هذا الملف

هو نتاج عمل دام عامين او اكثر يحتوي على

١-خلاصات لكافة أفكار وحدات المنهاج
٢- حل النماذج الوزارية و أسئلة الدورات بطريقة مبوبة حسب وحدات المنهاج منذ ٢٠١٧- حتى ٢٠٢١

مجاني وغير تجاري بالمطلق و يمنع استخدامه بأسلوب مادي
مقدم بالكامل لطلابنا الأعزاء ليكون لهم معينا و رافدا للكتاب المدرسي

والله الموفق
المدرس : عمار قدوري

الرياضيات

الجزء الثاني

دورات و نماذج وزارية محلولة

المدرس : عمـــار قدوري

((الاشعة في الفراغ))

١- نقول عن الاشعة $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ انها **مرتبطة خطياً** اذا استطعنا كتابة العبارة :

$$\vec{u} = \propto \vec{v} + \beta\,\vec{w}$$

$$\{(\alpha,\beta) \neq (0,0)\ \&\ \vec{v} \neq \lambda\vec{w}\}$$

((يفيد الارتباط الخطي لثلاث اشعة)) في

*-اثبات وقوع نقاط في مستو واحد

*- وقوع اشعة في مستو واحد

*- توازي مستقيم يمثله شعاع مع مستو مفروض

٢- في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ يكون :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

٣- $AB = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$

٤- $P = \left(\frac{x_B+x_A}{2},\frac{y_B+y_A}{2},\frac{z_B+z_A}{2}\right)$

٥- نسمي G **مركز ابعاد متناسبة في** الفراغ للنقاط (A,α)و(B,β)و$(C,\gamma)(D,\delta)$ اذا:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta \neq 0$$

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}+\delta\overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

يفيد مركز الابعاد المتناسبة في :

*- اثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة : يجب ان نثبت ان احداها مركز ابعاد متناسبة للنقطتين الباقيتين.

*- اثبات وقوع اربع نقاط في مستو واحد : يجب ان نثبت ان احداها مركز ابعاد متناسبة لباقي النقاط .

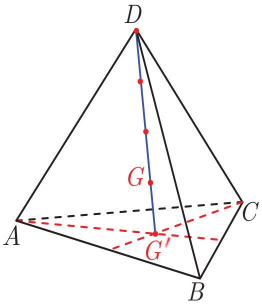
*- اثبات تقاطع مستقيمات في نقطة يجب ان نثبت ان المستقيمات جميعا تشترك بنقطة واحدة هي مركز الابعاد المتناسبة .

مركز ثقل رباعي الوجوه :

ليكن $ABCD$ **رباعي وجوه، وليكن** G **مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط** $A,1$ **و** $B,1$ **و** $C,1$ **و** $D,1$

تُسمّى النقطة G **مركز ثقل رباعي الوجوه** $ABCD$.

$$\overrightarrow{G'G} = \frac{1}{4}\overrightarrow{G'D}$$



٦- في معلم متجانس لدينا :

$$G\begin{pmatrix} x_G = \dfrac{\alpha.x_A+\beta.x_B+\gamma.x_C+\delta.x_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} \\ y_G = \dfrac{\alpha.y_A+\beta.y_B+\gamma.y_C+\delta.y_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} \\ z_G = \dfrac{\alpha.z_A+\beta.z_B+\gamma.z_C+\delta.z_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} \end{pmatrix}$$

٧- معادلة **الكرة** مركزها M_0 نصف قطرها R

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2$$

معادلة الأسطوانة		
محورها $(O,\vec{i})$	محورها $(O,\vec{j})$	محورها $(O,\vec{k})$
$y^2+z^2=r^2$	$x^2+z^2=r^2$	$x^2+y^2=r^2$
$x_1 \le x \le x_2$	$y_1 \le y \le y_2$	$z_1 \le z \le z_2$
x_1,x_2 فاصلتي مركزي القاعدتين	y_1,y_2 ترتيبي مركزي القاعدتين	y_1,y_2 راقمي مركزي القاعدتين

معادلة المخروط رأسه O		
محوره $(O,\vec{i})$	محوره $(O,\vec{j})$	محوره $(O,\vec{k})$
$y^2+z^2-\frac{r^2}{h^2}x^2=0$	$x^2+z^2-\frac{r^2}{h^2}y^2=0$	$y^2+x^2-\frac{r^2}{h^2}z^2=0$
$0 \le x \le x_1$	$0 \le y \le y_1$	$0 \le z \le z_1$
r نصف قطر قاعدة المخروط h الارتفاع x_1 فاصلة قاعدة المخروط	r نصف قطر قاعدة المخروط h الارتفاع y_1 ترتيب قاعدة المخروط	r نصف قطر قاعدة المخروط h الارتفاع z_1 راقم قاعدة المخروط

تحديد مجموعة نقاط في الفراغ	
$\lVert\overrightarrow{MA}\rVert = r$	كرة مركزها A نصف قطرها r
$\lVert\overrightarrow{MA}\rVert = \lVert\overrightarrow{AB}\rVert$	كرة مركزها A نصف قطرها AB
$\lVert\overrightarrow{MA}\rVert = \lVert\overrightarrow{MB}\rVert$	المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

الجداء السلمي في الفراغ :

$\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2)$
$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos\theta$
$\vec{u}.\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{\acute{C}\acute{D}}$

يكون الشعاعان $\vec{u},\vec{v}$ متعامدان إذا وفقط إذا كان الجداء السلمي لهما معدوم

معادلة المستوى :

يمر من نقطة معلومة $A(x_0,y_0,z_0)$ ويقبل شعاع ناظم $\vec{n}(a,b,c)$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$ax+by+cz+d=0$$

❖ الوضع النسبي لمستويين :

المستويان إما :

★ متوازيان ★ منطبقان ★ متقاطعان في فصل مشترك

إذا كان شعاعي الناظم للمستويين مرتبطين خطياً عندها يكون المستويان متوازيان أو منطبقان .

إذا أعطيت المعادلة العامة للمستويين :

$$\mathcal{P}_1:\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$

$$\mathcal{P}_2:\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

إذا كان : $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2}$ كان المستويان متوازيين .

إذا كان : $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}$ كان المستويان منطبقين .

إذا كان : $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ (أي نسبتين منها) كان المستويان متقاطعين في فصل مشترك يمكن إيجاده كما مر معنا سابقاً صفحة

إذا كان $\vec{n}_{p_1}.\vec{n}_{p_2}=0$ كان المستويان متعامدان

الوضع النسبي لثلاثة مستويات :

المستويات الثلاثة هي إما :

★ تتقاطع بنقطة واحدة ★ لها فصل مشترك واحد ★ متوازية

لدراسة الوضع النسبي لها : نحل جملة المعادلات الثلاث للمستويات حلاً مشتركاً وهي :

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1 & L_1\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 & L_2\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 & L_3\end{cases}$$

❖ بُعد نقطة عن مستوى :

يُعطى بعد النقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ عن المستوي $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P}:ax+by+cz+d=0$$

بالعلاقة :

$$Dis(A,\mathcal{P})=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

❖ المستقيم:

بفرض $\vec{u}(a,b,c)$ شعاع توجيه المستقيم المار من النقطة $A(x_A,y_A,z_A) \Leftarrow$

$$\overrightarrow{AM}=t\vec{u}\Rightarrow(x-x_A,y-y_A,z-z_A)=t(a,b,c)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=at+x_A\\ y=bt+y_A\\ z=ct+z_A\end{cases}$$

ندعو الجملة السابقة بالتمثيل الوسيطي للمستقيم d.

ملاحظة 1 : إذا كان $t\in[0,1]$ فإن جملة المعادلات السابقة تُمثل قطعة مستقيمة.

ملاحظة 2 : إذا كان $t\in[0,+\infty[$ فإن جملة المعادلات السابقة تُمثل نصف مستقيم .

المستقيمان في الفراغ إما : ★ متوازيين (منطبقين) ★ متقاطعين ★ متخالفين

متى يكون المستقيمان متقاطعان ؟ إذا كان :

★ شعاعي توجيهها غير مرتبطين خطياً ★ يقعان في مستوٍ واحد .

متى يكون المستقيمان متخالفان ؟ إذا كان :

★ شعاعي توجيهها غير مرتبطين خطياً ★ لا يقعان في مستوٍ واحد .

الارتباط الخطي لشعاعين	$\vec{u} = \alpha\,\vec{v}$	
	١- اثبات توازي مستقيمين او تعامد مستقيم مع مستوي معلوم	
	٢- اثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة	
الارتباط الخطي لثلاث اشعة	$\vec{u} = \alpha\,\vec{v} + \beta\,\vec{w}$	
	١- اثبات وقوع اشعة في مستو واحد	
	٢- اثبات وقوع اربع نقاط في مستو واحد	
	٣- اثبات توازي مستقيم و مستوي	
	٤- اثبات تقاطع مستقيمين في الفراغ	
معادلة مستوي	$ax + by + cz + d = 0$	
	١- المستوي المار من نقطة معلومة و يقبل شعاعا ناظما عليه	
	٢- المستوي المار من نقطة معلومة ويوازي مستويا معلوما	
	٣- المستوي المحوري لقطعة مستقيمة	
	٤- المستوي المار من نقطتين معلومتين و يعامد مستويا معلوما	
	٥- المستوي المار من ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة	
بعد نقطة عن مستو	$Dist(A.P) = \dfrac{\lvert ax_A + by_A + cz_A + d \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$	
الأوضاع المختلفة لمستويين	١- الناظمين متوازيين فالمستويين متوازيين	
	٢- الناظمين غير متوازيين فالمستويين متقاطعين بفصل مشترك	
	٣- الناظمين متعامدين فالمستويين متعامدين	
الأوضاع المختلفة لثلاث مستويات	نحل جملة معادلتين ونستخرج مجهولين بدلالة مجهول ثالث ثم نعوض في المعادلة الثالثة	
	١- للمجهول قيمة ثابتة فالمستويات تشترك بنقطة وحيدة	
	٢- عدد =عدد نفسه للجملة فصل مشترك	
	٣- عدد = عدد غيره الجملة مستحيلة الحل	
مركز الابعاد المتناسبة	$\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} + \gamma\,\overrightarrow{GC} + \delta\,\overrightarrow{GD} = 0$	
	١- اثبات وقوع نقاط على استقامة واحدة	
	٢- اثبات وقوع نقاط في مستو واحد	
	٣- اثبات توازي مستقيمين	
	٤- اثبات تقاطع مستقيمين	
مجموعة نقاط	$\lVert\overrightarrow{MG}\rVert = \propto$	كرة مركزها G ونصف قطرها $\propto$
	$\lVert\overrightarrow{MG}\rVert = \lVert\overrightarrow{MA}\rVert$	المستوي المحوري للقطعة $[GA]$
المعادلات الوسيطية لمستقيم	$\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases}$	
الأوضاع المختلفة لمستقيمين	١- شعاعي التوجيه متوازيين فالمستقيمين متوازيين	
	٢- شعاعي التوجيه غير متوازيين و يوجد حل مشترك فالمستقيمين متقاطعين	
	٣- شعاعي التوجيه غير متوازيين و لايوجد حل مشترك فالمستقيمين متخالفين	
الأوضاع المختلفة لمستقيم و مستوي	١- $\vec{n}.\vec{v} = 0$	المستقيم يوازي المستوي
	٢- المركبات متناسبة $\vec{n} \parallel \vec{v}$	المستقيم عمود على المستوي
	٣- $\vec{n}.\vec{v} \neq 0$ والمركبات غير متناسبة	المستقيم قاطع للمستوي
معادلة الكرة	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$	
معادلة أسطوانة محورها $(O.\vec{k})$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ Z_1 \leq Z \leq Z_2 \end{cases}$	
معادلة مخروط محوره $(O.\vec{k})$	$\begin{cases} x^2 + y^2 - \dfrac{r^2}{h^2} z^2 = O \\ 0 \leq Z \leq h \end{cases}$	

السؤال الثاني

a) اكتب معادلة الكرة S التي مركزها O مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها $R=\sqrt{3}$

b) تحقق أن المستوي P الذي معادلته $P: x-y+z+3=0$ يمس الكرة S

الحـــــــل :

■ الكرة S التي مركزها O مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها $R=\sqrt{3}$ هي مجموعة نقاط الفراغ التي تبعد عن O مسافة تساوي $\sqrt{3}$ النقطة $M(x,y,z)$ تنتمي إلى الكرة S يكافئ $OM=\sqrt{3}$ أو $x^2+y^2+z^2=3$ وهذا يعني أن معادلة الكرة هي :

$$x^2+y^2+z^2=3$$

■ يكون المستوي Q مستو مماس للكرة S إذا كان بعده عن مركزها يساوي طول نصف قطرها

$$d(O,P)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Rightarrow d(O,P)=\frac{|1(0)-1(0)+1(0)+3|}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}=R$$

وبالتالي المستوي Q مستو مماس للكرة S

المسألة الأولى :

في الشكل المجاور ABCDEFGH مكعب طول حرفه 2

نتأمل المعلم المتجانس $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، $\overrightarrow{AE}=2\vec{k}$, $\overrightarrow{AD}=2\vec{j}$, $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}$

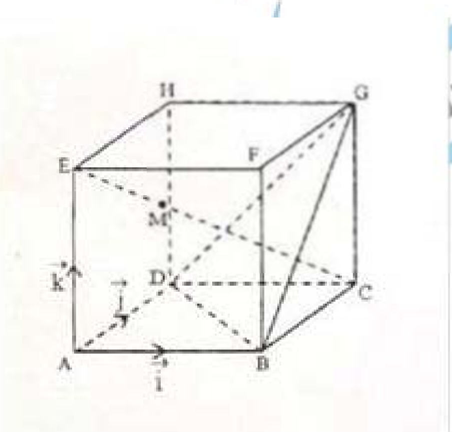
1) اكتب معادلة للمستوي (GBD)

2) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EC)

3) جد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم (EC) مع المستوي (GBD)

4) جد إحداثيات النقطة M التي تحقق $\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$

5) أثبت تعامد المستقيمين $(EC),(HM)$



الحـــــــل :

$A(0,0,0)$ $B(2,0,0)$ $C(2,2,0)$ $D(0,2,0)$ $E(0,0,2)$ $F(2,0,2)$ $G(2,2,2)$ $H(0,2,2)$

$\overrightarrow{GB}=(0,-2,-2)$, $\overrightarrow{GD}=(-2,0,-2)$

1) ليكن $\vec{n}(a,b,c)$ شعاع ناظم على المستوي (GBD) فيكون :

$$\vec{n}.\overrightarrow{GB}=0 \Rightarrow (a,b,c).(0,-2,-2)=0 \Rightarrow -2b-2c=0 \quad (1)$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{GD}=0 \Rightarrow (a,b,c).(-2,0,-2)=0 \Rightarrow -2a-2c=0 \quad (2)$$

نفرض $c=1$ ونعوض في المعادلتين السابقتين نجد :

$$-2b-2=0 \Rightarrow -2b=2 \Rightarrow b=-1 \quad , \quad -2a-2=0 \Rightarrow -2a=2 \Rightarrow a=-1$$

وبالتالي يكون : $\vec{n}(-1,-1,1)$ ومعادلة المستوي : $-x-y+z+d=0$

ولكن المستوي يمر من النقطة $B(2,0,0)$ بالتعويض نجد : $-2+0+0+d=0 \Rightarrow d=2$

وبالتالي معادلة المستوي هي : $-x-y+z+2=0 \Rightarrow x+y-z-2=0$

2) التمثيل الوسيطي للمستقيم (EC) :

شعاع توجيه المستقيم (EC) هو : $\vec{u}=\overrightarrow{EC}=\vec{u}(2,2,-2)$ والنقطة $E(0,0,2)$ وتكون المعادلات الوسيطية للمستقيم هي :

$$(EC):\begin{cases} x=2t \\ y=2t \qquad :t\in\mathbb{R} \\ z=-2t+2 \end{cases}$$

3) تقاطع المستقيم (EC) مع المستوي (GBD) نعوض معادلات المستقيم في معادلة المستوي نجد :

$$2t+2t+2t-2-2=0 \Rightarrow 6t-4=0 \Rightarrow 6t=4 \Rightarrow t=\frac{4}{6} \Rightarrow \boxed{t=\frac{2}{3}}$$

نقطة التقاطع : $\boxed{N(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3})}$

4) إيجاد $M(x,y,z)$ التي تحقق $\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$

$$(x,y,z-2)=\frac{1}{3}(2,2,-2) \Rightarrow (x,y,z-2)=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}) \Rightarrow (x,y,z)=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}+2) \Rightarrow$$
$$(x,y,z)=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3})$$

(تعامد (HM) مع (EC)

