$ ، $J(4,2,1)$

$DI = \sqrt{(2-0)^2+(2-0)^2+(0-0)^2}$

3 $DI = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$DJ = \sqrt{(4-0)^2+(2-2)^2+(1-0)^2}$

3 $DJ = \sqrt{16+0+1} = \sqrt{17}$

$IJ = \sqrt{(4-2)^2+(2-0)^2+(1-0)^2}$

3 $= \sqrt{4+4+1} = 3$

نلاحظ أن:

$DJ^2 = DI^2 + IJ^2$

$17 = 8 + 9$

3 $17 = 17$

ومنه حسب عكس فيثاغورث

3 فالمثلث DIJ قائم في I

③ $T(2,2,\frac{1}{2})$

3 $R = IT = \sqrt{(2-2)^2+(2-0)^2+(\frac{1}{2}-0)^2}$

3 $R = \sqrt{0+4+\frac{1}{4}}$

3 $R = \sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

فمعادلة S هي:

3 $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-\frac{1}{2})^2 = \frac{17}{4}$

لنحسب إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة $[DJ]$

3 $\left(\frac{x_D+x_J}{2}, \frac{y_D+y_J}{2}, \frac{z_D+z_J}{2}\right)$

$\left(\frac{0+4}{2}, \frac{2+2}{2}, \frac{0+1}{2}\right)$

3 $(2, 2, \frac{1}{2}) = T$

3 $\frac{DJ}{2} = \frac{\sqrt{17}}{2} = R$

3 ومنه الكرة S تقطع [DJ] قطعاً منه

(4) IBCD شبه منحرف قائم

3 $S(IBCD)=\frac{IB+DC}{2}\times BC$

3 $=\frac{2+4}{2}\times 2$

3 $S(IBDC)=6$

2 $V=\frac{1}{3}S\cdot h$

2 $V=\frac{1}{3}(6)\cdot 1=2$

100

المسألة الثانية:

$f(x)=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

(1) f معرفة على $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

4 $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x+1}=1$

4 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{X\to1}\ln X=0$

4 $\boxed{y=0}$ مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$

4 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=1$

4 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{X\to1}\ln X=0$

4 $\boxed{y=0}$ مستقيم مقارب أفقي في جوار $+\infty$

4 $\lim_{x\to-1}\frac{x}{x+1}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$

4 $\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$

4 ومنه $\boxed{x=-1}$ مستقيم مقارب شاقولي

4 $\lim_{x\to0}\frac{x}{x+1}=0$

4 $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{X\to0}\ln X=-\infty$

4 ومنه $\boxed{x=0}$ مستقيم مقارب شاقولي

(2) f معرفة ومستمرة واشتقاقية على $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

$f'(x)=\frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)'}{\frac{x}{x+1}}$

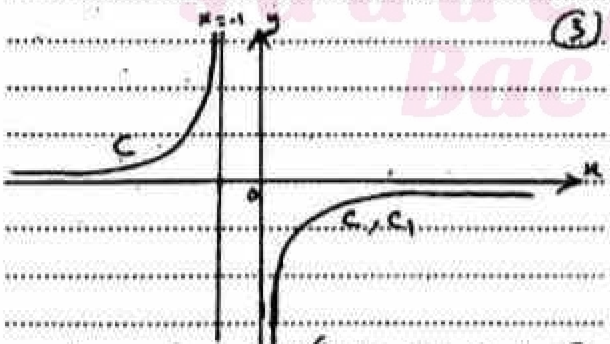
4 $f'(x)=\frac{\frac{1(x+1)-1(x)}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}}$

4 $f'(x)=\frac{1}{x(x+1)}>0$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$				$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$		$-\infty$	$\nearrow$	0

4 4 4

(3)



4 + 4 + 4

(4) 4 ليكن a , b عنصرين من $]0,+\infty[$

حيث $a<b$

4 ومنه $f(a)<f(b)$

$\ln\left(\frac{a}{a+1}\right)<\ln\left(\frac{b}{b+1}\right)$

4 $A<B$

(5) $f_1(x)=\ln x-\ln(x+1)$

f_1 معرفة على $]0,+\infty[$

$f_1(x)=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)=f(x)$ ، $x\in]0,+\infty[$

4 f_1 هو مقصور f على $]0,+\infty[$ أي C_1 هو

4 جزء من الخط C على المجال $]0,+\infty[$ (7)

100 انتهت الأجوبة.

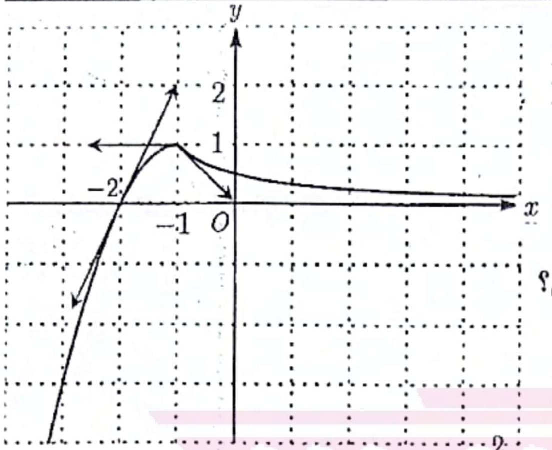
مدارس الأوائل النموذجية الخاصة

الفحص النصفي في مادة الرياضيات

الاسم :.........

للصف الثالث الثانوي العلمي (2022–2023) النموذج : A الدرجة: 600

أولاً : أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)



السؤال الأول : نجد جانباً C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$

❶ جد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه .

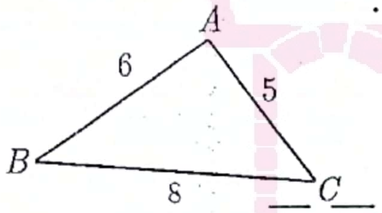
ثمّ استنتج معادلة مستقيمه المقارب الأفقي لخطّه البياني C_f.

❷ احسب $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$ وهل f اشتقاقي عند -1 من اليمين؟

❸ اكتب معادلة نصف المماس من اليسار للخط C_f في نقطة منه فاصلتها -1 . وهل f اشتقاقي عند $x=-1$ ؟ علل إجابتك .

❹ جِدْ $f'(-2)$. ولنعرّف التابع g بالعلاقة : $g(x)=f(-3x)$ استنتج $g'(\frac{2}{3})$.

❺ ما مجموعة تعريف التابع $h\mapsto\dfrac{1}{\ln(f(x))}$ ؟ وما حلول المتراجحة $f'(x)<0$ ؟ .



السؤال الثاني: ❶ أثبت أنّ $(\vec{u}-\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$

ثمّ استنتج أنّ $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

❷ ABC مثلّث مرسوم في الشكل المجاور : بالاستفادة من القانون السابق احسب $\overline{AB}\cdot\overline{AC}$

السؤال الثالث : ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة : $f(x)=\ln(x^2+1)-x$

❶ أثبت أنّ f متناقص تماماً على $\mathbb{R}$. ثمّ ادرس تغيّرات التابع f ونظّم جدولاً بها

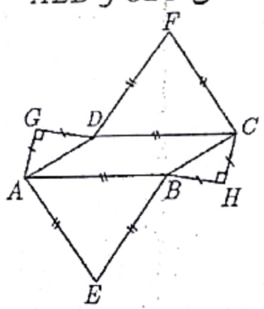
❷ جِدْ $f(0)$ واستنتج مجموعة حلول المتراجحة $\ln(x^2+1)\le x$

السؤال الرابع: لتكن المعادلة (E) الآتية : $z^2+bz+c=0$ حيث b و c عددان حقيقيّان .

عيّن العدد c إذا علمتَ أنّ الشكل الأسي لأحد جذري المعادلة (E) هو $(c-1)e^{i\frac{\pi}{4}}$.

ثانياً : حل التمارين الأربعة الآتية : (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول : في الشكل المجاور: $ABCD$ متوازي أضلاع ننشئ خارجه النقاط H و G و F و E بحيث يكون المثلث BCH قائماً في H ومتساوي الساقين و AGD قائماً في G ومتساوي الساقين ويكون المثلثان CDF و AEB متساويي الأضلاع . ونرمز للأعداد العقدية a و b و c و d و e و f و g و h التي تمثّل النقاط A و B و C و D و E و F و G و H بالترتيب .



❶ إنّ D هي صورة A وفق دوران مركزه G وزاويته $\frac{\pi}{2}$

استخدم الصيغة العقدية للدوران لتثبت أنّ $g=\dfrac{d-ai}{1-i}$ ثمّ استنتج بالمثل أنّ $h=\dfrac{b-ci}{1-i}$.

❷ ماهي صورة B وفق دوران مركزه E وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ؟ و ماهي صورة D وفق دوران مركزه F وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ؟

و بفرض $w=e^{i\frac{\pi}{3}}$: أثبت أنّ $e=\dfrac{a-bw}{1-w}$ و $f=\dfrac{c-dw}{1-w}$.

❸ اشرح لماذا $b+d=a+c$ ؟ استفد من ذلك في إثبات أنّ: $g+h=a+c$ و $e+f=a+c$.

ثمّ استنتج نوع الرباعي $EHFG$.

يوجد صفحة ثانية يرجى قلب الصفحة

التمرين الثاني : ليكن f التابع المعرّف على $[0,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x)=\dfrac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

❶ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثمّ أعطِ عدداً حقيقياً A يحقّق الشرط : إذا كان $x>A$ كان $f(x)\in]0.9,1.1[$.

❷ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$.

التمرين الثالث: لتكن النقاط A و B و C التي تمثّلها الأعداد العقدية $z_A=2$ و $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=\overline{z}_B$.

❶ اكتب بالشكل الأسي العددين z_B و z_C .

❷ عيّن المجموعة D مجموعة النقاط $M(z)$ التي تحقّق المساواة : $|z|=|z-2|$ ثمّ تحقّق أنّ النقطتين B و C تنتميان إلى D

❸ نقرن بكل نقطة $M(z)$ من المستوي حيث $z\neq z_A$ النقطة M' التي يمثّلها العدد العقدي $z'=\dfrac{-4}{z-2}$

□ أثبت أنّ $|z'-2|=\dfrac{2|z|}{|z-2|}$.

□ أثبت أنّه إذا انتمت M إلى D انتمت M' إلى دائرة Γ عيّن مركزها واحسب نصف قطرها .
ثمّ تحقّق أنّ النقطتين B و C تنتميان إلى Γ .

التمرين الرابع: ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على المجال $[0,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x)=-4\sqrt{x}$

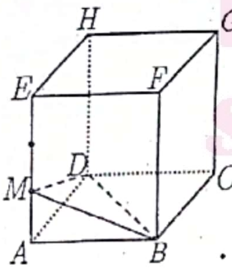
C_g الخط البياني للتابع f المعرّف على المجال $[\frac{1}{2},+\infty[$ وفق العلاقة : $g(x)=\sqrt{\left(\dfrac{2x-1}{6}\right)^3}$

❶ ادرس قابلية اشتقاق التابع g عند $x=\dfrac{1}{2}$.

❷ ليكن $m\in]\frac{1}{2},+\infty[$. أثبت أنّ مماس C_f في نقطة منه فاصلتها m يعامد مماس C_g في نقطة منه فاصلتها $3m+\dfrac{1}{2}$.

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين : (100درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه يساوي 1 . فيه النقطة M تحقّق $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AE}$
والنقطة K تحقّق $\overrightarrow{BK}=\dfrac{9}{11}\overrightarrow{BM}+\dfrac{1}{11}\overrightarrow{BD}$.



❶ احسب حجم الهرم $ABDM$. علّل لماذا النقطة K تنتمي إلى المستوي (BMD) ؟

❷ لنختر معلماً متجانساً $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ جِد إحداثيات النقاط A و B و D و C و M و K.

❸ احسب $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{MD}$ و $\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{BD}$ ثمّ استنتج أنّ K هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث BMD .

❹ أثبت أنّ المستقيم (AK) عمودي على المستوي (BMD) ثمّ اكتب معادلة المستوي (BMD) .

❺ لتكن النقطة $I(2,\sqrt{2},\sqrt{2})$ احسب قياس الزاوية $\widehat{IAD}$.

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}+x-1$

❶ أثبت أنّ المستقيم d الذي معادلته $y=x-1$ مقارب مائل للخط C ثمّ ادرس وضع C بالنسبة إلى d .

❷ ليكن h التابع المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق العلاقة : $h(x)=x^2-\ln x$
ادرس اطراد التابع h واستنتج أنّ $h(x)>0$ أياً تكن $x\in]0,+\infty[$.

❸ تحقّق أنّ $f'(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}$ واستنتج أنّ f متزايد تماماً ثمّ ادرس تغيّرات f ونظّم جدولاً بها واستنتج معادلة مقاربه الشاقولي.

❹ لتكن A نقطة من الخط C التي فاصلتها تساوي 1 أثبت أنّ المستقيم D مماس الخط C في A يوازي d واكتب معادلته .

❺ ارسم d و D ثمّ ارسم C .

.... انتهت الأسئلة..

ثانوية الأوائل النموذجية الخاصة

الفحص النصفي في مادة الرياضيات

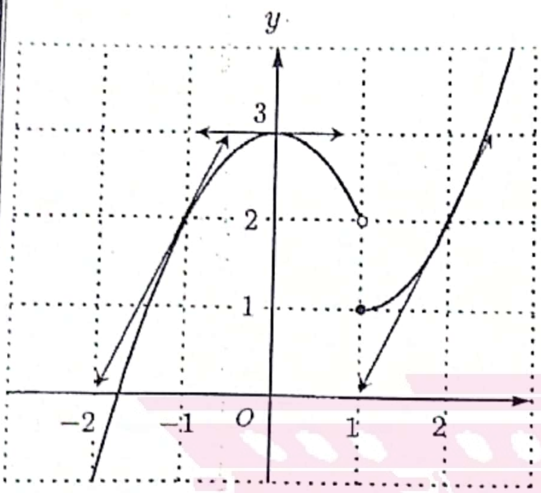
للصف الثالث الثانوي العلمي (2023-2022)

الاسم : ....

