هذا الملف

<u>هو نتاج عمل دام عامين او اكثر يحتوي على</u>

١-خلاصات لكافة أفكار وحدات المنهاج

٢- حل النماذج الوزارية و أسئلة الدورات بطريقة مبوبة حسب وحدات المنهاج منذ ٢٠١٧- حتى ٢٠٢١

<u>مجاني وغير تجاري بالمطلق و يمنع استخدامه بأسلوب مادي</u>

مقدم بالكامل لطلابنا الأعزاء ليكون لهم معينا و رافدا للكتاب المدرسي

والله الموفق

المدرس : عمار قدوري

الرياضيات

الجزء الأول

دورات و نماذج وزارية محلولة

المدرس : عمـــار قدوري

المتتاليات العددية و نهاية متتالية

أولاً : اطراد متتالية $U_n = f(n)$:

ادراسة اطراد متتالية معطاة بصيغة حدها العام نتبع احدى الطرق التالية :

الطريقة الأولى	$U_{n+1} - U_n > 0$	$U_{n+1} - U_n < 0$
	المتتالية متزايدة	المتتالية متناقصة
	تستخدم هذه الطريقة لدراسة اطراد جميع المتتاليات و خاصة متتاليات المجاميع الجزئية	
الطريقة الثانية	$\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$	$\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$
	المتتالية متزايدة	المتتالية متناقصة
	تستخدم هذه الطريقة لدراسة اطراد المتتاليات ذات الحدود الموجبة فقط	
الطريقة الثالثة	$\acute{f}(n) > 0$	$\acute{f}(n) < 0$
	اذن f متزايد فالمتتالية متزايدة	اذن f متناقص فالمتتالية متناقصة
	تستخدم هذه الطريقة لدراسة اطراد جميع المتتاليات عدا متتاليات المجاميع الجزئية	

ثانياً : دراسة محدودية متتالية $U_n = f(n)$: من الشكل $\propto \leq U_n \leq \beta$

الطريقة الأولى	نثبت ان : $\propto \leq U_n \Rightarrow U_n - \propto \geq 0$	نثبت ان : $U_n \leq \beta \Rightarrow U_n - \beta \geq 0$
الطريقة الثانية	ندرس اطراد المتتالية على المجال $[n_0, +\infty[$	

مبرهنات و نتائج في محدودية متتالية

$\propto \leq U_n \leq \beta$	$\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \beta \Leftrightarrow U_n$ متزايدة	$\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \propto \Leftrightarrow U_n$ متناقصة
$U_n \leq \beta$	$\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \beta \Leftrightarrow U_n$ متزايدة	$\lim\limits_{n\to\infty} U_n = -\infty \Leftrightarrow U_n$ متناقصة
$\propto \leq U_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} U_n = +\infty \Leftrightarrow U_n$ متزايدة	$\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \propto \Leftrightarrow U_n$ متناقصة

نقول عن متتالية انها متقاربة اذا كانت مطردة و محدودة

ثالثاً: نهاية متتالية $U_n = f(n)$ هي $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ و نستخدم جميع مبرهنات النهايات

رابعاً : المتتاليتان المتجاورتان : هما متتاليتين تحققان :

1) احداهما متزايدة و الأخرى متناقصة .
2) نهاية الفرق بينهما صفر

خامساً : متى نستخدم الاثبات بالتدريج :

1) لاثبات او نفي صحة علاقة او متراجحة رياضية $E(n)$
2) دراسة اطراد متتالية تدريجية من النمط $\begin{cases} u_0 = \propto \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
3) دراسة محدودية متتالية تدريجية .

سادساً : مقارنة بين المتتالية الحسابية و الهندسية :

مجال المقارنة	المتتالية الحسابية	المتتالية الهمدسية
التعريف	$U_{n+1} = U_n + r$	$U_{n+1} = qU_n$
الحد العام	$u_n = u_0 + n.r$	$u_n = u_0 q^n$
المجموع	$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{u_0 + u_n}{2}(n+1)$	$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = = u_0 . \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$
a, b, c	$2b = a + c$	$b = \sqrt{a.c}$

Ammar Kaddoury

النموذج الأول :

لتكن $(x_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعطاة وفق $x_0 = 4$ و $\boldsymbol{x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + 2}$ نعرّف $(y_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة $y_n = x_n - 8$ أثبت أنّ $(y_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة. واكتب y_n بدلالة n. واحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} y_n$

النموذج الثاني :

لتكن $(x_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعطاة وفق $x_0 = 5$ و $\boldsymbol{x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5}}$

1 . احسب x_1 , x_2 , x_3 ثمّ ادرس اطّراد المتتالية.

2 . نعرّف $(y_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة $y_n = x_n + 4$ أثبت أنّ $(y_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة.

3 . اكتب y_n بدلالة n ثمّ احسب

$y_2 + y_3 + \cdots + y_{10}$ بدلالة قوّة للعدد: $\frac{6}{5}$

النموذج الثالث :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة التدريجيّة $\boldsymbol{u_0 = \frac{1}{2}}$ و $\boldsymbol{u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n}}$

1 أثبت أنّ $0 < u_n < 1$ أيّاً كان $n \in \mathbb{N}$

2 . **نعرّف** $(v_n)_{n\geq 0}$ **حيث:** $\boldsymbol{v_n = \frac{1}{u_n} - 1}$

أثبت أنّ $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة واستنتج v_n بدلالة n

3 . اكتب $(u_n)_{n\geq 0}$ بدلالة n واحسب $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n}$

النموذج الرابع :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة تدريجياً بالشكل

$$\boldsymbol{u_0 = e^3} \text{ و } \boldsymbol{u_{n+1} = e\sqrt{u_n}}$$

$(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرّفة بالشكل $v_n = ln(u_n) - 2$ والمطلوب:

1 . أثبت أنّ v_n هندسيّة وعيّن q و v_0.

2 . اكتب v_n بدلالة n ثمّ استنتج u_n بدلالة n.

3 . أثبت أنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^2$

النموذج الخامس :

- لتكن $\boldsymbol{u_n = 4n + 1}$ أثبت أنّ المتتالية حسابيّة عيّن أساسها واحسب:

$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{10}$

- لتكن المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ المعرّفتين وفق :

$$\boldsymbol{x_n = \frac{4n+5}{n+1}} \text{ و } \boldsymbol{y_n = \frac{4n+1}{n+2}}$$

أثبت أنّ المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ **و** $(y_n)_{n\geq 0}$ **متجاورتان.**

النموذج السادس :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة كما يأتي:

$$\boldsymbol{u_0 = 0} \text{ و } \boldsymbol{u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}}$$

1 . أثبت أنّ $0 \leq u_n \leq 1$.

2 . أثبت أنّ $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة.

3 . علّل تقارب $(u_n)_{n\geq 0}$ واحسب نهايتها.

دورة عام ٢٠١٧ اولى

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق :

$$U_{n+1}=\frac{1}{3}U_n-2\ ,\ U_0=1$$

ولتكن المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق

$$V_n=U_n+3$$

1) أثبت أن $(V_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية ، وأوجد أساسها .

2) اكتب عبارة V_n بدلالة n ، ثم عبارة U_n بدلالة n

3) ليكن في حالة عدد طبيعي n :

$S_n=V_0+V_1+\ldots\ldots\ldots+V_n$ ، عبر عن S_n بدلالة n واستنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$

دورة عام ٢٠١٧ ثانية

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق ما يأتي :

$$U_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

1) أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متناقصة

2) أثبت أن $0\leq U_n\leq 1$ واستنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها

دورة عام ٢٠١٨ اولى

لتكن المتتاليتان $(U_n)_{n\geq 0}$ و $(V_n)_{n\geq 0}$ المعرفتان وفق : $U_n=5-\frac{1}{n}$, $V_n=5+\frac{1}{n^2}$

١) أثبت أن $(U_n)_{n\geq 0}$ المتتالية متزايدة

٢) أثبت أن المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ متناقصة

٣) هل المتتاليتان $(U_n)_{n\geq 0}$ و $(V_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان ؟ علل ذلك

دورة عام ٢٠١٨ ثانية

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية فيها $q=2$ $u_0=$

1 احسب u_3 ثم أحسب المجموع

$$S=u_3+u_4+u_5+u_{6+}u_7$$

دورة عام ٢٠١٩ اولى

لتكن المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق :

$$S_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\ldots\ldots+\frac{1}{3^n}$$

والمطلوب :

1) أثبت أن المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً

2) أثبت أن S_n تكتب بالشكل $S_n=\frac{1}{2}(3-+\frac{1}{3^n})$ ، ثم استنتج عنصراً راجحاً على المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ وبين أنها متقاربة

دورة عام ٢٠١٩ ثانية

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق :

$U_n=\frac{2n-1}{n+1}$ والمطلوب :

1) ادرس اطراد المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$

2) أثبت أنّ العدد 2 راجح على $(U_n)_{n\geq 0}$

3) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ثم جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق أياً كان $n>n_0$ كان U_n في المجال $]1.9,2.1[$

دورة عام ٢٠٢٠ اولى

نتأمل المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية : $U_{n+1}=\frac{U_n}{2}+\frac{2}{U_n}$, $U_0=3$ عند كل $n\geq 0$ والمطلوب

①- أثبت أن التابع $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$ متزايد تماماً على $]2,+\infty[$

②- أثبت بالتدريج أنّ $2\leq U_{n+1}\leq U_n$ أياً كان العدد الطبيعي n

③- استنتج أن المتتالية متقاربة واحسب نهايتها

دورة عام ٢٠٢٠ ثانية

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق :

$U_n=\frac{1}{e}+\frac{2}{e^2}+\frac{3}{e^3}+\frac{4}{e^4}+\ldots\ldots+\frac{n}{e^n}$ والمطلوب :

① أثبت أنّ $n\leq 2^n$ مهما كان العدد الطبيعي $n\geq 1$

② استنتج أن $\frac{2}{e-2}$ عنصر راجح على المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$

③ أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ متقاربة

دورة عام ٢٠٢١ اولى

لتكن لدينا المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية : $U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n-3$, $U_0=2$

Ammar Kaddoury

ولنعرف المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ وفق :

$V_n = U_n + 6$ والمطلوب :

1) أثبت أنّ المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ هندسية عين أساسها واحسب V_0 ، ثم احسب عبارة V_n بدلالة n

2) لنعرف المتتالية $(W_n)_{n\geq 0}$ وفق : $W_n = \ln V_n$

أثبت أنّ المتتالية $(W_n)_{n\geq 0}$ حسابية واحسب W_0

ثم احسب المجموع :

$S = W_0 + W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5$

دورة عام ٢٠٢١ ثانية

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $U_0 = \frac{5}{2}$

وأياً كان العدد الطبيعي n :

$U_{n+1} = (U_n - 2)^2 + 2$ والمطلوب :

① أثبت أنّ $2 \leq U_n \leq 3$ أياً كان العدد الطبيعي n

② أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متناقصة

③ استنتج تقارب المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ وجد $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

تمارين متممة

التمرين الأول :

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرفة كما يلي :

$u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{4}$, $u_0 = 1$

١- لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كمايلي

$v_n = u_n - 2$

a) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية يُطلب إيجاد أساسها وحدها الأول .

b) أوجد عبارة v_n بدلالة n واستنتج عبارة u_n بدلالة n .واحسب نهايتها

٢- احسب المجموع

$S = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

التمرين الثاني :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة عند $n \geq 1$ وفق :

$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$

1) اثبت مستعملا" البرهان بالتدريج أنّ :

$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

2) أستنتج أنّ العدد 3 راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

3) أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة .

التمرين الثالث:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق :

$u_{n+1} = \frac{2u_n-1}{u_n}$, $u_0 = \frac{3}{2}$

١) أثبت أن التابع $g(x) = \frac{2x-1}{x}$ متزايد تماماً

واستنتج أن $1 < u_n \leq \frac{3}{2}$

٢) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً .

٣) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها .

التمرين الرابع:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بالشكل :

$u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \cdots . + \frac{n}{3^n}$ و المطلوب :

١- احسب u_1, u_2, u_3

٢- اثبت صحة المتراجحة $n \leq 2^n$ من اجل أي عدد طبيعي n ثم استنتج عنصراً راجحاً على المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$

٣- اثبت ان المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً ثم استنتج تقاربها و احسب $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

المدرس عمـــــار قدوري

Ammar Kaddoury

الدورة الأولى ٢٠١٧

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $U_{n+1}=\frac{1}{3}U_n-2\ ,\ U_0=1$

ولتكن المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $V_n=U_n+3$

1) أثبت أن $(V_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية ، وأوجد أساسها .

2) اكتب عبارة V_n بدلالة n ، ثم عبارة U_n بدلالة n

3) ليكن في حالة عدد طبيعي n : $S_n=V_0+V_1+.....+V_n$ ، عبر عن S_n بدلالة n

واستنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$

الحـــــــــــل :

$$V_{n+1}=U_{n+1}+3=\frac{1}{3}U_n-2+3=\frac{1}{3}U_n+1=\frac{1}{3}(U_n+3)=\frac{1}{3}V_n$$

أي أن $(V_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ وحدها الأول $V_0=U_0+3=1+3=4$ ويكون $V_n=4(\frac{1}{3})^n$

لدينا $V_n=U_n+3$ فيكون : $U_n=V_n-3$ وبالتالي نجد : $U_n=4(\frac{1}{3})^n-3$

$$S_n=V_0+V_1+.....+V_n$$

عدد الحدود : $n-0+1=n+1$ والأساس $q=\frac{1}{3}$ والحد الأول $V_0=4$ وبالتالي :

$$S_n=a\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\Rightarrow S_n=4.\frac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=6\left[1-(\frac{1}{3})^{n+1}\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}6\left[1-(\frac{1}{3})^{n+1}\right]=6(1-0)=6$$

الدورة الثانية ٢٠١٧

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق ما يأتي : $U_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

1) أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متناقصة

2) أثبت أن $0\leq U_n\leq 1$ واستنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها

الحـــــــــــل :

■ المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ معرفة بشكل صريح لدراسة اطرادها ندرس اطراد التابع $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ على المجال $]0,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}<0$$ وذلك لأن

$$\forall x\in]0,+\infty[:x+1>x\Rightarrow\sqrt{x+1}>\sqrt{x}\Rightarrow\frac{1}{2\sqrt{x+1}}<\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}<0$$

والتابع متناقص ومنه المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متناقصة

Ammar Kaddoury

طريقة ثانية :

■ $\forall n\in\mathcal{N}: n+1\geq n\Rightarrow\sqrt{n+1}\geq\sqrt{n}\Rightarrow\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\geq 0$ وبالتالي حدود المتتالية موجبة تماماً

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\frac{\dfrac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}}{\dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}}=\frac{\dfrac{1}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}}{\dfrac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}}\Rightarrow$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}<1\Rightarrow U_{n+1}<U_n$$

أي أن المتتالية متناقصة

طريقة ثالثة :

$$U_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

$$U_{n+1}=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}=\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}=\frac{1}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}$$

$$U_{n+1}-U_n=\frac{1}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}-\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})-(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\Rightarrow$$

$$U_{n+1}-U_n=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}<0\Rightarrow U_{n+1}<U_n$$

أي أن المتتالية متناقصة

$\forall n\in\mathcal{N}: n+1\geq n\Rightarrow\sqrt{n+1}\geq\sqrt{n}\Rightarrow\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\geq 0$ وبالتالي المتتالية محدودة من الأدنى

$$U_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\frac{n+1-n}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\leq 1$$

وذلك لأن $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\geq 1$ وبالتالي المتتالية محدودة من الأعلى ، مما سبق نجد أن : $0\leq U_n\leq 1$

بما المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to+\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1-n}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\Rightarrow$$

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=0$$

الدورة الأولى ٢٠١٨

لتكن المتتاليتان $(U_n)_{n\geq 0}$ و $(V_n)_{n\geq 0}$ المعرفتان وفق : $U_n=5-\frac{1}{n}$, $V_n=5+\frac{1}{n^2}$

١) أثبت أن $(U_n)_{n\geq 0}$ المتتالية متزايدة

٢) أثبت أن المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ متناقصة

٣) هل المتتاليتان $(U_n)_{n\geq 0}$ و $(V_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان ؟ علل ذلك

Ammar Kaddouri

الحـــــــــل :

$$U_n = 5 - \frac{1}{n}$$

$$U_{n+1} = 5 - \frac{1}{n+1}$$

$$U_{n+1} - U_n = (5 - \frac{1}{n+1}) - (5 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0 \quad (n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1})$$

أي أن المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ متزايدة تماماً

$$V_n = 5 + \frac{1}{n^2}$$

$$V_{n+1} = 5 + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$V_{n+1} - V_n = (5 + \frac{1}{(n+1)^2}) - (5 + \frac{1}{n^2}) = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} < 0$$

$$(n < n+1 \Rightarrow n^2 < (n+1)^2 \Rightarrow \frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+1)^2})$$

أي أن المتتالية $(V_n)_{n \geq 0}$ متناقصة تماماً

$$\lim_{n \to +\infty} (V_n - U_n) = \lim_{n \to +\infty} \left[(5 + \frac{1}{n^2}) - (5 - \frac{1}{n}) \right] = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \right] = 0$$

فالمتتاليتان $(U_n)_{n \geq 0}$ و $(V_n)_{n \geq 0}$ متجاورتان

طريقة ثانية :

$$U_{n+1} - U_n = (5 - \frac{1}{n+1}) - (5 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

أي أن المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ متزايدة تماماً

$$V_{n+1} - V_n = (5 + \frac{1}{(n+1)^2}) - (5 + \frac{1}{n^2}) = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 - (n+1)^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{n^2 - n^2 - 2n - 1}{n^2(n+1)^2}$$

$$\Rightarrow V_{n+1} - V_n = -\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} < 0$$

أي أن المتتالية $(V_n)_{n \geq 0}$ متناقصة تماماً

$$\lim_{n \to +\infty} (V_n - U_n) = \lim_{n \to +\infty} \left[(5 + \frac{1}{n^2}) - (5 - \frac{1}{n}) \right] = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \right] = 0$$