شعاع توجيه (HM) هو $\vec{u}(\frac{2}{3},-\frac{4}{3},-\frac{2}{3})$ و شعاع توجيه (EC) هو $\vec{v}(2,2,-2)$

$$\vec{u}.\vec{v}=(\frac{2}{3},-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}).(2,2,-2)=\frac{4}{3}-\frac{8}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}-\frac{8}{3} \Rightarrow \vec{u}.\vec{v}=0 \Rightarrow (HM)\perp(EC)$$

الدورة الثانية ٢٠١٧

السؤال الثاني : اكتب شعاعي التوجيه للمستقيمين d, d' :

$$d:\begin{cases} x=t+1 \\ y=-3t+2 \quad :t\in\mathbb{R} \\ z=-3t+3 \end{cases} \qquad d':\begin{cases} x=s \\ y=-3s-3 \quad :s\in\mathbb{R} \\ z=-s+1 \end{cases}$$

الحـــــل :

شعاع توجيه المستقيم d هو $\overrightarrow{u_d}=(1,-3,-3)$

شعاع توجيه المستقيم d' هو $\overrightarrow{u_{d'}}=(1,-3,-1)$

نلاحظ أن مركبات الشعاعين ليست متناسبة وبالتالي إما أن يكون المستقيمان d, d' متقاطعين أو يكونا متخالفين (غير واقعين في مستو واحد)

$$\begin{cases} t+1=s & (1)\\ -3t+2=-3s-3 & (2)\\ -3t+3=-s+1 & (3)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t-s=-1 & (1)\\ -3t+3s=-5 & (2)\\ -3t+s=-2 & (3)\end{cases}$$

ولكن المعادلتين (1) و (2) متناقضتان . وليس لهذه الجملة حلول . إذاً لا يقع المستقيمان d, d' في مستو واحد

السـؤال الرابع :

نتأمل ، في المعلم المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتين $A(2,0,1), B(1,-2,1)$ والمطلوب اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

الحـــــــــــــــــل :

لتكن N منتصف $[AB]$ فيكون : $N(\frac{1+2}{2},\frac{-2+0}{2},\frac{1+1}{2}) = N(\frac{3}{2},\frac{-2}{2},\frac{2}{2}) \Rightarrow \boxed{N(\frac{3}{2},-1,1)}$

ويكون $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظم على المستوي المحوري حيث : $\overrightarrow{AB}(1-2,-2-0,1-1) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(-1,-2,0)$

بفرض $M(x,y,z)$ نقطة اختيارية من المستوي المطلوب فيكون $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{MN}$ وتكون معادلة المستوي من العلاقة $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MN}=0$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MN}=0 \Rightarrow (-1,-2,0).(x-\frac{3}{2},y+1,z-1)=0 \Rightarrow -1(x-\frac{3}{2})-2(y+1)-0(z-1)=0 \Rightarrow$$

$$-x-2y+\frac{3}{2}-2=0 \Rightarrow -x-2y-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow x+2y+\frac{1}{2}=0$$

طريقة ثانية :

لتكن N منتصف $[AB]$ فيكون : $N(\frac{1+2}{2},\frac{-2+0}{2},\frac{1+1}{2}) = N(\frac{3}{2},\frac{-2}{2},\frac{2}{2}) \Rightarrow \boxed{N(\frac{3}{2},-1,1)}$

ويكون $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظم على المستوي المحوري حيث : $\overrightarrow{AB}(1-2,-2-0,1-1) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(-1,-2,0)$

وتكون معادلة المستوي المطلوب : $P: -x-2y+d=0$

$$N(\frac{3}{2},-1,1) \in P \Rightarrow -(\frac{3}{2})-2(-1)+d=0 \Rightarrow -\frac{3}{2}+2+d=0 \Rightarrow d=-\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$P: -x-2y-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow P: x+2y+\frac{1}{2}=0$$

التمرين الثاني : $ABCD$ رباعي وجوه و a عدد حقيقي . I, J هما بالترتيب ، منتصفا $[AB],[CD]$

و E, F نقطتان تحققان العلاقتين : $\overrightarrow{AE}=a\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BF}=a\overrightarrow{BC}$

و أخيراً H منتصف $[EF]$ ، أثبت أن I, J, H تقع على استقامة واحدة .

الحـــــل :

لإثبات أن النقاط I, J, H على استقامة واحدة ، يكفي أن نثبت أن H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين I, J و قد أسند لها ثقلين مناسبين .

من الفرض لدينا $\overrightarrow{AE}=a(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}) \Leftarrow \overrightarrow{AE}=a\overrightarrow{AD}$ و ينتج $(1-a)\overrightarrow{AE}-a\overrightarrow{ED}=\vec{0}$

و منه $(1-a)\overrightarrow{EA}+a\overrightarrow{ED}=\vec{0}$ إذن E مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-a),(D,a)$

و من الفرض لدينا $\overrightarrow{BF}=a(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FC}) \Leftarrow \overrightarrow{BF}=a\overrightarrow{BC}$ و ينتج $(1-a)\overrightarrow{BF}-a\overrightarrow{FC}=0$

و منه $(1-a)\overrightarrow{FB}+a\overrightarrow{FC}=\vec{0}$ إذن F مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,a),(B,1-a)$

و لما كان H منتصف $[EF]$ كان H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(F,1),(E,1)$

و حسب الخاصة التجميعية تكون H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1-a),(B,1-a),(C,a),(D,a)$

و لما كان I منتصف $[AB]$ كان I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-a),(B,1-a)$

و لما كان J منتصف $[CD]$ كان J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,a),(D,a)$

و حسب الخاصة التجميعية تكون H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1-a),(B,1-a),(C,a),(D,a)$ هي نفسها مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,2-2a),(J,2a)$ فالنقاط H,J,I تقع على استقامة واحدة و هو المطلوب .

الدورة الأولى ٢٠١٨

السؤال الثاني :

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقطة $A(1,-2,0)$ والمستوي $P: x+2y+z-1=0$

احسب بعد النقطة A عن المستوي P ثم اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P

الحــــــــــــــــــل :

$$d(A,P)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Rightarrow d(A,P)=\frac{|1(1)+2(-2)+1(0)-1|}{\sqrt{(1)^2+(-2)^2+(1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{6}}$$

■ بما أن المستوي P يمس الكرة فإن بعد مركزها عنه هو نصف قطرها أي $R=d(A,P)=\frac{4}{\sqrt{6}}$

ومعادلة الكرة من الشكل :

$$S:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

$$R=\frac{4}{\sqrt{6}} \quad , \quad A(x_0,y_0,z_0)=A(1,-2,0)\Rightarrow$$

$$S:(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=\frac{16}{6}$$

المسألة الثانية : في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط $A(1,1,0)$، $B(1,2,1)$، $C(4,0,0)$ والمطلوب :

١) أثبت أن النقاط A،B،C ليست على استقامة واحدة

٢) أثبت أن المستوي (ABC) تعطى بالعلاقة $(ABC): x+3y-3z-4=0$

٣) ليكن المستويان P،Q معادلتهما :

$P: x+2y-z-4=0$ ، $Q: 2x+3y-2z-5=0$ أثبت أن المستويين P،Q

يتقاطعان في الفصل المشترك d الذي تمثيله الوسيطي $t\in\mathbb{R}$

$$d:\begin{cases} x=t-2 \\ y=3 \\ z=t \end{cases}$$

٤) ما هي نقطة تقاطع المستويات P،Q،(ABC)

٥) احسب بعد النقطة A عن المستقيم d

الحـــــــــــــــل :

لدينا
$$\overrightarrow{AB}(1-1,2-1,1-0) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(0,1,1)$$
$$\overrightarrow{AC}(4-1,0-1,0-0) \Rightarrow \overrightarrow{AC}(3,-1,0)$$

الشعاعان $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطياً لأن المركبات غير متناسبة $(\frac{0}{3} \neq \frac{1}{-1})$ فالنقاط A,B,C ليست على استقامة واحدة

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم على المستوي (ABC) فيكون :

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow (a,b,c).(0,1,1) = 0 \Rightarrow b+c=0 \qquad (1)$$
$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow (a,b,c).(3,-1,0) = 0 \Rightarrow 3a-b=0 \qquad (2)$$

نفرض $\boxed{a=1}$ نعوض في (2) نجد : $3-b=0 \Rightarrow \boxed{b=3}$

نعوض في (1) نجد : $\boxed{c=-3}$ $3+c=0 \Rightarrow$ وبالتالي نجد : $\vec{n}(1,3,-3)$ والنقطة $A(1,1,0)$ من المستوي (ABC)

ومعادلة المستوي من الشكل : $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ بالتعويض نجد :

$$(x-1)+3(y-1)-3(z-0)=0 \Rightarrow x-1+3y-3-3z=0 \Rightarrow x+3y-3z-4=0$$

$\vec{n}_p = (1,2,-1)$, $\vec{n}_Q = (2,3,-2)$ الشعاعان $\vec{n}_Q,\vec{n}_P$ غير مرتبطين خطياً لأن المركبات غير متناسبة $(\frac{1}{2} \neq \frac{2}{3})$ فالمستويان

P,Q متقاطعان ، نحل المعادلتين حل مشترك

$$P: x+2y-z-4=0 \quad (1) \Rightarrow 2x+4y-2z-8=0 \quad (1)'$$
$$Q: 2x+3y-2z-5=0 \quad (2) \Rightarrow 2x+3y-2z-5=0 \quad (2)'$$

بالطرح نجد : $y-3=0 \Rightarrow y=3$ نعوض في (1) نجد : $x+6-z-4=0 \Rightarrow x=z-2$ نضع $z=t$

وبالتالي نجد المعادلات الوسيطية للفصل المشترك هي : $t \in \mathbb{R}$
$$d: \begin{cases} x = t-2 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} P: x+2y-z-4=0 & (L_1) \\ Q: 2x+3y-2z-5=0 & (L_2) \\ (ABC): x+3y-3z-4=0 & (L_3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-z-4=0 & (L_1)\ (L_1)' \\ -y=-3 & (-2L_1+L_2)\ (L_2)' \\ y-2z=0 & (-L_1+L_3)\ (L_3)' \end{cases}$$

من $(L_2)'$ نجد : $\boxed{y=3}$ نعوض في $(L_3)'$ نجد $3-2z=0 \Rightarrow 2z=3 \Rightarrow \boxed{z=\frac{3}{2}}$

نعوض في $(L_1)'$ نجد $x+6-\frac{3}{2}-4=0 \Rightarrow \boxed{x=-\frac{1}{2}}$ وبالتالي نقطة تقاطع المستويات هي $I(-\frac{1}{2},3,\frac{3}{2})$

❁ بعد النقطة A عن المستقيم d هو بعد النقطة A عن A' المسقط القائم للنقطة A على d

نفرض $A'(a',b',c')$ ويكون $\overrightarrow{AA'}(a'-1,b'-1,c')$ وتكون A' هي النقطة الوحيدة التي تحقق $\overrightarrow{AA'}.\vec{u}=0$

٦

حيث $\vec{u}(1,0,1)$ هو شعاع توجيه المستقيم d

$$A'(a',b',c') \in P \Rightarrow a'+2b'-c'-4=0 \qquad \Rightarrow 2a'+4b'-2c'-8=0 \quad (1)$$
$$A'(a',b',c') \in Q \Rightarrow 2a'+3b'-2c'-5=0 \qquad \Rightarrow 2a'+3b'-2c'-5=0 \quad (2)$$
$$\overrightarrow{AA'}.\vec{u}=0 \Rightarrow (a'-1,b'-1,c').(1,0,1)=0 \Rightarrow a'-1+c'=0 \Rightarrow a'+c'-1=0 \quad (3)$$

بطرح (2) من (1) نجد : $b'-3=0 \Rightarrow \boxed{b'=3}$

نعوض في المعادلات الأساسية $b'=3$ نجد :

$$a'+6-c'-4=0 \Rightarrow a'-c'+2=0 \quad (1)'$$
$$2a'+9-2c'-5=0 \Rightarrow 2a'-2c'+4=0 \quad (2)'$$
$$a'-1+c'=0 \Rightarrow \quad a'+c'-1=0 \quad (3)'$$

بجمع $(1)'$ و $(3)'$ نجد : $2a'+1=0 \Rightarrow \boxed{a'=-\frac{1}{2}}$

نعوض في $(2)'$ نجد : $-1-2c'+4=0 \Rightarrow 2c'=3 \Rightarrow \boxed{c'=\frac{3}{2}}$ وبالتالي $A'(-\frac{1}{2},3,\frac{3}{2})$

$$dist(A,d)=AA'=\sqrt{(x_A-x_{A'})^2+(y_A-y_{A'})^2+(z_A-z_{A'})^2}=\sqrt{(1+\frac{1}{2})^2+(1-3)^2+(0-\frac{3}{2})^2}$$
$$dist(A,d)=\sqrt{(\frac{3}{2})^2+(-\frac{4}{2})^2+(-\frac{3}{2})^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{16}{4}+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{34}{4}} \Rightarrow \boxed{dist(A,d)=\frac{\sqrt{34}}{2}}$$

طريقة ثانية لإيجاد $dist(A,d)$:

لتكن $M \in d$ عندئذٍ $M(t-2,3,t)$:

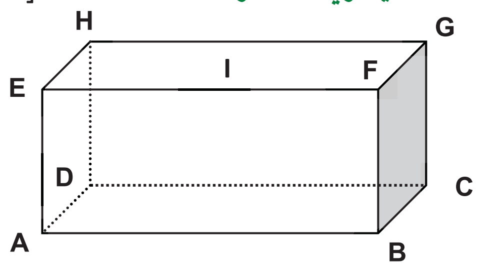
$$AM^2=(t-2-1)^2+(3-1)^2+(t-0)^2=(t-3)^2+(2)^2+(t)^2=t^2-6t+9+4+t^2=2t^2-6t+13$$
$$=2(t^2-3t+\frac{9}{4}-\frac{9}{4})+13=2(t-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{2}+13=2(t-\frac{3}{2})^2+\frac{17}{2}$$

تنطبق M على المسقط القائم للنقطة A على المستقيم d عندما $t=\frac{3}{2}$ ويكون البعد المطلوب $\sqrt{\frac{17}{2}}$

الدورة الثانية ٢٠١٨

السؤال الثاني :

ABCDEFGH متوازي سطوح فيه $AB=2$ ، $BC=GC=1$ و قياس الزاوية DAB يساوي 45° والنقطة I منتصف [EF]



و المطلوب :

a) احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

b) عين موضع النقطة M التي تحقق العلاقة $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{FB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$

الحـــل :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=2\times1\times\cos\frac{\pi}{4}=2\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

٧

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{FB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FI}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AI}$$

موضع M منطبق على I

المسألة الأولى :

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط $A(2,1,3)$ و $B(1,0,-1)$ و $C(4,0,0)$ و $D(0,4,0)$ و $E(1,-1,1)$ والمطلوب :

١) جد $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CE}$

٢) أثبت أن النقاط C و D و E ليست على استقامة واحدة

٣) أثبت أن (AB) يعامد المستوي (CDE)

٤) اكتب معادلة المستوي (CDE)

٥) احسب بعد B عن (CDE)

٦) اكتب معادلة الكرة التي مركزها B وتمس المستوي (CDE)

الحــــــــــــــــل :

$$\overrightarrow{AB}(1-2,0-1,-1-3)\Rightarrow\overrightarrow{AB}(-1,-1,-4)$$
$$\overrightarrow{CD}(0-4,4-0,0-0)\Rightarrow\overrightarrow{CD}(-4,4,0)$$
$$\overrightarrow{CE}(1-4,-1-0,1-0)\Rightarrow\overrightarrow{CE}(-3,-1,1)$$

لدينا

$$\overrightarrow{CD}(0-4,4-0,0-0)\Rightarrow\overrightarrow{CD}(-4,4,0)$$
$$\overrightarrow{CE}(1-4,-1-0,1-0)\Rightarrow\overrightarrow{CE}(-3,-1,1)$$

الشعاعان $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CE}$ غير مرتبطين خطياً لأن المركبات غير متناسبة $\left(\frac{4}{-1}\neq\frac{-4}{-3}\right)$ فالنقاط C و D و E ليست على استقامة واحدة

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=(-1,-1,-4).(-4,4,0)=4-4+0=0\Rightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CE}=(-1,-1,-4).(-3,-1,1)=3+1-4=0\Rightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CE}$$

بما أن $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CE}$ و $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$ فإن : $(AB)\perp(CDE)$

$(AB)\perp(CDE)$ فيكون $\overrightarrow{AB}$ ناظم على (CDE) والنقطة $C(4,0,0)$ من المستوي (CDE) ومعادلة المستوي من الشكل :

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ بالتعويض نجد :

$$-(x-4)-(y-0)-4(z-0)=0\Rightarrow x-4+y+4z=0\Rightarrow x+y+4z-4=0$$

$$d(B,(CDE))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\Rightarrow d(B,(CDE))=\frac{|1(1)+1(0)+4(-1)-4|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(4)^2}}=\frac{7}{\sqrt{18}}=\frac{7}{3\sqrt{2}}$$

معادلة الكرة من الشكل : $S:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ بالتعويض نجد :

$$R=d(B,(CDE))=\frac{7}{\sqrt{18}}\quad,\quad B(x_0,y_0,z_0)=B(1,0,-1)\Rightarrow$$
$$S:(x-1)^2+(y-0)^2+(z+1)^2=\frac{49}{18}$$

الدورة الأولى ٢٠١٩

السؤال الرابع :

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقطتين $A(1,0,1)$ ، $B(0,1,1)$

1) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من A ويقبل شعاع توجيه له $\vec{u}(2,2,1)$

2) أثبت أن المستقيمين (AB) و d متعامدان .

