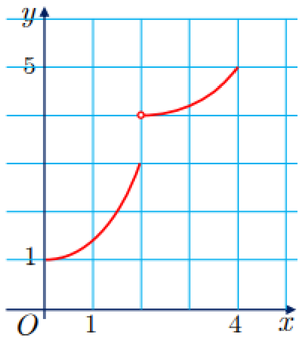
قراءة الخطوط البيانية:

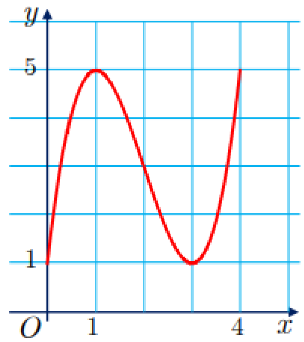
أولاً : عن مجموعات التعريف :

لإيجاد مجموعة تعريف تابع من خطه البياني نميز ثلاث حالات :

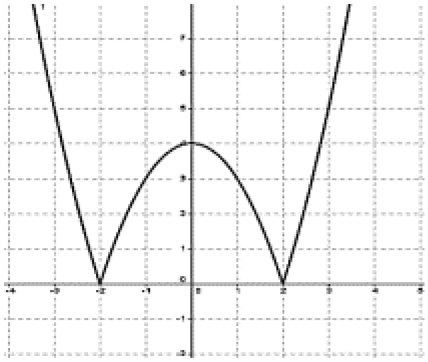
١ـ الحالة الأولى : إذا كان منحني التابع خط وحيد و مستمر (لا يحوي نقاط انقطاع) :
عندئذ : تكون مجموعة التعريف من فواصل أقصى نقطة من اليسار (أو $-\infty$) إلى فواصل أقصى نقطة من اليمين (أو $+\infty$)



$D_f = [0,2] \cup]2,4]$
$D_f = [0,4]$

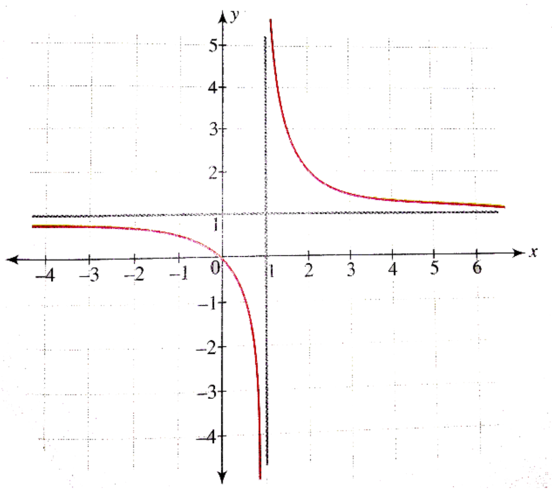


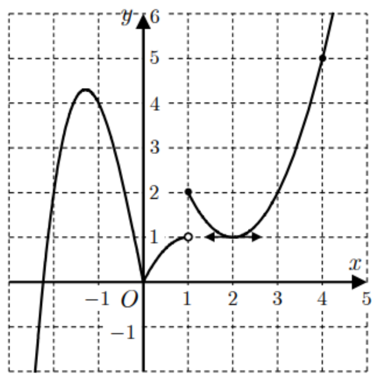
$D_f = [0,4]$



$D_f =]-\infty, +\infty[$

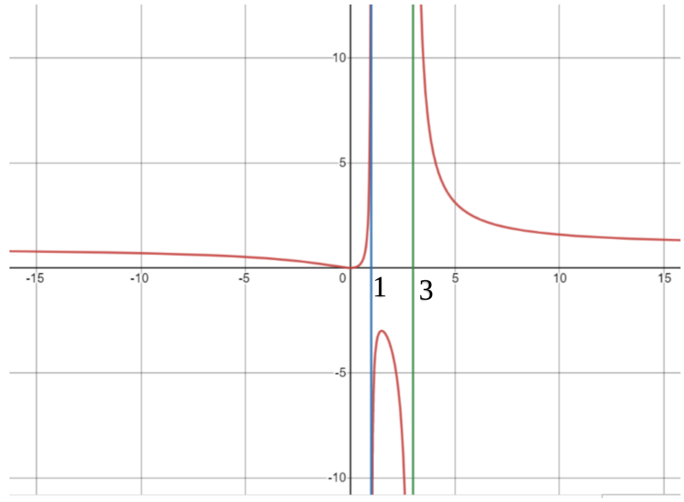
٢ـ الحالة الثانية : المنحني عبارة عن اجتماع أكثر من خط
نوجد مجموعة تعريف كل فرع لوحده ثم نضع بينها اجتماعات
و تجدر الإشارة هنا أن التابع سيكون عبارة عن خطين يفصل بينهما إما مقارب شاقولي (و عنده يكون المجال دائماً مفتوح) أو نقطة انقطاع (و عندها نفتح المجال عند النقطة المفتوحة) و نغلقه عند النقطة المغلقة