فالمتتاليتان $(U_n)_{n \geq 0}$ و $(V_n)_{n \geq 0}$ متجاورتان

الدورة الثانية ٢٠١٨

$(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية فيها $q=2$ $u_0 = 1$ احسب u_3 ثم أحسب المجموع

$$S = u_3 + u_4 + u_5 + u_{6+} u_7$$

الحل :

$$u_n = u_0 . q^n = (2)^n$$

$$u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 = u_3 \frac{1 - q^5}{1 - q} \Rightarrow S_n = 8 . \frac{1 - (2)^5}{1 - 2} = -8\left[1 - 32\right] = 248$$

Ammar Kaddouri

الدورة الأولى ٢٠١٩

لتكن المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $S_n = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+.....+\frac{1}{3^n}$ والمطلوب :

1) أثبت أن المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً

2) أثبت أن S_n تكتب بالشكل $S_n = \frac{1}{2}(3-+\frac{1}{3^n})$ ، ثم استنتج عنصراً راجحاً على المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ وبين أنها متقاربة

الحـــــــــل :

$$S_{n+1}-S_n = (1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+.....+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{3^{n+1}})-(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+.....+\frac{1}{3^n}) \Rightarrow$$

$$S_{n+1}-S_n = \frac{1}{3^{n+1}} > 0$$

والمتتالية متزايدة تماماً

والطرف الثاني من الشكل $q^0+q^1+q^2+q^3+q^4+.....+q^n$

نلاحظ أن S_n هو مجموع متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول 1 وعدد حدودها $n+1$ ونجد

$$S_n = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+.....+\frac{1}{3^n} = 1\times\frac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = 1\times\frac{3}{2}\left[1-(\frac{1}{3})^{n+1}\right] = \frac{1}{2}\left[3-(\frac{1}{3})^n\right] \leq \frac{3}{2}$$

أي المتتالية S_n محدودة من الأعلى بالعدد $\frac{3}{2}$ وبالتالي العدد $\frac{3}{2}$ حداً راجحاً على المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$

المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

Ammar Kaddoura

الدورة الثانية ٢٠١٩

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $U_n = \frac{2n-1}{n+1}$ والمطلوب :

1) ادرس اطراد المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$

2) أثبت أنّ العدد 2 راجح على $(U_n)_{n\geq 0}$

3) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ثم جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق أياً كان $n > n_0$ كان U_n في المجال $]1.9,2.1[$

الحـــــــــل :

$$U_{n+1}-U_n = \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+1}-\frac{2n-1}{n+1} = \frac{2n+2-1}{n+2}-\frac{2n-1}{n+1} = \frac{2n+1}{n+2}-\frac{2n-1}{n+1} =$$

$$= \frac{2n^2+n+2n+1-(2n^2-n+4n-2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{3n+1-3n+2}{(n+2)(n+1)} = \frac{3}{(n+2)(n+1)} > 0$$

أي أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً

$$U_n-2 = \frac{2n-1}{n+1}-2 = \frac{2n-1}{n+1}-\frac{2n+2}{n+1} = -\frac{3}{n+1} < 0 \Rightarrow U_n-2<0 \Rightarrow U_n<2$$

أي المتتالية محدودة من الأعلى بالعدد 2 وبالتالي العدد 2 حداً راجحاً على المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$

٥

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n-1}{n+1} = 2$$

$$U_n \in]1.9, 2.1[\Rightarrow 1.9 < U_n < 2.1 \Rightarrow 1.9-2 < U_n - 2 < 2.1-2 \Rightarrow$$
$$-0.1 < U_n - 2 < 0.1 \Rightarrow |U_n - 2| < 0.1 \Rightarrow |\frac{2n-1}{n+1} - 2| < 0.1 \Rightarrow |\frac{2n-1}{n+1} - \frac{2n+2}{n+1}| < 0.1$$
$$|\frac{2n-1-2n-2}{n+1}| < 0.1 \Rightarrow |\frac{-3}{n+1}| < 0.1 \Rightarrow \frac{3}{n+1} < 0.1 \Rightarrow \frac{3}{n+1} < \frac{1}{10} \Rightarrow$$
$$\frac{n+1}{3} > \frac{10}{1} \Rightarrow n+1 > 30 \Rightarrow n > 29 \Rightarrow n_0 = 29$$

الدورة الأولى ٢٠٢٠

نتأمل المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية : $U_0 = 3$, $U_{n+1} = \frac{U_n}{2} + \frac{2}{U_n}$ عند كل $n \geq 0$ والمطلوب :

① – أثبت أن التابع $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ متزايد تماماً على $]2,+\infty[$

② – أثبت بالتدريج أنّ $2 \leq U_{n+1} \leq U_n$ أياً كان العدد الطبيعي n

③ – استنتج أن المتتالية متقاربة واحسب نهايتها

الحـــــــــل :

① إثبات تزايد التابع :

التابع f معرف ومستمر واشتقاقي على $]2,+\infty[$

$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2}{2x^2} - \frac{4}{2x^2} = \frac{x^2-4}{2x^2} > 0$ فالتابع متزايد تماماً على المجال $]2,+\infty[$

② الإثبات بالتدريج :

$E(n) : 2 \leq U_{n+1} \leq U_n$

القضية $E(0)$ محققة وضوحاً لأن $U_1 = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{9}{6} + \frac{4}{6} = \frac{13}{6} \Rightarrow 2 \leq U_1 \leq U_0$

لنفرض أن القضية $E(n)$ محققة أي نفرض صحة العلاقة $2 \leq U_{n+1} \leq U_n$

ولنبرهن أن القضية $E(n+1)$ محققة أي لنبرهن صحة العلاقة $2 \leq U_{n+2} \leq U_{n+1}$

لدينا $2 \leq U_{n+1} \leq U_n$ و التابع f متزايد تماماً على المجال $]2,+\infty[$ ونجد :

$$f(2) \leq f(U_{n+1}) \leq f(U_n) \Rightarrow \frac{2}{2} + \frac{2}{2} \leq U_{n+2} \leq U_{n+1} \Rightarrow 2 \leq U_{n+2} \leq U_{n+1}$$

والقضية $E(n+1)$ محققة أي أن : $2 \leq U_{n+1} \leq U_n$ مهما كان العدد الطبيعي n

③ استنتاج أن المتتالية متقاربة وحساب نهايتها :

- بما أن $2 \leq U_{n+1} \leq U_n$ فإن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة من ℓ حيث $\ell \in]2,+\infty[$
- بما أن المتتالية متقاربة والتابع $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ مستمر على المجال $]2,+\infty[$

فهو مستمر عند ℓ ويكون : $\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell$ حيث ℓ هو حل المعادلة $f(x) = x$

Amar Kaddoury

$$f(x)=x \Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{2}{x}=x \Rightarrow \frac{2}{x}=\frac{x}{2} \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow$$

$x=-2$ مرفوض

$x=2$

وبالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=2$

الدورة الثانية ٢٠٢٠

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق : $U_n=\frac{1}{e}+\frac{2}{e^2}+\frac{3}{e^3}+\frac{4}{e^4}+.....+\frac{n}{e^n}$ والمطلوب :

① أثبت أنّ $n\leq 2^n$ مهما كان العدد الطبيعي $n\geq 1$

② استنتج أن $\frac{2}{e-2}$ عنصر راجح على المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$

③ أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ متقاربة

الحـــــــــل :

نفرض القضية $E(n): n\leq 2^n$

- القضية $E(1)$ محققة وضوحاً لأن $1\leq 2^1=2$
- لنفرض أن القضية $E(n)$ محققة أي نفرض صحة العلاقة $n\leq 2^n$
- ولنبرهن أن القضية $E(n+1)$ محققة أي لنبرهن صحة العلاقة $n+1\leq 2^{n+1}$

لدينا $n\leq 2^n$ نضرب طرفي المتراجحة بالعدد 2 نجد : $2n\leq 2\times 2^n \Rightarrow 2n\leq 2^{n+1}$

ونعلم أن $n+1\leq n+n \Rightarrow n+1\leq 2n\leq 2^{n+1}$ أي $n+1\leq 2^{n+1}$

والقضية $E(n+1)$ محققة أي أن : $n\leq 2^n$ مهما كان العدد الطبيعي n

- لدينا : $U_n=\frac{1}{e}+\frac{2}{e^2}+\frac{3}{e^3}+\frac{4}{e^4}+.....+\frac{n}{e^n}$ وبالاستفادة من أن $n\leq 2^n$ مهما كان العدد الطبيعي n يكون :

$$U_n\leq \frac{2^1}{e^1}+\frac{2^2}{e^2}+\frac{2^3}{e^3}+\frac{2^4}{e^4}+.....+\frac{2^n}{e^n} \text{ أي } U_n\leq (\frac{2}{e})^1+(\frac{2}{e})^2+(\frac{2}{e})^3+(\frac{2}{e})^4+.....+(\frac{2}{e})^n$$

والطرف الثاني من الشكل $q^1+q^2+q^3+q^4+.....+q^n$ أي هو مجموع متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{e}$ وحدها الأول $\frac{2}{e}$ ونجد

$$U_n\leq (\frac{2}{e})^1+(\frac{2}{e})^2+(\frac{2}{e})^3+(\frac{2}{e})^4+.....+(\frac{2}{e})^n=\frac{2}{e}\times\frac{1-(\frac{2}{e})^n}{1-\frac{2}{e}}=\frac{2}{e}\times\frac{e}{e-1}\left[1-(\frac{2}{e})^n\right]=\frac{2}{e-1}\left[1-(\frac{2}{e})^n\right] \Rightarrow$$

$$U_n\leq \frac{2}{e-1}$$

أي المتتالية محدودة من الأعلى بالعدد $\frac{2}{e-1}$ وبالتالي العدد $\frac{2}{e-1}$ حداً راجحاً على المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$

- $U_{n+1}-U_n=\frac{1}{e}+\frac{2}{e^2}+\frac{3}{e^3}+\frac{4}{e^4}+.....+\frac{n+1}{e^{n+1}}-(\frac{1}{e}+\frac{2}{e^2}+\frac{3}{e^3}+\frac{4}{e^4}+.....+\frac{n}{e^n})=\frac{n+1}{e^{n+1}}>0$

فالمتتالية متزايدة تماماً

Amma Taddoury

٧

بما أن المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

الدورة الأولى ٢٠٢١

لتكن لدينا المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية : $U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n-3\ ,\ U_0=2$

ولنعرف المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ وفق : $V_n=U_n+6$ والمطلوب :

1) أثبت أنّ المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ هندسية عين أساسها واحسب V_0 ، ثم احسب عبارة V_n بدلالة n

2) لنعرف المتتالية $(W_n)_{n\geq 0}$ وفق : $W_n=\ln V_n$ أثبت أنّ المتتالية $(W_n)_{n\geq 0}$ حسابية واحسب W_0

ثم احسب المجموع : $S=W_0+W_1+W_2+W_3+W_4+W_5$

الحـــــــــل :

$$V_{n+1}=U_{n+1}+6=\frac{1}{2}U_n-3+6=\frac{1}{2}U_n+3=\frac{1}{2}(U_n+6)=\frac{1}{2}V_n$$

أي أن $(V_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $V_0=U_0+6=2+6\Rightarrow V_0=8$ ويكون $V_n=8(\frac{1}{2})^n$

$$W_{n+1}-W_n=\ln 8(\frac{1}{2})^{n+1}-\ln 8(\frac{1}{2})^n=\ln\frac{8(\frac{1}{2})^{n+1}}{8(\frac{1}{2})^n})=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2=r$$

أي أنّ $(W_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها $-\ln 2$ وحدها الأول :

$$W_0=\ln V_0=\ln(U_0+6)=\ln(2+6)=\ln 8=3\ln 2$$

ويكون : $W_n=\ln 8-n\ln 2$

$$W_5=\ln 8-5\ln 2=3\ln 2-5\ln 2=-2\ln 2$$

$$S=W_0+W_1+W_2+W_3+W_4+W_5=\frac{6}{2}(3\ln 2-2\ln 2)=3\ln 2$$

حيث عدد الحدود : 6 و $a=3\ln 2$ و $\ell=-2\ln 2$

الدورة الثانية ٢٠٢١

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $U_0=\frac{5}{2}$ وأياً كان العدد الطبيعي n : $U_{n+1}=(U_n-2)^2+2$ والمطلوب :

① أثبت أنّ $2\leq U_n\leq 3$ أياً كان العدد الطبيعي n

② أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متناقصة

③ استنتج تقارب المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ وجد $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

الحـــــــــل :

① $E(n) : 2\leq U_n\leq 3$

- القضية $E(0)$ محققة وضوحاً لأن $U_0=\frac{5}{2}\Rightarrow 2\leq U_0\leq 3$
- لنفرض أن القضية $E(n)$ محققة أي نفرض صحة العلاقة $2\leq U_n\leq 3$
- ولنبرهن أن القضية $E(n+1)$ محققة أي لنبرهن صحة العلاقة $2\leq U_{n+1}\leq 3$

Ammar Kaddoury

$$2 \le U_n \le 3 \Rightarrow 2-2 \le U_n-2 \le 3-2 \Rightarrow 0 \le U_n-2 \le 1 \Rightarrow 0 \le (U_n-2)^2 \le 1 \Rightarrow$$

$$0+2 \le (U_n-2)^2+2 \le 1+2 \Rightarrow 2 \le (U_n-2)^2+2 \le 3 \Rightarrow \boxed{2 \le U_{n+1} \le 3}$$

والقضية $E(n+1)$ محققة أي أن : $2 \le U_n \le 3$ أياً كان العدد الطبيعي n

② إثبات أن المتتالية $(U_n)_{n \ge 0}$ متناقصة :

لإثبات أن المتتالية $(U_n)_{n \ge 0}$ متناقصة نبرهن أن $U_{n+1}-U_n \le 0$

$$U_{n+1}-U_n = (U_n-2)^2+2-U_n = U_n^2-4U_n+4+2-U_n = U_n^2-5U_n+6 = (U_n-2)(U_n-3) \le 0$$

وذلك لأن $(U_n-3) \le 0$, $(U_n-2) \ge 0$ على المجال $[2,3]$

أي أن المتتالية $(U_n)_{n \ge 0}$ متناقصة

بما أن المتتالية متزايدة ومحدود من الأعلى فهي متقاربة ويكون $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \frac{5}{4}$

③ استنتاج تقارب المتتالية :

- بما أن المتتالية $(U_n)_{n \ge 0}$ متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة من ℓ حيث $\ell \in [2, \frac{5}{2}]$
- بما أن المتتالية متقاربة والتابع $f(x) = (x-2)^2+2$ مستمر على المجال $[2, \frac{5}{2}]$

فهو مستمر عند ℓ ويكون : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$ حيث ℓ هو حل المعادلة $f(x) = x$

$$f(x) = x \Rightarrow (x-2)^2+2 = x \Rightarrow x^2-4x+4+2 = x \Rightarrow x^2-5x+6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-2) = 0$$

$x = 3$ مرفوض

$x = 2$

وبالتالي : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 2$

Ammar Kaddouri

مع اطيب التمنيات للطلاب بالتوفيق

المدرس : عمـــــار قدوري

تعريف 1	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l \Leftrightarrow x>A: \lvert f(x)-l\rvert<\varepsilon$ $y=l$ مقارب افقي موازي لمحور الفواصل
تعريف 2	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b \Leftrightarrow x<A: \lvert f(x)-b\rvert<\varepsilon$ $y=b$ مقارب افقي موازي لمحور الفواصل
تعريف 3	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ $x=a$ مقارب شاقولي يوازي مجور التراتيب
تعريف 4	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ (a,b) نقطة مقاربة .
تعريف 5	$\lim\limits_{\lvert x\rvert\to\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$ $y_\Delta=ax+b$ مقارب مائل $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b$

حالات عدم التعيين				
$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$	$\infty-\infty$	$0.\infty$	1^∞

نهايات مميزة	
$\lim\limits_{x\to o}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n=1$	$\lim\limits_{x\to o}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}$

الاستمرار	
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$	

قوانين المثلثات الشهيرة

$1+\cot^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}$	$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$	$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

2θ	$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$	$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$
	$2\cos^2\theta=1+\cos 2\theta$	$2\sin^2\theta=1-\cos 2\theta$
3θ	$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$	$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

دساتير التحويل
$Sin(A+B)=Sin\,A\,.CosB+Cos\,A.SinB$
$Sin\,A+Sin\,B=2Sin\,\frac{A+B}{2}\,.Cos\frac{A-B}{2}$
$Sin(A-B)=Sin\,A\,.CosB-Cos\,A.SinB$
$Sin\,A-Sin\,B=2Sin\,\frac{A-B}{2}\,.Cos\frac{A+B}{2}$
$Cos(A+B)=Cos\,A\,.CosB-Sin\,A.SinB$
$Cos\,A+Cos\,B=2\,Cos\,\frac{A+B}{2}\,.Cos\frac{A-B}{2}$
$Cos(A-B)=Cos\,A\,.CosB+Sin\,A.SinB$
$Cos\,A-Cos\,B=2\,Sin\,\frac{A+B}{2}\,.Sin\frac{A-B}{2}$
$2Sin\,A\,.Cos\,B=Sin\,(A+B)+Sin\,(A-B)$
$2Cos\,A\,.Sin\,B=Sin\,(A+B)-Sin\,(A-B)$
$2Cos\,A\,.Cos\,b=Cos\,(A+B)+Cos\,(A-B)$
$2Sin\,A\,.Sin\,b=Cos\,(A-B)-Cos\,(A+B)$

متطابقات شهيرة

تربيعية	$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$	$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$
	$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$	
تكعيبية	$(a+b)^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$	
	$(a-b)^3=a^3-b^3-3a^2b+3ab^2$	
	$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$	
	$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$	

Ammar Kaddoury

المقاربـــــات	
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$	$x = \alpha$ مقارب شاقولي
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \beta$	$y = \beta$ مقارب افقي
$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (ax+b)] = 0$	$y = ax + b$ مقارب مائل
$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = a$	$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - ax] = b$

مبرهنة القيمة الوسطى	
للمعادلة $f(x) = 0$ حلا وحيدا $x = c$ حيث $c \in [a,b]$ $\mathcal{C}_f$ يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة $x = c$	١- $f(x)$ تابع مستمر و مطرد تماما على المجال $[a,b]$ ٢- $f(a).f(b) < 0$
للمعادلة $f(x) = k$ حلا وحيدا $x = c$ حيث $c \in [a,b]$ $\mathcal{C}_f$ يقطع $y = k$ في نقطة وحيدة $x = c$	١- $f(x)$ تابع مستمر و مطرد تماما على المجال $[a,b]$ ٢- $k \in [f(a), f(b)]$