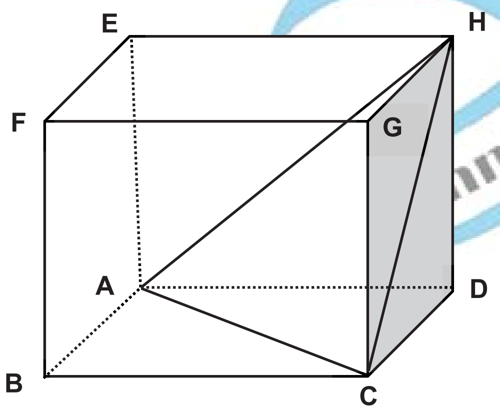
الحـــــــــــــــل :

$$d:\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} : t \in \mathbb{R} \Rightarrow d:\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 2t \\ z = t+1 \end{cases} : t \in \mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{AB}.\vec{u} = (0-1,1-0,1-1).(2,2,1) = (-1,1,0).(2,2,1) -2+2+0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\vec{u} = 0 \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB} \perp \vec{u} \Rightarrow (AB) \perp d$$

المسألة الأولى : نتأمل في معلم متجانس $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ ، المكعب ABCDEFGH والمطلوب :



1) اكتب في هذا المعلم إحداثيات كل من النقاط A ،C ،H ،F ،D

2) اكتب معادلة المستوي (ACH)

3) أثبت أن المستوي P الذي معادلته $P: -2x+2y-2z+1=0$ يوازي المستوي (ACH)

4) بفرض I مركز ثقل المثلث ACH أثبت أن F ،I ،D على استقامة واحدة

5) اكتب معادلة الكرة التي مركزها $\Omega(1,-1,1)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{3}$ وبين أن المستوي (ACH) يمس الكرة S

الحـــــــــــــــل :

$$A(0,0,0), C(1,1,0), H(0,1,1), F(1,0,1), D(0,1,0)$$

$$\overrightarrow{AC}(1-0,1-0,0-0) \Rightarrow \overrightarrow{AC}(1,1,0)$$

$$\overrightarrow{AH}(0-0,1-0,1-0) \Rightarrow \overrightarrow{AH}(0,1,1)$$

الشعاعان $\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AH}$ غير مرتبطين خطياً لأن المركبات غير متناسبة $(\frac{0}{1} \neq \frac{1}{1})$ فالنقاط A ،C ،H ليست على استقامة واحدة

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم على المستوي (ACH) فيكون :

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow (a,b,c).(1,1,0) = 0 \Rightarrow a+b=0 \quad (1)$$

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AH} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AH} = 0 \Rightarrow (a,b,c).(0,1,1) = 0 \Rightarrow b+c=0 \quad (2)$$

نفرض $\boxed{b=-1}$ نعوض في (1) نجد : $\boxed{a=1}$ $a-1=0 \Rightarrow$

٩

نعوض في (2) نجد : $\boxed{c=1}$ $\Leftarrow -1+c=0$ وبالتالي نجد : $\vec{n}(1,-1,1)$ والنقطة $A(0,0,0)$ من المستوي (ACH)

ومعادلة المستوي من الشكل : $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ بالتعويض نجد :

$$(x-0)-(y-0)+(z-0)=0 \Rightarrow x-y+z=0 \Rightarrow \boxed{(ACH): x-y+z=0}$$

لدينا : $\vec{n}(1,-1,1)$ و $\vec{n}_P(-2,2,-2)$ ونلاحظ أن $\vec{n}_P=-2\vec{n}$ فالناظمين مرتبطان خطياً ولدينا $\left(\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}=\frac{-1}{-2}\neq\frac{0}{1}\right)$

ومنه P يوازي (ACH)

■ بما أن I مركز ثقل المثلث ACH فإن I مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(A,1),(C,1),(H,1)$ وبالتالي :

$$I\left(\frac{\alpha x_A+\beta x_C+\gamma x_H}{\alpha+\beta+\gamma},\frac{\alpha y_A+\beta y_C+\gamma y_H}{\alpha+\beta+\gamma},\frac{\alpha z_A+\beta z_C+\gamma z_H}{\alpha+\beta+\gamma}\right) \Rightarrow$$

$$I\left(\frac{0+1+0}{3},\frac{0+1+1}{3},\frac{0+0+1}{3}\right) \Rightarrow I\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

$$\vec{FI}\left(\frac{1}{3}-1,\frac{2}{3}-0,\frac{1}{3}-1\right) \Rightarrow \vec{FI}\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

$$\vec{FD}(0-1,1-0,0-1) \Rightarrow \vec{FD}(-1,1,-1)$$

ومنه $\vec{FI}=\frac{2}{3}\vec{FD}$ أي أن الشعاعين $\vec{FI},\vec{FD}$ مرتبطان خطياً فالنقاط F، I، D على استقامة واحدة

■ معادلة الكرة :

$$S:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

$$R=\sqrt{3} \quad , \quad \Omega(x_0,y_0,z_0)=\Omega(1,-1,1) \Rightarrow$$

$$S:(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=3$$

■ يكون المستوي (ACH) مستو مماس للكرة S إذا كان بعده عن مركزها يساوي طول نصف قطرها

$$d(\Omega,(ACH))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Rightarrow d(\Omega,(ACH))=\frac{|1(1)-1(-1)+1(1)|}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}=R$$

وبالتالي المستوي (ACH) يمس الكرة S

الدورة الثانية ٢٠١٩

السؤال الرابع :

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقطتين $A(2,1,-2)$, $B(-1,2,1)$ والمستوي $P: 3x-y-3z-8=0$

1) أثبت أن المستقيم (AB) يعامد المستوي P

2) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) ثم عين إحداثيات النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على P .

الحـــــل :

$\vec{n}$ ناظم على المستوي P فيكون : $\vec{n}(3,-1,-3)$

$\vec{AB}$ شعاع موجه للمستقيم المار بالنقطتين A و B فيكون : $\vec{AB}(-3,1,3)$

نلاحظ أن $\vec{AB}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطياً لأن مركباتهما متناسبة $\frac{3}{-3}=\frac{-1}{1}=\frac{-3}{3}$

أي أن (AB) يعامد P فهو قاطع له في نقطة

١٠

المعادلات الوسيطية للمستقيم (AB) : $t \in \mathcal{R}$: $(AB): \begin{cases} x = -3t+2 \\ y = t+1 \\ z = 3t-2 \end{cases}$

بما أن المستقيم (AB) يعامد المستوي P فإن نقطة تقاطع المستقيم مع المستوي هي النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على P نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم في معادلة المستوي نجد :

$$3(-3t+2)-(t+1)-3(3t-2)-8=0 \Rightarrow -9t+6-t-1-9t+6-8=0 \Rightarrow -19t+3=0 \Rightarrow \boxed{t=\frac{3}{19}} \Rightarrow$$

$$x=-3\times\frac{3}{19}+2=\frac{-9}{19}+\frac{38}{19}=\frac{29}{19}, y=\frac{3}{19}+1=\frac{3}{19}+\frac{19}{19}=\frac{22}{19}, z=3\times\frac{3}{19}-2=\frac{9}{19}-\frac{38}{19}=-\frac{29}{19} \Rightarrow$$

$$\boxed{A'\left(\frac{29}{19},\frac{22}{19},-\frac{29}{19}\right)}$$

المسألة الأولى :

نتأمل معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطة $A(1,2,0)$ والمستويات

$P: 2x - y + 2z - 2 = 0$

$Q: x + y + z - 1 = 0$

$R: x - z - 1 = 0$

والمطلوب :

١) أثبت أن المستويين P و Q متقاطعان بفصل مشترك Δ ، اكتب تمثيلاً وسيطياً له

٢) تحقق أن المستوي R يعامد Δ ويمر بالنقطة A

٣) أثبت أن المستويات P و Q و R تتقاطع بنقطة I يطلب تعين إحداثياتها

٤) استنتج بعد A عن المستقيم Δ

الحـــــــــــل :

$\vec{n}_P=(2,-1,2)$ ، $\vec{n}_Q=(1,1,1)$ الشعاعان $\vec{n}_Q,\vec{n}_P$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة $(\frac{1}{2}\neq\frac{1}{-1})$ فالمستويان P و Q متقاطعان ، نحل المعادلتين حل مشترك

$P: 2x - y + 2z - 2 = 0 \quad (1)$

$Q: x + y + z - 1 = 0 \quad (2)$

بالجمع نجد : $3x+3z-3=0 \Rightarrow x=-z+1$ نعوض في (2) نجد : $-z+1+y+z-1=0 \Rightarrow y=0$ نضع $z=t$

وبالتالي نجد المعادلات الوسيطية للفصل المشترك هي : $t \in \mathcal{R}$ $\Delta: \begin{cases} x=-t+1 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$

شعاع توجيه Δ هو $\vec{u}_\Delta(-1,0,1)$ و ناظم R هو $\vec{n}_R=(1,0,-1)$

نلاحظ أن $\vec{n}_R=-\vec{u}_\Delta$ أي أن $\vec{n}_R, -\vec{u}_\Delta$ مرتبطان خطياً فالمستوي R يعامد Δ

نعوض إحداثيات النقطة $A(1,2,0)$ في معادلة المستوي R نجد : $1-0-1=0 \Rightarrow 0=0$ أي أن المعادلة محققة وبالتالي $A \in R$ أي أن المستوي R يعامد Δ ويمر بالنقطة A

١١ بما أن Q،P متقاطعان في الفصل المشترك Δ و المستوي R يعامد Δ وبالتالي المستويات P،Q،R تتقاطع بنقطة I هي نقطة تقاطع R مع Δ لذلك نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم Δ في معادلة R نجد :

$-t+1-t-1=0 \Rightarrow -2t=0 \Rightarrow t=0$ وبالتالي نجد نقطة التقاطع $I(1,0,0)$

بما أن المستوي R يمر من A و يعامد Δ فإن نقطة تقاطع R مع Δ هي المسقط القائم للنقطة A على Δ أي أن $I(1,0,0)$ هي المسقط القائم للنقطة A على Δ وبالتالي :

$$d(A,\Delta)=AI=\sqrt{(1-1)^2+(0-2)^2+(0-0)^2}=\sqrt{0+4+0}=\sqrt{4}=2$$

طريقة ثانية لحساب بعد النقطة A عن المستقيم Δ :

نفرض $A'(a,b,c)\in\Delta$: فيكون $A'(-t+1,0,t)$

$$AA'=\sqrt{(-t+1-1)^2+(0-2)^2+(t-0)^2}=\sqrt{(-t)^2+(-2)^2+(t)^2}=\sqrt{t^2+4+t^2}=\sqrt{2t^2+4}$$

AA' يكون أصغر ما يمكن عندما تكون A' المسقط القائم لـ A على Δ

وهذا يتحقق عندما تكون $t=0$ و منه : $dist(A,\Delta)=\sqrt{4}=2$

الدورة الأولى ٢٠٢٠

السؤال الثاني : نتأمل المستويين $P_1: 2x-y+z+1=0$, $P_2: x+y-z=0$ والمطلوب :

① تيقن أن المستويين متعامدان

② اكتب تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك

الحـــــــــــــــل :

① $\vec{n}_1=(2,-1,1)$, $\vec{n}_2=(1,1,-1)$

$$\vec{n}_1.\vec{n}_2=(2,-1,1).(1,1,-1)=2-1-1=2-2=0\Rightarrow \vec{n}_1\perp\vec{n}_2$$

فالمستويان P_1،P_2 متعامدان

② نحل المعادلتين حل مشترك

$$P_1: 2x-y+z+1=0 \quad (1)$$
$$P_2: x+y-z=0 \quad (2)$$

بالجمع نجد : $3x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{3}$ نعوض في المعادلة (2) نجد : $-\frac{1}{3}+y-z=0\Rightarrow y=z+\frac{1}{3}$ نضع $z=t$

وبالتالي نجد المعادلات الوسيطية للفصل المشترك هي : $t\in\mathbb{R}$:

$$d:\begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=t+\frac{1}{3} \\ z=t \end{cases}$$

التمرين الرابع : في معلم متجانس

$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقاط $A(1,0,0),B(4,3,-3),C(-1,1,2),D(0,0,1)$ والمطلوب :

التمرين الرابع : في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقاط $A(1,0,0),B(4,3,-3),C(-1,1,2),D(0,0,1)$ والمطلوب :

① أثبت أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً

② اثبت أن الأشعة : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً

③ استنتج أن النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ حيث أن α و β و γ أعداد حقيقية يُطلب تعينها

الحـــــــــــــــل :

$\overrightarrow{AB}(4-1,3-0,-3-0)\Rightarrow \overrightarrow{AB}(3,3,-3)$

$\overrightarrow{AC}(-1-1,1-0,2-0)\Rightarrow \overrightarrow{AC}(-2,1,2)$

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة $(\frac{3}{-2}\neq\frac{3}{1})$

تكون الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً إذا وجد عددان حقيقيان a,b يحققان العلاقة $\overrightarrow{AD}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AD}(0-1,0-0,1-0)\Rightarrow \overrightarrow{AD}(-1,0,1)$

$\overrightarrow{AD}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}\Rightarrow(-1,0,1)=a(3,3,-3)+b(-2,1,2)\Rightarrow$

$3a-2b=-1 \quad (1)$

$3a+b=0 \quad (2)$

$-3a+2b=1 \quad (3)$

من (2) نجد $b=-3a$ نعوض في (1) نجد : $3a-2(-3a)=-1\Rightarrow 3a+6a=-1\Rightarrow 9a=-1\Rightarrow \boxed{a=-\frac{1}{9}}$

نعوض في (2) نجد : $b=-3(-\frac{1}{9})\Rightarrow \boxed{b=\frac{1}{3}}$ نعوض في (3)

$L_1=-3(-\frac{1}{9})+2(\frac{1}{3})=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1=L_2$ نجدها محققة فالأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً

من العلاقة $\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ نجد أن D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}),(B,-\frac{1}{9}),(C,\frac{1}{3})$

وبالتالي نجد $\alpha=\frac{7}{9}$ و $\beta=-\frac{1}{9}$ و $\gamma=\frac{1}{3}$

<u>المسألة الأولى</u> : $(EABCD)$ هرم رباعي رأسه E قاعدته مربع طول ضلعه 3

$[AE]$ عمودي على المستوي $(ABCD)$ و $EA = 3$

نختار المعلم المتجانس $(A,\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\frac{1}{3}\overrightarrow{AD},\frac{1}{3}\overrightarrow{AE})$ والمطلوب :

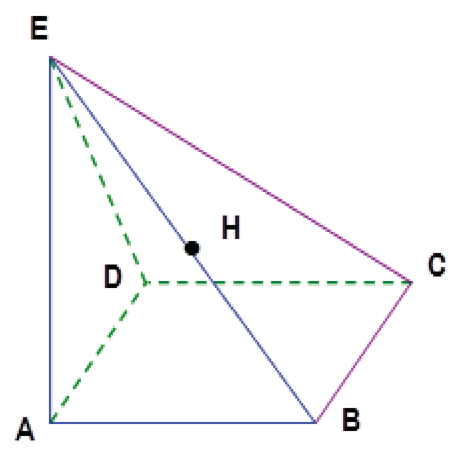
① عين إحداثيات A,B,C,D,E

② جد معادلة المستوي (EBC)

③ اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم المار من A ويعامد المستوي (EBC)

④ استنتج أن H منتصف $[EB]$ هي المسقط القائم لـ A على المستوي (EBC)

⑤ احسب حجم رباعي الوجوه $(AEBC)$



الحـــــــــــــــــــل :

① تعيين إحداثيات :