$D_f =]-\infty, 1[\cup [1, +\infty[$
$D_f =]-\infty, +\infty[$

$D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$



$D_f =]-\infty, 1[\cup]1, 3[\cup]3, +\infty[$

ثانيا : عن النهايات و المقاربات :

عندما نجد سؤالاً يُطلب فيه نهايات يُفضل أن نكتب ما نجده من مقاربات قبل البدء

فمثلاً :

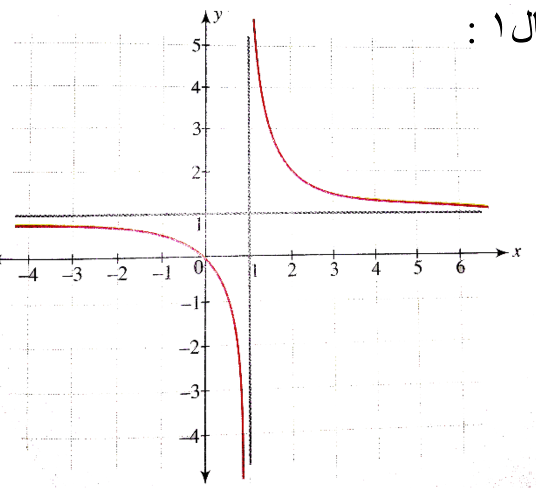
إذا وجدنا أن $y = 1$ مقارب افقي عند $+\infty$ فهذا يعطينا معلومة أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

و إذا وجدنا أن $\underbrace{x = 2}_{x \to 2}$ مقارب شاقولي للتابع عند $\underbrace{+\infty}_{\lim f(x) = +\infty}$ (نحو الأعلى) و C يقع على يمين مقاربه

$x \to 2^+$

و بذلك نتمكن من الإجابة عن أسئلة النهايات و عن أسئلة تعيين المقاربات

مثال ١ :



هنا لدينا :

$y = 1$ مقارب أفقي عند $+\infty$ و عند $-\infty$ بالتالي

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \,,\, \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$

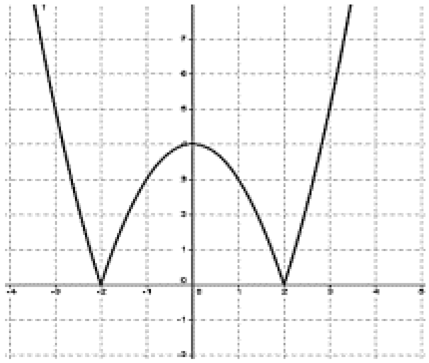
$x = 1$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$ على اليمين :

$\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$

$x = 1$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$ و على اليسار :

$\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$

ملاحظة : إذا كان التابع لا يملك مقاربات فغالباً يكون الجواب $+\infty$ (نحو الاعلى) و $-\infty$ (نحو الأدنى)



هنا نلاحظ أن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

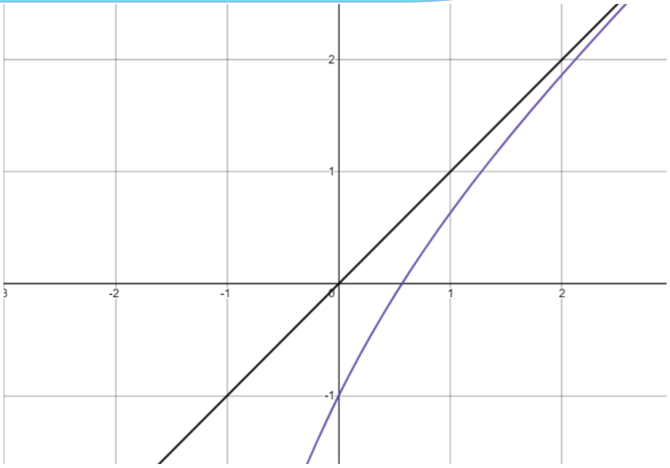
و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