المماســـــاسات	
معادلة المماس للمنحني $\mathcal{C}_f$ عند $x = x_0$	$y = \acute{f}(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
معادلة مستقيم مار من نقطتين A, B	$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$ $y = m(x - x_A) + f(x_A)$
$\mathcal{C}_g$ و $\mathcal{C}_f$ متماسين في $A(x_A, y_A)$	$\begin{cases} f(x_A) = g(x_A) = y_A \\ \acute{f}(x_A) = \acute{g}(x_A) = m \end{cases}$

التنـــــاظر	
$A(\alpha,\beta)$مركز تناظر لـ $\mathcal{C}_f$	$\begin{cases} 2\alpha - x \in \mathcal{D}_f \\ f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \end{cases}$
	$f(\alpha + h) + f(\alpha - h) = 2\beta$
O مركز تناظر لـ $\mathcal{C}_f$: (f) فردي	$f(-x) = -f(x)$
$x = a$ محور تناظر لـ $\mathcal{C}_f$	$f(2\alpha - x) = f(x)$
$x = 0$ محور تناظر لـ $\mathcal{C}_f$: (f) زوجي	$f(-x) = f(x)$

استنتاج الخطوط البيانية	
$g(x) = f(x) + a$	$\mathcal{C}_g$ ينتج عن $\mathcal{C}_f$ بانسحاب قدره $a\,\vec{j}$
$g(x) = f(x + b)$	$\mathcal{C}_g$ ينتج عن $\mathcal{C}_f$ بانسحاب قدره -$b\,\vec{i}$
$g(x) = -f(x)$	$\mathcal{C}_g$ نظير $\mathcal{C}_f$ بالنسبة لمحور الفواصل
$g(x) = f(-x)$	$\mathcal{C}_g$ نظير $\mathcal{C}_f$ بالنسبة لمحور التراتيب
$g(x) = -f(-x)$	$\mathcal{C}_g$ نظير $\mathcal{C}_f$ بالنسبة للمبدأ O

الاشتقاق

قابلية الاشتقاق عند نقطة x_o	$\acute{f}(x_o) = \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \alpha \in \mathcal{R}$
$\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = +\infty$	$\mathcal{C}_f$ يقبل نصف عند $A(x_o, y_o)$ معادلته $x = x_o$
$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = b_1 \\ \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = b_2 \end{cases}$ $b_1 \neq b_2$	f غير قابل للاشتقاق عند $x = a$ ويوجد نصفي مماسين لـ $\mathcal{C}_f$ ميليهما b_1, b_2

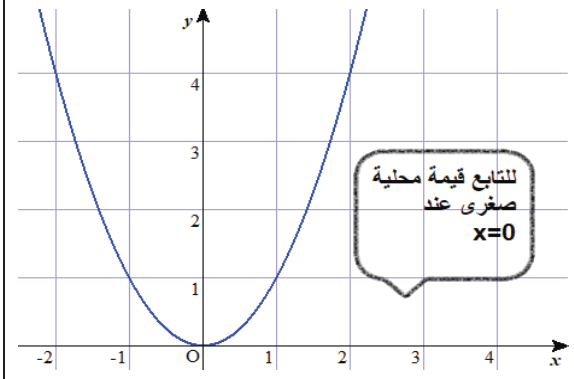
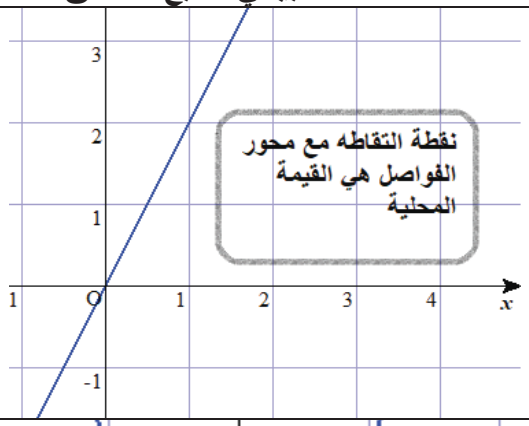
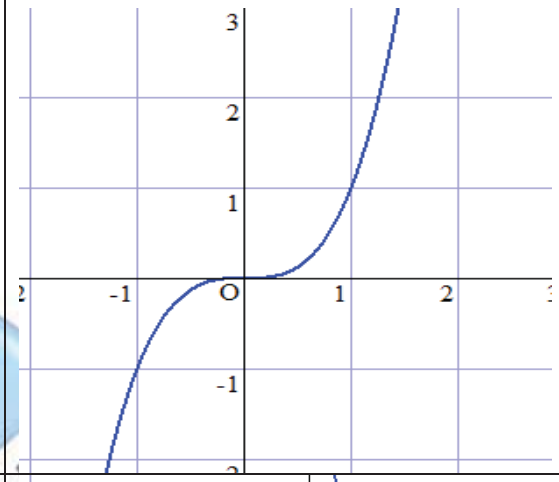
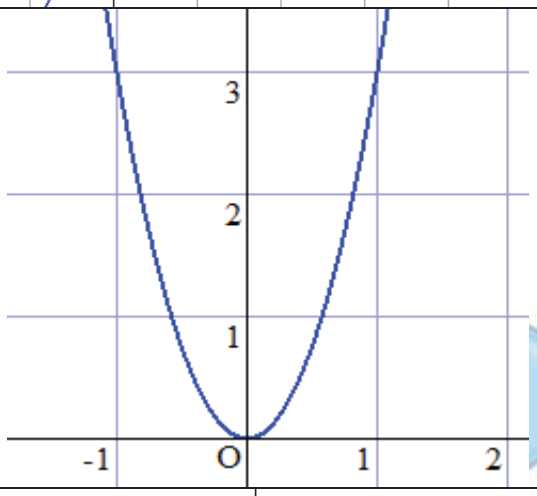
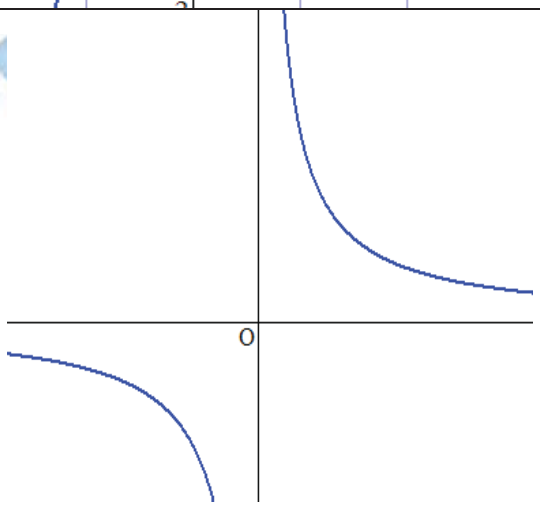
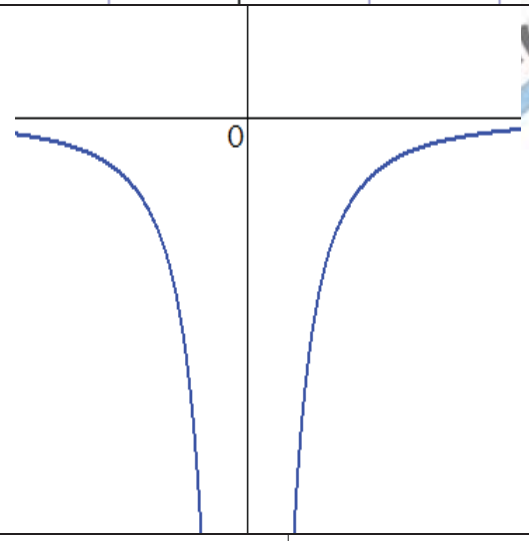
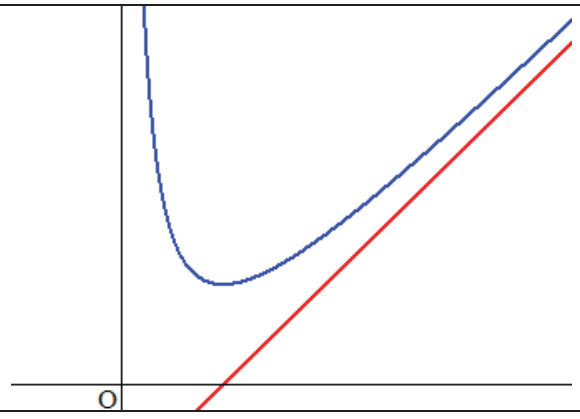
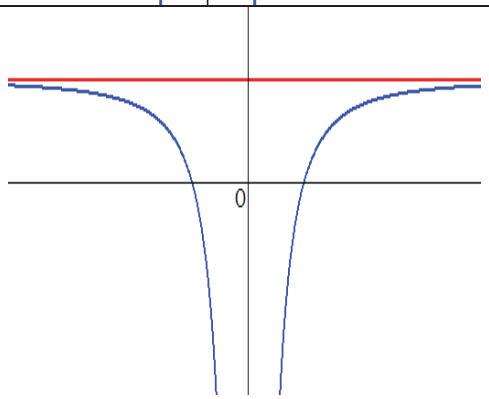
الخط البياني للتابع المشتق

يُوفر الخط البياني للتابع المشتق معلومات هامة عن التابع ويُمكن من خلاله معرفة مجالات تزايد التابع ومجالات تناقصه والقيم الحدية إن وُجدت . مع الانتباه إلى النقاط التالية :

- الجزء الواقع فوق محور الفواصل يكون فيه المشتق موجب و يُقابل مجال تزايد التابع .
- الجزء الواقع تحت محور الفواصل يكون فيه المشتق سالب و يُقابل مجال تناقص التابع .
- نقاط التقاطع مع محور الفواصل تُمثل انعدام المشتق ويجب أن نميز حالتين :
  - إذا وقع الخط البياني في جوار نقطة التقاطع مع محور الفواصل فوق وتحت المحور فإن هذه النقطة تُمثل قيمة حدية .
  - إذا كان الخط البياني بجهة واحدة بالنسبة لمحور الفواصل فهي لا تُمثل قيمة حدية .
- اذا كان للخط $\mathcal{C}_f$ مقارب مائل في جوار اللانهاية معادلته $y = ax + b$ كان للخط البياني للتابع المشتق $\acute{\mathcal{C}}$ مستقيم مقارب افقي في نفس الجوار معادلته $y = a$
- هذا ويُمكن من خلال معرفة صورة أي نقطة معرفة قيمة ميل المماس عند هذه النقطة .
- اذا كان للخط $\mathcal{C}_f$ مماس شاقولي عند $x = a$ كان للخط البياني للتابع المشتق $\acute{\mathcal{C}}$ مستقيم مقارب شاقولي في نفس الجوار معادلته $x = a$

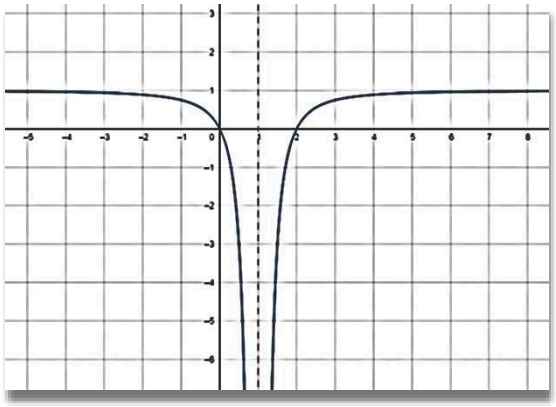
Ammar Kaddoury

أمثلة و توابع مرجعية شهيرة

التابـــع	الخط البيـــــاني	الخط البياني للتابع المشتق
$f(x)=x^2$		
$f(x)=x^3$		
$f(x)=\frac{1}{x}$		
$f(x)=\frac{x^2-x+1}{x}$		

مثال نموذجي

ليكن C الخط البياني للتابع المشتق $\grave{f}$



والمطلوب :

١- أوجد مجالات اطراد التابع f .

٢- أوجد فواصل النقاط التي تقبل مماس أفقي تجده .

٣- أوجد القيم الحدية إن وجدت مبيناً نوعها مع التعليل

٤- نظم جدولا بتغيرات التابع f اعتمادا على ما وجدته سابقا

الحل :

١- التابع f متزايد تماماً على $]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$

ومتناقص تماماً على : $]0,1[\cup]1,2[$

٢- يوجد مماس أفقي عند $x=0$ ومماس أفقي عند $x=2$

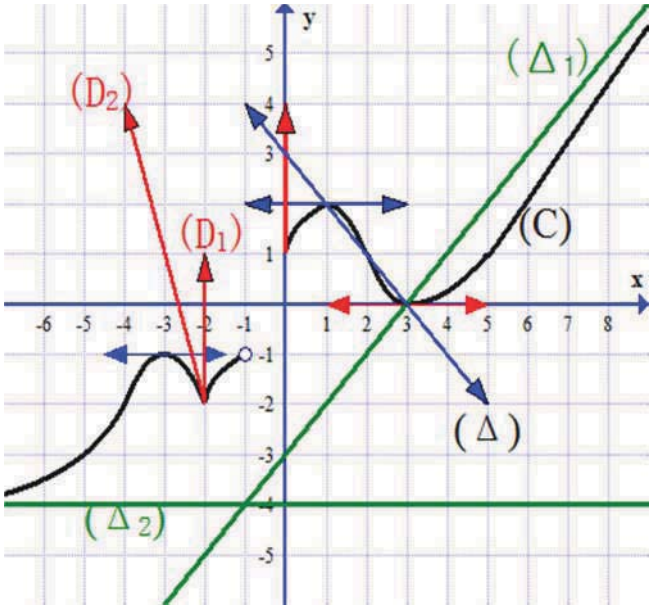
٣- $f(0)$ قيمة حدية كُبرى لأن $\grave{f}(0)=0$ والتابع المشتق يغير إشارته من الموجب إلى السالب عندها .

$f(2)$ قيمة حدية صُغرى لأن $\grave{f}(2)=0$ والتابع المشتق يغير إشارته من السالب إلى الموجب .

٤- جدول تغيرات التابع $f(x)$

Amjad Kaddour

حل المسألة العملاقة لقراءة الخط البياني



تأمل الشكل المجاور (C) خط بياني للتابع f المعرف على D ومستقيمين مقاربين الأول مائل (Δ_1) الآخر أفقي (Δ_2) ومماس مائل (Δ) ونصفي مماسين $(D_1),(D_2)$ ومماسات أفقية

ثم أجب عن الأسئلة الآتية:

1 ***عين مجموعة التعريف*** D ***وصورتها*** $f(D)$.

حل: $D=]-\infty,-1[\cup[0,+\infty[$, $f(D)=]-4,-1]\cup[0,+\infty[$

2 ***عين نهاية التابع عند :*** $(+\infty),(-3),(-1^-),(0^+),(5)$

وعين $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ***، ما هو التأويل الهندسي لهذه النهاية .***

حل: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-3} f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to5} f(x)=1$

و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-4$ و التأويل الهندسي لهذه النهاية أن المستقيم الأفقي $y=-4$ يقارب الخط البياني (C) في جوار $-\infty$

3 ***ما هو حل كل معادلة من المعادلات الأتية:*** $f(x)=2$, $f(x)=1$, $f(x)=0$, $f(x)=-1$, $f(x)=-2$.

حل:

المعادلة	$f(x)=-2$	$f(x)=-1$	$f(x)=0$	$f(x)=1$	$f(x)=2$
حلول المعادلة	$x=-2$, $x=-4$	$x=-3$	$x=3$	$x=0$, $x=2$, $x=5$	$x=1$, $x=6$

4 ***حل المعادلة*** $f'(x)=0$ ***، واكتب معادلة كل مماس أفقي.***

حل: حلول المعادلة $f'(x)=0$ هي فواصل النقاط التي يكون عندها المماس أفقي وهي:

$x=3$ ومعادلة المماس عندها $y=0$ و $x=1$ ومعادلة المماس عندها $y=2$ و $x=-3$ ومعادلة المماس عندها $y=-1$

5 ***احسب*** $f(E(-5)),f(E(2.7)),f(E(-3.1))$, $E(f(4))$, $E(f(-5))$, $f(f(3))$, $\sin(f(3))$, $f(\cos(0))$.

(حيث E تابع الجزء الصحيح)

حل:

$$f(E(-5))=f(-5)=-3\ ,\quad f(E(2.7))=f(2)=1$$
$$f(E(-3.1))=f(-4)=-2\ ,\quad E(f(4))=E(0)=0\quad :(0<f(4)<1)$$
$$E(f(-5))=E(-3)=-3\ ,\quad f(f(3))=f(0)=1$$
$$\sin(f(3))=\sin(0)=0\ ,\quad f(\cos(0))=f(1)=2$$

Anwar Kadoury

6 ***لاحظ في الشكل المستقيم المائل*** (Δ_1) ***يقارب الخط البياني*** (C) ***في جوار*** $+\infty$ ***، أوجد معادلة هذا المقارب*** (Δ_1)

واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$.

حل: المستقيم $(\Delta_1): y=ax+b$ يمر من النقطتين $(3,0)$, $(0,-3)$ فميله $a=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{-3-0}{0-3}=1$

يكون $(\Delta_1): y=x+b$ ويمر من $(0,-3)$ فتحقق معادلته أي $-3=(0)+b$ نجد $b=-3$ ومنه $(\Delta_1): y=x-3$

نعلم أنه إذا كان $(\Delta_1): y=ax+b$ مستقيم مقارب في جوار $+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-xa)=b$

نستنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-3$

7 جد $f(2)$ و $f'(2)$ ،واكتب معادلة المماس (Δ) ،وادرس وضعه النسبي مع الخط البياني (C) مبيناً نقط التقاطع.