$A(0,0,0),B(3,0,0),C(3,3,0),D(0,3,0),E(0,0,3)$

② إيجاد معادلة المستوي :

$\overrightarrow{EB}(3-0,0-0,0-3) \Rightarrow \overrightarrow{EB}(3,0,-3)$

$\overrightarrow{EC}(3-0,3-0,0-3) \Rightarrow \overrightarrow{EC}(3,3,-3)$

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم على المستوي (EBC) فيكون :

$(1)\quad \vec{n} \perp \overrightarrow{EB} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{EB} = 0 \Rightarrow (a,b,c).(3,0,-3) = 0 \Rightarrow 3a - 3c = 0$

$(2)\quad \vec{n} \perp \overrightarrow{EC} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{EC} = 0 \Rightarrow (a,b,c).(3,3,-3) = 0 \Rightarrow 3a + 3b - 3c = 0$

نفرض $\boxed{a=1}$ نعوض في (1) نجد : $3-3c=0 \Rightarrow 3c = 3 \Rightarrow \boxed{c=1}$

نعوض في (2) نجد : $\boxed{b=0}$ $3+3b-3=0 \Rightarrow 3b=0 \Rightarrow$ وبالتالي نجد : $\vec{n}(1,0,1)$

والنقطة $B(3,0,0)$ من المستوي (EBC) ومعادلة المستوي من الشكل : $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

بالتعويض نجد : $(x-3)+(z-0)=0 \Rightarrow (EBC) : x+z-3=0$

③ كتابة التمثيل الوسيطي :

بما أن المستقيم d عمودي على المستوي (EBC) فإن $\vec{n}(1,0,1)$ شعاع ناظم على المستوي هو شعاع توجيه المستقيم d

■ $\vec{n}(1,0,1)$ شعاع موجه للمستقيم المار بالنقطة $A(0,0,0)$

فتكون المعادلات الوسيطية للمستقيم d : $d:\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} : t \in \mathbb{R}$

④ استنتاج أن H هي المسقط القائم لـ A :

بما أن H منتصف $[EB]$ فإن $H(\frac{3+0}{2},\frac{0+0}{2},\frac{0+3}{2}) \Rightarrow H(\frac{3}{2},0,\frac{3}{2})$

١٤ بما أن المستقيم d عمودي على المستوي (EBC) فإن نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (EBC) هي المسقط القائم لـ A على (EBC) ولإيجاد نقطة التقاطع نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم في معادلة المستوي نجد :

$$t + t - 3 = 0 \Rightarrow 2t = 3 \Rightarrow \boxed{t = \frac{2}{3}}$$

وبالتالي نقطة التقاطع هي $(\frac{3}{2},0,\frac{3}{2})$ أي أن $H(\frac{3}{2},0,\frac{3}{2})$ هي المسقط القائم لـ A على (EBC)

طريقة ثانية للاستنتاج :

تكون H هي المسقط القائم لـ A على (EBC) إذا كان $AH = dist(A,(EBC))$

$$AH = \sqrt{(\frac{3}{2}-0)^2 + (0-0)^2 + (\frac{3}{2}-0)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{18}{4}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$dist(A,(EBC)) = \frac{|a\mathcal{X}_0 + b\mathcal{Y}_0 + c\mathcal{Z}_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Rightarrow dist(A,(EBC)) = \frac{|(0)+(0)+(0)-3|}{\sqrt{(1)^2+(0)^2+(1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

مما سبق نجد أن H هي المسقط القائم لـ A على (EBC)

طريقة ثالثة للاستنتاج :

تكون H هي المسقط القائم لـ A على (EBC) إذا كان $(AH) \perp (EBC)$

$\overrightarrow{AH}(\frac{3}{2},0,\frac{3}{2})$ ولدينا $\vec{n}(1,0,1)$ شعاع ناظم على المستوي

نلاحظ أن $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{2}\vec{n}$ أي أن $\overrightarrow{AH}$ مرتبط مع الناظم $\vec{n}$ ومنه $(AH) \perp (EBC)$

وبالتالي H هي المسقط القائم لـ A على (EBC)

⑤ حساب حجم رباعي الوجوه (AEBC) :

$$V = \frac{1}{3}S_{(EBC)} \times h : h = dist(A,(EBC)) = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\overrightarrow{EB}(3-0,0-0,0-3) \Rightarrow \overrightarrow{EB}(3,0,-3) \Rightarrow EB = \sqrt{9+0+9} = 3\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{EC}(3-0,3-0,0-3) \Rightarrow \overrightarrow{EC}(3,3,-3) \Rightarrow EC = \sqrt{9+9+9} = 3\sqrt{3}$$

$$BC = 3$$

نلاحظ أن $(EC)^2 = 27 \ , (EB)^2 + (BC)^2 = 18 + 9 = 27 \Rightarrow (EC)^2 = (EB)^2 + (BC)^2$

وحسب عكس فيثاغورث نجد أن المثلث EBC قائم في B وبالتالي $S_{(EBC)} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3\sqrt{2} = \frac{9}{\sqrt{2}}$ بالتعويض نجد :

$$V = \frac{1}{3}S_{(EBC)} \times h = \frac{1}{3} \times \frac{9}{\sqrt{2}} \times \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{V = \frac{9}{2}}$$

الدورة الثانية ٢٠٢٠

السؤال الرابع :

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقطة $A(1,1,-2)$ والمستوي $P: 2x+y-3z+2=0$

① أثبت أن النقطة A لا تنتمي إلى المستوي P

② اكتب معادلة المستوي Q المار من A والموازي للمستوي P

الحـــــــل :

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = 2(1)+(1)-3(-2)+2 = 2+1+6+2 = 11 \\ L_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow L_1 \neq L_2$$

أي أن إحداثيات النقطة A لا تحقق معادلة المستوي وبالتالي $A \notin P$

بما أن المستوي Q يوازي المستوي P فيكون $\vec{n}(2,1,-3)$ ناظم للمستوي Q

ومعادلة المستوي من الشكل : $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ بالتعويض نجد :

$$2(x-1)+(y-1)-3(z+2)=0 \Rightarrow 2x-2+y-1-3z-6=0 \Rightarrow Q: 2x+y-3z-9=0$$

التمرين الثالث :

المستقيمان d و d' معرفان وسيطياً وفق :

$$d: \begin{cases} x = t+2 \\ y = 2t+1 \\ z = -t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad , \quad d': \begin{cases} x = 2t-1 \\ y = t-2 \\ z = 3t-2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

① أثبت أن d و d' متقاطعان ، ثم عين إحداثيات I نقطة التقاطع

② جد معادلة المستوي المحدد بالمستقيمين d و d'

الحـــــــل :

① $\vec{U}(1,2,-1)$ و $\vec{V}(2,1,3)$

الشعاعان $\vec{U}$ و $\vec{V}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة $(\frac{1}{2} \neq \frac{2}{1})$ وعليه إما أن يكون المستقيمان d و d' متقاطعين أو أن يكونا متخالفين

$$\begin{cases} 2s-1 = t+2 & (1) \\ s-2 = 2t+1 & (2) \\ 3s-2 = -t & (3) \end{cases}$$

بجمع (1) و (3) نجد $5s-3=2 \Rightarrow 5s=5 \Rightarrow \boxed{s=1}$

نعوض في (3) نجد : $3-2=-t \Rightarrow -t=1 \Rightarrow \boxed{t=-1}$

نعوض $t=-1, s=1$ في المعادلة (2) : $1-2=-2+1 \Rightarrow -1=-1$ أي أنها محققة فالمستقيمان متقاطعان ولإيجاد نقطة التقاطع نعوض $t=-1$ في المعادلات الوسيطية للمستقيم d نجد $I(1,-1,1) \in d \cap d'$

② المستوي P المحدد بالمستقيمين d و d' هو المستوي المار بالنقطة I والموجه بالشعاعين $\vec{U}$ و $\vec{V}$

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم على المستوي P فيكون :

$$\vec{n} \perp \vec{U} \Rightarrow \vec{n}.\vec{U} = 0 \Rightarrow (a,b,c).(1,2,-1) = 0 \Rightarrow a + 2b - c = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\vec{n} \perp \vec{V} \Rightarrow \vec{n}.\vec{V} = 0 \Rightarrow (a,b,c).(2,1,3) = 0 \Rightarrow 2a + b + 3c = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(2)$$

بضرب المعادلة (2) بـ 2 نجد :

$$a + 2b - c = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$4a + 2b + 6c = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)'$$

بطرح (1) من $(2)'$ نجد : $3a + 7c = 0 \Rightarrow a = -\frac{7c}{3}$ نعوض في (1) نجد :

$$-\frac{7c}{3} + 2b - c = 0 \Rightarrow -\frac{10c}{3} + 2b = 0 \Rightarrow b = \frac{5c}{3}$$

من أجل $\boxed{c = -3}$ نجد $\boxed{a = 7}$ $\Leftarrow a = -\frac{7 \times -3}{3}$ و $\boxed{b = -5}$ $\Leftarrow b = \frac{5 \times -3}{3}$

وبالتالي يكون $\vec{n}(7,-5,-3)$

طريقة أولى لإيجاد معادلة المستوي :

معادلة المستوي P من الشكل : $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$ حيث $I(1,-1,1) \in P$

وبالتالي معادلة المستوي P :

$$7(x-1) - 5(y+1) - 3(z-1) = 0 \Rightarrow 7x - 7 - 5y - 5 - 3z + 3 = 0 \Rightarrow P : 7x - 5y - 3z - 9 = 0$$

طريقة ثانية لإيجاد معادلة المستوي :

معادلة المستوي P من الشكل : $ax + by + cz + d = 0$ حيث $\vec{n}(7,-5,-3)$ ناظم عليه فيكون :

$P : 7x - 5y - 3z + d = 0$ و $I(1,-1,1) \in P$ نعوض نجد :

$$7(1) - 5(-1) - 3(1) + d = 0 \Rightarrow 7 + 5 - 3 + d = 0 \Rightarrow 9 + d = 0 \Rightarrow \boxed{d = -9}$$

وبالتالي معادلة المستوي : $P : 7x - 5y - 3z - 9 = 0$

طريقة ثالثة لإيجاد معادلة المستوي :

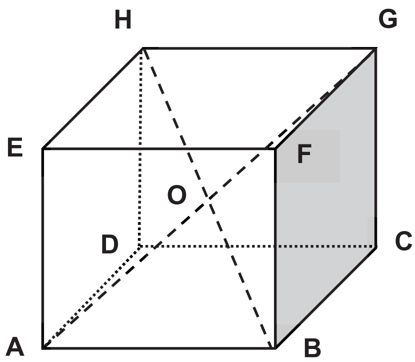
لدينا $\vec{n}(7,-5,-3)$ و $I(1,-1,1) \in P$ وبفرض $M(x,y,z) \in P$ و يكون :

$$\overrightarrow{IM}.\vec{n} = 0 \Rightarrow (x-1, y+1, z-1).(7,-5,-3) = 0 \Rightarrow 7(x-1) - 5(y+1) - 3(z-1) = 0 \Rightarrow$$

$$7x - 7 - 5y - 5 - 3z + 3 = 0 \Rightarrow P : 7x - 5y - 3z - 9 = 0$$

المسألة الأولى : مكعب ABCDEFGH طول حرفه 2 ، O نقطة تقاطع القطرين [AG] و [HB]

نختار المعلم المتجانس $(A, \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE})$ والمطلوب :



① جد إحداثيات A و B و G و H و O

② أعط معادلة للمستوي (GOB)

③ احسب $\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{OB}$ واستنتج $\cos GOB$

④ اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (DC)

⑤ أثبت أن المستقيم (DC) يوازي المستوي (GOB)

⑥ جد الأعداد الحقيقية α و β و γ حتى تكون النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) و (B,β) و $(٢٤,γ)$.

١٧

الحـــــــــــل :

① $A(0,0,0)$ و $B(2,0,0)$ و $G(2,2,2)$ و $H(0,0,2)$ و $O(1,1,1)$

② المستوي (GOB) موجه بالشعاعين $\overrightarrow{OG}(2-1,2-1,2-1) \Rightarrow \overrightarrow{OG}(1,1,1)$

$\overrightarrow{OB}(2-1,0-1,0-1) \Rightarrow \overrightarrow{OB}(1,-1,-1)$

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم على المستوي (GOB) فيكون :

(1) $\vec{n} \perp \overrightarrow{OG} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{OG} = 0 \Rightarrow (a,b,c).(1,1,1) = 0 \Rightarrow a+b+c=0$

(2) $\vec{n} \perp \overrightarrow{OB} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{OB} = 0 \Rightarrow (a,b,c).(1,-1,-1) = 0 \Rightarrow a-b-c=0$

بجمع (1) و (2) نجد : $2a = 0 \Rightarrow \boxed{a=0}$ نفرض $\boxed{b=1}$

نعوض في (1) نجد : $0+1+c=0 \Rightarrow \boxed{c=-1}$ وبالتالي نجد : $\vec{n}(0,1,-1)$ والنقطة $O(1,1,1)$ من المستوي

(GOB) ومعادلة المستوي من الشكل : $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ بالتعويض نجد :

$(y-1)-(z-1)=0 \Rightarrow \boxed{(GOB): y-z=0}$

③ $\overrightarrow{OG}(2-1,2-1,2-1) \Rightarrow \overrightarrow{OG}(1,1,1) \Rightarrow \|\overrightarrow{OG}\| = \sqrt{(1)^2+(1)^2+(1)^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

$\overrightarrow{OB}(2-1,0-1,0-1) \Rightarrow \overrightarrow{OB}(1,-1,-1) \Rightarrow \|\overrightarrow{OB}\| = \sqrt{(1)^2+(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

$\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{OB} = (1,-1,-1).(1,1,1) = 1-1-1 = -1$

$$\cos GOB = \frac{\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{OB}}{\|\overrightarrow{OG}\|.\|\overrightarrow{OB}\|} = \frac{-1}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}$$

④ المستقيم (DC) موجه بالشعاع $\overrightarrow{DC}(2-0,2-2,0-0) \Rightarrow \overrightarrow{DC}(2,0,0)$ ، النقطة $D(0,2,0)$

فيكون التمثيل الوسيطي للمستقيم (DC) هو : $t \in \mathbb{R}$:

$$(DC): \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

⑤ المستقيم (DC) يوازي المستوي (GOB) إذا كان شعاع التوجيه المستقيم عمودي على ناظم المستوي

$\vec{n}.\overrightarrow{DC} = (0,1,-1).(2,0,0) = 0+0-0 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{DC} \Rightarrow (DC) \parallel (GOB)$

⑥ حسب قاعدة متوازي الأضلاع نجد : $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$ ومنه $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ وبالتالي النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة

للنقاط المثقلة $(A,1)$ و $(B,-1)$ و $(C,1)$

ومنه الأعداد $\alpha = 1$ و $\beta = -1$ و $\gamma = 1$ هي التي تجعل النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة A و B و C

السؤال الرابع :

نتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط الآتية $A(2,0,1)$ و $B(1,-2,1)$ و $C(5,0,5)$ و $D(6,2,5)$

1) أثبت أن $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطياً

2) عين العددين الحقيقيين α,β بحيث يكون $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ واستنتج أن النقاط A,B,C,D تقع في مستوٍ واحد

الحـــــــــــــــــــــــــــــل :

$\overrightarrow{AB}(1-2,-2-0,1-1)\Rightarrow\overrightarrow{AB}(-1,-2,0)$

$\overrightarrow{AC}(5-2,0-0,5-1)\Rightarrow\overrightarrow{AC}(3,0,4)$

الشعاعان $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة $(\frac{-1}{3}\neq\frac{0}{4})$

$\overrightarrow{AD}(6-2,2-0,5-1)\Rightarrow\overrightarrow{AD}(4,2,4)$

$\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}\Rightarrow(4,2,4)=\alpha(-1,-2,0)+\beta(3,0,4)\Rightarrow(4,2,4)=(-\alpha+3\beta,-2\alpha,4\beta)\Rightarrow$

$-\alpha+3\beta=4 \quad (1)$

$-2\alpha=2 \quad (2)$

$4\beta=4 \quad (3)$

من (2) نجد $\alpha=-1$ ومن (3) نجد $\beta=1$ نعوض في (1) نجد : $-(-1)+3(1)=4\Rightarrow 1+3=4\Rightarrow 4=4$ فهي محققة

وبالتالي نجد : $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ أي أن الأشعة $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطياً ومنه نجد أن النقاط A,B,C,D تقع في مستوٍ واحد

المسألة الأولى :

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط $A(-1,2,3)$ و $B(2,1,1)$ و $C(-3,4,-1)$ و $D(3,1,1)$ والمطلوب :