الدرجة: 600

النموذج : B

أولاً : أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)



السؤال الأول : نجد جانباً الخط البياني C_f للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$

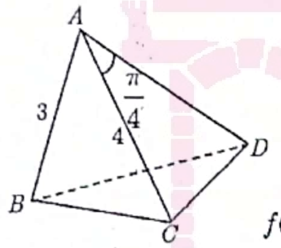
❶ هل f اشتقاقي عند $x=1$ ؟ علل إجابتك . وجد $f(1)$

❷ ما حلول المعادلة $f(x)=2$ ؟ .

❸ جد $f'(0)$ و ما هي حلول المتراجحة $f'(x)<0$ ؟

❹ جد $f([0,1])$.

❺ أثبت أنّ المماسين للخط C_f في النقطتين اللتين فاصلتاهما -1 و 2 متوازيان . ثمّ اكتب معادلة المماس للخط C_f في نقطة منه التي فاصلتها -1 .



السؤال الثاني: $ABCD$ رباعي وجوه فيه $AB=3$ و $AC=4$ و $\widehat{CAD}=\frac{\pi}{4}$

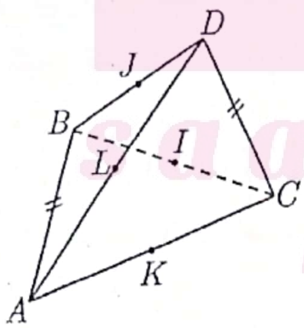
❶ بفرض $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6$ احسب قياس الزاوية $\widehat{BAC}$.

❷ بفرض $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=8$ احسب AD .

السؤال الثالث : f تابعٌ معرّف على المجال $]0,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x)=e\ln x-x$

❶ ادرس تغيّرات التابع f ونظّم جدولاً بها . واستنتج مجموعة حلول المتراجحة $\ln x<\frac{x}{e}$.

❷ بملاحظة أنّ $f(\pi)<0$ قارن بين العددين e^{π} و π^{e} .



السؤال الرابع : $ABCD$ رباعي وجوه فيه $AB=CD$

والنقاط : I و J و K و L منتصفات أحرفه : $[BC]$ و $[BD]$ و $[CA]$ و $[DA]$

❶ تحقق أنّ $\overrightarrow{LI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

❷ عبّر عن $\overrightarrow{KJ}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$.

❸ أثبت أنّ المستقيمين (LI) و (KJ) متعامدان .

ثانياً : حل التمارين الأربعة الآتية : (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول : ليكن العددان العقديان : $a=1+i\sqrt{3}$ و $b=-\sqrt{3}+i$ الممثّلان للنقطتين A و B على الترتيب .

❶ ☐ اكتب a و b بالشكل الأسي .

☐ وضّع النقطتين A و B في مستوٍ .

☐ احسب $\frac{b}{a}$ واستنتج نوع المثلث OAB .

❷ وضّع النقطة K منتصف $[AB]$ وعيّن العدد العقدي k التي يمثّلها .

❸ ليكن العدد العقدي $c=(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})$ الممثّل للنقطة C .

☐ تحقق أنّ K منتصف $[OC]$.

☐ وضّع النقطة C واستنتج نوع الرباعي $OACB$.

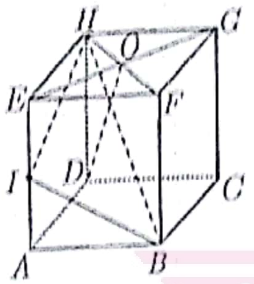
يوجد صفحة ثانية يرجى قلب الصفحة

التمرين الثاني : f تابع اشتقاقي على $\mathbb{R}$ تابعه المشتق : $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

❶ والمعرّف التابع g على $J =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ وفق العلاقة : $g(x) = f(\tan x)$ أثبت أنّ $g'(x) = 1$.

❷ بفرض $f(1) = \frac{\pi}{4}$ استنتج النهاية الآتية : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{g(x) - \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}}$.

التمرين الثالث : $ABCDEFGH$ مكعّب . طول حرفه يساوي 1



I منتصف $[AE]$ و O مركز الوجه $EFGH$ ولنختر معلماً متجانساً $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

❶ جد إحداثيات النقاط B و D و H و O و I .

❷ احسب $\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{BI}$ و $\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{BH}$ واستنتج أنّ المستقيم (DO) يعامد المستوي (BIH).

❸ اكتب معادلة المستوي (BIH) .

❹ أثبت أنّ النقاط B و D و H و O تقع في مستوٍ واحد ثمّ استنتج موقع النقطة K المسقط القائم للنقطة O على (BIH).

التمرين الرابع: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = \dfrac{x}{|x|+1}$

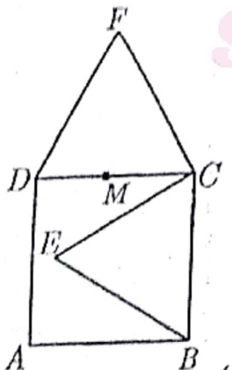
❶ أثبت أنّ التابع f اشتقاقي عند الصفر ثمّ اكتب معادلة المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها $x = 0$.

❷ احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ثمّ أعطِ عدداً حقيقياً A يحقّق الشرط : إذا كان $x < A$ كان $f(x) \in]-1.1, -0.9[$

❸ استنتج $\lim\limits_{x \to -\infty} f(f(x))$.

ثالثاً: حل كلاً من المسألتين الآتيتين : (100درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: $ABCD$ مربّع مباشر التوجيه طول ضلعه يساوي 1 ننشئ المثلثين BCE و DCF المتساويي الأضلاع ومباشري التوجيه كما في الشكل المجاور: نرمز بالأعداد العقدية a و b و c و d و f و e الممثّلة للنقاط A و B و C و D و F و E بالترتيب . ولنختر معلماً متجانساً مباشر التوجيه $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$



❶ أعطِ الأعداد العقدية a و b و c و d .

بفرض M منتصف $[DC]$ احسب FM واستنتج العدد العقدي f .

❷ بملاحظة أنّ E هي صورة B وفق دوران مركزه C وزاويته $-\frac{\pi}{3}$ أوجد العدد العقدي e .

❸ عيّن العدد العقدي الممثّل للشعاع $\overrightarrow{AE}$ وعيّن العدد العقدي الممثّل للشعاع $\overrightarrow{AF}$

ثمّ استنتج أنّ النقاط A و E و F تقع على استقامةٍ واحدة .

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$ وفق : $f(x) = x - 1 + 2\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

❶ أثبت أنّ المستقيم d الذي معادلته $y = x - 1$ مقاربٌ للخط C عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

❷ ادرس تغيّرات f ونظّم جدولاً بها واستنتج معادلة كل مستقيم مقارب شاقولي لخطّه البياني .

❸ وهل للمعادلة $f(x) = 0$ أية حلول ؟ علل إجابتك .

❹ أثبت أنّ النقطة $I(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ مركز تناظر للخط C.

❺ ارسم ما وجدته من مستقيمات مقاربة ثمّ ارسم C .

....انتهت الأسئلة..

أجوبة: أجب عن أسئلة الأربعة الآتية:

السؤال الأول:

① f معرف على $]-\infty,+\infty[$

3 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

3 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

3 ومنه $y=0$ مستقيم مقارب أفقي

② $\lim_{x\to(-1)^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = f'(-1^+)$

3 $=-1$

3 ومنه f اشتقاقي عند $x=-1$ من اليمين

③ 3 $f'(-1^-)=0$ (خطأ لأن المماس أفقي)

ومنه f ليس اشتقاقي عند $x=-1$

3 لوجود نقطة البياني C يقبل بصفي
مماسين في النقطة التي فاصلتها $x=-1$

④ $f'(-2)$ تعني ميل المماس للخط C
في النقطة التي فاصلتها -2
حيث نلاحظ أن هذا المماس يمر
بالنقطتين $(-2,0)$ و $(-1,2)$

2 $m = \frac{2-0}{-1-(-2)} = 2$

3 $\boxed{f'(-2)=2}$

$g(x) = f(-3x)$

2 $g'(x) = -3\, f'(-3x)$

2 $g'(\frac{2}{3}) = -3\, f'(-3(\frac{2}{3}))$

$= -3\, f'(-2)$

2 $= -3(2) = -6$

⑤ $h(x) = \frac{1}{\ln(f(x))}$

2 h معرف عندما $f(x)>0$ و $\ln(f(x))\neq 0$

أي: $x\in]-2,+\infty[$ و $f(x)\neq 1$

2 $x\in]-2,+\infty[$ و $x\neq -1$

2 $x\in]-2,+\infty[\setminus\{-1\} = D_h$

حلول المتراجحة $f'(x)<0$ هي

2 $x\in]-1,+\infty[$

40

السؤال الثاني:

① $(\vec{u}-\vec{v})^2 = (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$

4 $= \vec{u}^2 - \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}^2$

4 $= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

ومنه

4 $2\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}-\vec{v})^2$

4 $2\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2$

4 $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$

②

4 $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \frac{1}{2}(\|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 - \|\vec{AB}-\vec{AC}\|^2)$

4 $= \frac{1}{2}(\|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 - \|\vec{CB}\|^2)$

4 $= \frac{1}{2}(6^2 + 5^2 - 8^2)$

4 $= \frac{1}{2}(36+25-64)$

$= \frac{1}{2}(-3)$

4 $= -\frac{3}{2}$

40

السؤال الثالث:

$$f(x)=\ln(x^2+1)-x$$

① f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}-1$$

$$f'(x)=\frac{2x-(x^2+1)}{x^2+1}$$

$$f'(x)=\frac{-(x^2-2x+1)}{x^2+1}$$

$$f'(x)=-\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\leq 0$$

حيث $f'(x)=0$ عندما $(x-1)^2=0$

ومنه $\boxed{x=1}$

فالدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

لندرس تغيرات f على $\mathbb{R}$

f معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق على $]-\infty,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$$

نلاحظ أن $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ حالة عدم تعيين

تعيين الحكم $+\infty-\infty$ في الآتي:

$$f(x)=x\left(\frac{\ln(x^2+1)}{x}-1\right)$$

$$f(x)=x\left(\frac{\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x}-1\right)$$

$$f(x)=x\left(\frac{\ln x^2+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}-1\right)$$

$$f(x)=x\left(\frac{2\ln x}{x}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}-1\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}=0 \text{ و } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

ومنه $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ (+)	0	(−) $\searrow$	$\ln 2-1$	$\searrow$ (−)	$-\infty$

② $f(0)=\ln 1-0=0$

$$\ln(x^2+1)\leq x$$

تكافئ $\ln(x^2+1)-x\leq 0$

$$f(x)\leq 0$$

من الجدول نحصل على

$$x\in[0,+\infty[$$

وهي حلول المتراجحة المعروضة.

40

السؤال الرابع:

$$(E):\quad Z^2+bZ+c=0$$

بما أن $(c-1)e^{i\frac{\pi}{4}}$ هو أحد جذري

4 المعادلة (E) وهي ذات معاملات حقيقية

فالجذر الآخر هو مرافقه

4 $(c-1)e^{-i\frac{\pi}{4}}$

أي

$$Z_1=(c-1)e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$Z_2=(c-1)e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

4 $Z_1\cdot Z_2=\frac{c}{1}$

4 $(c-1)e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot(c-1)e^{-i\frac{\pi}{4}}=c$

4 $(c-1)^2=c$

$c^2-2c+1=c$

4 $c^2-3c+1=0$

$D=9-4(1)(1)$

4 $D=5$

4 إما $c=\frac{3+\sqrt5}{2}$ مقبول

4 أو $c=\frac{3-\sqrt5}{2}$ مرفوض

نعوض في $\left(\frac{3-\sqrt5}{2}-1\right)e^{-i\frac{\pi}{4}}$

4 $\frac{1-\sqrt5}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ليس شكلاً أسياً كاصر مرفوض

40

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية:

(1) D هي صورة A بدوران مركزه G وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$R(A) = D$ ، $G, \frac{\pi}{2}$

2 $d - g = e^{i\frac{\pi}{2}}(a - g)$

2 $d - g = i(a - g)$

2 $d - g = ia - ig$

$d - ia = g - ig$

2 $d - ia = g(1 - i)$

2 $\boxed{g = \frac{d - ia}{1 - i}}$

تماماً في الدوران الذي مركزه H: BHC قائم في H ومتساوي الساقين

2 $R(C) = B$ ، $H, \frac{\pi}{2}$

بالمثل نجد:

2 $\boxed{h = \frac{b - ic}{1 - i}}$

(2) 2 $R(B) = A$ ، $E, \frac{\pi}{3}$

2 $R(D) = C$ ، $F, \frac{\pi}{3}$

لدينا: $R(B) = A$ ، $E, \frac{\pi}{3}$

2 $a - e = \omega(b - e)$

2 $a - e = \omega b - \omega e$

$a - \omega b = e - \omega e$

2 $a - \omega b = e(1 - \omega)$

2 $\boxed{e = \frac{a - \omega b}{1 - \omega}}$

2 ولدينا: $R(D) = C$ ، $F, \frac{\pi}{3}$

بالمثل نجد:

2 $\boxed{f = \frac{c - \omega d}{1 - \omega}}$

(3) لدينا: ABCD متوازي أضلاع

2 إذن: $\vec{AB} = \vec{DC}$

2 ومنه $b - a = c - d$

2 وبالتالي $b + d = a + c$

2 $g + h = \frac{d - ia}{1 - i} + \frac{b - ic}{1 - i}$

2 $g + h = \frac{d + b - i(a + c)}{1 - i}$

$g + h = \frac{a + c - i(a + c)}{1 - i}$

2 $g + h = \frac{(a + c)(\cancel{1 - i})}{(\cancel{1 - i})}$

2 $\boxed{g + h = a + c}$ (I)

2 $e + f = \frac{a - \omega b + c - \omega d}{1 - \omega}$

$e + f = \frac{a + c - \omega(b + d)}{1 - \omega}$

2 $e + f = \frac{a + c - \omega(a + c)}{1 - \omega}$

2 $e + f = \frac{(a + c)(\cancel{1 - \omega})}{\cancel{1 - \omega}} = a + c$

2 $\boxed{e + f = a + c}$ (II)

من (I) و (II) نستنتج أن:

2 $g + h = e + f$

لنقسم الطرفين على 2 فنجد:

2 $\frac{g + h}{2} = \frac{e + f}{2}$

2 ومنه منتصف [GH] هو منتصف [EF]

2 فقطرا الرباعي EHFG متناصفان

2 فهو متوازي أضلاع.