حل: $f(2)=1$ و $f'(2)$ هو ميل المماس (Δ) الذي يمر من النقطتين $(3,0)$, $(2,1)$ يكون $f'(2)=\dfrac{0-1}{3-2}=-1$

ومعادلة المماس في $(2,1)$: $(\Delta): y=f'(2)(x-2)+f(2)$ فيكون $(\Delta): y=3-x$

ووضع (Δ) مع (C)

x		-1		0		1		2		3		$+\infty$
الوضع	(Δ) تحت (C)				(C) تحت (Δ)	0	(C) فوق (Δ)	0	(Δ) تحت (C)	0	(C) تحت (Δ)	

ونقط تقاطع (Δ) مع (C) هي: $(3,0)$, $(1,2)$ وفي $(2,1)$ (Δ) يمس ويقطع (C)

8 ***احسب*** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-1}{x-2}$ و $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{f(x)+1}{x+3}$.

حل: التابع اشتقاقي عند $x=2$ لوجود مماس مائل عندها ميله -1 يكون $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-1}{x-2}=f'(2)=-1$

التابع اشتقاقي عند $x=-3$ لوجود مماس أفقي عندها يكون $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{f(x)+1}{x+3}=f'(-3)=0$

9 ***أوجد صورة كل مجال من المجالات:*** $[3,+\infty[$, $[1,3[$, $[0,2]$, $[-3,-1[$, $]-\infty,-1[$, $]-\infty,-4]$.

حل: $f(]-\infty,-4])=]-4,-2]$, $f(]-\infty,-1[)=]-4,-1]$, $f([-3,-1[)=[-2,-1]$

$f([0,2])=[1,2]$, $f([1,3[)=]0,2]$, $f([3,+\infty[)=[0,+\infty[$

10 ***جد حل كل متراجحة:*** $1\geq f(x)\geq0$, $f(x)\geq1$, $f(x)>0$, $-1\geq f(x)\geq-2$, $f(x)<-1$ ***وحل*** $f'(x)>0$.

حل: حلول $f(x)<-1$ هي $]-\infty,-3[\cup]-3,-1[$ و حلول $-1\geq f(x)\geq-2$ هي $[-4,-1[$

و حلول $f(x)>0$ هي $]-\infty,+\infty[$ وحلول $f(x)\geq1$ هي $[0,3[\cup]3,+\infty[$ وحلول $1\geq f(x)\geq0$ هي $[0,2]\cup[5,+\infty[$

أما حلول $f'(x)>0$ وتعني التابع متزايد تماماً فهي $x\in]-\infty,-3[\cup]-2,-1[\cup[0,1[\cup]3,+\infty[$

Ammar Haddoury

11 ***أيكون التابع*** f ***اشتقاقي عند*** $x=0$ ***.ولماذا؟ وعين*** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-1}{x}$.

حل: f غير اشتقاقي عند $x=0$ لوجود نصف مماس شاقولي ويكون $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-1}{x}=+\infty$

12 ***للخط نصفي مماسين*** $(D_1)\ ,\ (D_2)$ ***أوجد معادلة كل منهما ،واحسب*** $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{f(x)+2}{x+2}$ ***و*** $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{f(x)+2}{x+2}$.

حل: لوجود نصف مماس شاقولي عن يمين $(-2,-2)$ معادلته $(x=-2$ و $y\geq -2)$ تكون $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{f(x)+2}{x+2}=+\infty$

و لوجود نصف مماس مائل عن يسار $x=-2$ ويمر من النقطتين $(-3,1)\ ,\ (-2,-2)$ ميله

$m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{1-(-2)}{-3-(-2)}=-3$ فإن $(D_2): y=f'(-2^-)(x+2)+f(-2)$

أي $(D_2): (y=-3x-8\ ,\ x\leq -2)$ وتكون: $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{f(x)+2}{x+2}=-3$

13 ***عين مجموعة تعريف التابع المعرف بـ*** $g(x)=\ln(f(x))$ ***، واحسب*** $\lim\limits_{x\to 5}g(x)$ ***و*** $\lim\limits_{x\to 3}g(x)$ ***و*** $\lim\limits_{x\to 3}e^{f(x)}$.

حل: مجموعة تعريف التابع $g(x)=\ln(f(x))$ هي تحقق f معرف و $f(x)>0$ فهي $D_g=[0,3[\cup]3,-\infty[$

و $\lim\limits_{x\to 5}g(x)=\ln(1)=0$ و $\lim\limits_{x\to 3}g(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 3}e^{f(x)}=1$

14 ***ناقش بيانياً وبحسب قيم*** $m\in\mathbb{R}$ ***عدد حلول المعادلة*** $f(x)=m$.

حل: عدد حلول $f(x)=m$ هو عدد نقط تقاطع (C) الخط البياني للتابع f مع المستقيم الأفقي $y=m$

في حالة $m\in]-\infty,-4]\cup]-1,0[$ المعادلة مستحيلة الحل

في حالة $m\in]-4,-2[\cup]2,+\infty[\cup\{-1,0\}$ للمعادلة حل وحيد

في حالة $m\in]0,1[\cup\{-2,2\}$ للمعادلة حلين

في حالة $m\in]-2,-1[\cup[1,2[$ للمعادلة ثلاث حلول

15 ***عين جميع القيم الحدية محلياً للتابع*** f ***،و نظم جدولاً لتغيرات التابع*** f.

حل:

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	3	$+\infty$
$f'(x)$		$+\ 0\ -$	$\|\|$			$+\ 0\ -\ 0\ +$		
$f(x)$	-4	$\nearrow -1 \searrow$	-2	$\nearrow -1$		$1 \nearrow 2 \searrow 0 \nearrow$		$+\infty$

$f(-2)=-2$

$f(3)=0\ ,\ f(0)=1$

قيم حدية صغرى محليا

$f(1)=2\ ,f(-3)=-1$

قيم حدية كبرى محليا

مع أمنياتنا لجميع الطلاب بالتوفيق والنجاح

نهايات مرجعية

حالات عدم التعيين :

1^{∞}	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$0.\infty$	$\infty - \infty$

نهايات التابع اللوغاريتمي : $f(x) = \ln x :]0,+\infty[\to]-\infty,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$	$\lim\limits_{x\to0} \ln x = -\infty$
$\lim\limits_{x\to0} x^n . \ln x = 0^-$	$\lim\limits_{x\to0} x . \ln x = 0^-$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to1^+} x . \ln x = 0^+$	$\lim\limits_{x\to1^-} x . \ln x = 0^-$
	$\lim\limits_{x\to0} \frac{x}{\ln(x+1)} = 1$	$\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

نهايات التابع الاسي : $f(x) = e^x :]-\infty,+\infty[\to]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n . e^x = 0^-$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x . e^x = 0^-$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} x . e^{-x} = 0$	$\lim\limits_{x\to0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$	$\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\to+\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$	$\lim\limits_{x\to0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n . e^{-x} = 0$

نهايات مثلثية مرجعية :

$\lim\limits_{x\to0} \frac{(\cos x)^2 - 1}{x} = -\frac{1}{2}$	$\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin^n x}{x^n} = 1$	$\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Amar Laddouri

الدورة الأولى ٢٠١٧

لتكن التابع f المعرف على $\mathcal{R}$ وفق العلاقة : $f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ خطها البياني C .

1) احسب $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

2) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته : $y = x+1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي للخط C والمستقيم Δ

الحــــــــــــــــل :

عندما : $x\to\infty \Rightarrow x>0 \Rightarrow |x| = x$ و عندما : $x\to-\infty \Rightarrow x<0 \Rightarrow |x| = -x$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}) = \lim_{x\to\infty}(x + \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}) = \lim_{x\to\infty}(x + \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}) \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to\infty}(x + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}) = \lim_{x\to-\infty}(x + \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}) = \lim_{x\to-\infty}(x + \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}) \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}) = -\infty$$

★ $f(x) - y_\Delta = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - (x+1) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$

عند إيجاد $\lim_{x\to\infty}(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1) = \lim_{x\to\infty}[f(x) - y_\Delta]$ نجد عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ لذلك نضع :

$$f(x) - y_\Delta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}} - 1 = \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1$$

بما أنَّ $x\to\infty$ فإنَّ $x>0 \Leftarrow |x| = x$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - y_\Delta] = \lim_{x\to\infty}(\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1) = \lim_{x\to\infty}(\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1) = \lim_{x\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1) = 1 - 1 = 0$$

ومنه $y = x+1$ مستقيم مقارب عند $+\infty$

الوضع النسبي :

لندرس إشارة المقدار $f(x) - y_\Delta = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - (x+1) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$

أيا كان $x \in \mathcal{R}$ فإن : $x^2 < x^2+1$ و يكون $x < \sqrt{x^2+1}$:

وبما أن $\sqrt{x^2+1}$ موجب تماماً فإن : $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 < 0$

نجد $f(x) - y_\Delta < 0$ ومنه $f(x) < y_\Delta$ ويكون C تحت Δ

الدورة الثانية ٢٠١٧

ليكن C الخط البياني التابع f المعرف على $D = \mathcal{R}\setminus\{-3\}$ وفق : $f(x) = \dfrac{x^2+2x-2}{x+3}$

① - اكتب $f(x)$ بالشكل $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$

②- أثبت أن المستقيم $y = ax + b$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

③- احسب $I = \int_0^2 f(x)\,dx$

الحـــــــــــــــــــــــــــل : نجري القسمة الإقليدية لبسط الكسر على مقامه فنحصل على

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+3}$$

بالمطابقة بين المقدارين $x - 1 + \dfrac{1}{x+3}$ و $ax + b + \dfrac{c}{x+3}$ نجد : $a=1, b=-1, c=1$

$$f(x) - y_\Delta = x - 1 + \frac{1}{x+3} - (x-1) = \frac{1}{x+3}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - y_\Delta] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+3} = 0$ أي أن المستقيم $y = x - 1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

$$I = \int_0^2 (x - 1 + \frac{1}{x+3})\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - x + \ln(x+3)\right]_0^2 = (2 - 2 + \ln 5) - (0 + \ln 3) = \ln 5 - \ln 3 = \ln\frac{5}{3}$$

الدورة الأولى ٢٠١٨

ليكن f التابع المعرف على $\mathcal{R}$ وفق العلاقة : $f(x) = \dfrac{1}{3 + \cos x}$

1) أثبت محدودية التابع f

2) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{3+\cos x}$

الحـــــــــــــــــــــــــــل : نعلم أن $-1 \le \cos x \le 1$ وبالتالي : $3 - 1 \le 3 + \cos x \le 3 + 1$

$$3 - 1 \le 3 + \cos x \le 3 + 1 \Rightarrow 2 \le 3 + \cos x \le 4 \Rightarrow \frac{1}{4} \le \frac{1}{3+\cos x} \le \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} \le f(x) \le \frac{1}{2}$$

أي أن f محدود

بما أن $x^2 > 0$ ولدينا $\dfrac{1}{4} \le \dfrac{1}{3+\cos x} \le \dfrac{1}{2}$ فإن $\dfrac{x^2}{4} \le \dfrac{x^2}{3+\cos x} \le \dfrac{x^2}{2}$ أي أن $\dfrac{x^2}{4} \le \dfrac{x^2}{3+\cos x}$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{4} = +\infty$ وحسب مبرهنة الإحاطة نجد أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{3+\cos x} = +\infty$

ليكن $J = \int_0^{\ln 2} \dfrac{e^x}{e^x+2}\,dx$, $I = \int_0^{\ln 2} \dfrac{2}{e^x+2}\,dx$ والمطلوب

١) احسب J

٢) احسب $I + J$ واستنتج I

الحـــــــــــــــــــــــــــل :

$$J=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{e^x+2}dx=\left[\ln(e^x+2)\right]_0^{\ln 2}=\ln(e^{\ln 2}+2)-\ln(1+2)=\ln(2+2)-\ln 3=\ln\frac{4}{3}$$

$$I+J=\int_0^{\ln 2}\frac{2}{e^x+2}dx+\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{e^x+2}dx=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x+2}{e^x+2}dx=\int_0^{\ln 2}dx=\left[x\right]_0^{\ln 2}=\ln 2$$

$$I=\ln 2-J=\ln 2-\ln\frac{4}{3}=\ln\frac{2}{\frac{4}{3}}=\ln\frac{6}{4}\Rightarrow I=\ln\frac{3}{2}$$

الدورة الثانية ٢٠١٨

ليكن f للتابع المعرف على $]2,+\infty[$ وفق: $f(x)=x-4+\sqrt{x-2}$

١- ادرس تغيرات f على المجال $]2,+\infty[$ونظم جدولاً بها

٢- أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً

٣- أكتب معادلة المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها 3

الدورة الأولى ٢٠١٩

ليكن التابع f المعرف على $]e^{-1},+\infty[$ وفق العلاقة $f(x)=\frac{2+\ln x}{1+\ln x}$

1) جد $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ ثم أعط عدداً حقيقياً يحقق الشرط $x>A$ كان $f(x)$ في المجال $]0.9,1.1[$

2) احسب $\lim_{x\to+\infty}f(f(x))$

الحـــــــــــــــــــل :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\ln x}{1+\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x(\frac{2}{\ln x}+1)}{\ln x(\frac{1}{\ln x}+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\frac{2}{\ln x}+1)}{(\frac{1}{\ln x}+1)}=1$$

$$f(x)\in]0.9,1.1[\Rightarrow 0.9<f(x)<1.1\Rightarrow 0.9-1<f(x)-1<1.1-1\Rightarrow$$

$$-0.5<f(x)-1<0.5\Rightarrow|f(x)-1|<0.5\Rightarrow\left|\frac{2+\ln x}{1+\ln x}-1\right|<0.5\Rightarrow\left|\frac{2+\ln x}{1+\ln x}-\frac{1+\ln x}{1+\ln x}\right|<0.5$$

$$\left|\frac{2+\ln x-1-\ln x}{1+\ln x}\right|<0.5\Rightarrow\left|\frac{1}{1+\ln x}\right|<\frac{1}{10}\Rightarrow\frac{1}{1+\ln x}<\frac{1}{10}\Rightarrow 1+\ln x>10\Rightarrow\ln x>9\Rightarrow$$

$$x>e^9\Rightarrow A=e^9$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(f(x))=\lim_{X\to+1}f(X)=\lim_{X\to+1}\frac{2+\ln X}{1+\ln X}=2$$

الدورة الثانية ٢٠١٩

ليكن التابع f المعرف على $\mathcal{R}$ وفق :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1} & : x\neq 0\\ m & : x\neq 0\end{cases}$$

① جد نهاية التابع f عند الصفر

② عين قيم العدد m ليكون f مستمراً عن الصفر

الحـــــــــــــــــــــــــل :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1}\times\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\sin x(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2+1-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\sin x(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x(\sqrt{x^2+1}+1)}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}(\sqrt{x^2+1}+1)\right)=1(1+1)\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1}=2$$

حتى يكون للتابع f مستمراً عند (0) يجب أن يتحقق : $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$ ولدينا $\lim_{x\to 0}f(x)=2$, $f(0)=m$

إذاً $m=2$

الدورة الأولى ٢٠٢٠

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathcal{R}$ وفق : $f(x)=x-E(x)$.

① اكتب $f(x)$ بصيغة مستقلة عن $E(x)$ على المجال $[0,2[$

② جد $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}$

الحـــــــــــــــــــــــــل :

①

$$E(x)=\begin{cases}0 & :x\in[0,1[\\ 1 & :x\in[1,2[\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}x & :x\in[0,1[\\ x-1 & :x\in[1,2[\end{cases}$$

Ammar Kaddoury

نعلم أنه أياً كان الحقيقي x كان $x-1<E(x)\le x$ و بالتالي نجد :

$$x-1<E(x)\le x\Rightarrow 1-x>-E(x)\ge -x\Rightarrow -x\le -E(x)<1-x\Rightarrow 0\le x-E(x)<1\Rightarrow$$

$$0\le\frac{x-E(x)}{x^2}<\frac{1}{x^2}$$

ونعلم أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ وحسب مبرهنة الإحاطة (1) يكون $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}$

ليكن التابع f المعرف على $\mathcal{R}$ وفق : $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$

①- أثبت أن f اشتقاقي عند $x=0$

②- احسب $f'(x)$ على $\mathcal{R}^*$

③- جد $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

الحـــــــــــــــــــــــــل :

① إثبات أن f اشتقاقي عند $x=0$:

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=x\sin\frac{1}{x}$$
$$|g(x)|=|x\sin\frac{1}{x}|=|x|.|\sin\frac{1}{x}|$$

ونعلم أنه أياً كان $x\neq 0$ كان $|\sin\frac{1}{x}|\leq 1$ وبالتالي نجد أن $|g(x)-0|\leq|x|$

ونعلم أن $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$ وحسب مبرهنة الإحاطة (2) نجد أن $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0\in\mathcal{R}$ أي أن التابع قابل للاشتقاق عند الصفر

② حساب $f'(x)$ على $\mathcal{R}^*$:

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}+x^2(\sin\frac{1}{x})'=2x\sin\frac{1}{x}+x^2(\cos\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})\Rightarrow f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

③ إيجاد : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^2\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}x\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{X\to 0}\frac{\sin X}{X}=1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

الدورة الثانية ٢٠٢٠

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathcal{R}$ وفق : $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$

① أثبت أنَّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

② ادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة إلى المستقيم Δ

الحـــــــــــــــــل :

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]=\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x^2+1}-2x)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(\sqrt{x^2+1}-x)\times\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right]=0$$

وذلك لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+1}+x\right]=+\infty$

أي أنَّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$

■ وضع C بالنسبة إلى Δ :

أياً كان $x\in\mathcal{R}$:

$\sqrt{x^2+1}>x\Rightarrow\sqrt{x^2+1}-x>0\Rightarrow f(x)-y_\Delta>0$ ومنه C فوق Δ

طريقة ثانية لدراسة الوضع النسبي :

✠ ندرس إشارة الفرق $f(x)-y_\Delta=\sqrt{x^2+1}-x$

✠ نجعل $f(x)-y_\Delta=0$ ومنه $\sqrt{x^2+1}=x$

٦ نربع بشرط $x>0 , x^2+1>0$ نجد $x^2+1=x^2$ ومنه $1=0$ مستحيلة أي أن $f(x)-y_\Delta$ يحافظ على إشارته

✠ لمعرفة إشارة $f(x)-y_\Delta$: نجرب أي عدد مثل $x=0\in\mathbb{R}$ نجد $f(x)-y_\Delta>0$ ومنه C فوق Δ

طريقة ثالثة لدراسة الوضع النسبي :

✠ ندرس إشارة الفرق $f(x)-y_\Delta=\sqrt{x^2+1}-x$

✠ $f(x)-y_\Delta=\sqrt{x^2+1}-x=\dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}=\dfrac{1}{(\sqrt{x^2+1}+x)}>0$

نجد $f(x)-y_\Delta>0$ ومنه C فوق Δ

نتأمل التابع f المعرف على $[0,+\infty[$ وفق العلاقة $f(x)=x-\sin x$ والمطلوب :

① احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ② أثبت أن التابع f متزايد

الحـــــــــــــــــــــــــــــل :

① حساب النهاية :

نعلم أن $-1\le\sin x\le1$ ومنه $x-1\le x-\sin x\le x+1$ وبالتالي نجد : $x-1\le f(x)\le x+1$

وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$ فحسب مبرهنة الإحاطة الثانية نجد أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

② إثبات أن التابع f متزايد :

التابع f اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$f'(x)=1-\cos x$

نعلم أن $\cos x\le1$ ومنه $-\cos x\ge-1\Rightarrow1-\cos x\ge0$ وبالتالي نجد : $f'(x)\ge0$

أي أن التابع f متزايد

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق العلاقة $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$ والمطلوب :

① عين التابع المشتق f' للتابع f

② نرمز بالرمز g للتابع المعرف على $J=]+1,+\infty[$ وفق $g(x)=f(\sqrt{x})$ أثبت أن g اشتقاقي على J .
ثم احسب $g'(x)$ على J

الحـــــــــــــــــــــــــــــل :

f اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ و $f':\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$ و

$f'(x)=\dfrac{2(x-1)-(2x+3)}{(x-1)^2}=\dfrac{2x-2-2x-3}{(x-1)^2}=-\dfrac{5}{(x-1)^2}$

لما كان $\sqrt{x}$ اشتقاقي على J و f اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وأياً كان $x\in J$ كان $\sqrt{x}\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$
ومنه نجد أن g اشتقاقي على J .