① جد $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ، وبين أن المستقيمين (AC) و (AB) متعامدان

② أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,4,1)$ ناظم على المستوي (ABC) واكتب معادلة المستوي (ABC)

③ جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من النقطة D والعمودي على المستوي (ABC)

④ احسب بعد D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم الهرم $D-ABC$

⑤ بفرض أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ و $(B,-1)$ و $(C,2)$ أثبت أن المستقيمين (AB) و (CG) متوازيان

الحـــــــــــــــــــــــــــــل :

① $\overrightarrow{AB}(2+1,1-2,1-3)\Rightarrow\overrightarrow{AB}(3,-1,-2)$

$\overrightarrow{AC}(-3+1,4-2,-1-3)\Rightarrow\overrightarrow{AC}(-2,2,-4)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(3,-1,-2).(-2,2,-4)=-6-2+8=-8+8=0\Rightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$

أي أن المستقيمين (AC) و (AB) متعامدان

② $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=(2,4,1).(3,-1,-2)=6-4-2=0\Rightarrow\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = (2,4,1).(-2,2,-4) = -4+8-4 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$

أي أن الشعاع $\vec{n}(2,4,1)$ ناظم على المستوي (ABC)

والنقطة $A(-1,2,3)$ من المستوي (ABC) ومعادلة المستوي من الشكل :

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ بالتعويض نجد :

$$2(x+1)+4(y-2)+(z-3)=0 \Rightarrow 2x+2+4y-8+z-3=0 \Rightarrow (ABC): 2x+4y+z-9=0$$

③ المستقيم d عمودي على المستوي (ABC) فيكون $\vec{n}(2,4,1)$ شعاع موجه له ويمر من النقطة $D(3,1,1)$

فيكون التمثيل الوسيطي للمستقيم d هو : $t \in \mathbb{R}$:

$$d: \begin{cases} x = 2t+3 \\ y = 4t+1 \\ z = t+1 \end{cases}$$

④ $$d(D,(ABC)) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Rightarrow d(D,(ABC)) = \frac{|2(3)+4(1)+(1)-9|}{\sqrt{(2)^2+(4)^2+(1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{21}}$$

المثلث ABC قائم في A

$$\overrightarrow{AB}(3,-1,-2) \Rightarrow AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(3)^2+(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

$$\overrightarrow{AC}(-2,2,-4) \Rightarrow AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-2)^2+(2)^2+(-4)^2} = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

مساحة قاعدة الهرم : $S = \frac{1}{2}AB \times AC = \frac{1}{2} \times \sqrt{14} \times 2\sqrt{6} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$

ارتفاع الهرم : $h = d(D,(ABC)) = \frac{2}{\sqrt{21}}$

حجم الهرم : $V = \frac{1}{3} \times S.h = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{21} \times \frac{2}{\sqrt{21}} \Rightarrow V = \frac{4}{3}$

⑤ بما أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ و $(B,-1)$ و $(C,2)$ فإن :

$$\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{BA} = -2\overrightarrow{GC}$$

ومنه الشعاعان $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{GC}$ مرتبطان خطياً وبالتالي نجد أن المستقيمين (AB) و (CG) متوازيان

طريقة ثانية لحل الطلب الخامس :

بما أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ و $(B-1)$ و $(C,2)$ فإن :

$$G\left(\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}, \frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}, \frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right) \Rightarrow$$

$$G\left(\frac{-1-2-6}{2}, \frac{2-1+8}{2}, \frac{3-1-2}{2}\right) \Rightarrow G\left(-\frac{9}{2}, \frac{9}{2}, 0\right)$$

$$\overrightarrow{CG}\left(-\frac{9}{2}+3, \frac{9}{2}-4, 0+1\right) \Rightarrow \overrightarrow{CG}\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

ولدينا سابقاً $\overrightarrow{AB}(3,-1,-2)$

نلاحظ أن $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CG}$ أي أن $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطياً وبالتالي نجد أن المستقيمين (AB) و (CG) متوازيان

طريقة ثالثة لحل الطلب الخامس :

بما أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ و $(B-1)$ و $(C,2)$ فإن :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\Rightarrow$$
$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{CG}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

أي أن $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطياً وبالتالي نجد أن المستقيمين (AB) و (CG) متوازيان

طريقة رابعة لحل الطلب الخامس :

نفرض I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(B,-1)$ و $(C,2)$ فيكون $\overrightarrow{BI}=2\overrightarrow{BC}$ وبالتالي C منتصف $[BI]$

يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ و $(B,-1)$ و $(C,2)$

هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(I,1)$ (حسب الخاصة التجميعية) ومنه G منتصف $[AI]$

وبالتالي $[GC]$ قطعة واصلة بين منتصفي ضلعين في المثلث ABI فهي توازي الثالثة ومنه نجد أن المستقيمين (AB) و (CG) متوازيان

الدورة الثانية ٢٠٢١

<u>السؤال الثاني</u> : نتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطة $A(2,1,2)$ والمستوي $P:2x+y-2z-4=0$

① احسب بعد النقطة A عن المستوي P

② اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P

الحـــــــــــــــــل :

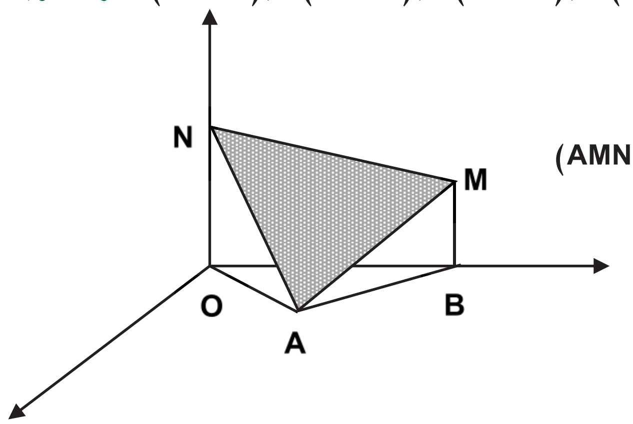
$$d(A,P)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\Rightarrow d(A,P)=\frac{|2(2)+(1)-2(2)-4|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-2)^2}}=\frac{|4+1-4-4|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{3}{3}=1$$

■ بما أن المستوي P يمس الكرة فإن بعد مركزها عنه هو نصف قطرها أي $R=d(A,P)=1$

ومعادلة الكرة من الشكل :

$$S:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$
$$R=1\ ,\ A(x_0,y_0,z_0)=A(2,1,2)\Rightarrow$$
$$S:(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=1$$

٢١ التمرين الثاني : في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط : $A(1,3,0)$ ، $B(0,6,0)$ ، $N(0,0,3)$ ، $M(0,6,2)$ والمطلوب :



① اكتب معادلة المستوي (AMN)

② اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من O ويعامد المستوي (AMN)

③ أثبت أن المستوي الذي معادلته $z-1=0$ هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BM]$

الحـــــل :

① كتابة معادلة المستوي (AMN) :

$$\overrightarrow{AM}(0-1,6-3,2-0) \Rightarrow \overrightarrow{AM}(-1,3,2)$$
$$\overrightarrow{AN}(0-1,0-3,3-0) \Rightarrow \overrightarrow{AN}(-1,-3,3)$$

■ نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم على المستوي (AMN) فيكون :

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AM} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AM}=0 \Rightarrow (a,b,c).(-1,3,2)=0 \Rightarrow -a+3b+2c=0 \quad (1)$$
$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AN} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AN}=0 \Rightarrow (a,b,c).(-1,-3,3)=0 \Rightarrow -a-3b+3c=0 \quad (2)$$

بجمع المعادلة الأولى والثانية نجد : $-2a++5c=0 \Rightarrow a=\frac{5}{2}c$

نفرض $\boxed{c=6}$ نعوض في المعادلة السابقة نجد : $a=\frac{5}{2}\times 6 \Rightarrow \boxed{a=15}$

نعوض في (1) نجد : $-15+3b+2(6)=0 \Rightarrow 3b-15+12 \Rightarrow 3b-3=0 \Rightarrow \boxed{b=1}$

وبالتالي نجد : $\vec{n}(15,1,6)$ والنقطة $N(0,0,3)$ من المستوي (AMN)

ومعادلة المستوي من الشكل : $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ بالتعويض نجد :

$$15(x-0)+(y-0)+6(z-3)=0 \Rightarrow 15x-0+y-0+6z-18=0 \Rightarrow \boxed{15x+y+6z-18=0}$$

② كتابة تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ :

بما أن المستقيم Δ يعامد المستوي (AMN) فإن $\vec{n}(15,1,6)$ شعاع توجيه له و $O(0,0,0)\in\Delta$

فتكون المعادلات الوسيطية للمستقيم : $t\in\mathbb{R}$:

$$\Delta : \begin{cases} x=15t \\ y=t \\ z=6t \end{cases}$$

③ إثبات أن المستوي الذي معادلته $z-1=0$ هو مستوٍ محوري :

$\overrightarrow{BM}(0-0,6-6,2-0) \Rightarrow \overrightarrow{BM}(0,0,2)$ ناظم على المستوي المحوري للقطعة $[BM]$ ولتكن النقطة I منتصف $[BM]$

$$I\left(\frac{0+0}{2},\frac{6+6}{2},\frac{0+2}{2}\right) \Rightarrow I(0,6,1)$$

ومعادلة المستوي من الشكل : $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ بالتعويض نجد :

$$0(x-0)+0(y-6)+2(z-1)=0 \Rightarrow 2(z-1)=0 \Rightarrow \boxed{z-1=0}$$

الوحدة الرابعة: الاعداد العقـــــدية — المدرس: عمــــــار قدوري

اشكال للعدد العقدي / الصيغة الرياضية	الشكل الجبري $Z = x + iy$	الشكل المثلثي $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$	الشكل الاسي $Z = r.e^{i\theta}$
عناصر العدد العقدي	$Re(Z) = x$ $Im(Z) = y$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\cos\theta = \frac{x}{r}, \sin\theta = \frac{y}{r}$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
مرافق عدد عقدي	$\bar{Z} = x - iy$	$\bar{Z} = r(\cos\theta - i\sin\theta)$	$\bar{Z} = r.e^{-i\theta}$
مجموع وفرق عددين	$Z_1 \pm Z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$	-------	-------
جداء عددين عقديين	$Z_1.Z_2 = (x_1.x_2 - y_1.y_2) + i(x_1.y_2 + x_2.y_1)$	$Z_1.Z_2 = r_1.r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$	$Z_1.Z_2 = r_1.r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$
قسمة عددين عقديين	$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_1.\bar{Z}_2}{Z_2.\bar{Z}_2} = \frac{Z_1.\bar{Z}_2}{r_2^2}$	$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}.(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$	$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}.e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$
قوة عدد عقدي	$Z^n = (x + iy)^n$	$Z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$	$Z^n = r^n.e^{in\theta}$
خواص المرافق $Z.\bar{Z} = r^2$	$\overline{Z_1 \pm Z_2} = \bar{Z}_1 \pm \bar{Z}_2$	$\begin{cases} \overline{Z_1.Z_2} = \bar{Z}_1.\bar{Z}_2 \\ \overline{Z^n} = \bar{Z}^n \end{cases}$	$\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2}$

المعـــــــادلات

$$a\,Z^2 + b\,Z + c = 0$$

$$\begin{cases} a,b,c \in \mathcal{R} \nrightarrow \{\Delta = b^2 - 4ac = \alpha\, i^2 \Rightarrow \\ a,b,c \in \mathcal{C} \nrightarrow \{\Delta = b^2 - 4ac = \alpha + i\beta \Longrightarrow \end{cases}$$

$$Z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad Z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

الجذور التربيعية: بفرض $w = \alpha + i\beta$ جذر تربيعي للعدد العقدي $Z = x + iy$

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = Re(Z) = x \\ \alpha^2 + \beta^2 = |Z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ 2\alpha.\beta = Im(Z) = y \end{cases}$$

$$a\,Z^3 + b\,Z^2 + cZ + D = 0 \Rightarrow (Z - Z_1).Q(Z) = 0$$

$$a\,Z^4 + b\,Z^2 + cZ + d = 0 \Rightarrow (a_1 Z^2 + b_1 Z + c_1)(a_2 Z^2 + b_2 Z + c_2) = 0$$

Ammar Kaddoury @ 0934006844 & 0944006844

التفسير الهندسي			الصيغة العقدية
$M(a,b)$ نقطة في المستوي $(O,\vec{u},\vec{v})$ $\overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$			$Z = a + ib$
الشكل المثلثي لعدد عقدي			$Z = r(cos\theta + isin\theta)$
الشكل الاسي لعدد عقدي			$Z = re^{i\theta}$
$r = OM = \lvert Z \rvert \,, \theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$			$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad , \theta = \arg(Z)$
$OABC \Leftarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ متوازي اضلاع			$a + b = c$
$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$			$\overrightarrow{AB} = b - a$
المسافة بين النقطتين A و B			$\lVert \overrightarrow{AB} \rVert = \lvert b - a \rvert$
C منتصف القطعة المستقيمة AB			$c = \dfrac{a + b}{2}$
G مركز ثقل المثلث ABC			$g = \dfrac{a + b + c}{3}$
G مركز الابعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$			$g = \dfrac{\alpha.a + \beta.b + \gamma.c}{\alpha + \beta + \gamma}$
$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$			$arg\left(\dfrac{b}{a}\right)$
النقاط O, A, B على استقامة واحدة	$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 0$	حقيقي موجب	$\dfrac{b}{a}$
	$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \pi$	حقيقي سالب	
المثلث OAB قائم في O	$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \dfrac{\pi}{2}$	تخيلي موجب	
	$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -\dfrac{\pi}{2}$	تخيلي سالب	
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$			$arg\left(\dfrac{c - a}{b - a}\right)$
النقاط C, A, B على استقامة واحدة	$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$	حقيقي موجب	$\dfrac{c - a}{b - a}$
	$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pi$	حقيقي سالب	
المثلث CAB قائم في A	$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{2}$	تخيلي موجب	
	$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\dfrac{\pi}{2}$	تخيلي سالب	
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$			$arg\left(\dfrac{c - d}{b - a}\right)$
$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطياً	$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$	حقيقي موجب	$\dfrac{c - d}{b - a}$
	$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \pi$	حقيقي سالب	
المستقيمان $(AB), (CD)$ متعامدان	$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \dfrac{\pi}{2}$	تخيلي موجب	
	$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = -\dfrac{\pi}{2}$	تخيلي سالب	

تطبيقات الاعداد العقدية الهندسية	المدرس: عمـــار قدوري

مجموعة النقط

التفسير الهندسي	الصيغة العقدية
محور القطعة المستقيمة $[AB]$	$\lvert z-a\rvert=\lvert z-b\rvert$
دائرة مركزها النقطة A و نصف قطرها r	$\lvert z-a\rvert=r : r>0$
M تقع على دائرة مركزها O ونصف قطرها r	$\lvert z\rvert=1 \Longrightarrow z.\bar{z}=1 \Longrightarrow \bar{z}=\dfrac{1}{z}$
مجموعة النقط هي مستقيم ضمن شروط المسألة	حقيقي $T \Rightarrow T=\bar{T}$
مجموعة النقط هي دائرة ضمن شروط المسألة	تخيلي $T \Rightarrow T=-\bar{T}$

الكتابة العقدية للتحويلات الهندسية

التفسير الهندسي	الصيغة العقدية
A صورة B وفق انسحاب شعاعه $\vec{w}$	$a=b+w$
A صورة B وفق تحاك مركزه w ونسبته k	$a-w=k(b-w)$
A صورة B وفق تحاك مركزه O ونسبته k	$a=kb$
A صورة B وفق تناظر (انعكاس) مركزه w	$a-w=-(b-w)$
A صورة B وفق تناظر (انعكاس) مركزه O	$a=-b$
A صورة B وفق دوران مركزه w وزاويته θ	$a-w=e^{i\theta}(b-w)$
A صورة B وفق دوران مركزه O وزاويته θ AOB مثلث متساوي الساقين رأسه O	$a=e^{i\theta}b$
A صورة B وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ AOB مثلث قائم في O ومتساوي الساقين دوران ربع دورة بالاتجاه المباشر حول O	$a=ib$
AOB مثلث متساوي الاضلاع	$a=e^{i\frac{\pi}{3}}b$
A صورة B وفق تناظر محوري محوره Ox	$a=\bar{b}$
A صورة B وفق تناظر محوري محوره Oy	$a=-\bar{b}$