60

التمرين الثاني:

$$f(x) = \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$$

① نلاحظ أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ هي حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

5 وبالتالي: $f(x) = \frac{\sqrt{x}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+1\right)}{\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$

5 $f(x) = \frac{\frac{2}{\sqrt{x}}+1}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}$ ($\frac{2}{\sqrt{x}} \to 0$, $\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$)

5 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

$f(x) \in]0{,}9 , 1{,}1[$

لذا يكفي

5 $|f(x)-1| < 0.1$

5 $\left|\frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - 1\right| < \frac{1}{10}$

$\left|\frac{2+\sqrt{x}-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right| < \frac{1}{10}$

5 $\left|\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right| < \frac{1}{10}$

$\frac{1}{\sqrt{x}+1} < \frac{1}{10}$

5 $\sqrt{x}+1 > 10$

5 $\sqrt{x} > 9$

5 $x > 81$

5 ومنه $A = 81$ (أو أي عدد أكبر منه)

② $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

5 $\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{X\to 1} f(X) = \frac{3}{2}$

60

التمرين الثالث:

① $z_B = 1+i\sqrt{3}$

2 $r = |z_B| = \sqrt{1+3} = 2$

2 $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\theta \in [0, 2\pi[$; $\theta = \frac{\pi}{3}$

2 $z_B = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

2 $z_C = \overline{z_B} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

② $|z| = |z-2|$

2 $|z-0| = |z-z_A|$

2 $OM = AM$

2 ومنه مجموعة النقاط $M(z)$ تمثل محور القطعة المستقيمة $[OA]$

2 $|z_B| = 2$

$|z_B - 2| = |1+i\sqrt{3}-2|$

2 $= |-1+i\sqrt{3}|$

$= \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}$

2 $= \sqrt{4} = 2$

2 $|z_B| = |z_B - 2|$

ومنه B تنتمي إلى المحور D.

$|z_C| = 2$

2 $|z_C - 2| = |1-i\sqrt{3}-2|$

$= |-1-i\sqrt{3}| = 2$

2 ومنه $|z_C| = |z_C - 2|$

ومنه C تنتمي إلى المحور D

③ $z' = \frac{-4}{z-2}$

2 $z'-2 = \frac{-4}{z-2} - 2$

2 $z'-2 = \frac{-4-2(z-2)}{z-2}$

2 $z'-2 = \frac{-4-2z+4}{z-2}$

2 $z'-2 = \frac{-2z}{z-2}$

2 $|z'-2| = \left|\frac{-2z}{z-2}\right|$

2 $|z'-2| = \frac{|-2z|}{|z-2|}$

2 $|z'-2| = \frac{|-2|\,|z|}{|z-2|}$

2 $|z'-2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$

ب الفرض: $M \in D$

أي $|z|=|z-2|$

المطلوب: $M' \in \Gamma$

حيث Γ دائرة:

يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها

لدينا $|z'-2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$

بما $M \in D$: $|z|=|z-2|$

2 $|z'-2| = \frac{2\cancel{|z|}}{\cancel{|z-2|}} = 2$

2 $|z'-2| = 2$

2 $|z'-z_A| = 2$

2 $M'A = 2$

ومنه مجموعة النقاط $M'(z')$

2 تمثل دائرة مركزها A ونصف قطرها 2

2 وجدنا أن $|z_B-2| = 2$

2 ومنه $B \in \Gamma$

2 $|z_C-2| = 2$

2 ومنه $C \in \Gamma$

60

التمرين الرابع :

$g(x)=\sqrt{\left(\frac{2x-1}{6}\right)^3}$

① نضع التابع T معدل التغير للتابع g عند (a) وليكن

4 $h(x)=\frac{g(x)-g(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}}$

المعرف على $]\frac{1}{2},+\infty[$

4 $h(x)=\frac{\sqrt{\left(\frac{2x-1}{6}\right)^3}}{x-\frac{1}{2}}$

4 $h(x)=\frac{\sqrt{\left(\frac{2x-1}{6}\right)^2\left(\frac{2x-1}{6}\right)}}{x-\frac{1}{2}}$

4 $h(x)=\frac{\left|\frac{2x-1}{6}\right|\sqrt{\frac{2x-1}{6}}}{x-\frac{1}{2}}$

$h(x)=\frac{\frac{2x-1}{6}\sqrt{\frac{2x-1}{6}}}{x-\frac{1}{2}}$

4 $h(x)=\frac{\frac{\cancel{2x-1}}{3}\sqrt{\frac{2x-1}{6}}}{\cancel{2x-1}}$

4 $h(x)=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2x-1}{6}}$

4 $\lim_{x\to\frac{1}{2}} h(x) = 0 = g'(\frac{1}{2})$

ومنه g اشتقاقي عند $x=\frac{1}{2}$

② عندما $x\in]\frac{1}{2},+\infty[$

4 $g(x)=\left(\frac{2x-1}{6}\right)^{\frac{3}{2}}$

4 $g'(x)=\frac{3}{2}\left(\frac{2x-1}{6}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{3}$

4 $g'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2x-1}{6}}$

عندما $x \in]0,+\infty[$

4 $f'(x) = \frac{-4}{2\sqrt{x}} = \frac{-2}{\sqrt{x}}$

4 $\boxed{f'(m) = \frac{-2}{\sqrt{m}}}$

$g'(3m+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(3m+\frac{1}{2})-1}{6}}$

4 $= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6m}{6}}$

4 $g'(3m+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{m}}{2}$

$f'(m) . g'(3m+\frac{1}{2}) =$

4 $\frac{-2}{\sqrt{m}} \times \frac{\sqrt{m}}{2} = -1$

فالمماس للخط C في نقطة فاصلتها m عمودي على المماس للخط G في نقطة فاصلتها $3m+\frac{1}{2}$

60 ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين:

المسألة الأولى:

1) $V = \frac{1}{3} S . h$

3 $S = \frac{1}{2} (1)(1) = \frac{1}{2}$

3 $h = \frac{1}{3}$

3 $V = \frac{1}{3} . \frac{1}{2} . \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$

3 وجدنا أن $\vec{BK} = \frac{9}{11}\vec{BM} + \frac{1}{11}\vec{BD}$

3 فالأشعة $\vec{BD}$ و $\vec{BM}$ و $\vec{BK}$

3 مرتبطة خطياً فالنقاط B و M و D و K

تقع في مستوٍ واحد.

أي إن النقطة K تنتمي إلى المستوي (BMD)

2) 3 $A(0,0,0)$

3 $B(1,0,0)$

3 $D(0,1,0)$

3 $M(0,0,\frac{1}{3})$

لإيجاد إحداثيات النقطة K

3 نفرض $K(x,y,z)$

$\vec{BK} = \frac{9}{11}\vec{BM} + \frac{1}{11}\vec{BD}$

3 $\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{9}{11}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3 $\begin{cases} x-1 = -\frac{9}{11} - \frac{1}{11} \Rightarrow x = -\frac{10}{11} + 1 = \frac{1}{11} \\ y = \frac{1}{11} \\ z = \frac{3}{11} \end{cases}$

3 $\boxed{K(\frac{1}{11}, \frac{1}{11}, \frac{3}{11})}$

3) 3 $\vec{BK}(-\frac{10}{11}, \frac{1}{11}, \frac{3}{11})$

3 $\vec{MD}(0, 1, -\frac{1}{3})$

3 $\vec{BK} . \vec{MD} = 0 + \frac{1}{11} - \frac{1}{11} = 0$

3 ومنه $(BK) \perp (MD)$ ....(I)

3 $\vec{MK}(\frac{1}{11}, \frac{1}{11}, \frac{-2}{33})$

3 $\vec{BD}(-1, 1, 0)$

2 $\vec{MK} . \vec{BD} = -\frac{1}{11} + \frac{1}{11} + 0 = 0$

2 ومنه $(MK) \perp (BD)$ ....(II)

من (I) و (II) نستنتج أن:

2 K هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث BMD

(4) 2 $\vec{AK}\left(\frac{1}{11}, \frac{1}{11}, \frac{3}{11}\right)$

2 $\vec{MD}\left(0, 1, -\frac{1}{3}\right)$

2 $\vec{AK}\cdot\vec{MD} = 0 + \frac{1}{11} - \frac{1}{11} = 0$

2 ومنه الشعاع $\vec{AK}$ يعامد الشعاع $\vec{MD}$

2 $\vec{AK}\cdot\vec{BD} = -\frac{1}{11} + \frac{1}{11} + 0 = 0$

2 ومنه الشعاع $\vec{AK}$ يعامد الشعاع $\vec{BD}$

2 فالشعاع $\vec{AK}$ يعامد شعاعين غير مرتبطين خطياً في المستوي (BMD)

2 ومنه $\vec{AK}$ هو شعاع ناظم للمستوي (BMD)

(BMD) : $\vec{n} = \vec{AK} = \left(\frac{1}{11}, \frac{1}{11}, \frac{3}{11}\right)$ ، $B(1, 0, 0)$

2 $\frac{1}{11}(x-1) + \frac{1}{11}(y-0) + \frac{3}{11}(z-0) = 0$

$x-1+y-0+3(z-0)=0$

2 $\boxed{x+y+3z-1=0}$

(5) 2 $\vec{AI}(2, \sqrt{2}, \sqrt{2})$

2 $\vec{AD}(0, 1, 0)$

$\cos(I\hat{A}D) = \cos(\vec{AI}, \vec{AD})$

2 $= \frac{\vec{AI}\cdot\vec{AD}}{\|\vec{AI}\|\cdot\|\vec{AD}\|}$

2 $= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4+2+2}\ (1)}$

2 $= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

2 ومنه $I\hat{A}D = \frac{\pi}{3}$

100

المسألة الثانية:

$f(x) = \frac{1+\ln x}{x} + x - 1$

3 (1) $f(x) - y_d = \frac{1+\ln x}{x}$

3 $f(x) - y_d = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$ ، $\frac{1}{x} \to 0$ ، $\frac{\ln x}{x} \to 0$

3 $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_d) = 0$

3 ومنه المستقيم d الذي معادلته $\boxed{y = x-1}$ مقارب مائل للخط c في جوار $+\infty$

لندرس وضع c بالنسبة إلى d ندرس إشارة الفرق:

$f(x) - y_d = \frac{1+\ln x}{x}$

3 $f(x) - y_d = 0$ عندما $1+\ln x = 0$

ومنه $\ln x = -1$

3 $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

3	x	0 $\frac{1}{e}$	$+\infty$
3	$f(x)-y_d$	$-$ 0	$+$
3	الوضع النسبي	c تحت d	c فوق d

نقطة مشتركة بين c و d
$\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}-1\right)$

(2) $h(x) = x^2 - \ln x$

3 h اشتقاقي على $]0, +\infty[$

3 $h'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x}$

$h'(x) = 0$ عندما $2x^2 - 1 = 0$

$x^2 = \frac{1}{2}$

3 $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ مرفوض ، $\boxed{x = \frac{1}{\sqrt{2}}}$ مقبول

$h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} - \ln\frac{1}{\sqrt{2}}$

3 $h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + \ln\sqrt{2}$

$$\boxed{h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2}$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$h'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$h(x)$	||	$\searrow$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2$	$\nearrow$	

3 نلاحظ من جدول التغيرات أن h

3 $x \in]0,+\infty[$ مهما تكن $h(x) \geq \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2 > 0$

ومنه $h(x) > 0$ مهما تكن $]0,+\infty[$

3 (3) f اشتقاقي على $]0,+\infty[$

3 $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - 1(1+\ln x)}{x^2} + 1$

$f'(x) = \frac{1-1-\ln x}{x^2} + 1$

$f'(x) = \frac{-\ln x + x^2}{x^2}$

3 $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2} > 0$

3 ومنه f متزايد تماما على $]0,+\infty[$

دراسة تغيرات f:

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

3 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$

3 ومنه $\boxed{x=0}$ مستقيم مقارب شاقولي

3 $f(x) = \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0} + \underbrace{\left(\frac{\ln x}{x}\right)}_{\to 0} + \underbrace{(x-1)}_{\to +\infty}$; حيث $+\infty$

3 $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	
$f(x)$	||	$-\infty \nearrow +\infty$	

3 (4) $m_D = f'(1) = 1 = m_d$

2 ومنه المماس لـ C في A يوازي المستقيم d

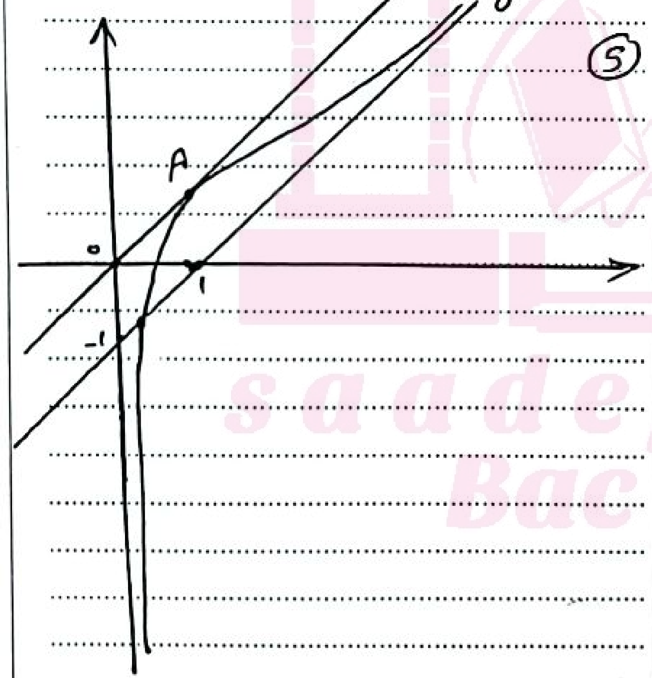
معادلة المماس D من الشكل:

2 $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$y = 1(x-1)+1$

2 $D: \boxed{y = x}$

(5)



2 2 3

100 انتهت الأجوبة

أولاً: أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول:

1) f ليس اشتقاقياً عند $x=1$ لأن 3

f ليس مستمراً عند $x=1$ 3

$f(1)=1$ 3

2) حلول المعادلة $f(x)=2$ هي 3+3

$x=-1$ و $x=2$

3) $f'(0)=0$ (لأن المماس أفقي) 3

حلول المتراجحة $f'(x)<0$ هي 3

$x\in]0,1[$

4) $f([0,1])=]2,3]\cup\{1\}$ 3+1

5) $(-1,2)$ $(-2,0)$ $f'(-1)=\frac{2-0}{-1+2}=2$ 3

$(2,2)$ $(1,0)$ $f'(2)=\frac{2-0}{2-1}=2$ 3

$f'(-1)=f'(2)$

فالمماسان للخط $\mathcal{C}_f$ في النقطتين اللتين فاصلتاهما -1 و 2 متوازيان 3

معادلة المماس للخط $\mathcal{C}_f$ في نقطته $x=-1$

$y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$ 3

$y=2(x+1)+2$

$\boxed{y=2x+4}$ 3

40

السؤال الثاني:

1) $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=6$

4 $\|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{AC}\|\cos(B\hat{A}C)=6$

4 $(3)\cdot(4)\cos(B\hat{A}C)=6$

4 $\cos(B\hat{A}C)=\frac{6}{12}$

4 $\cos(B\hat{A}C)=\frac{1}{2}$

4 ومنه $\boxed{B\hat{A}C=\frac{\pi}{3}}$

2) $\vec{AC}\cdot\vec{AD}=8$

4+4 $\|\vec{AC}\|\cdot\|\vec{AD}\|\cdot\cos\frac{\pi}{4}=8$

4+4 $4\cdot AD\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=8$

4 $AD=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

40

السؤال الثالث:

$f(x)=e\ln x-x$

1) f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

2 $\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$

2 $f(x)=x\left(e\frac{\ln x}{x}-1\right)$ عند $+\infty$

2 $\lim_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$

2 $f'(x)=e\frac{1}{x}-1$

2 $f'(x)=\frac{e-x}{x}$

السؤال الرابع:

(1)

3 $\vec{LI}=\vec{LA}+\vec{AB}+\vec{BI}$

3 $\vec{LI}=\vec{LD}+\vec{DC}+\vec{CI}$

3 بالجمع: $2\vec{LI}=\vec{0}+\vec{AB}+\vec{DC}+\vec{0}$

3 $\boxed{\vec{LI}=\frac{1}{2}\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{DC}}$

(2)

3 $\vec{KJ}=\vec{KA}+\vec{AB}+\vec{BJ}$

3 $\vec{KJ}=\vec{KC}+\vec{CD}+\vec{DJ}$

3 بالجمع: $2\vec{KJ}=\vec{0}+\vec{AB}+\vec{CD}+\vec{0}$

$\vec{KJ}=\frac{1}{2}\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{CD}$

3 $\boxed{\vec{KJ}=\frac{1}{2}\vec{AB}-\frac{1}{2}\vec{DC}}$

(3)

3 $\vec{LI}\cdot\vec{KJ}=\left(\frac{1}{2}\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{DC}\right)\left(\frac{1}{2}\vec{AB}-\frac{1}{2}\vec{DC}\right)$

3 $=\frac{1}{4}\vec{AB}^2-\frac{1}{4}\vec{DC}^2$

3+3 $=\frac{1}{4}\|\vec{AB}\|^2-\frac{1}{4}\|\vec{DC}\|^2$

2 $=0$

($AB=DC$ فرضاً)

2 فالمستقيمان (LI) و (KJ) متعامدان

40

---

2 $f'(x)=0$ عندما

2 $e-x=0$

2 ومنه $\boxed{x=e}$

2 $f(e)=e\ln e-e=0$

2

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$-\infty$ ↗	0	↘	$-\infty$

2 $\ln x<\frac{x}{e}$

2 ومنه $e\ln x<x$

$e\ln x-x<0$

2 $f(x)<0$

نلاحظ من جدول تغيرات التابع f

أن حلول المتراجحة $f(x)<0$ هي

2 $x\in\,]0,+\infty[\,\setminus\{e\}$

أي $x\in\,]0,e[\,\cup\,]e,+\infty[$

2 (2) $f(\pi)<0$

$e\ln\pi-\pi<0$

2 $e\ln\pi<\pi$

2 $\ln\pi^e<\pi$

$\ln\pi^e<\ln e^\pi$

2 ومنه $\pi^e<e^\pi$

40

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية:

التمرين الأول:

① $a = 1 + i\sqrt{3}$

$r = |a| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$ 3

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta \in$ (الربع الأول) , $\theta = \frac{\pi}{3}$

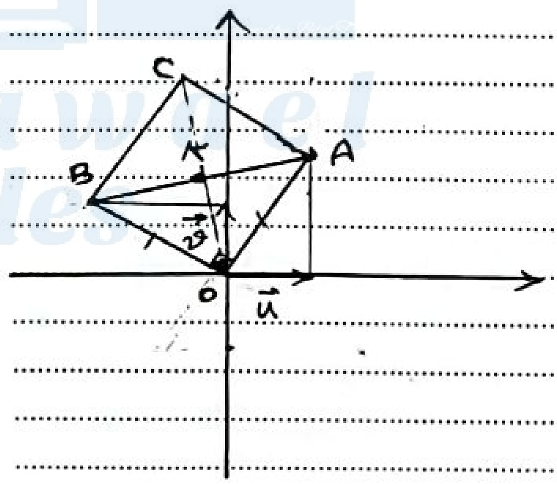
3 $\boxed{a = 2e^{i\frac{\pi}{3}}}$

$b = -\sqrt{3} + i$

3 $r = |b| = \sqrt{3+1} = 2$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$, $\theta \in$ (الربع الثاني) , $\theta = \frac{5\pi}{6}$ 3

3 $\boxed{b = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}}$



3+3

$A(1, \sqrt{3})$ أو $A(2; \frac{\pi}{3})$

$B(-\sqrt{3}, 1)$ أو $B(2; \frac{5\pi}{6})$

3 $\frac{b}{a} = \frac{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}}$

$\frac{b}{a} = e^{(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3})i}$

3 $\frac{b}{a} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\frac{b-0}{a-0} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

2+2 $\left|\frac{b-0}{a-0}\right| = \left|e^{i\frac{\pi}{2}}\right|$, $\arg\left(\frac{b-0}{a-0}\right) = \arg\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$ 3

2+2 $\frac{|b-0|}{|a-0|} = 1$, $(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{2}$

$\frac{OB}{OA} = 1$, فالشعاع $\vec{OA}$ يعامد $\vec{OB}$ 3

فالمثلث OAB

2+2 $OB = OA$, قائم في O

فالمثلث OAB متساوي الساقين

2 فالمثلث OAB قائم في O ومتساوي الساقين 3

2 ② $k = \frac{a+b}{2}$ 3

2 $k = \frac{1+i\sqrt{3} - \sqrt{3} + i}{2}$ 3

2 $\boxed{k = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i}$

③

2 $\frac{0+c}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i = k$

ومنه K منتصف $[OC]$

2 لدينا: K منتصف $[AB]$ ومنتصف $[OC]$

فإن قطرا الرباعي $[OC]$ و $[AB]$ متناصفان

2 فهو متوازي أضلاع.

2 وبما أن فيه زاوية قائمة O فهو مستطيل

2 وفيه ضلعان متجاوران متساويان $OA = OB$

فهو مربع.

60

التمرين الثاني:

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

1) $J =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$g(x) = f(\tan x)$

$g'(x) = (\tan x)' \cdot f'(\tan x)$ 7

$= \cancel{1+\tan^2 x} \cdot \frac{1}{\cancel{1+\tan^2 x}}$

$= 1$ 7

2) $f(1) = \frac{\pi}{4}$

$g(\frac{\pi}{4}) = f(\tan\frac{\pi}{4})$ 7

$= f(1) = \frac{\pi}{4}$ 7

$g'(\frac{\pi}{4}) = 1$ 7

لـ g قابلية اشتقاق عند $x = \frac{\pi}{4}$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{g(x) - g(\frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}} = g'(\frac{\pi}{4})$ 7

$\boxed{\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{g(x) - \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} = 1}$ 4

60

التمرين الثالث:

3 1) $B(1,0,0)$

3 $D(0,1,0)$

3 $H(0,1,1)$

3 $O(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$

3 $I(0,0,\frac{1}{2})$

3 2) $\vec{DO}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$

3 $\vec{BI}(-1, 0, \frac{1}{2})$

$\vec{DO} \cdot \vec{BI} = (\frac{1}{2})(-1) + (-\frac{1}{2})(0) + (1)(\frac{1}{2})$ 7+7

3 $= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

3 ومنه المستقيم (DO) عمودي على المستقيم (BI)

3 $\vec{BH}(-1, 1, 1)$

3 $\vec{DO} \cdot \vec{BH} = (\frac{1}{2})(-1) + (-\frac{1}{2})(1) + (1)(1)$

3 $= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1$

$= -1 + 1 = 0$

3 ومنه المستقيم (DO) عمودي على المستقيم (BH)

وبالتالي (DO) عمودي على المستوي (BIH)

3 لأنه عمودي على مستقيمين متقاطعين في ذلك المستوي.

2 3) لتكن $\vec{n} = \vec{DO}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$

ناظم على المستوي (BIH)

ومنه

أيضاً $\vec{n'} = 2\vec{n} = (1, -1, 2)$

ناظم على المستوي (BIH)

$(BIH): \begin{cases} B(1,0,0) \\ \vec{n'}(1,-1,2) \end{cases}$

2 $1(x-1) - 1(y-0) + 2(z-0) = 0$

2 $\boxed{x - y + 2z - 1 = 0}$

④ $\vec{DO}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$

$\vec{DH}(0, 0, 1)$

2 $\vec{DB}(1, -1, 0)$

من الواضح أن $\vec{DH}\cdot\vec{DB}=0$

ما يشابه $\vec{DB}$ و $\vec{DH}$ متعامدان

وهما غير مرتبطين خطياً:

لنبحث عن عددين حقيقيين a و b يحققان

2 $\vec{DO}=a\vec{DH}+b\vec{DB}$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} b=\frac{1}{2} & (1)\\ -b=-\frac{1}{2} & (2)\\ a=1 & (3)\end{cases}$$

2 من (3) $\boxed{a=1}$ ومن (1) $\boxed{b=\frac{1}{2}}$

وتحقق المعادلة (2):

$\vec{DO}=\vec{DH}+\frac{1}{2}\vec{DB}$

2 ومنه الأشعة $\vec{DO}$ و $\vec{DH}$ و $\vec{DB}$

مرتبطة خطياً فالنقاط D و O و H و B

تقع في مستوٍ واحد.

طريقة (2):

$2\vec{DO}=\vec{DH}+\vec{DF}$

$2\vec{DO}=\vec{DH}+\vec{DB}+\vec{BF}$

$2\vec{DO}=\vec{DH}+\vec{DB}+\vec{DH}$

$2\vec{DO}=2\vec{DH}+\vec{DB}$

$\vec{DO}=\vec{DH}+\frac{1}{2}\vec{DB}$

طريقة (3):

من الواضح أن النقاط المطروحة تنتمي

في المستوي BDHF

حيث BDHF مستطيل.

ومن جهة أخرى (OD) يلاقي (HB)

2 وهما مستقيمان في مستوٍ واحد وغير متوازيين فهما متقاطعان

2 في النقطة K المنتصف لـ O.D أي (HBI)

حيث (DO) يلاقي المستوي (BIH).

60

التمرين الرابع:

$f(x)=\frac{x}{|x|+1}$

① نضع ت.ع مستمر ومعرف على $\mathbb{R}$ وقابل للاشتقاق f.T

عند الصفر وهو

4 معرف على $\mathbb{R}^*$ $g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

4 $g(x)=\frac{\frac{x}{|x|+1}-0}{x}$

4 $g(x)=\frac{1}{|x|+1}$

4 $\lim_{x\to 0} g(x)=1=f'(0)$

4 ومنه f اشتقاق عند $x=0$

معادلة المماس عند النقطة التي

فاصلتها 0 هي:

4 $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

$y=1(x-0)+0$

4 $\boxed{y=x}$

② في جوار $-\infty$ يكون $|x|=-x$

4 $f(x)=\frac{x}{-x+1}$

4 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$

$f(x)\in\,]-1.1, -0.9[$

4 $|f(x)-(-1)|<0.1$

4 $|f(x)+1|<0.1$

$\left|\frac{x}{-x+1}+1\right|<\frac{1}{10}$

4 $\left|\frac{x-x+1}{-x+1}\right|<\frac{1}{10}$

$\frac{1}{|-x+1|}<\frac{1}{10}$

4 $|-x+1|>10$

4 أما x في جوار $-\infty$:

$|-x+1| = -x+1$

$-x+1 > 10$

$-x > 9$

$\boxed{x < -9}$

ومنه $A = -9$ (أو أي عدد أصغر منه)

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$

4 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(f(x)) = \lim\limits_{X\to-1} f(X) = \frac{-1}{2}$

60 المسألة الثالثة: حل كلاً من المسألتين الآتيتين:

6 المسألة الأولى:

6 (1) $a = 0$

6 $b = 1$

6 $c = 1+i$

$d = i$

6 $FM = \frac{\sqrt{3}}{2}(1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (أي تساوي المسافة ...)