$g'(x)=f'(\sqrt{x})(\sqrt{x})'=-\dfrac{5}{(\sqrt{x}-1)^2}\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

الدورة الأولى ٢٠٢١

ليكن f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق : $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+1}{x-1}$ والمطلوب :

عين العددين a و b لتكون $f(-1)=0$ قيمة حدية للتابع f

الحـــــــــــــــــــــــل :

بما أن $f(-1)=0$ قيمة حدية للتابع f فإن $f'(-1)=0$

$$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x-1)-(ax^2+bx+1)}{(x-1)^2}=\frac{2ax^2-2ax+bx-b-ax^2-bx-1}{(x-1)^2}\Rightarrow$$

$$f'(x)=\frac{ax^2-2ax-b-1}{(x-1)^2}$$

$$f(-1)=0\Rightarrow\frac{a-b+1}{-1-1}=0\Rightarrow a-b+1=0 \qquad (1)$$

$$f'(-1)=0\Rightarrow\frac{a+2a-b-1}{(-1-1)^2}=0\Rightarrow 3a-b-1=0 \qquad (2)$$

بطرح (1) من (2) نجد : $2a-2=0\Rightarrow \boxed{a=1}$

نعوض في (1) نجد : $1-b+1=0\Rightarrow 2-b=0\Rightarrow \boxed{b=2}$

احسب العدد $I=\int_0^3(2-|2-x|)dx$

الحـــــــــــــــــــــــل :

$$2-x=0\Rightarrow x=2$$
$$x\in[0,2]\Rightarrow|2-x|=2-x$$
$$x\in]2,3]\Rightarrow|2-x|=x-2$$

$$I=\int_0^3(2-|2-x|)dx=\int_0^2(2-(2-x))dx+\int_2^3(2-(x-2))dx=\int_0^2 x\,dx+\int_2^3(4-x)dx\Rightarrow$$

$$I=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2+\left[4x-\frac{1}{2}x^2\right]_2^3=\frac{1}{2}(4)-0+\left[(12-\frac{9}{2})-(8-2)\right]=2+(\frac{15}{2}-6)=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$$

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I=]0,\infty[$ وفق العلاقة : $f(x)=x-4+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

1) أثبت أن f تابع متزايد تماماً على $I=]0,\infty[$ واستنتج $f(I)$

2) أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y=x-4$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

3) ادرس الوضع النسبي بين الخط C والمستقيم d

الحـــــــــــــــــــــــل :

① أن f تابع اشتقاقي على $I=]0,\infty[$ ومشتقه :

$$f'(x)=1+\frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)'}{\left(\frac{x}{x+1}\right)}=1+\frac{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{\left(\frac{x}{x+1}\right)}=1+\frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}}=1+\frac{1}{x(x+1)}>0 \quad : x\in I$$

Ammar Kaddoury

أي أن f تابع متزايد تماماً على $I=]0,\infty[$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{x}{x+1}=0$, $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln x=-\infty$ وذلك لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(x-4+\ln\frac{x}{x+1}\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{x}{x+1}\right)=0$ وذلك لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-4+\ln\frac{x}{x+1}\right)=+\infty$

$f(I)=]\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)[=]-\infty,+\infty[$

② $f(x)-y_d=x-4+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)-(x-4)=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-y_d]=\lim\limits_{x\to\infty}(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right))=\ln 1=0$

أي أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y=x-4$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

③ ندرس إشارة $f(x)-y_d=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

أياً كان $x\in I=]0,\infty[$ فإن :

$0<x<x+1\Rightarrow\frac{x}{x+1}<1\Rightarrow\ln\frac{x}{x+1}<0\Rightarrow f(x)-y_d<0$

وبالتالي : C تحت d

الدورة الثانية ٢٠٢١

احسب التكامل الآتي $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$

الحـــــــــــــــــــــــــل :

نضع : $u(x)=x$, $v'(x)=\sin x$

$u'(x)=1$, $v(x)=-\cos x$

ونعلم أن $I=\int_a^b uv'\,dx=\left[u.v\right]_a^b-\int_a^b vu'\,dx$ إذا :

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx=\left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^1\cos x\,dx\Rightarrow I=\left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=(0-0)+(1-0)=1$

مع اطيب التمنيات للطلاب بالتوفيق

المدرس : عمـــار قدوري

التـــــابع اللوغاريتمي — المدرس : عمـــار قدوري

تعريف :	$f(x)=\ln x\ ;]0,+\infty[\to]-\infty,+\infty[$			
	$f(x)=\ln[g(x)]\ ;g(x)>0\to]-\infty,+\infty[$			
خواص	$0<x<1\Rightarrow \ln x<0$	$1<x\Rightarrow \ln x>0$		
	$\ln 1=0$	$\ln e=1$	$\ln\frac{1}{e}=-1$	$\ln e^x=x$
	$\ln(a.b)=\ln a+\ln b$	$\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$	$\ln(a^b)=b.\ln a$	
الاشتقاق	$f(x)=\ln x\Rightarrow \acute{f}(x)=\frac{1}{x}$	$f(x)=\ln[g(x)]\Rightarrow \acute{f}(x)=\frac{\acute{g}(x)}{g(x)}$		
النهايات	$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$	$\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$		
	$\lim\limits_{x\to0^+}x^n.\ln x=0$	$\lim\limits_{x\to0^+}x.\ln x=0^-$		
	$\lim\limits_{x\to1^+}x.\ln x=0^+$	$\lim\limits_{x\to1^-}x.\ln x=0^-$		
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$		
	$\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\ln(x+1)}=1$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$		
	$\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{\ln x}=1$	$\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1$		
حل المعادلات و المتراجحات	$\ln f(x)=\ln g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x);D=D_f\cap D_g$			
	$\ln f(x)>\ln g(x)\Leftrightarrow f(x)>g(x);D=D_f\cap D_g$			
	$\ln f(x)<\ln g(x)\Leftrightarrow f(x)<g(x);D=D_f\cap D_g$			

تصنيف مسائل الوحدة

	فكرة التمرين	ارقام المسائل
1	تعريف التابع اللوغاريتمي و خواصه	تدرب 154: (3 و 4 و5)
2	خواص اللوغاريتم	تدرب 158 (7 و 8)
3	صفات التابع اللوغاريتمي	تدرب 162 (2 و 3)
4	مشتق التابع اللوغاريتمي و نهاياتع	تدرب 165 (2 و 4)
5	النشاط الأول وضع الخط البياني للتابع اللوغاريتمي بالنسبة لمماساته	تطبيق 168 (2)
6	النشاط الثاني : التابع اللوغاريتمي بالأساس a	تطبيق 170
7	تعيين أمثال اعتمادا على معطيات	$1-2$
8	تطبيقات المماس	3
9	حل معادلات و متراجحات	$4-14-16-17-20$
10	حل معادلتين	$5-11$
11	لنتعلم البحث معاً	$10-12-13$
12	تطبيق على النهايات	$5-6-7$
13	دراسة تغيرات	$8-9-18-19-20-21-22$
14	دراسة تغيرات + الوضع النسبي للمقارب المائل	$21.22.23.24.25.26.27.28.30$
15	توظيف المشتق الثاني في دراسة التغيرات	29
16	مسائل عامة	$31-32-33$

اعداد المدرس عمـــــار قدوري – دمشق - 0934006844&0944006844

تعريف :

$$f(x) = e^x \; ;]-\infty,+\infty[\to]0,+\infty[$$
$$f(x) = e^{[g(x)]} \; ;\mathfrak{D}_g \to]0,+\infty[$$
$$f(x) = a^x = e^{xlna} \; ;]-\infty,+\infty[\to]0,+\infty[: a > 0$$
$$f(x) = a^{[g(x)]} \; ;\mathfrak{D}_g \to]0,+\infty[: a > 0$$

الاشتقاق

$$f(x) = e^x \Rightarrow \acute{f}(x) = e^x$$
$$f(x) = e^{[g(x)]} \Rightarrow \acute{f}(x) = \acute{g}(x)e^{[g(x)]}$$
$$f(x) = a^x \Rightarrow \acute{f}(x) = a^x.ln\, a$$
$$f(x) = a^{[g(x)]} \; ;\acute{f}(x) = \acute{g}(x)a^x.ln\, a$$

النهايات

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n.e^{-x} = 0 : n > 0$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n.e^x = 0 : n > 0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
$\lim\limits_{x\to0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$	$\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\to0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$	$\lim\limits_{x\to+\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$
$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n.a^{-x} = 0 : n > 0$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n.a^x = 0 : n > 0$

المعادلات و المتراجحات

❁ حل المعادلات و المتراجحات :

◆ **المعادلات من النمط :**

$$e^{g(x)} = e^{h(x)}$$

خطوات الحل :

- تؤول المعادلة السابقة إلى حل المعادلة $g(x) = h(x)$
- نوجد D_1 مجموعة تعريف $g(x)$
- نوجد D_2 مجموعة تعريف $h(x)$.
- فتكون $D = D_1 \cap D_2$ هي المجموعة التي تُقبل فيها حلول المعادلة $g(x) = h(x)$

◆ **المعادلات من النمط :**

$$e^{g(x)} = b$$

نكون أمام حالتين :

- $b \leq 0 \Leftarrow$ المعادلة مستحيلة الحل
- $b > 0 \Leftarrow g(x) = lnb$
- **معادلات خاصة من النمط :**

$$ae^{2x} + be^x + c = 0$$

تحل بفرض متحول جديد $t = e^x$ فتؤول المعادلة إل الشكل $at^2 + bt + c$
وتقبل الحلول التي تحقق $t > 0$
فإذا كانت من النمط

Ammar Kaddoury

$$ae^x + be^{-x} + c = 0$$

نضرب ب e^x فنحصل على $ae^{2x} + ce^x + d = 0$ ونتابع كما السابق

◆ **المتراجحات من النمط :**

$$e^{g(x)} > e^{h(x)} \Leftrightarrow g(x) > h(x)$$
$$e^{g(x)} \geq e^{h(x)} \Leftrightarrow g(x) \geq h(x)$$
$$e^{g(x)} < e^{h(x)} \Leftrightarrow g(x) < h(x)$$
$$e^{g(x)} \leq e^{h(x)} \Leftrightarrow g(x) \leq h(x)$$

- نوجد D_1 مجموعة تعريف $g(x)$
- نوجد D_2 مجموعة تعريف $h(x)$.
- نوجد $D = D_1 \cap D_2$.
- نحل المتراجحة الموافقة ونوجد I المجال الذي يحقق المتراجحة .
- يكون المجال المقبول هو $S = I \cap D$

المعادلات التفاضلية	$y' = ay \Rightarrow f_k(x) = ke^{ax} : k \in \mathcal{R}$
	$y' = ay + b \Rightarrow f_k(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a} : k \in \mathcal{R}$ حيث $a \neq 0$:

تصنيف مسائل الوحدة

	فكرة التمرين	ارقام المسائل
1	تعريف التابع الاسي و خواصه	تدرب 186 رقم 3 مسائل الوحدة 14و 15
2	خواص الاسي النيبري	تدرب 190 رقم 3و4و5
3	دراسة التابع الاسي و نهاياته	تدرب 194 رقم 2 تدرب 199 رقم 2 و 3 مسائل الوحدة 2و4و6و8
4	دراسة توابع من النمط $f(x) = a^x$	تدرب 203 رقم 2و3و4و5و6و8
5	المعادلات التفاضلية البسيطة	تدرب 205
6	حساب مشتق تابع اسي	1و2
7	تحويلات هندسية على الخط البياني لتابع اسي	3و4
8	مقاربات مائلة	5و6
9	دراسة تغيرات تابع اسي	23-21-20-19-18-11-17-10-9-8-7
10	مماسات مشتركة	12
11	معادلات تفاضلية	27-26-25
12	نشاط 1 : احاطة العدد e باستعمال متتاليات	تطبيق 208
12	مسائل عامة	22و 24و 16و23و25

اعداد المدرس عمـــــار قدوري – دمشق - 0934006844&0944006844

Ammar Kadoury

مسائل تغيرات شاملة

المسألة(1) وزاري 2017: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R بالصيغة:

$$f(x) = xe^{-x}.$$

1) أحسب نهاية التابع f عند $+\infty$ و عند $-\infty$, أحسب $f'(x)$, أدرس اطراد التابع f ونظم جدولاً بتغيراته وعين قيمته الحدية ثم أرسم C.

2) أحسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0$ و $x = 1$.

3) بين أنه في حالة عدد حقيقي m من المجال $]0, e^{-1}[$ تقبل المعادلة $f(x) = m$ حلين مختلفين.

4) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً كما يأتي: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

a) أثبت أن $0 < u_n \leq 1$ وذلك مهما كان العدد الطبيعي n.

b) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة, ثم بين تقاربها وأحسب نهايتها.

الحل: 1)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$ مقارب منطبق على $x'x$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = e^{-x}(1 - x)$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(1 - x)$.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = e^{-1}$$

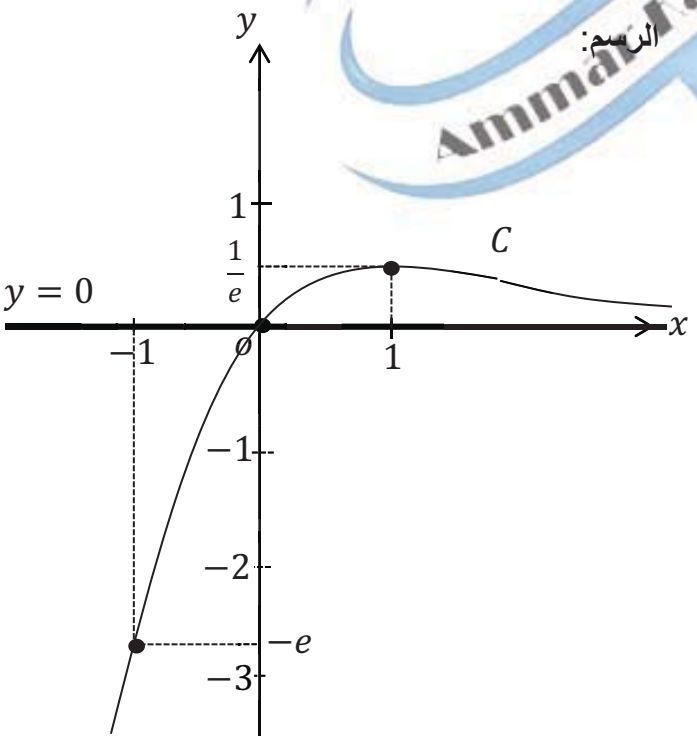
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	e^{-1}	↘	0

$f(1) = e^{-1}$ قيمة كبرى محلية للتابع.

نقط مساعدة: $x = 0$ يعطي $y = 0$ ومنه $(0,0) \in C$.

$x = -1$ يعطي $y = -e$ ومنه $(-1, -e) \in C$.

الرسم:



2) المساحة

Ammar Kaddouri

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_0^1 xe^{-x}dx$$

باستعمال التكامل بالتجزئة نجد

$$S = 1 - \frac{2}{e}$$

3) $f(0) = 0$.

f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]-\infty, 1[$ فهو مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]0,1[$.

$$f(]0,1[) =]0, e^{-1}[$$

$$m \in]0, e^{-1}[$$

ومنه للمعادلة $f(x) = m$ حل وحيد في المجال $]0,1[$.

التابع f مستمر ومتناقص تماماً على المجال $]1, +\infty[$ و

$$0 \in f(]1, +\infty[) =]0, e^{-1}[$$

ومنه للمعادلة $f(x) = m$ حل وحيد في المجال $]1, +\infty[$.

إذن للمعادلة $f(x) = m$ حلين مختلفين أحدهما في المجال $]0,1[$ والآخر في المجال $]1, +\infty[$.

ط2: عن طريق الرسم.

4) a) **ط1**: عن طريق الإثبات بالتدريج.

ط2: f متزايد تماماً على المجال $I =]0, e^{-1}[$ و

$$f(I) =]0, e^{-1}[\subset]0,1] = I$$

وبما أن $u_0 \in I$ فجميع حدود المتتالية تنتمي إلى I إذن القضية

$0 < u_n \leq 1$ محققة مهما كان العدد الطبيعي n.

b) **ط1**: عن طريق الإثبات بالتدريج.

ط2: مما سبق نستنتج أن حدود المتتالية موجبة تماماً. لدينا

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n} = \frac{1}{e^{u_n}} < 1$$

وبالتالي المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً.