اعداد عقدية هامة

$b=\beta i : \beta<0 \Rightarrow$ $b=\lvert\beta\rvert . e^{-\frac{\pi}{2}i}$	$a=\alpha i : \alpha>0 \Rightarrow$ $a=\alpha . e^{\frac{\pi}{2}i}$	$b=\beta<0 \Rightarrow$ $b=\lvert\beta\rvert . e^{\pi i}$	$a=\alpha>0 \Rightarrow$ $a=\alpha . e^{0i}$
$z=1-i=\sqrt{2}\,e^{\frac{-\pi}{4}i}$		$z=1+i=\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}$	
$z=-1-i=\sqrt{2}\,e^{\frac{5\pi}{4}i}$		$z=-1+i=\sqrt{2}\,e^{\frac{3\pi}{4}i}$	

تصنيف المسائل

الأهداف التعليمية	ارقام المسائل
الصيغة العقدية للدوران	1,2,3
تطبيقات الزوايا الموجهة	7,9
استعمالات العدد العقدي	7,6,5
تعيين طبيعة مجموعة نقاط	8,4
مسائل عامة	11,12,13

Ammar Kaddoury @ 0934006844 & 0944006844

الدورة الأولى ٢٠١٧

ليكن العددان العقديان : $Z_1 = 1 + i , Z_2 = 1 + \sqrt{3}\, i$

a) اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد $\frac{Z_1}{Z_2}$, Z_2 , Z_1

b) اكتب بالشكل الجبري $\frac{Z_1}{Z_2}$ و استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$

الحـــــــــــــــل :

$$r = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \, , \, \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$Z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$$

$$r = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \, , \, \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$Z_2 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

$$Z = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})}{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{2})} = \sqrt{2}\left[\cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})\right] = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1+\sqrt{3}\,i}{1+i} = \frac{(1+\sqrt{3}\,i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1 - i + \sqrt{3}\,i + \sqrt{3}}{1+1} = \frac{\sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

بالمقارنة بين الشكلين الجبري والمثلثي نجد :

$$\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \boxed{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

الدورة الثانية ٢٠١٧

لتكن النقطة M التي يمثلها العدد العقدي $Z = -1 + i$ والمطلوب

① أثبت أن Z^8 عدداً حقيقياً

② جد العدد العقدي Z' الممثل للنقطة M' صورة M وفق دوران مركزه $A(1+i)$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ واكتبه بالشكل الأسي

الحـــــــــــــــل :

$$Z^8 = (-1+i)^8 = \left[(-1+i)^2\right]^4 = (1 - 2i - 1)^4 = (-2i)^4 = 16 \times 1 = 16$$

أي أنَّ Z^8 حقيقي

طريقة ثانية : $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ وبالتالي : $\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$ ، $\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

إذاً $\theta=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$ ومنه : $Z=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$$Z^8=(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}})^8=16e^{6\pi i}=16(\cos 6\pi+\sin 6\pi)=16\times 1=16$$

أي أنَّ Z^8 حقيقي

$$Z'-a=e^{i\theta}(Z-a)\Rightarrow Z'-1-i=e^{i\frac{\pi}{4}}(-1+i-1-i)\Rightarrow Z'-1-i=e^{i\frac{\pi}{4}}(-2)\Rightarrow$$
$$Z'=1+i-2e^{i\frac{\pi}{4}}\Rightarrow Z'=w-2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ وبالتالي : $\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

إذاً $\theta=\frac{\pi}{4}$ ومنه : $w=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ومنه نجد :

$$Z'=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}-2e^{i\frac{\pi}{4}}=(\sqrt{2}-2)e^{i\frac{\pi}{4}}=-(2-\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}=(2-\sqrt{2})e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{4}}=(2-\sqrt{2})e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

****

طريقة ثانية :

$$Z'-a=e^{i\theta}(Z-a)\Rightarrow Z'-1-i=e^{i\frac{\pi}{4}}(-1+i-1-i)\Rightarrow Z'-1-i=e^{i\frac{\pi}{4}}(-2)\Rightarrow$$
$$Z'=1+i-2e^{i\frac{\pi}{4}}\Rightarrow Z'=1+i-2(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=1+i-\sqrt{2}-i\sqrt{2}=1-\sqrt{2}+i(1-\sqrt{2})$$
$$\Rightarrow Z'=(1-\sqrt{2})(i+1)=(\sqrt{2}-1)(-1-i)$$

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ وبالتالي : $\cos\theta=\frac{x}{r}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\sin\theta=\frac{y}{r}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

إذاً $\theta=\frac{5\pi}{4}$ ومنه : $Z'=(1-\sqrt{2})(i+1)=(\sqrt{2}-1)(-1-i)=(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}=(2-\sqrt{2})e^{i\frac{5\pi}{4}}$

الدورة الأولى ٢٠١٨

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ نتأمل النقاط A و B و C و M التي تمثلها على الترتيب الأعداد العقدية $a=-1-i$ و $b=1-i$ و $c=2i$ و $m=-1+i$ والمطلوب :

1) مثل الأعداد العقدية $a=-1-i$ و $b=1-i$ و $c=2i$ و $m=-1+i$ في المستوي

2) احسب العدد العقدي d الممثل للنقطة D صورة النقطة C وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

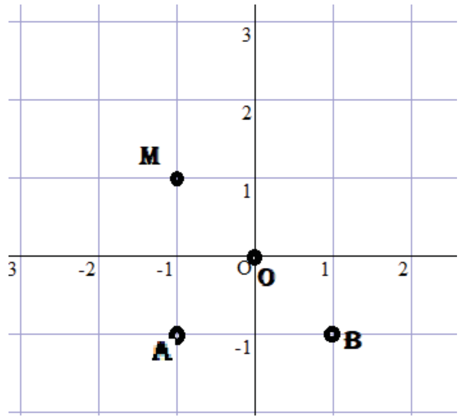
3) أثبت أن النقاط M و O و B تقع على استقامة

4) احسب $\arg\frac{c-d}{m}$ واستنتج أن (OM) و (DC) متعامدان

الحـــــــــــل :

بما أن النقطة D صورة النقطة C وفق دوران مركزه O

وزاويته $\frac{\pi}{2}$ فإن :



$$d = e^{i\frac{\pi}{2}} c = ic = i(2i) \Rightarrow d = -2$$

$$\frac{b-o}{m-o} = \frac{1-i}{-1+i} = \frac{1-i}{-(1-i)} = -1 \in \mathcal{R}$$

$$\arg\frac{b-o}{m-o} = \pi$$

أي أن النقاط M و O و B تقع على استقامة

$$\frac{c-d}{m} = \frac{2+2i}{-1+i} = \frac{(2+2i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{-2-2i-2i+2}{1+1} = -\frac{4i}{2} = -2i \Rightarrow \arg\frac{c-d}{m} = -\frac{\pi}{2}$$

وبالتالي المستقيمان (OM) و (DC) متعامدان

الدورة الثانية ٢٠١٨

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ لتكن النقطتان A و B الممثلتان بالعددين العقديين $Z_B = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$ و $Z_A = 4$ ولتكن I منتصف [AB] والمطلوب :

1) مثل النقطتين A و B في المعلم المتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ واكتب Z_B بالشكل الأسي

2) بين طبيعة المثلث OAB وأثبت أن قياس الزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{OI})$ هو $\frac{\pi}{8}$

3) اكتب العدد العقدي Z_I الممثل للنقطة I بالصيغة الجبرية والأسية واستنتج $\sin\frac{\pi}{8}$

الحـــــــــل :

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{8+8} = \sqrt{16} = 4$ وبالتالي : $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

إذاً $\theta = \frac{\pi}{4}$ ومنه : $Z_B = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$

طبيعة المثلث :

$$OB = |b-o| = |2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i| \Rightarrow OB = \sqrt{8+8} = \sqrt{16} = 4$$
$$OA = |a-o| = |4| \Rightarrow OA = 4$$

أي أن $AB \neq OA = OB$ وبالتالي المثلث متساوي الساقين فيه $AOB = \frac{\pi}{4}$

٤ بما أن المثلث OAB متساوي الساقين و [OI] متوسط متعلق بالقاعدة فهو منصف لزاوية الرأس وبالتالي فإن

قياس الزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{OI})$ هو $\frac{\pi}{8}$

$$Z_I = \frac{Z_A + Z_B}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i}{2} = (2+\sqrt{2}) + \sqrt{2}i$$

ومن الطلب السابق لدينا $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2+\sqrt{2})^2 + 2} = \sqrt{4 + 4\sqrt{2} + 2 + 2} = \sqrt{8 + 4\sqrt{2}} = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$

$(\vec{u},\overrightarrow{OI}) = \frac{\pi}{8}$ ومنه : $Z_I = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}$

بالمقاربة بين الشكلين الجبري والأسي نجد :

$$Z_I = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}} = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}) = (2+\sqrt{2}) + \sqrt{2}i \Rightarrow$$

$$2\sqrt{2+\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$$

الدورة الأولى ٢٠١٩

لتكن النقطتان A و B اللتان تمثلهما الأعداد العقدية $Z_A = -1+i$ و $Z_B = -3i$ وليكن

$$P(Z) = Z^2 + (1+2i)Z + 3 + 3i$$

1) أثبت أن Z_A حلاً للمعادلة $P(Z) = 0$ ثم استنتج الحل الآخر للمعادلة

2) جد العدد العقدي Z' الممثل للنقطة A' صورة النقطة A وفق دوران مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{2}$

3) اكتب Z_A بالشكل الأسي

الحـــــــل :

$$P(Z_A) = (-1+i)^2 + (1+2i)(-1+i) + 3 + 3i = 1 - 2i - 1 - 1 + i - 2i - 2 + 3 + 3i = 4 - 4 - 4i + 4i = 0$$

ومنه Z_A جذر للمعادلة $P(Z) = 0$

بما أن أمثال المعادلة تخيلية نجد $Z_1 + Z_2 = -S$ أو $Z_1 \times Z_2 = P$ ونجد :

$$-1 + i + Z_2 = -(1+2i) \Rightarrow Z_2 = 1 - i - 1 - 2i \Rightarrow Z_2 = -3i = Z_B$$

$$Z' - Z_B = e^{\frac{\pi}{2}i}(Z_A - Z_B) \Rightarrow$$

$$Z' - (-3i) = i(-1 + i - (-3i)) \Rightarrow Z' + 3i = i(-1+4i) \Rightarrow Z' + 3i = -i - 4 \Rightarrow \boxed{Z' = -4 - 4i}$$

$$Z_A = -1 + i$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ وبالتالي : $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

إذاً $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ ومنه : $Z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

الدورة الثانية ٢٠١٩

نتأمل في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية : $a=6-i$ و $b=-6+3i$ و $c=-18+7i$ بالترتيب والمطلوب :

1) احسب العدد $\frac{b-a}{c-a}$ واستنتج أن النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة

2) بفرض $d=1+6i$ العدد العقدي الممثل للنقطة D صورة A وفق دوران مركزه O وزاويته θ احسب θ

3) جد العدد العقدي n الممثل للنقطة N ليكون الرباعي OAND مربعاً

الحـــــــــــل :

$$\frac{b-a}{c-a}=\frac{-6+3i-6+i}{-18+7i-6+i}=\frac{-12+4i}{-24+8i}=\frac{-3+i}{-6+2i}=\frac{(-3+i)(-6-2i)}{(-6+2i)(-6-2i)}=\frac{18+6i-6i+2}{36+4}=\frac{20}{40}=\frac{1}{2}$$

$$\arg\frac{b-a}{c-a}=\arg\frac{1}{2}=0$$

أي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطياً وبالتالي النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة

$$d=e^{i\theta}a\Rightarrow e^{i\theta}=\frac{d}{a}$$

$$\frac{d}{a}=\frac{1+6i}{6-i}=\frac{(1+6i)(6+i)}{(6-i)(6+i)}=\frac{6+i+36i-6}{36+1}=\frac{37i}{37}=i$$

$$\theta=\arg\frac{d}{a}=\arg(i)\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}$$

لدينا $|\frac{d}{a}|=|i|=1$ وبالتالي $OA=OD$ ولكي يكون الرباعي OAND مربعاً يجب أن يكون $Z_{\overrightarrow{OA}}=Z_{\overrightarrow{DN}}$

$$Z_{\overrightarrow{OA}}=Z_{\overrightarrow{DN}}\Rightarrow a=n-d\Rightarrow n=a+d\Rightarrow n=6-i+1+6i\Rightarrow n=7+5i$$

الدورة الأولى ٢٠٢٠

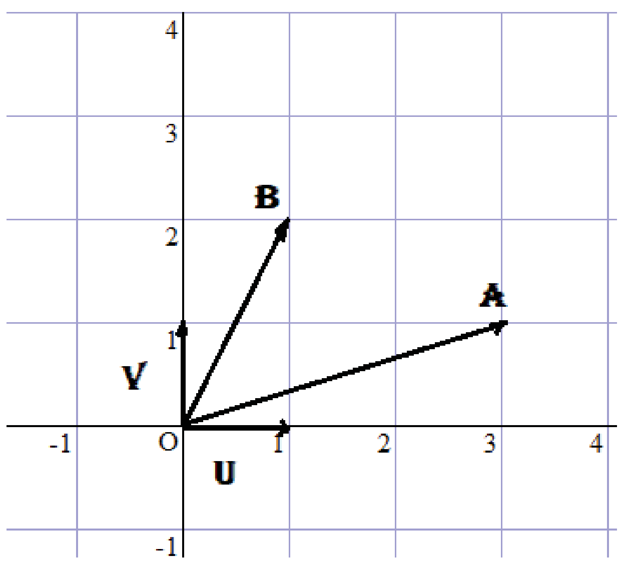
نتأمل في المستوي العقدي المزود بالمعلم المتجانس : $(O,\vec{u},\vec{v})$

بفرض α القياس الأساسي للزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{OA})$

و β القياس الأساسي للزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{OB})$ والمطلوب :

① اكتب بالشكل الجبري للعددين Z_A و Z_B الذين يمثلان النقطتين A و B

② اكتب العدد العقدي $\frac{Z_B}{Z_A}$ بالشكل الجبري والأسي ثم استنتج قيمة $\beta-\alpha$



الحـــــــــــل :

$A(3,1)\Rightarrow Z_A=3+i$

$B(1,2)\Rightarrow Z_B=1+2i$

٦

$$\frac{Z_B}{Z_A}=\frac{1+2i}{3+i}=\frac{(1+2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{3-i+6i+2}{9+1}=\frac{5+5i}{10}\Rightarrow\frac{Z_B}{Z_A}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$r=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\theta=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \sin\theta=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{Z_B}{Z_A}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\arg\frac{Z_B}{Z_A}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\arg Z_B-Z_A=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\beta-\alpha=\frac{\pi}{4}$$

الدورة الثانية ٢٠٢٠

ليكن العدد العقدي $w=\frac{-\sqrt{2}}{1+i}e^{i\frac{\pi}{3}}$ والمطلوب :

① بين أن $|w|=1$ ثم اكتب العدد w بالشكل الأسي

② ليكن z عدد عقدي ما أثبت أن $Z=\frac{z-\bar{z}w}{1-w}$ عدد حقيقي

الحـــــــــل :

$$|w|=\left|\frac{-\sqrt{2}}{1+i}e^{i\frac{\pi}{3}}\right|=\left|\frac{-\sqrt{2}}{1+i}\right|.\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right|=\left|\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right|\times1=1$$

$$w=\frac{-\sqrt{2}}{1+i}e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{2}e^{i\pi}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}e^{i\frac{\pi}{3}}=e^{i(\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}=e^{i\frac{13}{12}}$$

$$|w|=1\Rightarrow\bar{w}=\frac{1}{w}$$

$$Z=\frac{z-\bar{z}w}{1-w}$$

$$\bar{Z}=\overline{\left(\frac{z-\bar{z}w}{1-w}\right)}=\frac{\bar{z}-z\bar{w}}{1-\bar{w}}=\frac{\bar{z}-\frac{z}{w}}{1-\frac{1}{w}}=\frac{\frac{\bar{z}w-z}{w}}{\frac{w-1}{w}}=\frac{\bar{z}w-z}{w-1}=\frac{-(z-\bar{z}w)}{-(1-w)}=\frac{z-\bar{z}w}{1-w}=Z$$

بما أن $\bar{Z}=Z$ فإن Z حقيقي

الدورة الأولى ٢٠٢١

: نتأمل في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية : $a=8$ و $b=-4+4i$ و $c=-4i$ بالترتيب والمطلوب :

1) احسب العدد $\frac{b-c}{a-c}$ واستنتج أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين

2) جد العدد العقدي d الممثل للنقطة D صورة A وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$