6 $f = \frac{1}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) i$

6 $\boxed{f = \frac{1}{2} + \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right) i}$

(2) $R(B) = E$

$c, -\frac{\pi}{3}$

6 $e - c = e^{-i\frac{\pi}{3}}(b - c)$

6 $e - 1 - i = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)(-i)$

6 $e - 1 - i = -\frac{1}{2} i - \frac{\sqrt{3}}{2}$

6 $e = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$

6 $\boxed{e = \frac{2-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i}$

6 (3) $Z_{\vec{AE}} = e - a$

6 $\boxed{Z_{\vec{AE}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i}$

$Z_{\vec{AF}} = f - a$

6 $\boxed{Z_{\vec{AF}} = \frac{1}{2} + \frac{2+\sqrt{3}}{2} i}$

نلاحظ أن:

6 $Z_{\vec{AE}} = (2-\sqrt{3})\, Z_{\vec{AF}}$

وهذا يعني أن

2 $\vec{AE} = (2-\sqrt{3})\, \vec{AF}$

فالشعاعان $\vec{AE}$ و $\vec{AF}$ مرتبطان خطياً

2 فالنقاط A و E و F تقع على استقامة واحدة.

100 المسألة الثانية:

$f(x) = x - 1 + 2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

3 (1) $f(x) - y_d = 2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

3 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right) = 1$

3 $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - y_d) = \lim\limits_{X\to1} (2\ln X) = 0$

وكذلك الأمر

$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right) = 1$

3 $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - y_d) = \lim\limits_{X\to1} (2\ln X) = 0$

3 ومنه المستقيم d الذي معادلته $y = x-1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ و $-\infty$.

② f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

3 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

3 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3 $\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = -\infty$

3 ومنه $\boxed{x=-1}$ مستقيم مقارب شاقولي

3 $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$

3 ومنه $\boxed{x=0}$ مستقيم مقارب شاقولي

3 $f'(x) = 1 + 2\,\dfrac{\frac{1(x)-1(x+1)}{x^2}}{\frac{x+1}{x}}$

3 $f'(x) = 1 + 2\,\dfrac{-1}{x(x+1)}$

3 $f'(x) = \dfrac{x(x+1)-2}{x(x+1)}$

3 $f'(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x(x+1)}$

نضع $f'(x)=0$

3 $x^2+x-2=0$

3 $(x+2)(x-1)=0$

3 إما $\boxed{x=-2}$ ، $f(-2) = -3+2\ln\frac{1}{2}$

3 $f(-2) = -3-2\ln2$

3+3 أو $\boxed{x=1}$ ، $f(1) = 2\ln2$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
3 $f'(x)$		+	0	−	‖	////	‖	−	0	+	
3 $f(x)$	$-\infty$ ↗		$-3-2\ln2$	↘ $-\infty$	‖	////	‖ $+\infty$	↘	$2\ln2$	↗	$+\infty$

③ $f(]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[) =$

3 $]-\infty,-3-2\ln2]\cup[2\ln2,+\infty[$

3 $0 \notin]-\infty,-3-2\ln2]\cup[2\ln2,+\infty[$ و

منه المعادلة $f(x)=0$ لا تقبل حلول.

④ إثبات أن $I(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$ مركز تناظر:

الشرط 1:

إذا كان $x\in D_f$ فإن $2a-x\in D_f$

3 إذا كان $\underbrace{x\in D_f}_{\text{الفرض}}$ فإن $\underbrace{-1-x\in D_f}_{\text{الطلب}}$

لدينا فرضاً

3 $x\in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

$-x\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$

3 $-1-x\in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

$-1-x\in D_f$

فالشرط 1 محقق

الشرط 2: $f(2a-x)+f(x)=2b$

3 $f(-1-x)+f(x) = -3$

$\ell_1 = f(-1-x)+f(x)$

$= -1-x-1+2\ln\left(\dfrac{-1-x+1}{-1-x}\right)+x-1+2\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

3 $= -3+2\ln\left(\dfrac{-x}{-1-x}\times\dfrac{x+1}{x}\right)$

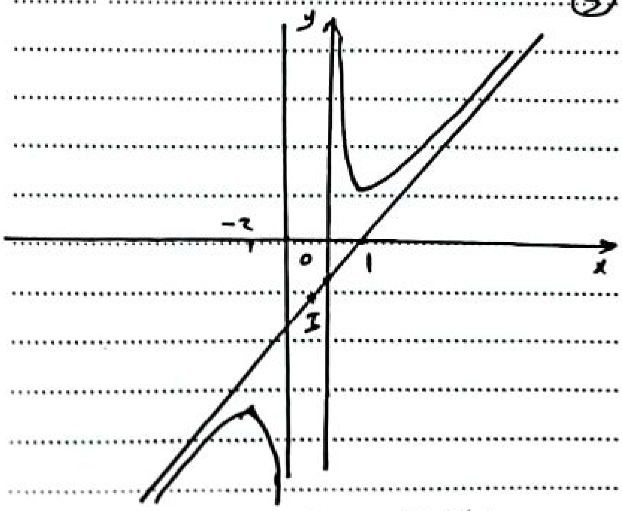
3 $= -3+2\ln1 = -3 = \ell_2$

فالشرط 2 محقق

ومنه $I(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$ مركز تناظر C.

⑤

2+2



100

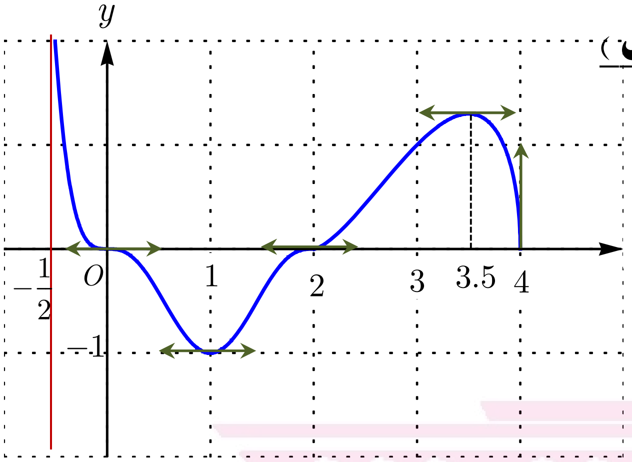
انتهت الأجوبة.

مدارس الأوائل النموذجية الخاصة

الفحص النصفي في مادة الرياضيات

للصف الثالث الثانوي العلمي (2022–2023)   النموذج : C الدرجة: 600   الاسم : ....

أولاً : أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)



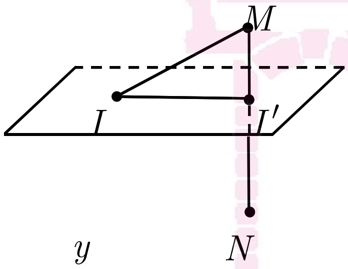
السؤال الأول : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\left]-\frac{1}{2},4\right]$ والمرسوم في الشكل المجاور:

❶ جد $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} f(x)$ واستنتج معادلة مقاربه الشاقولي .

❷ هل f اشتقاقي عند $x=4$ ؟ علل إجابتك .

❸ ما حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟ و ما حلول المعادلة $f'(x)=0$ ؟

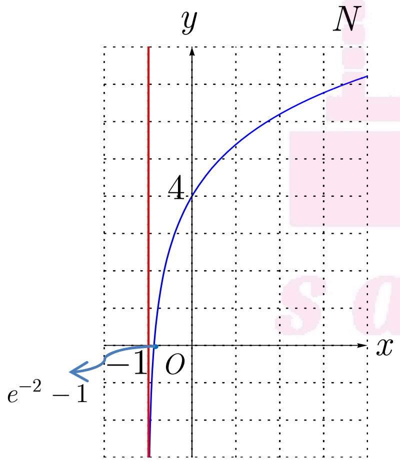
❹ ما حلول المتراجحة $f(x)\le 0$ ؟ و ما حلول المتراجحة $f'(x)\le 0$ ؟



السؤال الثاني: في الشكل المجاور : M و N و I ثلاث نقاط في الفراغ I' المسقط القائم للنقطة I على المستقيم (MN) حيث $MN=5$ و $MI'=2$.

❶ احسب $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MI}$.

❷ بفرض $MI=4$ احسب قياس الزاوية $\widehat{IMN}$. ❸ استنتج الطول NI .

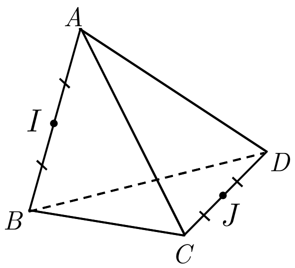


السؤال الثالث : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]-1,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x)=a\ln(x+b)+c$ حيث a و b و c من $\mathbb{R}$. خطّه البياني C الذي يقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها $e^{-2}-1$ والمرسوم في الشكل المجاور :

❶ أثبت أنّ $b=1$.

❷ استفد من المعلومات المدوّنة على الشكل لإيجاد a و c . واكتب عبارة $f(x)$.

❸ استنتج حلول المتراجحة $f(x)\ge 1$.



السؤال الرابع : $ABCD$ رباعي وجوه منتظم طول ضلعه a والنقطتان I و J منتصفا الحرفين : $[AB]$ و $[DC]$ بالترتيب .

❶ احسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

❷ استنتج $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{AI}$.

ثانياً : حل التمارين الأربعة الآتية : (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة : $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2}$

❶ أوجد التابع المشتق f' للتابع f . ثمّ استنتج مشتق التابع $g: x\mapsto \dfrac{\sin x}{\sin^2 x+2}$.

❷ اكتب معادلة المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها $x=0$.

❸ هل يقبل C مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $4x-y=0$.

يوجد صفحة ثانية يرجى قلب الصفحة

التمرين الثاني : في المستوي العقدي $(O;\vec{u},\vec{v})$:

لتكن النقاط A و B و C التي تمثّلها الأعداد العقدية : $z_A=-2\sqrt{3}$ و $z_B=2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}$ و $z_C=2i$ بالترتيب .

❶ اكتب z_A و z_C بالشكل الأسي و z_B بالشكل الجبري .

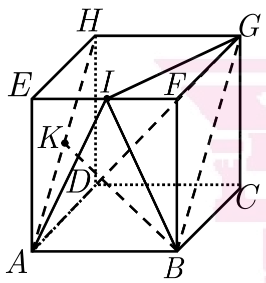
❷ عيّن العدد العقدي z_E الممثّل للنقطة E مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقّلتين $(A,1)$ و $(C,3)$.

❸ بفرض $z_E=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$. احسب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_E}$ واستنتج ماذا يمثّل المستقيم (BE) في المثلث ABC .

التمرين الثالث : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]-\infty,0[$ وفق $f(x)=x+x\cdot\sin\frac{1}{x}-2$.

❶ احسب $\lim\limits_{x\to0} f(x)$. ❷ أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=x-1$ مقاربٌ للخط C.

التمرين الرابع: $ABCDEFGH$ مكعّب طول ضلعه يساوي 1 فيه I منتصف $[EF]$



و K مركز الوجه $ADHE$ ولنختر معلماً متجانساً $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$

❶ احسب مساحة المثلث ABI واستنتج حجم رباعي الوجوه $GABI$.

❷ جد إحداثيات النقاط A و B و G و I و K .

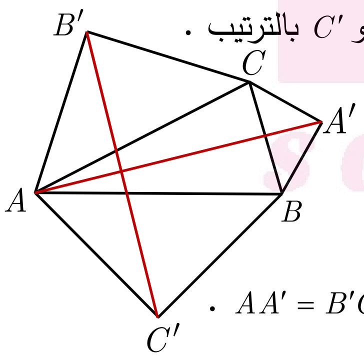
❸ احسب $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AI}$ و $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AG}$.

واستنتج أنّ $\overrightarrow{BK}$ شعاعاً ناظماً على المستوي (AIG) ثمّ اكتب معادلة المستوي (AIG) .

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين : (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: نتأمّل في المستوي الموجّه الشكل المجاور: ABC مثلّث مباشر التوجيه كيفي ننشئ خارجه المثلثات BCA' و CAB' و ABC' القائمة في A' وB' و C' ومتساوية الساقين :

ونرمز للأعداد العقدية a و b و c و a' و b' و c' الممثّلة للنقاط A و B و C و A' و B' و C' بالترتيب .



❶ B هي صورة C وفق دوران مركزه A' وزاويته $\frac{\pi}{2}$

استعمل الصيغة العقدية للدوران لتثبت أنّ : $a'=\frac{b-ic}{1-i}$.

❷ عبّر بالمثل عن b' و c' بدلالة a و b و c .

❸ أثبت $(a'-a)=i(c'-b')$ ثمّ استنتج أنّ المستقيمين (AA') و$(B'C')$ متعامدان و $AA'=B'C'$.

❹ بافتراض أنّه بالمثل سنجد أيضاً $(b'-b)=i(a'-c')$ و $(c'-c)=i(b'-a')$

أثبت أنّ المستقيمات (AA') و (BB') و (CC') تتلاقى في نقطةٍ واحدة .

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $[0,+\infty[$ وفق :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x-\ln x} & : x>0\\ -1 & : x=0\end{cases}$$

❶ أثبت أنّه عندما $x>0$ يكتب $f(x)$ بالشكل $f(x)=-1+\frac{x}{x-\ln x}$.

❷ أثبت أنّ التابع f مستمر عند $x=0$ ثمّ ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند $x=0$

و اكتب معادلة المماس d للخط C في النقطة $A(0,-1)$.

❸ادرس تغيّرات التابع f ونظّم جدولاً به واستنتج معادلة مقاربه الأفقي .

❹ جِدْ نقطة تقاطع الخط C مع محور الفواصل وارسم d ثمّ ارسم الخط البياني C .

❺ استنتج رسم الخط C_1 للتابع f_1 المعرّف على المجال $]0,+\infty[$ وفق العلاقة $f_1(x)=\frac{x}{x-\ln x}$ من الخط البياني C للتابع f .

....انتهت الأسئلة ....