- بما أن المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة من $x = l$ المحقق للمعادلة

$$f(x) = x \Rightarrow xe^{-x} = x \Rightarrow$$

$$x(e^{-x} - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$$

إذن

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

المسألة(2) وزاري **2017**: ليكن التابع f المعرف على R وفق: $f(x) = 2e^{-x} + x -$ 2 خطه البياني C.

1) أوجد معادلة المقارب المائل للخط C وادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة إلى هذا المقارب.

2) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها. وبين أنه يبلغ قيمة حدية محلية عينها وبين نوعها.

Ammar Kaddouri

3) استنتج أن للمعادلة $f(x)=0$ جذرين أحدهما يساوي الصفر والآخر نرمزه بالرمز α. أثبت أن $1<\alpha<2$.

4) أرسم المقارب المائل ثم أرسم C, وأحسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيمات

$$y=\frac{x}{x-2} \quad \text{و} \quad x=\ln 2 \quad \text{و} \quad x=\ln 3$$

الحل: 1) نضع $d: y=x-2$.

$$g(x)=f(x)-y_d=2e^{-x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$$

وبالتالي المستقيم d الذي معادلته $y=x-2$ مستقيم مقارب مائل لـِ C في جوار $+\infty$.

- <u>الوضع النسبي</u>:

$$g(x)=2e^{-x}>0$$

أياً كانت x من R.

نستنتج أن C يقع دوماً فوق المقارب d.

2) f معرف ومستمر واشتقاقي على R.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=?$$

حالة عدم تعيين من الشكل $+\infty-\infty$.

$$f(x)=e^{-x}(2+xe^{x})-2$$

ولما كانت

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{x}=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$$

فإن

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

$$f'(x)=-2e^{-x}+1=e^{-x}(e^{x}-2)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow e^{x}-2=0\Rightarrow$$

$$e^{x}=2\Rightarrow x=\ln 2$$

$$f(\ln 2)=-1+\ln 2$$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-1+\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

من الجدول نستنتج أن للتابع قيمة صغرى محلية تساوي $-1+\ln 2$ يبلغها عندما $x=\ln 2$.

3) لدينا f مستمر ومتناقص تماماً على المجال $]-\infty,\ln 2[$ و

$$0\in f(]-\infty,\ln 2[)=]-1+\ln 2,+\infty[$$

إذن للمعادلة $f(x)=0$ جذر وحيد في المجال $]-\infty,\ln 2[$.

لدينا f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]\ln 2,+\infty[$ و

$$0\in f(]\ln 2,+\infty[)=]-1+\ln 2,+\infty[$$

إذن للمعادلة $f(x)=0$ جذر وحيد في المجال $]\ln 2,+\infty[$.

نستنتج أن للمعادلة $f(x)=0$ جذرين مختلفين في $\mathbb{R}$.

Ammar Laddoury

نلاحظ أن

$$f(0) = 2e^0 - 0 - 2 = 0$$

ومنه $x = 0$ هو أحد الجذرين والآخر α من المجال $]ln 2, +\infty[$.

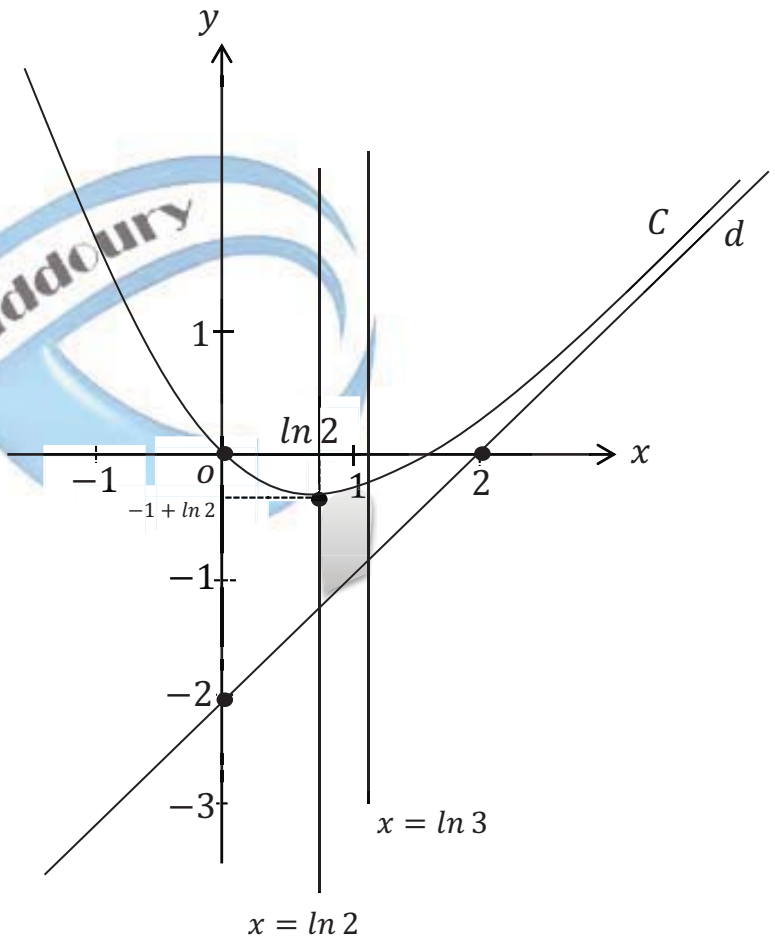
$$f(1) = \frac{2}{e} - 1 < 0$$

$$f(2) = \frac{2}{e^2} > 0$$

$$f(1).f(2) < 0$$

أي $1 < \alpha < 2$.

4) **الرسم:**



$$S = \int_{ln\,2}^{ln\,3} \big(f(x) - (x-2)\big)dx =$$

$$\int_{ln\,2}^{ln\,3} (2e^{-x})dx = \frac{1}{3}$$

الصفحة 4

المسألة(3) وزاري 2017: **أولاً**: ليكن التابع g المعرف على R وفق: $g(x) = e^x + 2 - x$.

أدرس اطراد التابع g واستنتج مجموعة حلول المتراجحة $g(x) > 0$.

ثانياً: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x) = x + \frac{x-1}{e^x}$.

1) أثبت أن $f'(x) = \frac{1}{e^x} g(x)$.

2) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً $0 < \alpha < 0.5$.

3) أثبت أن المستقيم $\Delta: y = x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي.

4) ارسم Δ وارسم C, واحسب مساحة السطح المحصور بين C و Δ والمستقيمين $x = 0$ و $x = 1$.

الحل: أولاً: g اشتقاقي على R ومشتقه

$$g'(x) = e^x - 1$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow$$

$$x = 0 \Rightarrow g(0) = 3$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	3	↗	

من الجدول نستنتج أن $g(x) \geq 3 > 0$ آياً كانت x من R.

Ammar Kaddoury

ثانياً: 1)

$$f(x) = x + (x-1)e^{-x}$$

$$f'(x) = e^{-x}(e^x + 2 - x) \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{e^x}(e^x + 2 - x) \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$$

2) إشارة $f'(x)$ تماثل إشارة $g(x)$ وبما أن $g(x) > 0$ فإن $f'(x) > 0$ آياً كانت x من R ومنه فالتابع f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

$$f(0) = -1 < 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{e}} > 0$$

ومنه $f(0).f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ إذن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

3)

$$h(x) = f(x) - x = \frac{x-1}{e^x} = \frac{x}{e^x} - e^{-x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$$

إذن $\Delta: y = x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

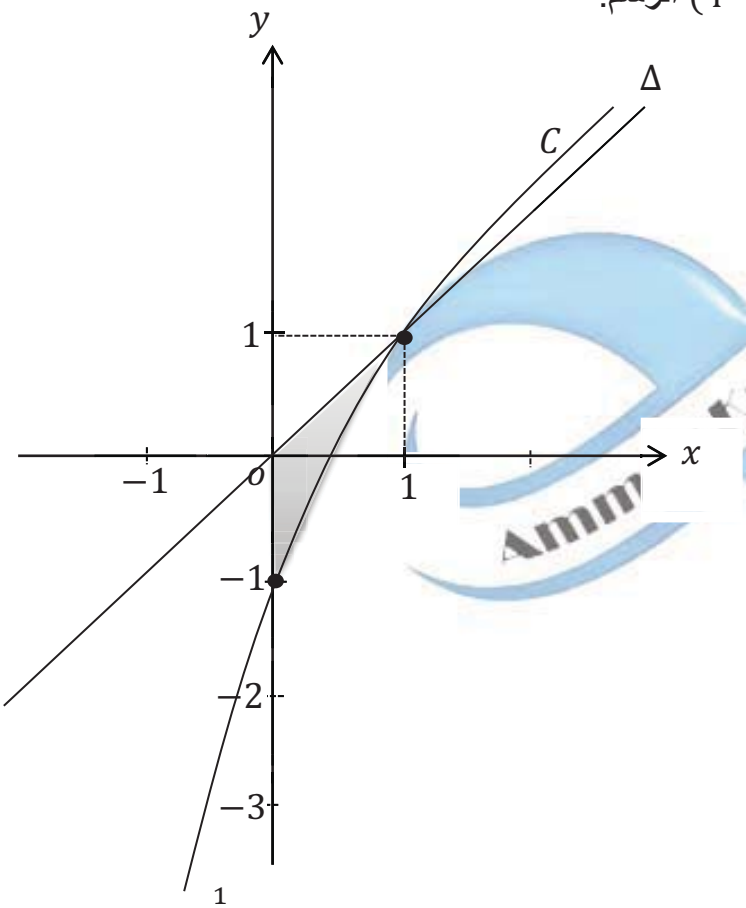
إشارة تابع الفرق h تماثل إشارة المقدار $x - 1$.

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h(x)$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	C تحت Δ	$(1,1)$	C فوق Δ

ويشترك C مع Δ بالنقطة $(1,1)$.

4) **الرسم:**



$$S = \underbrace{\int_0^1 \big(x - f(x)\big)dx}_{\text{لأن } \Delta \text{ فوق } C} =$$

$$\int_0^1 -(x-1)e^{-x}dx$$

بعد استعمال التكامل بالتجزئة نحصل على:

$$S = \frac{1}{e}$$

المسألة(4) وزاري 2017: ليكن C الخط البياني للتابع $f(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2}$ المعرف على $R\backslash\{-1\}$.

1) أدرس نهايات التابع عند أطراف مجموعة التعريف وبين إذا كانت له نهاية حقيقية عند $x = -1$.

2) أوجد معادلة مقارب أفقي للخط البياني C وأدرس الوضع النسبي لهذا المقارب مع C.

3) أحسب $f'(x)$ ونظم جدولاً بتغيرات f وعين ما له من قيم حدية محلية.

4) أوجد معادلة المماس في النقطة من C التي فاصلتها $x = -2$.

5) ارسم C وأحسب مساحة السطح المحصور بين محوري الإحداثيات والمنحني C والمستقيم $x = 3$.

الحل: 1)

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty$$

ومنه

$$\lim_{x\to-1} f(x) = +\infty$$

"ليس للتابع نهاية حقيقية عند $x = -1$"

2) $d: y = 0$ مقارب أفقي للخط C.

$$g(x) = f(x) - y_d = \frac{x+2}{(x+1)^2}$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	C تحت d	$(-2,0)$	C فوق d

يشترك C مع d بالنقطة $A(-2,0)$.

3) f اشتقاقي على كل من المجالين $]-\infty,-1[$ و $]-1,+\infty[$ ومشتقه

$$f'(x) = \frac{-x^2-4x-3}{(x+1)^4}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 - 4x - 3 = 0$$

ومنه

إما $x = -3 \in D_f$

أو $x = -1 \notin D_f$ "مرفوض"

$$f(-3) = -0.25$$

Amar Kaddouri

x	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0 $+$	$\|\|$	$-$
$f(x)$	0 ↘	-0.25 ↗	$+\infty$ $\|\|$ $+\infty$	↘ 0

للتابع قيمة صغرى محلية تساوي -0.25 ويبلغها عند $x=-3$.

4) نقطة التماس $A(-2,0)$.

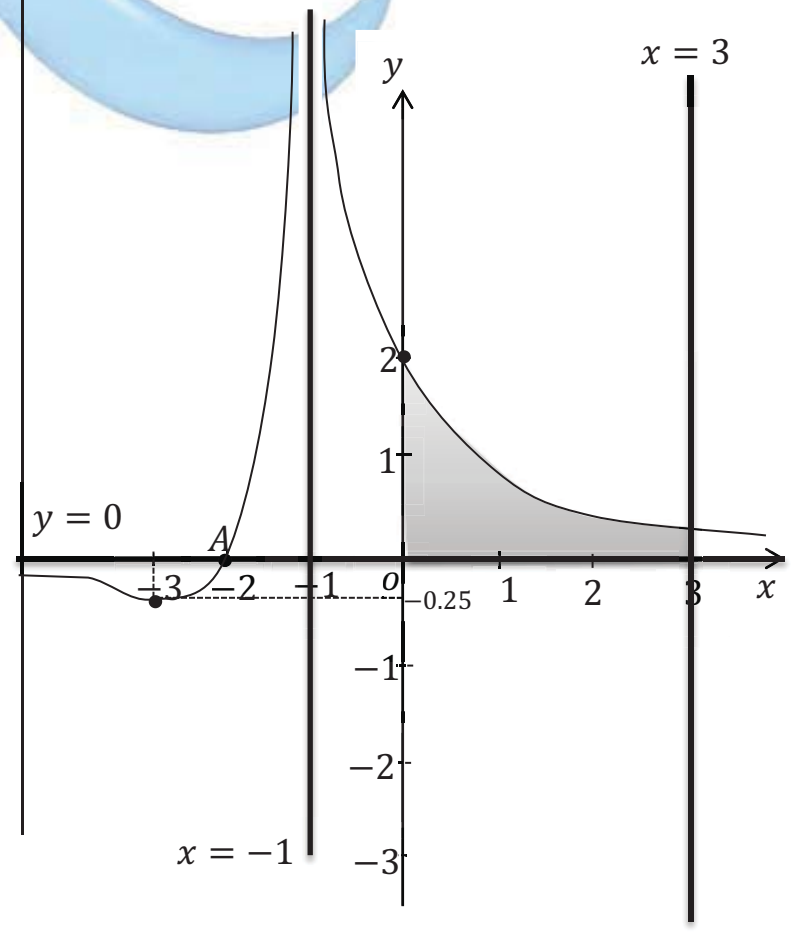
$$f'(-2)=1$$

معادلة المماس هي:

$$T: y=x+2$$

5) **الرسم:**

$$x=0 \Rightarrow y=2$$



الخط C يقع فوق محور الفواصل على المجال $[0,3]$.

$$f(x)=\frac{x+1+1}{(x+1)^2}=\frac{1}{x+1}+(x+1)^{-2}$$

$$S=\int_0^3\left[\frac{1}{x+1}+(x+1)^{-2}\right]dx=$$

$$\left[ln(x+1)-\frac{1}{x+1}\right]_0^3=\frac{3}{4}+ln(4)$$

المسألة(5) وزاري **2017**: ليكن التابع f المعرف على R وفق: $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$.

1) أوجد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة التعريف.

2) أدرس اطراد التابع f ونظم جدولاً بها.

3) بين القيم الحدية المحلية للتابع f. وأرسم خطه البياني C.

4) استنتج عدد حلول المعادلة $x^2e^{-x}=1$.

5) أحسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيم $x=1$.

الحل: 1) و 2): بإيجاد النهايات ودراسة الاطراد نصل إلى الجدول:

Ammar Kaddoury

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0

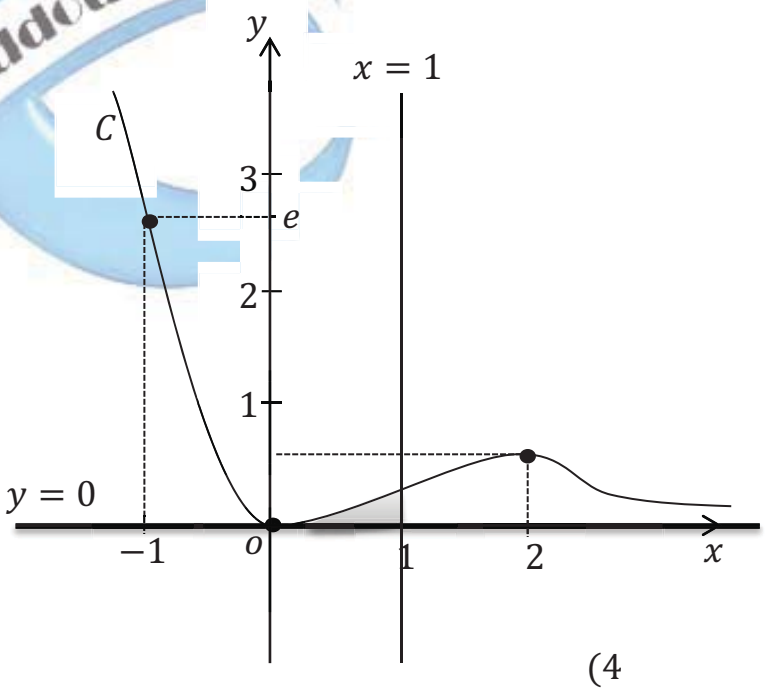
3) $f(0)=0$ قيمة صغرى محلياً.

$f(2)=\frac{4}{e^2}$ قيمة كبرى محلياً.

تنويه: لأننا أخذنا قبل $x=0$ و $x=2$ لنفرض أن $x=-1$ من أجل نقطة مساعدة جديدة).

$$x=-1 \Rightarrow y=\frac{1}{e^{-1}}=e$$

الرسم:



4)

$$x^2e^x=1 \Rightarrow \frac{x^2}{e^x}=1 \Rightarrow f(x)=1$$

نلاحظ أن $y=1$ يقطع الخط C بنقطة واحدة فقط ومنه للمعادلة المفروضة حل وحيد في R.

5) الخط C يقع فوق محور الفواصل على المجال $[0,1]$.

$$S=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^2e^{-x}dx$$

بعد استعمال التكامل بالتجزئة مرتين نحصل على

$$S=2-\frac{5}{e}$$

المسألة(6) امتحان فصل أول **2017**: **أولاً** – ليكن التابع g المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق العلاقة: $g(x)=\frac{x^2+bx+a}{x-1}$.

جد العددين a و b علماً أن التابع g يقبل قيمة حدية محلياً عند $x=0$ قيمتها تساوي 2.