3) جد العدد العقدي e الممثل للنقطة E ليكون الرباعي ACBE مربعاً

الحـــــــــل :

$$\frac{b-c}{a-c}=\frac{-4+4i+4i}{8+4i}=\frac{-4+8i}{8+4i}=\frac{-1+2i}{2+i}=\frac{(-1+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{-2+i+4i+2}{4+1}=\frac{5i}{5}=i$$

$$\arg\frac{b-c}{a-c}=\arg i=\frac{\pi}{2}\Rightarrow [BC]\perp[AC]$$

$$\left|\frac{b-c}{a-c}\right|=|i|=1\Rightarrow\frac{BC}{AC}=1\Rightarrow BC=AC$$

أي المثلث ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين

$$d-0=e^{i\frac{\pi}{4}}(a-0)\Rightarrow d=8(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=8(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\,i$$

لدينا $BC=AC$ و $[AC]\perp[BC]$ ولكي يكون الرباعي ACBE مربعاً يجب أن يكون $Z_{\overrightarrow{AE}}=Z_{\overrightarrow{CB}}$

$$Z_{\overrightarrow{AE}}=Z_{\overrightarrow{CB}}\Rightarrow e-a=b-c\Rightarrow e=a+b-c\Rightarrow e=8-4+4i+4i\Rightarrow e=4+8i$$

الدورة الثانية ٢٠٢١

أولاً : ليكن $P(z)$ كثير حدود معرف بالصيغة $P(z)=z^3-2(\alpha+i\sqrt{3})z^2-4(\alpha-i\sqrt{3})z+8$ حيث $\alpha\in\mathcal{R}$ والمطلوب :

① احسب العدد α لكي يكون $z=2$ حلاً للمعادلة $P(z)=0$

② بفرض $a=1$ جد كثير الحدود من الدرجة الثانية $Q(z)$ يحقق $P(z)=(z-2)Q(z)$ ثم استنتج حلول المعادلة $P(z)=0$

ثانياً : لتكن A و B و C نقاط المستوي التي تمثل الأعداد العقدية بالترتيب $a=2$, $b=1+i\sqrt{3}$, $c=-1+i\sqrt{3}$ والمطلوب :

a) أثبت أن $\frac{a-b}{c-b}=e^{\frac{2\pi}{3}i}$ واستنتج طبيعة المثلث ABC

b) ليكن المثلث $A'B'C'$ صورة المثلث ABC وفق تناظر بالنسبة لمحور الفواصل عين a' و b' و c' التي تمثلها نقاط المستوي A' و B' و C' على الترتيب

٨

الحــــــــل :

① حساب العدد α :

$$P(2)=0 \Rightarrow (2)^3-2(\alpha+i\sqrt{3})(2)^2-4(\alpha-i\sqrt{3})(2)+8=0 \Rightarrow$$
$$8-8(\alpha+i\sqrt{3})-8(\alpha-i\sqrt{3})+8=0 \Rightarrow 1-(\alpha+i\sqrt{3})-(\alpha-i\sqrt{3})+1=0 \Rightarrow$$
$$-\alpha-i\sqrt{3}-\alpha+i\sqrt{3}+2=0 \Rightarrow -2\alpha+2=0 \Rightarrow \boxed{\alpha=1}$$

② استنتاج حلول المعادلة $P(z)=0$:

$$P(z)=(z-2)Q(z) \Rightarrow P(z)=z^3-2(1+i\sqrt{3})z^2-4(1-i\sqrt{3})z+8=(z-2)Q(z)$$

$$\begin{array}{r|l}
z-2 & z^2-2\sqrt{3}iz-4 \\ \hline
 & z^3-2z^2-2i\sqrt{3}\,z^2-4z+4\sqrt{3}iz+8 \\
 & \mp z^3 \pm 2z^2 \\ \hline
 & -2\sqrt{3}i\,z^2-4z+4\sqrt{3}iz+8 \\
 & \pm 2\sqrt{3}i\,z^2 \qquad \mp 4\sqrt{3}iz \\ \hline
 & -4z \qquad +8 \\
 & \pm 4z \qquad \mp 8 \\ \hline
 & 0 \qquad 0
\end{array}$$

ومنه نجد $Q(z)=z^2-2\sqrt{3}iz-4$ $\Leftarrow$ $P(z)=(z-2)(z^2-2\sqrt{3}iz-4)$

$$P(z)=0 \Rightarrow (z-2)(z^2-2\sqrt{3}iz-4) \Rightarrow$$

إما $z-2=0 \Rightarrow z=2$

أو $z^2-2\sqrt{3}iz-4=0$

$$\Delta=b^2-4ac=(-2\sqrt{3}i)^2-4(1)(-4)=-12+16=4>0$$

$$z_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2\sqrt{3}i+2}{2} \Rightarrow z_1=1+\sqrt{3}i$$

$$z_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2\sqrt{3}i-2}{2} \Rightarrow z_2=-1+\sqrt{3}i$$

a) إثبات أن $\frac{a-b}{c-b}=e^{\frac{3\pi}{2}i}$ واستنتاج طبيعة المثلث ABC :

$$\frac{a-b}{c-b}=\frac{2-1-i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}}=\frac{1-i\sqrt{3}}{-2}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$r=\sqrt{(-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$$

$$\cos\theta=\frac{a}{r}=-\frac{1}{2}\quad,\quad \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\theta=\pi-\frac{\pi}{3}\Rightarrow\theta=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow$$

$$\frac{a-b}{c-b}=e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

$$\frac{a-b}{c-b}=e^{\frac{2\pi}{3}i}\Rightarrow\begin{cases}1)\ \left|\frac{a-b}{c-b}\right|=1\Rightarrow\frac{BA}{BC}=1\Rightarrow AB=BC\\ 2)\ \arg\frac{a-b}{c-b}=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow B=\frac{2\pi}{3}\end{cases}$$

وبالتالي المثلث ABC متساوي الساقين وفيه زاوية الرأس $ABC=\frac{2\pi}{3}$

b) تعيين a' و b' و c' :

إذا كان z' نظير z بالنسبة لمحور الفواصل فإن $z'=\bar{z}$ وبالتالي نجد :

$$a'=\bar{a}=2$$
$$b'=\bar{b}=1-i\sqrt{3}$$
$$c'=\bar{c}=-1-i\sqrt{3}$$

****
****

مع اطيب التمنيات للطلاب بالتوفيق

المدرس : عمـــار قدوري

طرائق العد

مقدمه : عندما تعد عدد الطلاب في الصف المكون من 3 مجموعات و كل مجموعة منها مكونة من 6 مقاعد و كل مقعد منها مكون من 2 طالب فهل ستكون طريقة العد بسرد الطلاب من اولهم الى اخرهم ثم احصائهم ام بضرب 3*6*2*=54 (مؤكد الجواب بطريقة الضرب)

و عندما تعد عدد طلاب مدرسة مكونة من ثلاثة صفوف مختلفة بحيث يكون عدد الطلاب في الصف الأول 20 و في الثاني 30 و في الثالث 25 فانك ستجمع عدد الطلاب وهذه طريقة الجمع في العد 25+30+20=75

طرق العد الرئيسية :

طريقة الجمع : تستخدم عندما يكون لدينا عملية تتم على r مرحلة منفصلة بحيث :

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_r$$

طريقة الضرب : تستخدم عندما يكون لدينا عملية عد تتكون من r مرحلة معا بحيث :

$n = n_1 . n_2 . n_3 . \ldots . n_r$ حيث n_i عدد طرق اجراء المرحلة i

طريقة الضرب و اقسامها :

١- **العاملي (التباديل) ((الترتيب مهم في كل تبديلة))** عملية العد توافق عدد طرق اختيار n عنصر مختلف من n عنصر مختلف : $n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \ldots 3 * 2 * 1$

التجارب الموافقة للعاملي : سحب n كرة على التتالي دون إعادة من اصل n كرة مختلفة – تأليف لجنة من n منصب مختلف من اصل n شخص – توليد رقم مؤلف من n منزلة مختلفة من اصل n رقم مختلف

٢- **التراتيب ((الترتيب مهم في كل ترتيبة))** عملية العد توافق عدد طرق اختيار r عنصر مختلف من n عنصر مختلف من اصل n عنصر مختلف و يكون :

$$\boldsymbol{P_n^r = n(n-1)(n-2) \ldots (n-r+1)}$$

التجارب التي توافق التراتيب : سحب r كرة من اصل n كرة مختلفة – تأليف لجنة مكونة من r منصب من اصل n شخص – توليد رقم مؤلف من r منزلة مختلفة من اصل n رقم مختلف

٣- **قانون n^r سحب r كرة من اصل n كرة مختلفة مع الإعادة** - توليد رقم مؤلف من r منزلة من اصل n رقم مختلف (يسمح بتكرار الرقم في اكثر من منزلة)

٤- **التوافيق** : هو عدد المجموعات الجزئية المكونة من r عنصر التي يمكن تشكيلها من مجموعة مكونة من n عنصر مختلف **((عدد المجموعات الجزئية من مجموعة ذات n عنصراً هو 2^n مجموعة جزئية))**

التوافيق ليس فيها ترتيب و لا تكرار للعنصر اكثر من مرة في المجموعة الواحدة فكل مجموعة جزئية تمثل تبديل واحد فقط ((الترتيب غيرمهم في كل التوفيقة الواحدة))

$$\boldsymbol{\binom{n}{r} = \frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \binom{n}{n-r}}$$

P_r^n هو عدد جميع المجموعات الجزئية المكونة من r عنصر التي يمكن تشكيلها من مجموعة مكونة من n عنصر مختلف

$r!$ هو عدد تبديلات كل مجموعة جزئية من r عنصر مختلف

الشرط $1 \le r \le n$

خواص التوافيق	
$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$	$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$

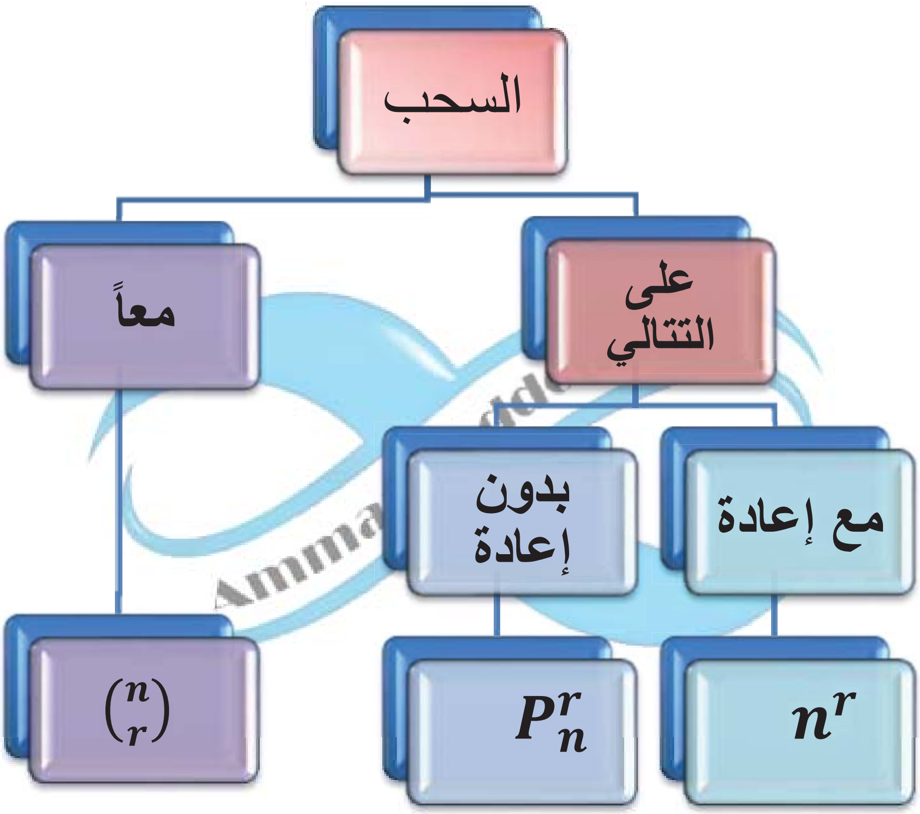
❖ متى نستخدم التوافيق ومتى نستخدم التراتيب

☆ في اللجان : (عدد الأشخاص n وعدد أعضاء اللجنة r)

١- إذا احتوت اللجنة على وضائف محددة نستخدم **التراتيب** ويكون عدد الطرق المختلفة لتشكيل اللجنة هو P_n^r

٢- إذا لم تحتوي اللجنة على وضائف محددة نستخدم **التوافيق** ويكون عدد الطرق المختلفة لتشكيل اللجنة هو $\binom{n}{r}$

☆ في السحب : يعطى عدد النتائج الممكنة سحب r كرة من أصل n كرة وفق المخطط التالي



في حالات السحب على التتالي :

١- سحب ثلاث كرات مختلفة بدون وجود ترتيب للكرات نضرب بـــ $3!$

٢- سحب ثلاث كرات اثنتان متشابهتان و الثالثة مختلفة نضرب بـــ 3

٣- سحب ثلاث كرات متشابهة لا نضرب بشيء

في حالات السحب معاً لا نضرب بشيء

لتكن المجموعة $S=\{1,2,4,5,7\}$

1–كم عدد المجموعات الجزئية يمكن تشكيلها من S ؟

2–كم عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر يمكن تشكيلها من S ؟

3–كم عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر وتحوي العدد 7 يمكن تشكيلها من S ؟

4–كم عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر مجموع عناصرها فردياً يمكن تشكيلها من S ؟

5–كم عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر مجموع عناصرها مضاعفاً لـ 3 يمكن تشكيلها من S ؟

6–كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل يمكن تشكيله من S ؟

7–كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل و مختلف الأرقام يمكن تشكيله من S ؟

8–كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل عشراته 7 يمكن تشكيله من S ؟

9–كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل و مختلف الأرقام و عشراته 7 يمكن تشكيله من S ؟

10–كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل و زوجياً يمكن تشكيله من S ؟

11–كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل مختلف الأرقام و زوجياً يمكن تشكيله من S ؟

12–كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل و مضاعفاً لـ 3 يمكن تشكيله من S ؟

13–كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل مختلف الأرقام مضاعفاً لـ 3 و يمكن تشكيله من S ؟

14–كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل و مضاعفاً لـ 5 يمكن تشكيله من S ؟

15–كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل ليس مضاعفاً لـ 5 يمكن تشكيله من S ؟

16–كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل مختلف الأرقام و مضاعفاً لـ 5 و يمكن تشكيله من S ؟

17–كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل مختلف الأرقام و ليس مضاعفاً لـ 5 يمكن تشكيله من S ؟

18–كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل و أصغر من 500 يمكن تشكيله من S ؟

19–كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل و أكبر من 500 يمكن تشكيله من S ؟

20–كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل مختلف الأرقام و أصغر من 500 يمكن تشكيله من S ؟

21–كم عدداً مؤلف من ثلاث منازل مختلف الأرقام و أكبر من 500 يمكن تشكيله من S ؟

22–كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل مختلف الأرقام و مضاعفاً لـ 5 و أصغر من 500 يمكن تشكيله من S ؟

23–كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل مختلف الأرقام و مضاعفاً لـ 5 و أكبر من 500 يمكن تشكيله من S ؟

24–كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل مختلف الأرقام و ليس مضاعفاً لـ 5 و أصغر من 500 يمكن تشكيله من S ؟

25–كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل مختلف الأرقام و ليس مضاعفاً لـ 5 و أكبر من 500 يمكن تشكيله من S ؟

26–كم عدداً مختلف الأرقام و أكبر من 20 000 يمكن تشكيله من S ؟

27–كم عدداً مختلف الأرقام زوجياً وأكبر من 20 000 يمكن تشكيله من S ؟

28–كم عدداً مختلف الأرقام مضاعفاً لـ 5 و أكبر من 20 000 يمكن تشكيله من S ؟

29–كم عدداً مختلف الأرقام ليس مضاعفاً لـ 5 و أكبر من 20 000 يمكن تشكيله من S ؟

30–كم عدداً مؤلفاً من ست منازل مختلف الأرقام ماعدا الرقم 7 مكرر مرتين يمكن تشكيله من S ؟

لتكن المجموعة $S = \{1,2,4,5,7\}$

1– كم عدد المجموعات الجزئية يمكن تشكيلها من S ؟

العدد المطلوب = $2^5 = 32$

2– كم عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر يمكن تشكيلها من S ؟

العدد المطلوب = $\binom{5}{3} = \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = 10$

3– كم عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر وتحوي العدد 7 يمكن تشكيلها من S ؟

العدد المطلوب = $\binom{4}{2} = \frac{4\times3}{2\times1} = 6$

عدد طرق اختيار عنصرين من $\{1,2,4,5\}$

4– كم عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر مجموع عناصرها فردياً يمكن تشكيلها من S ؟