ومنه $I\hat{M}N = \frac{\pi}{3}$ 4

③ $II' = MI \sin\frac{\pi}{3}$ 2

$II' = 4 \cdot \frac{\sqrt3}{2} = 2\sqrt3$ 2

$I'N = 5 - 2 = 3$ 2

حسب فيثاغورث:

$IN^2 = (2\sqrt3)^2 + (3)^2$

$IN^2 = 12 + 9 = 21$

$\boxed{IN = \sqrt{21}}$ 2

40

السؤال الثالث:

f معرف على $]-1,+\infty[$ ومنه

$f(x) = a\ln(x+b) + c$

① f معرف ع.ع $x+b>0$ 3

$x > -b$ 3

أي f معرف على $]-b,+\infty[$ 3

وبالمقارنة مع f معرف على $]-1,+\infty[$ 3

بالمطابقة نجد أن:

$-b = -1$

ومنه $\boxed{b=1}$ 3

② نلاحظ أن المنحني يمر بالنقطة $(0,4)$ C

ومنه $f(0) = 4$ 3

$a\ln 1 + c = 4$

$\boxed{c=4}$ 3

وكذلك نلاحظ أن $f(e^{-2}-1) = 0$

$a\ln(e^{-2}-1+1) + 4 = 0$ 3

$a\ln e^{-2} + 4 = 0$

$a(-2) + 4 = 0$ 3

ومنه $\boxed{a=2}$

فالتابع المرافق هو: 3

$f(x) = 2\ln(x+1) + 4$

أولاً: أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية:

السؤال الأول:

3 ① $\lim\limits_{x\to -\frac12} f(x) = +\infty$

3 ومنه $x = -\frac12$ مستقيم مقارب شاقولي

4 ② f ليس اشتقاقياً في $x=4$

4 لوجود مماسين مختلفين عند هذه النقطة

③ للمعادلة $f(x)=0$ ثلاثة حلول هي

2×3 $x=4$, $x=2$, $x=0$

للمعادلة $f'(x)=0$ أربعة حلول هي

2×4 $x=3.5$, $x=2$, $x=1$, $x=0$

④ حلول المتراجحة $f(x)\le 0$ هي

3+3 $x\in[0,2]\cup\{4\}$

حلول المتراجحة $f'(x)\le 0$ هي

3+3 $x\in\,]-\frac12,1]\cup[3.5,4[$

40

السؤال الثاني:

① $\vec{MN}\cdot\vec{MI} = \vec{MN}\cdot\vec{MI'}$

4 $= \|\vec{MN}\|\cdot\|\vec{MI'}\|$

4 $= (5)\times(2)$

4 $= 10$

4 ② $\cos(I\hat{M}N) = \cos(\vec{MI},\vec{MN})$

4 $= \dfrac{\vec{MI}\cdot\vec{MN}}{\|\vec{MI}\|\cdot\|\vec{MN}\|}$

4 $= \dfrac{10}{4(5)} = \frac12$

3) حلول المتراجحة: $f(x) \geq 1$

2 $2\ln(x+1)+4 \geq 1$

1 $2\ln(x+1) \geq -3$

$\ln(x+1) \geq -\frac{3}{2}$

2 $\ln(x+1) \geq \ln e^{-\frac{3}{2}}$

2 ملاحظة: $e^{-\frac{3}{2}} > 0$ محقق

$x+1 \geq e^{-\frac{3}{2}}$

$x \geq -1+e^{-\frac{3}{2}}$

2 $x \in [-1+e^{-\frac{3}{2}}, +\infty[$

40

السؤال الرابع:

1)

5 $\vec{AB}\cdot\vec{AD} = \|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{AB}\|\cdot\cos\frac{\pi}{3}$

5 $= a\cdot a\cdot\frac{1}{2}$

5 $= \frac{a^2}{2}$

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{AC}\|\cdot\cos\frac{\pi}{3}$

5 $= a\cdot a\cdot\frac{1}{2}$

5 $= \frac{a^2}{2}$

2)

$\vec{AJ}\cdot\vec{AI} =$

5 $= \frac{1}{2}(\vec{AD}+\vec{AC})\cdot\frac{1}{2}\vec{AB}$

5 $= \frac{1}{4}\vec{AB}\cdot\vec{AD} + \frac{1}{4}\vec{AB}\cdot\vec{AC}$

5 $= \frac{1}{4}\cdot\frac{a^2}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4}$

40

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية:

التمرين الأول:

$f(x) = \frac{x}{x^2+2}$

4 1) f مشتقة على IR

4 $f'(x) = \frac{1(x^2+2) - 2x(x)}{(x^2+2)^2}$

4 $f'(x) = \frac{x^2+2-2x^2}{(x^2+2)^2}$

4 $f'(x) = \frac{-x^2+2}{(x^2+2)^2}$

نلاحظ أن: $g(x) = f(\sin x)$

4 $g'(x) = (\sin x)'\cdot f'(\sin x)$

4 $= \cos x \cdot \frac{-\sin^2 x+2}{(\sin^2 x+2)^2}$

4 2) $y = f'(0)(x-0)+f(0)$

4 $f'(0) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$f(0) = 0$

$y = \frac{1}{2}(x-0)+0$

4 $\boxed{y = \frac{1}{2}x}$

3) $y = 4x$

$m_{\text{المماس}} = m_{\text{المستقيم}} = 4$

4 نحل المعادلة: $f'(x) = 4$

4 $\frac{-x^2+2}{(x^2+2)^2} = 4$

$-x^2+2 = 4(x^2+2)^2$

4 $-x^2+2 = 4(x^4+4x^2+4)$

4 $-x^2+2 = 4x^4+16x^2+16$

4 $4x^4+17x^2+14=0$

4 ولا يوجد حل في IR لأن الطرف الأيسر عبارة عن مجموع ثلاثة مقادير موجبة دائماً.

60

التمرين الثاني :

$Z_B = 2\sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ، $Z_A = -2\sqrt{3}$

$Z_C = 2i$

① $Z_A = 2\sqrt{3}\, e^{i\pi}$ 4

$Z_C = 2\, e^{i\frac{\pi}{2}}$ 4

$Z_B = 2\sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$Z_B = 2\sqrt{3}\left(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right)$ 4

$Z_B = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$ 4

$\boxed{Z_B = \sqrt{3} - 3i}$ 4

② $Z_E = \dfrac{1 Z_A + 3 Z_C}{1+3}$ 4

$Z_E = \dfrac{-2\sqrt{3} + 3(2i)}{4}$ 4

$\boxed{Z_E = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} i}$ 4

③ $\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_E} = \dfrac{2i - (-2\sqrt{3})}{\sqrt{3} - 3i + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} i}$ 4

$= \dfrac{2\sqrt{3} + 2i}{\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{9}{2} i}$

$= \dfrac{2}{\frac{3}{2}} \dfrac{(\sqrt{3} + i)}{(\sqrt{3} - 3i)}$ 4

$= \dfrac{4}{3} \dfrac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - 3i}$

نضرب البسط والمقام بمرافق المقام :

4 $\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_E} = \dfrac{4}{3} \dfrac{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+3i)}{3+9}$

$= \dfrac{4}{3} \dfrac{3 + 3\sqrt{3}i + \sqrt{3}i - 3}{12}$

$= \frac{1}{9}(4\sqrt{3}\, i)$

4 $= \dfrac{4\sqrt{3}}{9} i$

4 $\arg\left(\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_E}\right) = \arg\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{9} i\right)$

4 $(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$

4 ومنه $[BE]$ ارتفاع في المثلث ABC

60

التمرين الثالث :

$f(x) = x + x\sin\frac{1}{x} - 2$

① لنحسب $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$

نفرض $g(x) = x\sin\frac{1}{x}$

6 $|g(x)| = |x\sin\frac{1}{x}| = |x||\sin\frac{1}{x}|$

6 $\leq |x|(1)$

6 $|g(x)| \leq |x|$

$|g(x) - 0| \leq |x|$

6 علماً $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$ ، حسب مبرهنة (2) نجد أنّ

6 $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$

6 ومنه $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -2$

② $f(x) = x + x\sin\frac{1}{x} - 2$

$D : y = x - 1$

6 $f(x) - y_D = x\sin\frac{1}{x} - 1$

6 $f(x) - y_D = \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} - 1$

نعوض $X = \frac{1}{x}$

6 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1$

3 $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - y_D) = 1 - 1 = 0$

3 ومنه المستقيم D الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

60 التمرين الرابع:

3 ① $S(ABI) = \frac{1}{2}(1)(1) = \frac{1}{2}$

3 $V = \frac{1}{3} S(ABI) \cdot h$

3 $h = GF = 1$

3 $V = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)(1) = \frac{1}{6}$

3 ② $A(0,0,0)$

3 $B(1,0,0)$

3 $G(1,1,1)$

3 $I\left(\frac{1}{2},0,1\right)$

3 $K\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

3 ③ $\overrightarrow{BK}\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

3 $\overrightarrow{AI}\left(\frac{1}{2},0,1\right)$

3 $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AI} = (-1)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)(0) + \left(\frac{1}{2}\right)(1)$

3 $= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

3 ومنه $\overrightarrow{BK}$ يعامد $\overrightarrow{AI}$

3 $\overrightarrow{AG}(1,1,1)$

3 $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AG} = (-1)(1) + \left(\frac{1}{2}\right)(1) + \left(\frac{1}{2}\right)(1)$

$= -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

3 ومنه $\overrightarrow{BK}$ يعامد $\overrightarrow{AG}$

3 وبالتالي $\overrightarrow{BK}$ يعامد شعاعين غير مرتبطين خطياً في المستوي (AIG) إذن $\overrightarrow{BK}$ ناظمي للمستوي (AIG)

$(AIG)\begin{cases} A(0,0,0) \\ \vec{n} = \overrightarrow{BK} = \left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \end{cases}$

3 $-1(x-0) + \frac{1}{2}(y-0) + \frac{1}{2}(z-0) = 0$

$-x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0$

نضرب بـ -2

3 $\boxed{2x - y - z = 0}$

60

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين:

المسألة الأولى:

① $R(C) = B$; $A', \frac{\pi}{2}$

3 $b - a' = e^{i\frac{\pi}{2}}(c - a')$

3 $b - a' = i(c - a')$

3 $b - a' = ic - ia'$

3 $b - ic = a' - ia'$

3 $b - ic = a'(1 - i)$

3 $\boxed{a' = \frac{b - ic}{1 - i}}$

② المثلث $AB'C$ قائم في B' ومتساوي الساقين

3 $R(A) = C$; $B', \frac{\pi}{2}$

بالمثل نجد:

3 $\boxed{b' = \frac{c - ia}{1 - i}}$

المثلث $AC'B$ قائم في C' ومتساوي الساقين

3 $R(B) = A$; $C', \frac{\pi}{2}$

بالمثل نجد

3 $\boxed{c' = \frac{a - ib}{1 - i}}$

③ 3 $a' - a = \frac{b - ic}{1 - i} - a$

3 $= \frac{b - ic - a(1 - i)}{1 - i}$

3 $\boxed{a' - a = \frac{b - ic - a + ai}{1 - i}}$ (I)

3 $i(c' - b') = i\left(\frac{a - ib}{1 - i} - \frac{c - ia}{1 - i}\right)$

$i(c' - b') = i\left(\frac{a - ib - c + ia}{1 - i}\right)$

3 $\boxed{i(c' - b') = \frac{ia + b - ic - a}{1 - i}}$ (II)

من (I) و (II) نستنتج أنّ:

3 $a' - a = i(c' - b')$

3 $\frac{a' - a}{c' - b'} = i$

3 $\arg\left(\frac{a' - a}{c' - b'}\right) = \arg(i)$ ★

3 $(\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{AA'}) = \frac{\pi}{2}$

فالشعاع $\overrightarrow{AA'}$ يعامد $\overrightarrow{B'C'}$

3 فالمستقيمان (AA') و $(B'C')$ متعامدان

3 $\left|\frac{a' - a}{c' - b'}\right| = |i|$ ★

3 $\frac{|a' - a|}{|c' - b'|} = 1$

3 $\frac{AA'}{B'C'} = 1$

3 $\boxed{AA' = B'C'}$

④ وجدنا من الطلب السابق أنّ:

3 ① $(B'C') \perp (AA')$

ونجد أنّ $b' - b = i(a' - c')$

3 $\frac{b' - b}{a' - c'} = i$

3 $\arg\left(\frac{b' - b}{a' - c'}\right) = \arg(i)$

3 $(\overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{BB'}) = \frac{\pi}{2}$

3 ② ومنه $\boxed{(A'C') \perp (BB')}$

3 وأيضاً $\frac{c' - c}{b' - a'} = i$

3 $\arg\left(\frac{c' - c}{b' - a'}\right) = \arg(i)$

$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{CC'}) = \frac{\pi}{2}$

3 ③ ومنه $\boxed{(A'B') \perp (CC')}$

من ① و ② و ③ نجد أنّ المستقيمات (AA') و (BB')

3 و (CC') تتلاقى في نقطة واحدة هي نقطة

1 ارتفاعات المثلث $A'B'C'$.