ثانياً – بفرض التابع f المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق العلاقة $f(x)=x+3+\frac{1}{x-1}$ خطه البياني C.

1) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x+3$ مقارب للخط C.

2) أوجد نهايات التابع f عند حدود مجموعة تعريفه.

3) أدرس تغيرات f ونظم جدولاً بها, واستنتج من جدول التغيرات أن للمعادلة $f(x)=0$ حل حقيقي وحيد α ينتمي إلى المجال $]-3,-2[$.

الحل: أولاً: $g(0)=2$ ومنه ينتج أن $a=-2$.

$$g'(x)=\frac{x^2-2x-(a+b)}{x-1}$$

Ammar Kaddoury

من $g'(0)=0$ نجد أن $a+b=0$ وكون لدينا $a=-2$ فإن $b=2$.

ثانياً: 1) نكتب

$$f(x)-y_\Delta=\frac{1}{x-1}$$

ثم

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$$

ومنه Δ مقارب مائل للخط C في جوار $\pm\infty$.

2)

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=+\infty$$

3)

$$f'(x)=\frac{x^2-2x}{x-1}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x^2-2x=0\Rightarrow$$

$$x(x-2)=0$$

إما $x=0\Rightarrow f(0)=2$

أو $x=2\Rightarrow f(2)=6$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$\pm\infty$ ‖ $+\infty$	↘	6	↗	$+\infty$

f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]-3,-2[$.

$$f(-3)=-\frac{1}{4}$$

$$f(-2)=\frac{2}{3}$$

$$f(-3).f(-2)<0$$

نستنتج أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α من المجال $]-3,-2[$.

المسألة(7) أمتحان دورة أولى**2017**: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$.

1) أحسب

$$\lim_{x\to+\infty}f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to0}f(x)$$

واستنتج معادلة المقارب الأفقي والشاقولي.

2) ادرس تغيرات التابع f, ونظم جدولاً بها, ثم دل على القيمة الحدية محلياً.

3) جد معادلة المماس Δ في النقطة A من الخط C التي فاصلتها $x=1$.

4) أرسم كل مقارب وجدته, وارسم المماس Δ, ثم ارسم C.

Ammar Kaddoury

5) أحسب S مساحة السطح المحصور بين C والمحور xx' والمستقيم $x = e$.

الحل: 1)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}.\frac{\ln x}{x}\right) = 0$$

المستقيم الذي معادلته $y = 0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$.

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}.\ln x\right) = -\infty$$

المستقيم الذي معادلته $x = 0$ مقارب شاقولي للخط C.

2) التابع f اشتقاقي على $]0,+\infty[$ ومشتقه:

$$f'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3}$$

المقام موجب على مجموعة التعريف.

إشارة المشتق مماثلة لإشارة البسط.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2\ln x = 0 \Rightarrow$$

$$x = \sqrt{e}$$

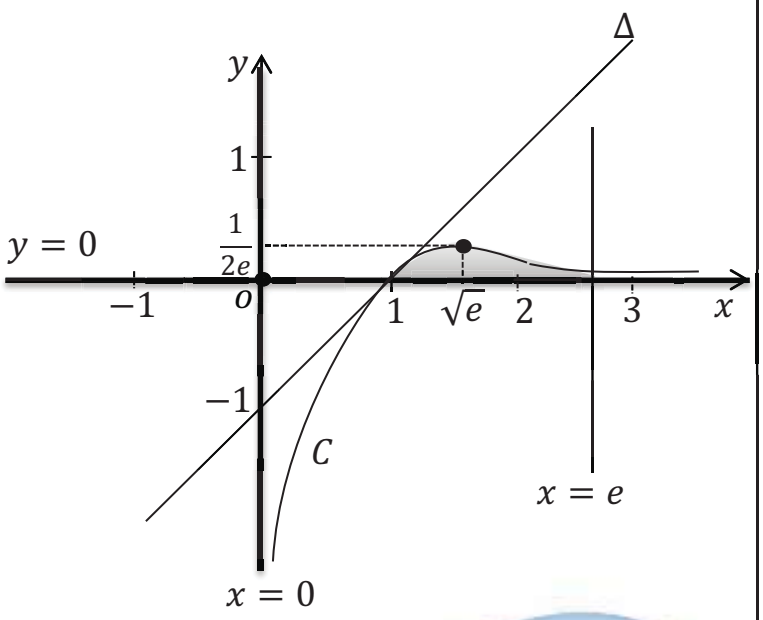
$$f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{2e}$	↘	0

3) معادلة المماس

$$\Delta: y = x - 1$$

4) **الرسم:**



5) المساحة:

$$S = \int_1^e f(x)dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$$

نطبق التكامل بالتجزئة فنحصل على

$$S = 1 - \frac{2}{e}$$

المسألة(8) أمتحان دورة ثانية **2018**: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x) = x^2 - \ln x$ المطلوب:

1) جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه.

2) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

3) أكتب معادلة المماس T للخط البياني C في نقطة منه فاصلتها $x = 1$.

Ammar Kaddoury

4) في معلم متجانس ارسم المماس T والخط البياني C.

5) أحسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين $x = 1$ و $x = e$.

6) نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ حيث: $u_n = n^2 - ln(n)$ أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة.

الحل: 1)

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = ?$$

حالة عدم تعيين من الشكل $+\infty - \infty$.

$$f(x) = x\left(x - \frac{ln\, x}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty(+\infty - 0) = +\infty$$

2)

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x}$$

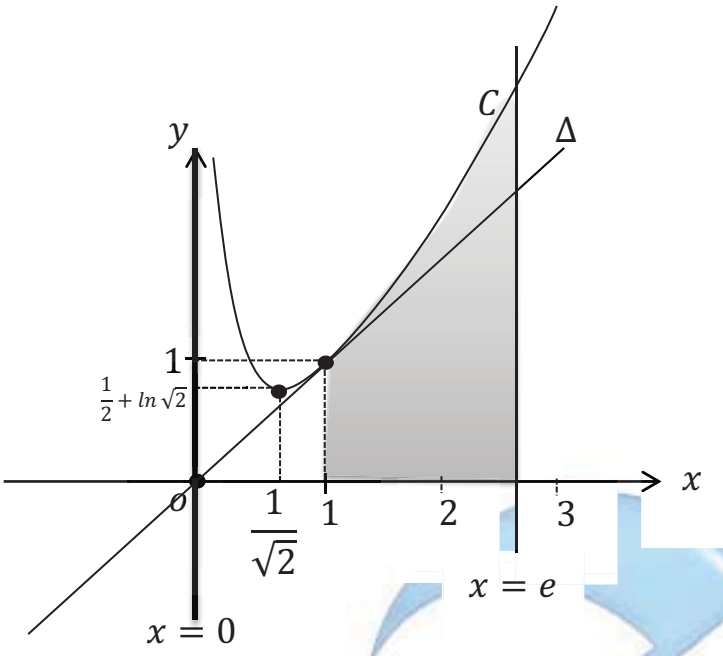
ينعدم $f'(x)$ عندما $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ و $x =$ مرفوض $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{2} + ln\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

3) $f(1) = 1$ و $f^1(1) = 1$ ومنه تكون معادلة المماس بالشكل:

$$y = x$$

4) **الرسم:**



5)

$$S = \int_1^e (x^2 - ln\, x)dx =$$

$$\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e - \int_1^e ln\, x\, dx$$

نوجد التكامل

$$I = \int_1^e ln\, x\, dx$$

عن طريق التجزئة فنحصل على

$$S = \frac{e^2-4}{3}$$

6) $u_n = f(n)$.

Ammar Kaddoury

من جدول التغيرات نلاحظ أن التابع f مستمر ومتزايد على المجال $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$ بالتالي هو متزايد على المجال $]1, +\infty[$ ومنه u_n متزايدة.

المسألة(9) وزاري 2019: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ وفق:

$f(x) = ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)$ وليكن C' الخط البياني للتابع g مقصور التابع f على المجال $]1, +\infty[$ المطلوب:

1) أثبت أن f تابع فردي و استنتج الصفة التناظرية للخط c.

2) ادرس تغيرات التابع g ونظم جدولاً بها وأكتب معادلة كل مقارب للخط C'.

3) أرسم كل مقارب وجدته وأرسم c' ثم استنتج رسم C.

4) أحسب مساحة السطح المحصور بين C' ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = 2$ و $x = 3$.

الحل: 1) آياً كان $x \in D_f$ فإن $-x \in D_f$.

$$f(-x) = ln\left(\frac{1-x}{-x-1}\right) = ln\left(\frac{x-1}{1+x}\right) =$$

$$-ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right) = -f(x)$$

ومنه f تابع فردي خطه البياني C متناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات.

2)

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = ln\,1 = 0$$

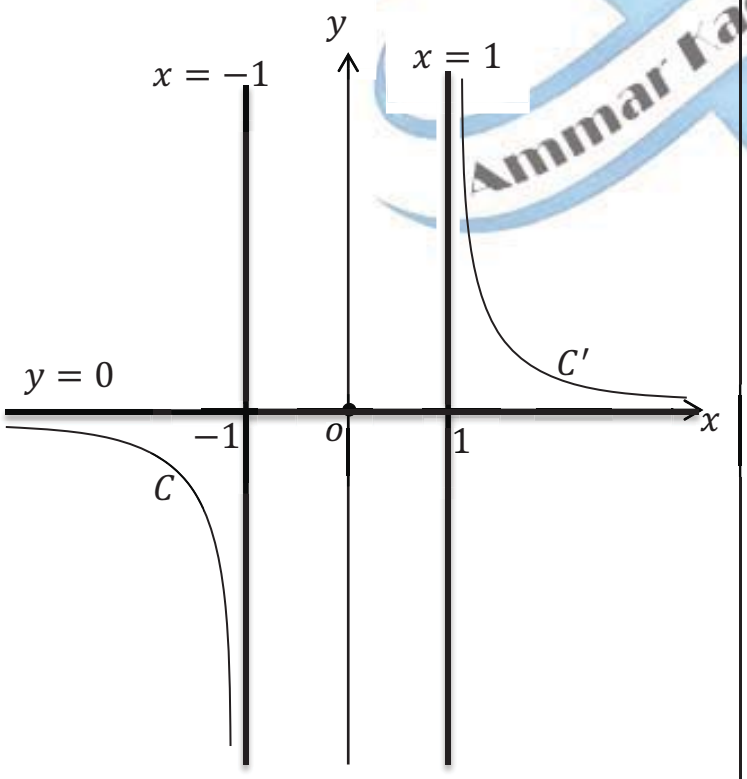
$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$ و $x = 1$ مقارب شاقولي عند $+\infty$.

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x-1} = \frac{-2}{(1+x)(x-1)} < 0$$

ومنه g متناقص تماماً.

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$-$
$g(x)$	$\|\|+\infty$	$\searrow 0$

3) **الرسم**:



4)

Ammar Kaddoury

$$S = \int_2^3 g(x)dx = \int_2^3 ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)dx$$

نكامل بالتجزئة فنحصل على:

$$S = \left[xln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)\right]_2^3 + \int_2^3 \frac{2x}{x^2-1}dx =$$

$$\left[xln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)\right]_2^3 + [ln(x^2-1)]_2^3 =$$

$$S = 6\,ln\,2 - 3\,ln\,3$$

المسألة(10) دورة أولى **2019**: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق: $f(x) = \frac{4}{1+e^x}$ والمطلوب:

1) جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه وأكتب معادلة كل مقارب وجدته.

2) أدرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

3) جد معادلة للمماس T للخط البياني C عند النقطة $(0,2)$ وادرس الوضع النسبي لِـ C و T.

4) في معلم متجانس ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم المماس T والخط البياني C.

5) ليكن C' الخط البياني للتابع g المعرف على R وفق $g(x) = \frac{4e^x}{1+e^x}$. استنتج الخط البياني C' للتابع g.

الحل: 1)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 4$$

$y = 4$ مقارب أفقي.

2)

$$f'(x) = \frac{-4e^x}{(1+e^x)^2} < 0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	4		0

3)

$$m = f'(0) = -1$$

معادلة T: $y = -x + 2$.

الوضع النسبي: نشكل تابع الفرق

$$g(x) = f(x) - y_T = \frac{4}{1+e^x} + x - 2$$

$$= \frac{(1+e^x)+2(1-e^x)}{1+e^x}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$		$-$ 0 $+$	
الوضع النسبي	T تحت C	$(0,0)$	C فوق T

4) **الرسم:**

Amar Kaddoury

المسألة(11) دورة ثانية **2019**: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق: $f(x)=\frac{2x}{e^x}$ والمطلوب:

1) جد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه وأكتب معادلة المقارب الأفقي.

2) أدرس تغيرات التابع f.

3) في معلم متجانس ارسم الخط C.

4) أحسب مساحة السطح المحصور بين الخط C ومحوري الإحداثيات والمستقيم $x=1$.

5) استنتج رسم الخط C_1 للتابع g وفق: $g(x)=2xe^x$.

6) أثبت أن $f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية: $y'+y=2e^{-x}$.

الحل: 1)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

$y=0$ مقارب أفقي.

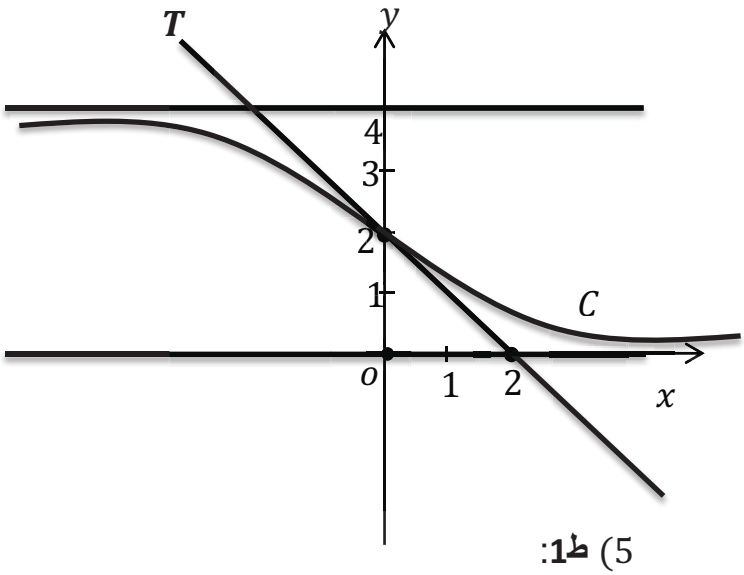
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

2)

$$f'(x)=\frac{2e^x(1-x)}{e^{2x}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 2e^x(1-x)=0\Rightarrow$$

$$1-x=0\Rightarrow x=1$$



5) **ط1**:

$$g(x)=\frac{4e^x}{1+e^x}$$

ومنه

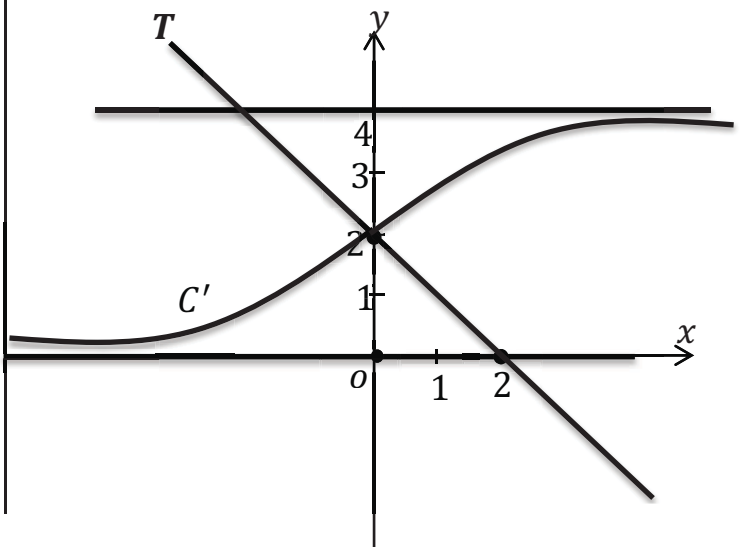
$$g(x)=\frac{4e^x}{e^x(e^{-x}+1)}=\frac{4}{e^{-x}+1}=f(-x)$$

إذن C' نظير C بالنسبة لمحور التراتيب.

ط2:

$$h(x)=\frac{4e^x+4-4}{(1+e^x)^2}=4-f(x)$$

أي أن C' ينتج عن Cوفق تناظر لمحور الفواصل ثم انسحاب شعاعه $\vec{v}(0,4)$ على محور التراتيب.