ثالثاً: عن المقارب المائل :

١- عندما يُطلب حساب $Lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ فيجب أن نتذكر أن هذه النهاية تساوي أمثال x في معادلة المقارب المائل (أي تمثل ميله) و عليه يكون :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = a = m_{\text{المقارب}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

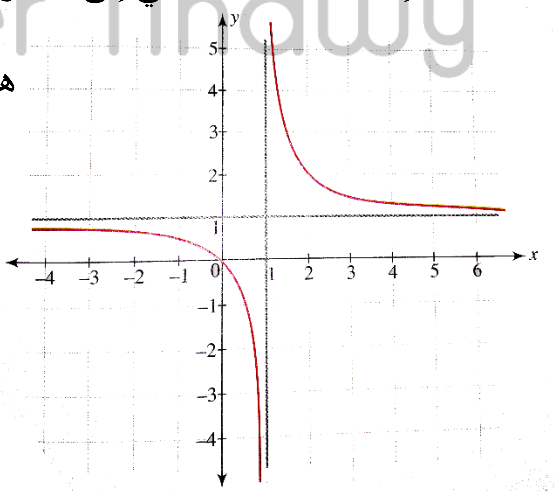
حيث $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ نقطتين مميزتين يمرُّ منهما المستقيم



هنا نلاحظ أن المستقيم المرسوم مقارب مائل في جوار $+\infty$
و بالتالي عندما يطلب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ فهو يريدنا أن نحسب ميله
و نلاحظ أن المستقيم هنا يمر من $A(0,0)$ و $B(1,1)$
و بالتالي :
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=m_d=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1-0}{1-0}=1$$

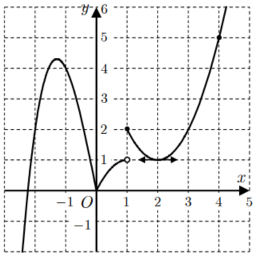
٢- إذا طلب إيجاد معادلة المقارب المائل :
أ- نوجد الميل $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
ب-نطبق القانون $y-y_1=m(x-x_1)$
ففي المثال السابق :
$$y-y_A=m(x-x_A)\rightarrow\quad y-0=1(x-0)\rightarrow\quad \boxed{y=x}$$
رابعاً : عن الاشتقاق :
١- قابلية الاشتقاق:
يكون f غير قابل للاشتقاق عند a في الحالات التالية:
أ- إذا كانت a لا تنتمي إلى مجموعة التعريف

هنا f غير اشتقاقي عند $x=1$ لأنه غير معرف عندها



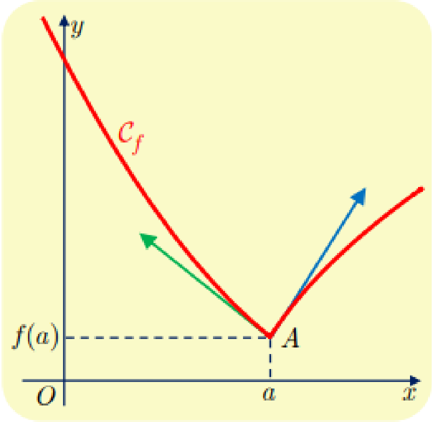
ب-إذا كانت a تنتمي إلى مجموعة التعريف و لكن f غير مستمر عند a (منقطع)

نلاحظ أن f معرف عند $x=1$ لكنه غير مستمر عندها فهو غير اشتقاقي عند $x=1$

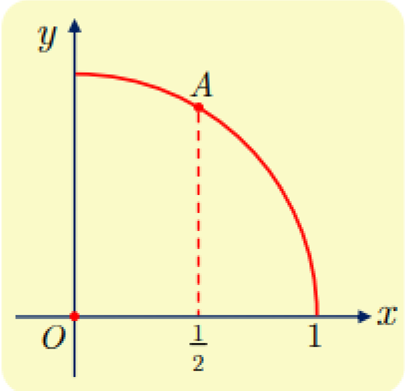


ت-إذا كان التابع يقبل نصفي مماس عند a (منكسر)