100

المسألة الثانية :

1) $f(x)=\frac{\ln x}{x-\ln x}$; $x>0$

إثبات أنّ

3 $f(x)=-1+\frac{x}{x-\ln x}$

3 $f_2=-1+\frac{x}{x-\ln x}$

3 $=\frac{-1(x-\ln x)+x}{x-\ln x}$

3 $=\frac{\ln x}{x-\ln x}=f(x)=f_1$

2) عند $x>0$

3 $f(x)=-1+\frac{x}{x-\ln x}$

3 $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-1$

3 و $f(0)=-1$

ومنه:

3 $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$

3 وبالتالي f مستمر عند (0)

دراسة قابلية اشتقاق f عند (0)

نضع تابع معدل التغيّر للتابع f عند (0) وهو

3 $g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

المشتق عند $x>0$

3 $g(x)=\frac{-1+\frac{x}{x-\ln x}-(-1)}{x-0}$

3 $g(x)=\frac{1}{x-\ln x}$

3 $\lim_{x\to 0} g(x)=0=f'(0)$

3 ومنه f اشتقاقي عند الصفر

الماس d للخط c في النقطة $A(0,-1)$

3 أفقي ومعادلته $d: \boxed{y=-1}$

3 3) f معرف ومستمر واشتقاقي على $[0,+\infty[$

$f(0)=-1$

عند $+\infty$:

$f(x)=\frac{\ln x}{x-\ln x}$

3 $f(x)=\frac{\ln x}{x(1-\frac{\ln x}{x})}$

3 $=\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0}\cdot\frac{1}{1-\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0}}$

3 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

3 فالمستقيم $y=0$ مقارب أفقي

عند $x>0$:

3+3 $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(x-\ln x)-(1-\frac{1}{x})\ln x}{(x-\ln x)^2}$

3 $f'(x)=\frac{1-\frac{\ln x}{x}-\ln x+\frac{\ln x}{x}}{(x-\ln x)^2}$

3 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$

3 $f'(x)=0$ عندما $1-\ln x=0$

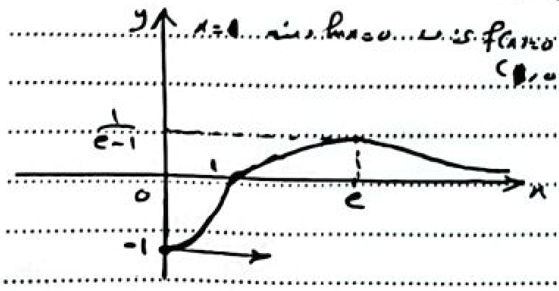
$\ln x=1$

3+3 $\boxed{x=e}$, $f(e)=\frac{1}{e-1}$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

(3, 3, 3)

3 4) $f(x)=0$ عندما $\ln x=0$ ومنه $x=1$ $(1,0)$

4 

5) $f_1(x)=f(x)+1$ ومنه نستنتج C_1

3 بانسحاب C شعاعه $\vec{j}$

100

مدارس الأوائل النموذجية الخاصة

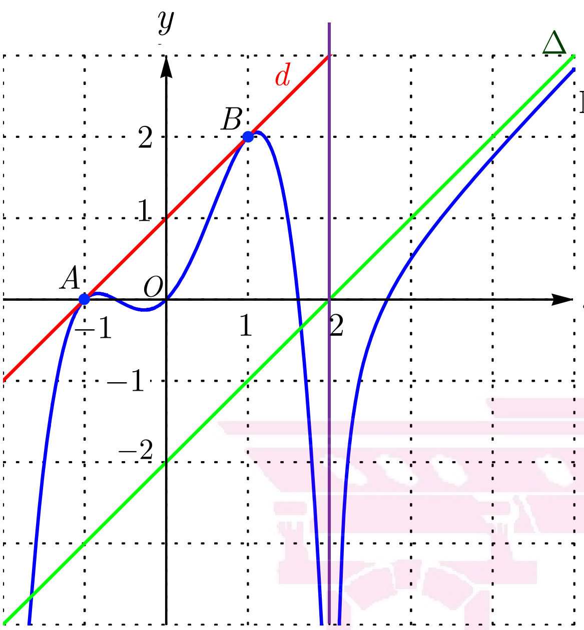
الفحص النصفي في مادة الرياضيات

للصف الثالث الثانوي العلمي (2022–2023)

الاسم :.......

النموذج : D الدرجة: 600

أولاً : أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)



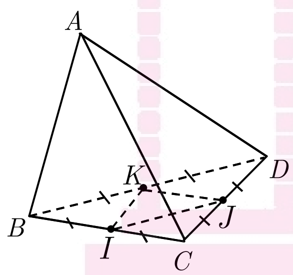
السؤال الأول: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ الذي خطّه البياني المرسوم في الشكل المجاور، Δ مقارب مائل لخطّه البياني C في جوار $+\infty$ والمطلوب:

❶ جِدْ نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واستنتج معادلة كل مستقيم مقارب أفقي أو شاقولي لخطّه البياني .

❷ جِدْ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ واكتب معادلة المستقيم المقارب المائل Δ .

❸ أثبت أنّ المستقيم d مماس الخط C في النقطة A هو نفسه مماس للخط C في B .

❹ أثبت أنّ المستقيمين Δ و d متوازيان .



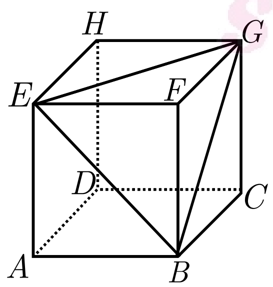
السؤال الثاني: $ABCD$ رباعي وجوه منتظم طول ضلعه a والنقاط I و J و K منتصفات الأحرف : $[BC]$ و $[DC]$ و $[BD]$ بالترتيب .

❶ احسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JK}$.

❷ استنتج $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IK}$ و استنتج وضع المستقيمين (AB) و (IK) .

السؤال الثالث: حل المتراجحة الآتية: $e^{-2x}-5e^{-x}-6\le 0$

السؤال الرابع: $ABCDEFGH$ مكعّب طول ضلعه يساوي 1 ، لنختر المعلم المتجانس : $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.



❶ أوجد إحداثيات النقاط B و E و G و H و F .

❷ عيّن مركبات الشعاعين $\overrightarrow{EB}$ و $\overrightarrow{EG}$.

❸ أوجد إحداثيات النقطة I مركز ثقل المثلث EBG .

❹ تحقّق أنّ $\overrightarrow{FI}$ ناظم على المستوي (EBG) . ثمّ اكتب معادلة المستوي (EBG) .

ثانياً : حل التمارين الأربعة الآتية : (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول : ليكن f التابع المعرّف على $[0,\frac{\pi}{2}[$ وفق : $f(x)=\tan x$

❶ احسب $f(\frac{\pi}{4})$ و $f'(x)$ و $f'(\frac{\pi}{4})$ ثمّ استنتج $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$.

❷ باستخدام التقريب التآلفي المحلي أوجد قيمة تقريبية لِـ $f(0.01)$.

التمرين الثاني : في المستوي العقدي $(O;\vec{u},\vec{v})$ لدينا النقاط A و B و C التي تمثّلها الأعداد العقدية :

$z_A=1+i$ و $z_B=3+4i$ و $z_C=4-i$ بالترتيب .

❶ احسب العدد $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ واستنتج أنّ المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين .

❷ وضّع النقاط A و B و C في المستوي ثمّ عيّن العدد العقدي z_D الممثّل للنقطة D التي تجعل $ABDC$ مربّعاً .

يوجد صفحة ثانية يرجى قلب الصفحة

التمرين الثالث : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\dfrac{x+2}{|x|+1}$

❶ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. ثمّ أعطِ عدداً حقيقياً A يحقّق الشرط : إذا كان $x<A$ كان $f(x)\in]-1.01,-0.99[$

❷ ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر من اليمين ، ثمّ اكتب معادلةً لنصف المماس من اليمين لخطّه البياني C في النقطة $A(0,2)$.

التمرين الرابع: في الفراغ المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

لدينا النقاط $A(3,-2,2)$ و $B(6,1,5)$ و $C(6,-2-1)$ و $D(0,4,-1)$.

❶ احسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ واستنتج أنّ المثلث ABC قائم . واحسب مساحته .

❷ تحقّق أنّ المستقيم (AD) يعامد المستوي (ABC) .

❸ احسب حجم الهرم $ABCD$.

❹ احسب قياس الزاوية الهندسية $\widehat{BDC}$.

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين : (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى :

❶ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة الآتية : $z^2-8\sqrt{3}z+64=0$.

❷ لتكن النقطتان A و B اللتان يمثّلهما العددان العقديان : $z_A=4\sqrt{3}-4i$ و $z_B=4\sqrt{3}+4i$.

a) اكتب كلاً من z_A و z_B بالشكل الأسي .

b) احسب الأطوال : OA و OB و AB واستنتج نوع المثلّث OAB .

❸ لتكن النقطة C التي يمثّلها العدد العقدي $z_C=-\sqrt{3}+i$.

أوجد العدد العقدي z_D الممثّل للنقطة D صورة C وفق الدوران الذي مركزه O و زاويته $-\dfrac{\pi}{3}$.

❹ لتكن النقطة E التي يمثّلها العدد العقدي $z_E=4\sqrt{3}+6i$

احسب العدد $\dfrac{z_E-z_C}{z_D-z_C}$ ثمّ استنتج وقوع النقاط C و D و E على استقامةٍ واحدة .

❺ أثبت أنّ $\dfrac{z_C-z_A}{z_E-z_A}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ واستنتج نوع المثلث ACE .

المسألة الثانية: ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على المجال $]1,+\infty[$ وفق : $f(x)=ax+\dfrac{b}{\ln x}$

أولاً : عيّن العددين الحقيقيين a و b إذا علمتَ أنّ الخط C_f يقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها e والمماس للخط C_f في هذه النقطة يوازي المستقيم $y=2x$.

ثانياً : بفرض $a=1$ و $b=-e$ نحصل على التابع $f(x)=x-\dfrac{e}{\ln x}$.

❶ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to1} f(x)$. واكتب معادلة مستقيمه المقارب الشاقولي .

❷ أثبت أنّ f متزايد تماماً على $]1,+\infty[$. ثمّ نظّم جدولاً بتغيّرات التابع f .

❸ أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ مقارب للخط C_f . ثمّ ادرس وضع C_f بالنسبة إلى Δ .

❹ ارسم كل مقارب وجدته ثمّ ارسم C_f.

....انتهت الأسئلة..

D	مادة الرياضيات	سلم تصحيح - الامتحان النصفي – شتنبر 2022-2023

أولاً : أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية :

السؤال الأول :

① f معرفة على المجال $]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$

2 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

2 $\lim_{x\to 2} f(x)=-\infty$

2 ومنه $\boxed{x=2}$ مستقيم مقارب شاقولي

2 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2 ② $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$

حيث a ميل المستقيم المقارب المائل D للخط c
لإيجاده نلاحظ أنه يمر بالنقطتين $(2,0)$ و $(0,-2)$

2 $m=\frac{0-(-2)}{2-0}=1=a$

2 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$

معادلته من الشكل $y=ax+b$
حيث b الترتيب لنقطة تقاطع D مع $y'oy$

2 ومنه $b=-2$

2 وبالتالي $D: y=x-2$

③ لنوجد معادلة المماس d للخط c في A

2 $y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$

2 $f'(-1)=\frac{0-1}{-1-0}=1$

2 $f(-1)=0$

$y=1(x+1)+0$

2 $\boxed{y=x+1}$ --(I)

معادلة المماس d للخط c في B

2 $y=f'(1)(x-1)+f(1)$

2 $f'(1)=1$

2 $f(1)=2$

$y=1(x-1)+2$

2 $\boxed{y=x+1}$ ---(II)

2 من (I) و (II) نجد أن المستقيم d مماس للخط c في A وفي نفس الوقت مماس للخط c في B

2 ④ $m_d=m_D=1$

2 ومنه المستقيمان d و D متوازيان

السؤال الثاني :

ABCD رباعي وجوه منتظم طول ضلعه a

① $\vec{AB}\cdot\vec{IJ}$

3 $=\vec{AB}\cdot\vec{BK}$

$=-\vec{BA}\cdot\vec{BK}$

3 $=-\|\vec{BA}\|\cdot\|\vec{BK}\|=-a\cdot\frac{a}{2}$

3 $=-\frac{a^2}{4}$

3 $\vec{AB}\cdot\vec{JK}=\vec{AB}\cdot\vec{IB}$

3+3 $=(-\vec{BA})\cdot(-\vec{BI})$

$=\vec{BA}\cdot\vec{BI}$

3 $=\|\vec{BA}\|\cdot\|\vec{BI}\|\cdot\cos\frac{\pi}{3}$

3 $=a\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2}$

3 $=\frac{a^2}{4}$

3 ② $\vec{AB}\cdot\vec{IK}=\vec{AB}(\vec{IJ}+\vec{JK})$

3 $=\vec{AB}\cdot\vec{IJ}+\vec{AB}\cdot\vec{JK}$

3 $=-\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}=0$

4 فالمستقيم (AB) عمودي على المستقيم (IK)

40

السؤال الثالث:

$e^{-2x} - 5e^{-x} - 6 \le 0$

هذه متباينة من الدرجة الثانية
بالحصول على

6 $(e^{-x} - 6)(e^{-x} + 1) \le 0$

6 بما أن $e^{-x} + 1 > 0$

فإن إشارة المقدار $(e^{-x}-6).(e^{-x}+1)$

من إشارة $(e^{-x}-6)$

فالمتباينة تصبح

6 $e^{-x} - 6 \le 0$

6 $e^{-x} \le 6$

6 $-x \le \ln 6$

6 $x \ge -\ln 6$

4 $x \in [-\ln 6, +\infty[$

40

السؤال الرابع:

2 (1) $B(1,0,0)$

2 $E(0,0,1)$

2 $G(1,1,1)$

2 $H(0,1,1)$

2 $F(1,0,1)$

2 (2) $\vec{EB}(1,0,-1)$

2 $\vec{EG}(1,1,0)$

2 (3) $I\left(\frac{1+0+1}{3}, \frac{0+0+1}{3}, \frac{0+1+1}{3}\right)$

2 $I\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

2 (4) $\vec{FI}\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

2 $\vec{FI}.\vec{EB} = \left(-\frac{1}{3}\right)(1) + 0 + (-1)\left(-\frac{1}{3}\right)$

2 $= -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$

2 فالشعاع $\vec{FI}$ يعامد الشعاع $\vec{EB}$

2 $\vec{FI}.\vec{EG} = \left(-\frac{1}{3}\right)(1) + \left(\frac{1}{3}\right)(1) + 0$

2 $= -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$

2 فالشعاع $\vec{FI}$ يعامد الشعاع $\vec{EG}$

2 فالشعاع $\vec{FI}$ يعامد شعاعين غير مرتبطين خطياً في المستوي (EBG)

فالشعاع $\vec{FI}$ ناظم للمستوي (EBG)

$(EBG): \begin{cases} B(1,0,0) \\ \vec{FI} = \vec{n} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \end{cases}$

2 $-\frac{1}{3}(x-1) + \frac{1}{3}(y-0) - \frac{1}{3}(z-0) = 0$

نضرب بـ -3

2 $x - 1 - y + z = 0$

2 $\boxed{x - y + z - 1 = 0}$

40 ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية:

التمرين الأول:

6 $f(x) = \tan x$

(1) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

6 $f'(x) = 1 + \tan^2 x$

6 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + 1^2 = 2$

3 بما أن f اشتقاقي عند $x = \frac{\pi}{4}$
فإن

6 $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

6 $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = 2$

(2) $f(0.01) \simeq ?$

6 $a = 0, \ h = 0.01$

3 $f(a+h) \simeq f'(a).h + f(a)$

6 $f(0+0.01) \simeq f'(0).(0.01) + f(0)$

6 $\simeq 1(0.01) + 0$

6 $f(0.01) \simeq 0.01$

60

التمرين الثالث :

$z_C = 4-i$, $z_B = 3+4i$ و $z_A = 1+i$

① 3 $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{3+4i-1-i}{4-i-1-i}$

3 $= \frac{2+3i}{3-2i}$

نضرب بسط ومقام بمرافق المقام :

3 $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A} = \frac{(2+3i)(3+2i)}{9+4}$

3 $= \frac{6+4i+9i-6}{13}$

3 $= i$

$\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A} = i$

3 $\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right) = \arg(i)$

3 $(\vec{AC}, \vec{AB}) = \frac{\pi}{2}$

3 فالمثلث ABC قائم في A

3 $\left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right| = |i|$

3 $\frac{|z_B-z_A|}{|z_C-z_A|} = 1$

3 $\frac{AB}{AC} = 1$

3 $AB = AC$

فالمثلث ABC متساوي الساقين

3 فأصبح المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين

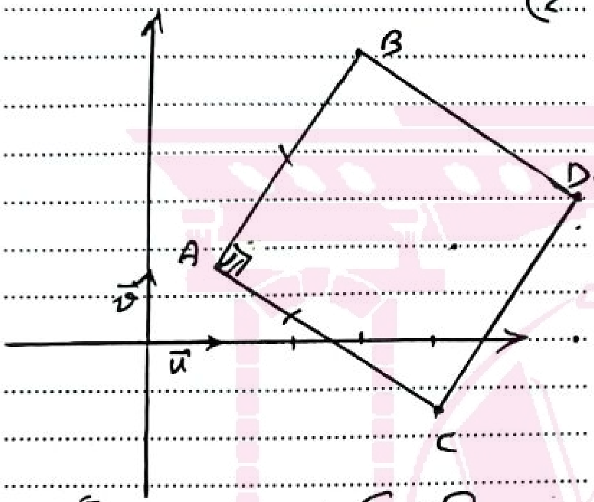
طريقة (2)

$z_B - z_A = i(z_C - z_A)$

ومنه B هي صورة C بدوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

فالمثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين

② 3



يكفي ليكون ABDC مربعاً

3 أن يكون متوازي أضلاع (لأن متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة فهو مستطيل فيه ضلعان متجاوران متساويان مربع)

3 $\vec{AB} = \vec{CD}$

$z_{\vec{AB}} = z_{\vec{CD}}$

3 $z_B - z_A = z_D - z_C$

3 $z_D = z_B + z_C - z_A$

3 $z_D = 3+4i+4-i-1-i$

3 $\boxed{z_D = 6+2i}$

60

التمرين الثالث :

$f(x) = \frac{x+2}{|x|+1}$

① في جوار $-\infty$ يكون $|x| = -x$ 3

$f(x) = \frac{x+2}{-x+1}$ 3

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$ 3

$f(x) \in]-1.01, -0.99[$

يكفي $|f(x) - (-1)| < 0.01$ 3

$|f(x) + 1| < \frac{1}{100}$ 3

$\left| \frac{x+2}{-x+1} + 1 \right| < \frac{1}{100}$

$\left| \frac{x+2-x+1}{-x+1} \right| < \frac{1}{100}$ 3

$\frac{3}{|-x+1|} < \frac{1}{100}$

$\frac{|-x+1|}{3} > 100$ 3

$|-x+1| > 300$ 3

بما أن x في جوار $-\infty$ فإن

$|-x+1| = -x+1$

$-x+1 > 300$ 3

$-x > 299$

$x < -299$ 3

ومنه $\boxed{A = -299}$ (أو أي عدد أصغر منه) 3

② نضع g تابع معدل التغير للتابع f عند الصفر من اليمين وهو

$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ 3

المعرف على $]0, +\infty[$

3 $g(x) = \frac{\frac{x+2}{|x|+1} - 2}{x}$

$g(x) = \frac{x+2-2(|x|+1)}{x(|x|+1)}$

3 $g(x) = \frac{x - 2|x|}{x(|x|+1)}$

بما أن $x > 0$ فإن $|x| = x$

$g(x) = \frac{x - 2x}{x(x+1)}$

3 $g(x) = \frac{-x}{x(x+1)}$

3 $g(x) = \frac{-1}{x+1}$

3 $\lim_{x \to 0^+} g(x) = -1 = f'(0^+)$

3 ومنه f اشتقاقي عند الصفر من اليمين

معادلة نصف المماس من اليمين عند الصفر

3 $y = f'(0^+)(x-0) + f(0)$

$y = -1(x-0) + 2$

3 $\boxed{y = -x + 2}$

60

التمرين الرابع :

$A(3,-2,2)$ و $B(6,1,5)$ و $C(6,-2,-1)$

① 2 $\vec{AB}(3,3,3)$

2 $\vec{AC}(3,0,-3)$

2 $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = (3)(3)+(3)(0)+(3)(-3)$

2 $= 9-9=0$

2 فالشعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ متعامدان

فالمثلث ABC قائم في A

2 $\|\vec{AB}\| = \sqrt{9+9+9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

2 $\|\vec{AC}\| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$

2 $S(ABC) = \frac{1}{2}\, AB \cdot AC$

2 $= \frac{1}{2}\, 3\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{2} = \frac{9\sqrt{6}}{2}$

② 2 $\vec{AD}(-3,6,-3)$

2 $\vec{AD}\cdot\vec{AB} = (-3)(3)+6(3)-3(3)$

$= -9+18-9=0$

2 فالمستقيم (AD) يعامد المستقيم (AB)

2 $\vec{AD}\cdot\vec{AC} = (-3)(3)+6(0)-3(-3)$

$= -9+0+9=0$

2 فالمستقيم (AD) يعامد المستقيم (AC)

2 فالمستقيم (AD) يعامد المستوي (ABC)

لأنه عمودي على مستقيمين متقاطعين في ذلك المستوي

③ 2 $v = \frac{1}{3}\, S \cdot h$

2 $S = S(ABC) = \frac{9\sqrt{6}}{2}$

2 $h = AD = \sqrt{9+36+9} = \sqrt{54}$

2 $\boxed{h = 3\sqrt{6}}$

2 $v = \frac{1}{3}\, \frac{9\sqrt{6}}{2} \times 3\sqrt{6}$

2 $\boxed{v = 27}$

④ 2 $\cos(B\hat{D}C) = \cos(\vec{DB},\vec{DC})$

2 $= \dfrac{\vec{DB}\cdot\vec{DC}}{\|\vec{DB}\|\cdot\|\vec{DC}\|}$

2 $\vec{DB}(-6,3,-6)$

2 $\vec{DC}(-6,6,0)$

$\vec{DB}\cdot\vec{DC} = (-6)(-6)+3(6)+0$

$= 36+18$

2 $= 54$

2 $\|\vec{DB}\| = \sqrt{36+9+36} = \sqrt{81} = 9$

2 $\|\vec{DC}\| = \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2}$

2 $\cos(D\hat{B}C) = \dfrac{54}{9\,(6\sqrt{2})} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

2 $\boxed{D\hat{B}C = \frac{\pi}{4}}$ ومنه

60

ثالثاً : حلول المسائل الأربعة :

المسألة الأولى :

(1) $z^2 - 8\sqrt{3}\,z + 64 = 0$

$a = 1 ,\ b = -8\sqrt{3} ,\ c = 64$

$\Delta = b^2 - 4ac$

3 $= 64(3) - 4(1)(64)$

$= 64(-1)$

3 $= -64 < 0$

للمعادلة حلان في C

3 $\sqrt{-\Delta} = \sqrt{64} = 8$

3 إذاً $z_1 = \frac{-b + \sqrt{-\Delta}\,i}{2a}$

3 $z_1 = \frac{8\sqrt{3} + 8i}{2}$

3 $\boxed{z_1 = 4\sqrt{3} + 4i}$

3 $\boxed{z_2 = \overline{z_1} = 4\sqrt{3} - 4i}$

(2)

(a) $z_A = 4\sqrt{3} - 4i$

3 $r = |z_A| = \sqrt{16(3) + 16} = \sqrt{64} = 8$

3+3 $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$; $\theta \in$ ر4 , $\theta = -\frac{\pi}{6}$

3 $\boxed{z_A = 8\,e^{-i\frac{\pi}{6}}}$

3 $z_B = \overline{z_A} = 8\,e^{i\frac{\pi}{6}}$

(b)

3 $OA = |z_A| = 8$

3 $OB = |z_B| = 8$

3 $AB = |z_B - z_A| = |4\sqrt{3} - 4i - 4\sqrt{3} - 4i|$

$= |-8i| = 8$

3 $OA = OB = AB = 8$ نلاحظ أن

فالمثلث OAB متساوي الأضلاع

(3) $z_C = -\sqrt{3} + i$

$R(C) = D$

$O , -\frac{\pi}{3}$

3 $z_D = e^{-i\frac{\pi}{3}}\, z_C$

3 $z_D = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-\sqrt{3} + i)$

3 $z_D = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{3}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}$

3 $\boxed{z_D = 2i}$

(4) $z_E = 4\sqrt{3} + 6i$

3 $\frac{z_E - z_C}{z_D - z_C} = \frac{4\sqrt{3} + 6i + \sqrt{3} - i}{2i + \sqrt{3} - i}$

3 $= \frac{5\sqrt{3} + 5i}{\sqrt{3} + i} = 5$

3 $\arg\left(\frac{z_E - z_C}{z_D - z_C}\right) = \arg(5)$

3 $(\overrightarrow{CD} , \overrightarrow{CE}) = 0$

3 فالشعاعان $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CE}$ مرتبطان خطياً

فالنقاط C و D و E تقع على استقامة واحدة

(5)

3 $\frac{z_C - z_A}{z_E - z_A} = \frac{-\sqrt{3} + i - 4\sqrt{3} + 4i}{4\sqrt{3} + 6i - 4\sqrt{3} + 4i}$

3 $= \frac{-5\sqrt{3} + 5i}{10i}$

2 $= \frac{-\sqrt{3} + i}{2i}$

2

3 $= \frac{\sqrt{3}\,i^2 + i}{2i} = \frac{i(1 + \sqrt{3}\,i)}{2i}$

3 $= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

3 $z_C - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_E - z_A)$

3 وهذه تمثل C صورة E وفق الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$

3 فالمثلث ACE متساوي الأضلاع

100

المسألة الثانية :

$f(x) = ax + \frac{b}{\ln x}$

3 أولاً : $(e, 0) \in C$

3 ومنه $f(e) = 0$

3 $ae + \frac{b}{\ln e} = 0$

3 $\boxed{ae + b = 0}$ (1)

3 $f'(e) = 2$

3 $f'(x) = a + \frac{-\frac{1}{x} \cdot b}{(\ln x)^2}$

3 $f'(x) = a - \frac{b}{x(\ln x)^2}$

3 $f'(e) = 2$

3 $a - \frac{b}{e(1)^2} = 2$

3 $ae - b = 2e$ (2)

بجمع : (1) و (2)

3 $2ae = 2e$

3 $\boxed{a = 1}$

بتعويض في (1)

$e + b = 0$

3 $\boxed{b = -e}$

فالتابع المطلوب هو

3 $f(x) = x - \frac{e}{\ln x}$

ثانياً :

4 (1) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

4 $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

4 ومنه مستقيم مقارب شاقولي $\boxed{x = 1}$

3 (2) f اشتقاقي على $]1, +\infty[$

4 $f'(x) = 1 - \frac{-\frac{1}{x} \cdot e}{(\ln x)^2}$

3 $f'(x) = 1 + \frac{e}{x(\ln x)^2} > 0$

3 ومنه f متزايد تماماً على $]1, +\infty[$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3 (3) $f(x) - y_D = -\frac{e}{\ln x}$

3 $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y_D) = 0$

3 ومنه مستقيم مقارب مائل $D : y = x$ للخط C بجوار $+\infty$

لدراسة وضع C بالنسبة إلى D

ندرس إشارة الفرق

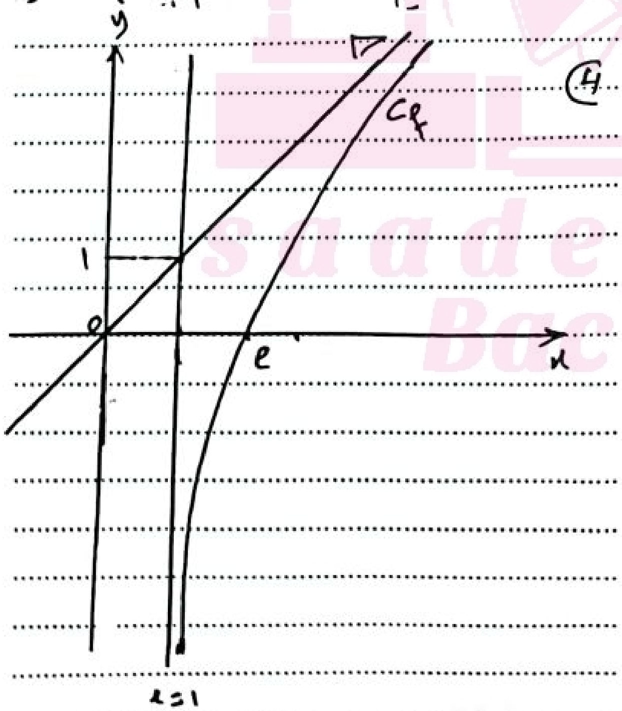
3 $f(x) - y_D = \frac{-e}{\ln x} < 0$

لكن $x \in]1, +\infty[$

3 ومنه C يقع تحت D على المجال $]1, +\infty[$

(4)

3 + 3 + 3



100 انتهت الأجوبة