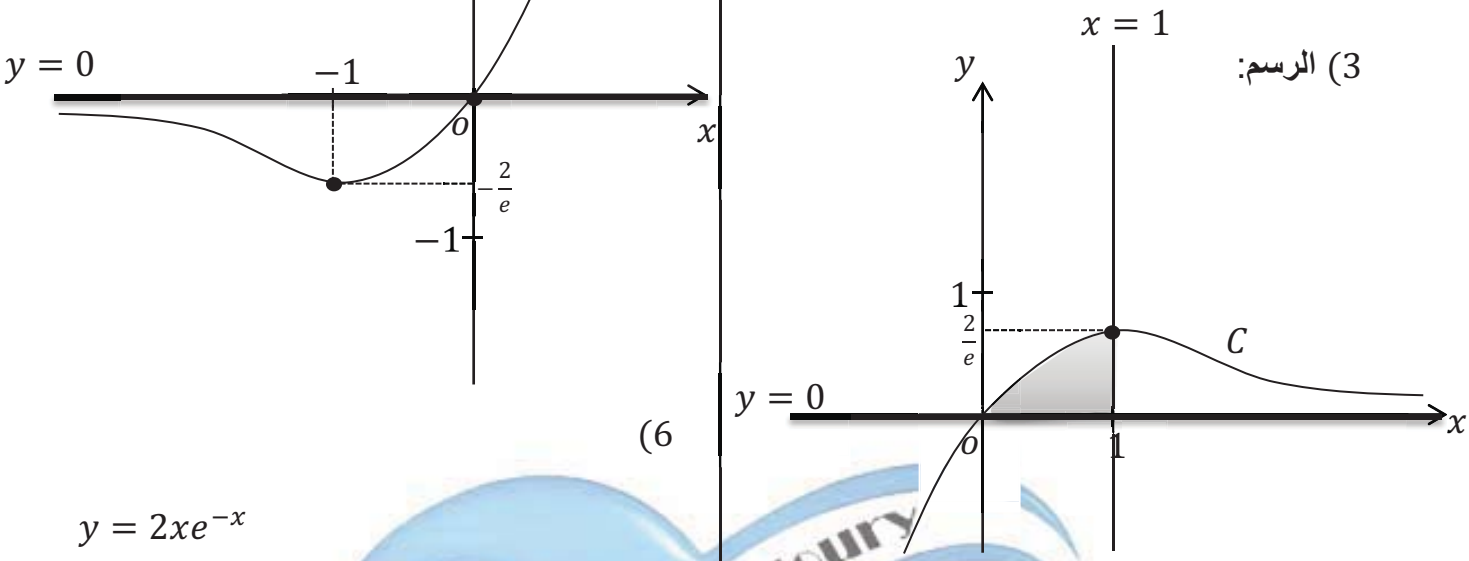


Ammar Kaddoury

$f(1) = \frac{2}{e}$

x	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	0

3) **الرسم:**



4)

$$S = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{2x}{e^x}dx$$

بتطبيق التكامل بالتجزئة نحصل على

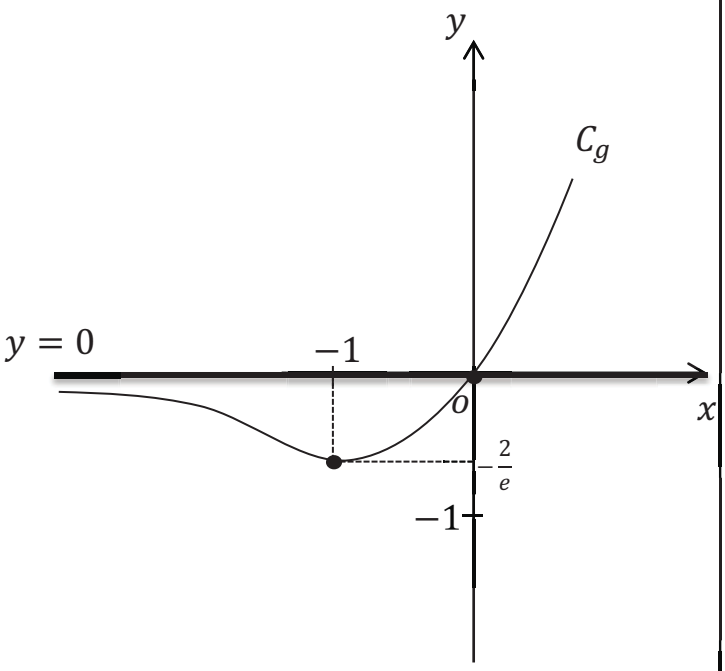
$$S = \frac{2e-4}{e}$$

5)

$$g(x) = 2xe^x = \frac{2x}{e^{-x}} = -\frac{2(-x)}{e^{-x}} =$$

$$-f(-x)$$

أي أن C_g نظير C_f بالنسبة لمبدأ الإحداثيات.



6)

$$y = 2xe^{-x}$$

$$y' = 2e^{-x} - 2xe^{-x} = 2e^{-x}(1-x)$$

$$y' + y = 2e^{-x}(1-x) + 2xe^{-x} =$$

$$2e^{-x}(1-x+x) = 2e^{-x}(1) = 2e^{-x}$$

أي أن $f(x) = \frac{2x}{e^x} = 2xe^{-x}$ هو حل للمعادلة التفاضلية:

ط2: المعادلة التفاضلية

$$y' + y = 2e^{-x}$$

نضع $y = f(x) = \frac{2x}{e^x}$ ومنه

$$y' = f'(x) = \frac{2-2x}{e^x}$$

نعوض في الطرف الأيسر من المعادلة فنحصل على

Ammar Kaddoury

$$\frac{2-2x}{e^x}+\frac{2x}{e^x}=2e^{-x}$$

وهو مساوٍ للطرف الأيمن وبالتالي $y=f(x)$ هو حل المعادلة التفاضلية.

المسألة(12) وزاري **2020**: ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{4}{x}\right)$. والمطلوب:

1- أدرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

2- أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y=\frac{1}{2}x$ مقارب مائل للخط C_f, ثم أدرس الوضع النسبي.

3- حل المعادلة $f(x)=x$.

4- لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً بالشكل $u_0=4$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ عند كل $n\in N$ والمطلوب:

a. أحسب u_1 و u_2.

b. استنتج من تزايد التابع f على المجال $[2,+\infty[$ صحة الخاصة $E(n):2<u_{n+1}<$ u_n وذلك من أجل كل $n\in N$.

c. استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة, وأحسب نهايتها.

d. أرسم مقاربات C_f وأرسم المستقيم $\Delta: y=x$ ثم أرسم C_f ومثل الحدود الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ على الرسم نفسه.

الحل: 1- بعد دراسة التغيرات نصل إلى الجدول

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$				$+\infty$
			2		

2-

$$f(x)-y_d=\frac{2}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_d)=0$$

ومنه d مقارب مائل للخط C_f في جوار $+\infty$.

الوضع النسبي:

$$f(x)-y_d=\frac{2}{x}>0$$

ضمن المجال $]0,+\infty[$ ومنه C_f فوق d.

3-

$$f(x)=x\Rightarrow\frac{1}{2}x+\frac{2}{x}=x\Rightarrow$$

$$x^2-4=0\Rightarrow(x-2)(x+2)=0$$

إما $x=2\in]0,+\infty[$ مقبول

أو $x=-2\notin]0,+\infty[$ مرفوض

4- a.:

$$u_2=\frac{41}{20}\ ,\ u_1=\frac{5}{2}.$$

b.: عن طريق الإثبات بالتدريج.

c.: حسب الطلب b يكون

Ammar Kaddoury

$$u_{n+1} < u_n$$

فالمتتالية متناقصة ولدينا

$$2 < u_{n+1} < u_n$$

أي $2 < u_n$ بالتالي المتتالية محدودة من الأدنى.

نستنتج أن المتتالية متقاربة.

حساب نهايتها: المتتالية من الشكل

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

إذن

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

حيث l هو حل المعادلة $f(x) = x$ بشرط أن يكون التابع f مستمر عند l.

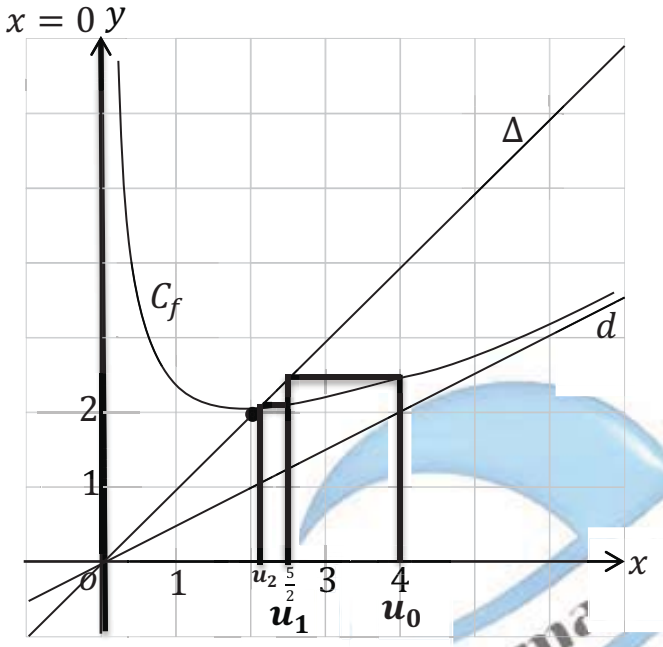
لدينا حل $f(x) = x$ هو $x = 2$ (بحسب الطلب -3) ومنه $l = 2$ والتابع f مستمر عند 2 إذن

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$$

d .: **الرسم:**

$y = \frac{1}{2}x$	
x	y
0	0
1	$\frac{1}{2}$

$y = x$	
x	y
0	0
1	1



المسألة(13) وزاري : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$$

1) أدرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها. واستنتج المقارب الموازي لمحور الفواصل وأدرس وضع C بالنسبة إليه.

2) أرسم كل مقارب وجدته, وارسم C.

3) بين أن للمعادلة $f(x) = 2$ حل وحيد α وأن هذا الحل ينتمي إلى المجال $[-2, -1]$ واستنتج أن α تحقق المعادلة

$$\alpha = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$$

4) أحسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين $x = 0$ و $x = 1$

.

5) استنتج مجموعة تعريف التابع

$x \longmapsto g(x) = ln\big(f(x)\big)$ ثم حل المعادلة $g(x) = -x$.

الحل: 1) بعد دراسة التغيرات نصل إلى

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{4}{e}$	↘	0

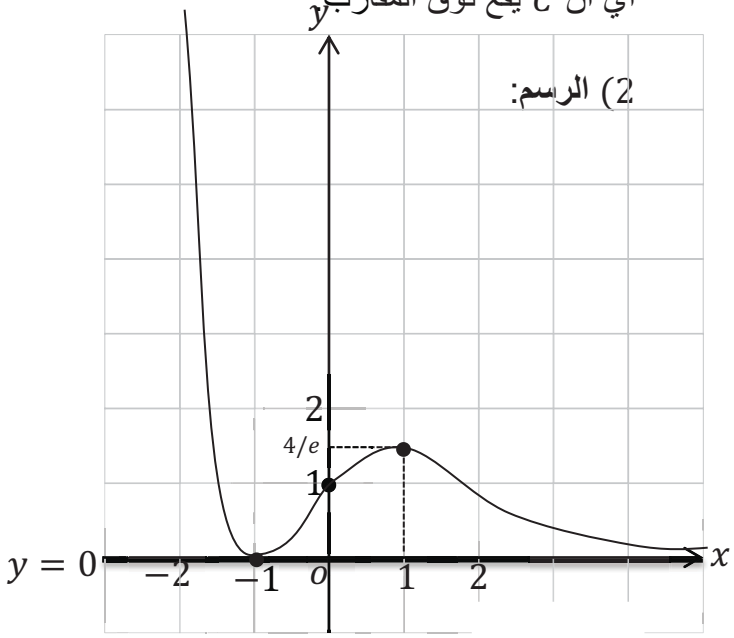
$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$.

الوضع النسبي:

$$f(x) - 0 = (x+1)^2 e^{-x} > 0$$

أي أن C يقع فوق المقارب

2) **الرسم:**



3) نستخدم مبرهنة القيمة الوسطى لإثبات أن للمعادلة $f(x) = 2$ حل وحيد وهو

$$\alpha \in]-\infty, -1[$$

إن $\alpha \in [-2, -1]$ لأن

$$f(-2) = e^2$$

$$f(-1) = 0$$

و $f(\alpha) = 2 \in [0, e^2] = f([-2, -1])$.

الاستنتاج:

$$f(\alpha) = 2 \Rightarrow (\alpha-1)^2 e^{-\alpha} = 2 \underset{\text{نضرب بـ } e^{\alpha}}{\Rightarrow}$$

$$(\alpha-1)^2 = 2e^{\alpha} \underset{\text{بالجذر}}{\Rightarrow} |\alpha - 1| = \sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$$

لكن $\alpha < -1$ عندئذٍ

$$|\alpha + 1| = -\alpha - 1$$

ومنه

$$-\alpha - 1 = \sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \alpha = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$$

4) نلاحظ حسب الرسم أن C فوق محور الفواصل وباستعمال التكامل بالتجزئة مرتين نصل إلى

$$S = 5 - \frac{6}{e}$$

5) حسب جدول التغيرات نجد $f(x) = 0$ عندما $x = -1$.

Ammar Kaddouri

$f(x) > 0$ عندما

$$x \in]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$$

المسألة(14) وزاري : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0, e[\cup]e, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{1}{x(1-ln\,x)}$$

1) أدرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها. واستنتج ما للخط C من مقاربات موازية للمحورين الإحداثيين. وعين قيمته الحدية مبيناً نوعها.

2) أرسم ما وجدته من مستقيمات مقاربة ثم أرسم C.

3) أحسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين $x = \frac{1}{e}$ و $x = \frac{1}{e^2}$.

الحل: 1) بعد دراسة التغيرات نصل إلى الجدول

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	‖ $+\infty$	↗	0
	‖				‖ $-\infty$		

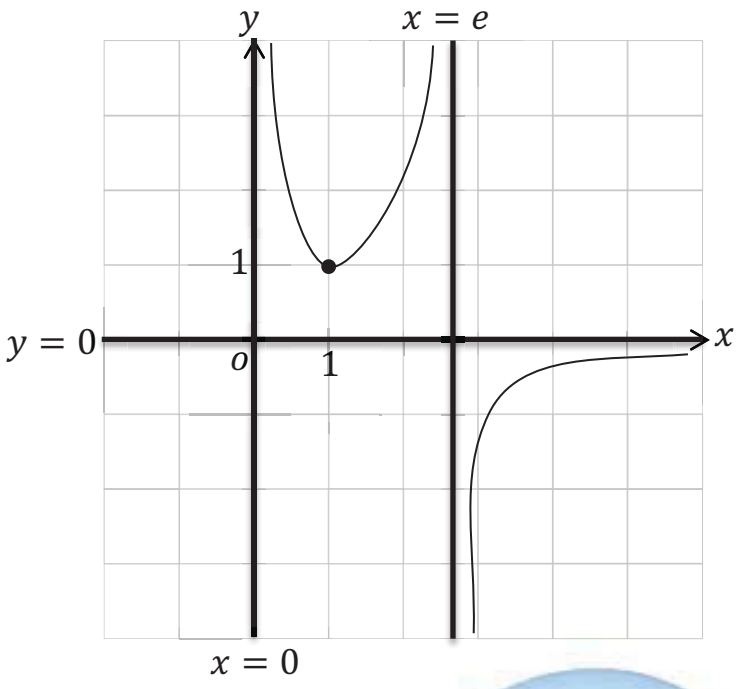
$f(1) = 1$ قيمة حدية صُغرى

$x = 0$ مقارب شاقولي للخط C.

$x = e$ مقارب شاقولي للخط C.

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$.

2) **الرسم:**



3)

$$S = \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} f(x)dx = -\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} \frac{-\frac{1}{x}}{1-ln\,x}dx$$

$$= -[ln|1-ln\,x|]_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} = ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

المسألة(15) وزاري :

أولاً: ليكن C_f الخط البياني للتابع g المعرف على $]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = x(ln\,x)^2$$

1) أثبت أن $f(x)$ يكتب بالشكل

$$f(x) = 4\left(\sqrt{x}\,ln\sqrt{x}\right)^2$$

2) أدرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

Ammar Kaddoury

ثانياً: ليكن C_g الخط البياني للتابع g المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$g(x) = -2x\ln x$$

أثبت أنه عندما $x > 0$ يكون

$$f(x) - g(x) = x.f'(x)$$

واستنتج الوضع النسبي للخطين C_f و C_g.

ثالثاً: ليكن x_0 من $]0,+\infty[$.

1) بين أن معادلة المماس T للمنحني C_f في النقطة التي فاصلتها x_0 هي

$$y = x.f'(x_0) + g(x_0)$$

2) أدرس تقاطع المماس T مع محور التراتيب, ثم استنتج طريقة لإنشاء المماس للمنحني C_g عند النقطة التي فاصلتها x_0.

الحل: أولاً: 1)

$$f(x) = x(\ln x)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2\left(2\ln\sqrt{x}\right)^2$$

$$= 4\left(\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right)^2$$

2) دراسة تغيرات التابع f: التابع f معرف على المجال $]0,+\infty[$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} 4\left(\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right)^2 =$$

$$4.0 = 0$$

f معرف واشتقاقي على $]0,+\infty[$.

$$f'(x) = (\ln x)^2 + 2x.\frac{1}{x}\ln x =$$

$$\ln x\,(\ln x + 2)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x\,(\ln x + 2) = 0$$

إما $\ln x = 0$ ومنه $x = 1$ ثم $f(1) = 0$.

أو $\ln x + 2 = 0$ ومنه $x = e^{-2}$ ثم $f(e^{-2}) = 4.e^{-2}$.

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$4e^{-2}$	↘	0	↗	$+\infty$

ثانياً: نلاحظ أن

$$f(x) - g(x) = x(\ln x)^2 + 2x\ln x =$$

$$x\ln x\,(\ln x + 2) = x.f'(x)$$

ومنه آياً $x > 0$ فإن

$$f(x) - g(x) = x.f'(x)$$

الوضع النسبي:

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$f(x) - g(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	‖	C_f فوق C_g		C_f تحت C_g		C_f فوق C_g	

ثالثاً: 1) لدينا

$$f(x) = x(\ln x)^2$$

عندئذٍ

Ammar Kaddoury

$$f(x_0) = x_0(ln\, x_0)^2$$

ووجدنا $f'(x) = ln\, x\, (ln\, x + 2)$ عندئذٍ

$$m = f'(x_0) = ln\, x_0\, (ln\, x_0 + 2)$$

نعوض في معادلة المماس:

$$T: y = m(x - x_0) + f(x_0)$$

$$T: y = ln\, x_0\, (ln\, x_0 + 2)(x - x_0) +$$

$$x_0(ln\, x_0)^2$$

$$= ln\, x_0\, (ln\, x_0 + 2).x - ln\, x_0\, (ln\, x_0 + 2)x_0$$

$$+x_0(ln\, x_0)^2$$

$$= ln\, x_0\, (ln\, x_0 + 2).x - x_0(ln\, x_0)^2 -$$

$$2x_0\, ln\, x_0 + x_0(\ln x_0)^2$$

$$= \underbrace{ln\, x_0\, (ln\, x_0 + 2)}_{f'(x_0)}.x \underbrace{-2x_0\, ln\, x_0}_{g(x_0)}$$

$$= f'(x_0).x + g(x_0) \Rightarrow$$

$$T: y = f'(x_0).x + g(x_0)$$

2) لإيجاد نقطة تقاطع المماس مع محور التراتيب

نعوض في المعادلة $x = 0$ عندئذٍ

$$y = g(x_0)$$

الاستنتاج: يقطع $y'y$ لما $x = 0$ أي $g(x_0) =$ 0.

الإنشاء: المماس مستقيم يمر من النقطتين $(x_0, f(x_0))$ والنقطة $(0, g(x_0))$.

Ammar Kaddouri