نلاحظ أن f يقبل نصفي مماس عند $x = a$ فهو غير اشتقاقي عند $x = a$



ث-إذا كان التابع يقبل مماساً شاقولياً عند a (يكون التابع مغلق عند طرفه)



f غير اشتقاقي عند $x = 1$ لأنه يقبل مماساً شاقولياً عند $x = 1$

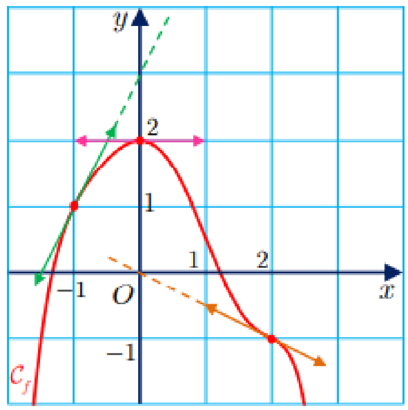
٢- حساب $f'(a)$ نميز هنا حالتين :

أ- عند a يوجد للتابع مماساً أفقياً (أو قيمة حدية) : عندئذٍ نضع $f'(a) = 0$ مباشرةً

ب-عند a يوجد للتابع مماساً مائلاً :

عندئذٍ : $f'(a) = m_{\text{المماس}} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

و لإيجاد معادلة المماس نطبق القانون $y - y_1 = m(x - x_1)$



حساب $f'(0)$: نلاحظ أن f يقبل مماساً أفقياً عند $x = 0$ و بالتالي $f'(0) = 0$

لكن $f(0) = 2$ (تصوير)

معادلته :

$$y - 2 = 0(x - 0)$$
$$y = 2$$

حساب $f'(2)$: نلاحظ أن f يقبل مماساً مائلاً عند $x = 2$ و هذا المماس يمر من النقطتين :

$A(0,0)\ , B(2,-1)$

و بالتالي :

$$f'(2) = \frac{-1-0}{2-0} = -\frac{1}{2}$$

معادلته:

$$y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 0)$$
$$y = -\frac{1}{2}x$$

حساب $f'(-1)$: نلاحظ أن f يقبل مماساً مائلاً عند $x = -1$ و هذا المماس يمر من النقطتين :

$A(0,3)\ , B(-1,1)$

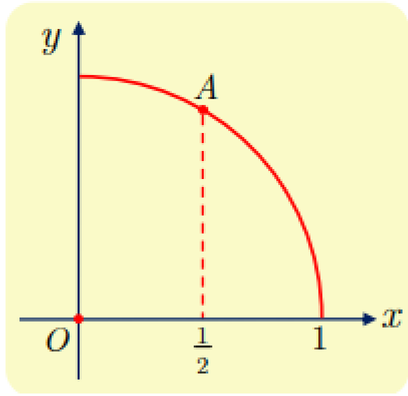
و بالتالي :

$$f'(-1) = \frac{1-3}{0-(-1)} = -2$$

معادلته : $y - 3 = -2(x - 0)$

$$y = -2x + 3$$

٣-القيم الحدية : الأمر سهلٌ هنا لكن مع ملاحظة أنه قد يكون هناك قيم حدية على أطراف المجال كما يلي :

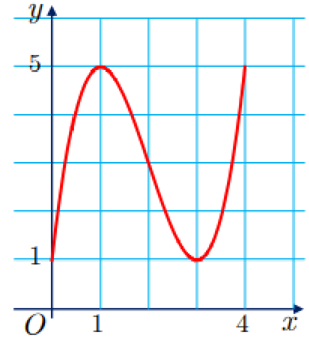


هنا $f(1) = 0$ قيمة حدية صغرى

و $f(0)$ قيمة حدية كبرى (لم نضع تراتيبها لأنها غير مكتوبة على الرسم)

٤- المتراجحات $f'(x) > 0$ تعني متى يكون f متزايداً

و المتراجحات $f'(x) < 0$ تعني متى يكون f متناقصاً



$f'(x) < 0 \ \rightarrow \ S =]1,3[$

لأنه متناقص على هذا المجال

أما:

$f'(x) > 0 \ \rightarrow \ S =]0,1[\cup]3,4[$

لأنه متزايد على كل من هذين المجالين