مسودة

العدد المطلوب = عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر فردية

+ عدد المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين زوجي وعنصر فردي

$S_1 = \{1,5,7\}$ عناصر S الفردية

$S_2 = \{2,4\}$ عناصر S الزوجية

العدد المطلوب = $\binom{3}{3} + \binom{3}{1} \times \binom{2}{2} = 1 + 3 = 4$

عدد طرق اختيار ثلاثة عناصر من S_1

عدد طرق اختيار عنصر من S_1

عدد طرق اختيار عنصرين من S_2

5– كم عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر مجموع عناصرها مضاعفاً لـ 3 يمكن تشكيلها من S ؟

مسودة

العدد المطلوب = عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر كل منها مضاعفة للعدد **3**

+ عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر باقي قسمة كل منها على **3** يساوي **1**

+ عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر باقي قسمة كل منها على **3** يساوي **2**

+ عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر عنصر مضاعف للعدد **3** و عنصر باقي قسمته على **3** يساوي **1** و عنصر باقي قسمته على **3** يساوي **2**

$S_1 = \{1,4,7\}$ تحوي عناصر S التي باقي قسمتها على **3** يساوي **1**

$S_2 = \{2,5\}$ تحوي عناصر S التي باقي قسمتها على **3** يساوي **2**

العدد المطلوب = $\binom{3}{3} = 1$

عدد طرق اختيار ثلاثة عناصر من S_1

6– كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل يمكن تشكيله من S ؟

مئات	عشرات	آحاد
5	5	5

العدد المطلوب = $5 \times 5 \times 5 = 125$

عدد طرق اختيار الآحاد

عدد طرق اختيار العشرات

عدد طرق اختيار المئات

7– كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل و مختلف الأرقام يمكن تشكيله من S ؟

مئات	**عشرات**	آحاد
3	4	5

العدد المطلوب = $5 \times 4 \times 3 = 60$

عدد طرق اختيار الآحاد

عدد طرق اختيار العشرات

عدد طرق اختيار المئات

8– كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل عشراته 7 يمكن تشكيله من S ؟

مئات	عشرات	آحاد
5	1	5
	$\{7\}$	

العدد المطلوب = $5 \times 1 \times 5 = 25$

عدد طرق اختيار الآحاد

عدد طرق اختيار العشرات ونضعه العدد 7

عدد طرق اختيار المئات

9– كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل و مختلف الأرقام و عشراته 7 يمكن تشكيله من S ؟

مئات	عشرات	آحاد
3	1	4
	$\{7\}$	$\{1,2,4,5\}$

العدد المطلوب = $4 \times 1 \times 3 = 12$

عدد طرق اختيار الآحاد ونختاره أحد الأعداد 1,2,4,5

عدد طرق اختيار العشرات ونضعه العدد 7

عدد طرق اختيار المئات

لتكن المجموعة $S = \{1,2,4,5,7\}$

10– كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل و زوجياً يمكن تشكيله من S ؟

مئات	عشرات	آحاد
5	5	2

$\{2,4\}$

العدد المطلوب $= 2 \times 5 \times 5 = 50$

عدد طرق اختيار الآحاد و نختاره أحد العددين 2,4

عدد طرق اختيار العشرات

عدد طرق اختيار المئات

11– كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل مختلف الأرقام و زوجياً يمكن تشكيله من S ؟

مئات	عشرات	آحاد
3	4	2

$\{2,4\}$

العدد المطلوب $= 2 \times 4 \times 3 = 24$

عدد طرق اختيار الآحاد و نختاره أحد العددين 2,4

عدد طرق اختيار العشرات

عدد طرق اختيار المئات

12– كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل و مضاعفاً لـ 3 يمكن تشكيله من S ؟

مسودة

العدد المطلوب = عدد الأعداد المكونة من ثلاثة منازل كل منها مضاعفة للعدد **3**

+ عدد الأعداد المكونة من ثلاثة منازل باقي قسمة كل منها على **3** يساوي **1**

+ عدد الأعداد المكونة من ثلاثة منازل باقي قسمة كل منها على **3** يساوي **2**

+ عدد الأعداد المكونة من ثلاثة منازل منزلة مضاعفة للعدد **3** و منزلة باقي قسمته على **3** يساوي **1** و منزلة باقي قسمته على **3** يساوي **2**

$S_1 = \{1,4,7\}$ تحوي عناصر S التي باقي قسمتها على **3** يساوي **1**

$S_2 = \{2,5\}$ تحوي عناصر S التي باقي قسمتها على **3** يساوي **2**

يكون العدد المؤلفة من ثلاث منازل مضاعف لـ **3** إذا شكلناه من S_1 أو من S_2

عدد الأعداد المؤلفة من ثلاث منازل التي يمكن تشكيلها من S_1 يساوي

$3 \times 3 \times 3 = 27$

عدد طرق اختيار الآحاد

عدد طرق اختيار العشرات

عدد طرق اختيار المئات

عدد الأعداد المؤلفة من ثلاث منازل التي يمكن تشكيلها من S_2 يساوي

$2 \times 2 \times 2 = 8$

عدد طرق اختيار الآحاد

عدد طرق اختيار العشرات

عدد طرق اختيار المئات

العدد المطلوب $8 + 27 = 35$

13– كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل مختلف الأرقام و مضاعفاً لـ 3 و يمكن تشكيله من S ؟

$S_1 = \{1,4,7\}$ تحوي عناصر S التي باقي قسمتها على **3** يساوي **1**

$S_2 = \{2,5\}$ تحوي عناصر S التي باقي قسمتها على **3** يساوي **2**

يكون العدد المؤلفة من ثلاث منازل مختلفة مضاعف لـ **3** إذا شكلناه من S_1

عدد الأعداد المؤلفة من ثلاث منازل التي يمكن تشكيلها من S_1 يساوي

العدد المطلوب $= 3 \times 2 \times 1 = 6$

عدد طرق اختيار الآحاد

عدد طرق اختيار العشرات

عدد طرق اختيار المئات

14– كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل و مضاعفاً لـ 5 يمكن تشكيله من S ؟

مئات	عشرات	آحاد
5	5	1

$\{5\}$

العدد المطلوب $= 1 \times 5 \times 5 = 25$

عدد طرق اختيار الآحاد ونضعه 5

عدد طرق اختيار العشرات

عدد طرق اختيار المئات

15– كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل ليس مضاعفاً لـ 5 يمكن تشكيله من S ؟

مئات	عشرات	آحاد
5	5	4

$\{1,2,4,7\}$

العدد المطلوب $= 4 \times 5 \times 5 = 100$

عدد طرق اختيار الآحاد ونختاره أحد الأعداد *1,2,4,7*

عدد طرق اختيار العشرات

عدد طرق اختيار المئات

لتكن المجموعة $S = \{1,2,4,5,7\}$

16– كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل مختلف الأرقام و مضاعفاً لـ 5 و يمكن تشكيله من S ؟

مئات	عشرات	آحاد
3	4	1
		$\{5\}$

العدد المطلوب $= 1 \times 4 \times 3 = 12$

- عدد طرق اختيار الآحاد ونضعه 5
- عدد طرق اختيار العشرات
- عدد طرق اختيار المئات

17– كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل مختلف الأرقام و ليس مضاعفاً لـ 5 يمكن تشكيله من S ؟

مئات	عشرات	آحاد
3	4	4
		$\{1,2,4,7\}$

العدد المطلوب $= 4 \times 4 \times 3 = 48$

- عدد طرق اختيار الآحاد نختاره أحد الأعداد 1,2,4,7
- عدد طرق اختيار العشرات نختاره من S عدا رقم الآحاد
- عدد طرق اختيار المئات

18– كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل و أصغر من 500 يمكن تشكيله من S ؟

مئات	عشرات	آحاد
3	5	5
$\{1,2,4\}$		

العدد المطلوب $= 3 \times 5 \times 5 = 75$

- عدد طرق اختيار المئات ونختاره أحد الأعداد 1,2,4
- عدد طرق اختيار الآحاد
- عدد طرق اختيار العشرات

19– كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل و أكبر من 500 يمكن تشكيله من S ؟

مئات	عشرات	آحاد
2	5	5
$\{5,7\}$		

العدد المطلوب $= 2 \times 5 \times 5 = 50$

- عدد طرق اختيار المئات ونختاره أحد العددين 5,7
- عدد طرق اختيار الآحاد
- عدد طرق اختيار العشرات

20– كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل مختلف الأرقام و أصغر من 500 يمكن تشكيله من S ؟

مئات	عشرات	آحاد
3	3	4
$\{1,2,4\}$		

العدد المطلوب $= 3 \times 4 \times 3 = 36$

- عدد طرق اختيار المئات ونختاره أحد الأعداد 1,2,4
- عدد طرق اختيار الآحاد
- عدد طرق اختيار العشرات

21– كم عدداً مؤلف من ثلاث منازل مختلف الأرقام و أكبر من 500 يمكن تشكيله من S ؟

مئات	عشرات	آحاد
2	3	4
$\{5,7\}$		

العدد المطلوب $= 2 \times 4 \times 3 = 24$

- عدد طرق اختيار المئات ونختاره أحد العددين 5,7
- عدد طرق اختيار الآحاد
- عدد طرق اختيار العشرات

22– كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل مختلف الأرقام و مضاعفاً لـ 5 و أصغر من 500 يمكن تشكيله من S ؟

مئات	عشرات	آحاد
3	3	1
$\{1,2,4\}$		$\{5\}$

العدد المطلوب $= 1 \times 3 \times 3 = 9$

- عدد طرق اختيار الآحاد ونضعه 5
- عدد طرق اختيار المئات ونختاره أحد الأعداد 1,2,4
- عدد طرق اختيار العشرات

23– كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل مختلف الأرقام و مضاعفاً لـ 5 و أكبر من 500 يمكن تشكيله من S

مئات	عشرات	آحاد
1	3	1
$\{7\}$		$\{5\}$

العدد المطلوب $= 1 \times 1 \times 3 = 3$

- عدد طرق اختيار الآحاد ونضعه 5
- عدد طرق اختيار المئات ونضعه 7
- عدد طرق اختيار العشرات

لتكن المجموعة $S = \{1,2,4,5,7\}$

24– كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل مختلف الأرقام و ليس مضاعفاً لـ 5 و أصغر من 500 يمكن تشكيله من S ؟

مئات	عشرات	آحاد
3	3	3
$\{1,2,4\}$		

العدد المطلوب $= 3 \times 3 \times 3 = 27$

عدد طرق اختيار المئات ونختاره أحد الأعداد 1,2,4

عدد طرق اختيار الآحاد نختاره من S عدا العدد 5 ورقم المئات

عدد طرق اختيار العشرات

25– كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل مختلف الأرقام و ليس مضاعفاً لـ 5 و أكبر من 500 يمكن تشكيله من S ؟

طريقة 1:

العدد المطلوب = $\underbrace{\text{عدد الأعداد المؤلفة من ثلاثة منازل مختلفة الأرقام وليست مضاعفة ل 5 وأكبر من 500 مئاتها 5}}_{a}$ + $\underbrace{\text{عدد الأعداد المؤلفة من ثلاثة منازل مختلفة الأرقام وليست مضاعفة ل 5 و أكبر من 500 مئاتها ليست 5}}_{b}$

مئات	عشرات	آحاد
1	3	4
$\{5\}$		$\{1,2,4,7\}$

$a = 1 \times 3 \times 4 = 12$

عدد طرق اختيار المئات ونضعه 5

عدد طرق اختيار الآحاد ونختاره أحد الأعداد 1,2,4,7

عدد طرق اختيار العشرات

مئات	عشرات	آحاد
1	3	3
$\{7\}$		$\{1,2,4\}$

$b = 1 \times 3 \times 3 = 9$

عدد طرق اختيار المئات ونضعه 7

عدد طرق اختيار الآحاد ونختاره أحد الأعداد 1,2,4

عدد طرق اختيار العشرات

العدد المطلوب $= a + b = 12 + 9 = 21$

طريقة 2:

العدد المطلوب = $\underbrace{\text{عدد الأعداد المؤلفة من ثلاثة منازل مختلفة الأرقام وأكبر من 500}}_{a}$ − $\underbrace{\text{عدد الأعداد المؤلفة من ثلاثة منازل مختلفة الأرقام ومضاعفة ل 5 وأكبر من 500}}_{b}$

مئات	عشرات	آحاد
2	3	4
$\{5,7\}$		

$a = 2 \times 4 \times 3 = 24$

عدد طرق اختيار المئات ونختاره أحد العددين 5,7

عدد طرق اختيار الآحاد

عدد طرق اختيار العشرات

مئات	عشرات	آحاد
1	3	1
$\{7\}$		$\{5\}$

$b = 1 \times 1 \times 3 = 3$

عدد طرق اختيار الآحاد ونضعه 5

عدد طرق اختيار المئات ونضعه 7

عدد طرق اختيار العشرات

العدد المطلوب $= a - b = 24 - 3 = 21$

26– كم عدداً مختلف الأرقام و أكبر من 20 000 يمكن تشكيله من S ؟

العدد مختلف الأرقام و أكبر من 20 000 مشكل من S مؤلف من خمس منازل

عشرات الألوف	ألوف	مئات	عشرات	آحاد
4	1	2	3	4
$\{2,4,5,7\}$				

العدد المطلوب $= 4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96$

عدد طرق اختيارعشرات الألوف ونختاره أحد الأعداد 2,4,5,7

عدد طرق اختيار الآحاد

عدد طرق اختيار العشرات

عدد طرق اختيار المئات

عدد طرق اختيار الألوف

لتكن المجموعة $S=\{1,2,4,5,7\}$

27– كم عدداً مختلف الأرقام زوجياً وأكبر من $20\,000$ يمكن تشكيله من S ؟

العدد مختلف الأرقام و أكبر من 20 000 مشكل من S مؤلف من خمس منازل

عشرات الألوف	ألوف	مئات	عشرات	آحاد
3	1	2	3	2
				$\{2,4\}$

العدد المطلوب $=2\times3\times3\times2\times1=36$

عدد طرق اختيار الآحاد

ونختاره أحد الأعداد 2,4

عدد طرق اختيار عشرات الألوف

ونختاره من S عدا الرقم 1 ورقم الآحاد

عدد طرق اختيار العشرات

عدد طرق اختيار المئات

عدد طرق اختيار الألوف

28– كم عدداً مختلف الأرقام مضاعفاً لـ 5 و أكبر من $20\,000$ يمكن تشكيله من S ؟

العدد مختلف الأرقام و أكبر من 20 000 مشكل من S مؤلف من خمس منازل

عشرات الألوف	ألوف	مئات	عشرات	آحاد
3	1	2	3	1
$\{2,4,7\}$				$\{5\}$

العدد المطلوب $=1\times3\times3\times2\times1=18$

عدد طرق اختيار الآحاد ونضعه 5

عدد طرق اختيار عشرات الألوف

ونختاره أحد الأعداد 2,4,7

عدد طرق اختيار العشرات

عدد طرق اختيار المئات

عدد طرق اختيار الألوف

29– كم عدداً مختلف الأرقام ليس مضاعفاً لـ 5 و أكبر من $20\,000$ يمكن تشكيله من S ؟

طريقة 1

العدد مختلف الأرقام و أكبر من 20 000 مشكل من S مؤلف من خمس منازل

a

العدد المطلوب=عدد الأعداد المؤلفة من خمسة منازل مختلفة الأرقام وليست مضاعفة لـ 5 وأكبر من $20\,000$ عشرات ألوفها ألوفها 5 + عدد الأعداد المؤلفة من خمسة منازل مختلفة الأرقام وليست مضاعفة لـ 5 و أكبر من $20\,000$ عشرات ألوفها ليست 5

b

عشرات الألوف	ألوف	مئات	عشرات	آحاد
1	1	2	3	4
$\{5\}$				$\{1,2,4,7\}$

$a=1\times4\times3\times2\times1=24$

عدد طرق اختيارعشرات الألوف نضعه 5

عدد طرق اختيار الآحاد

ونختاره أحد الأعداد 2,4,5,7

عدد طرق اختيار العشرات

عدد طرق اختيار المئات

عدد طرق اختيار الألوف

عشرات الألوف	ألوف	مئات	عشرات	آحاد
3	1	2	3	3
$\{2,4,7\}$				

$b=3\times3\times3\times2\times1=54$

عدد طرق اختيار عشرات الألوف

ونختاره أحد الأعداد 2,4,7

عدد طرق اختيار الآحاد ونختاره من S

عدا الرقم 5 ورقم عشرات الألوف

عدد طرق اختيار العشرات ونختاره من S

عدا رقم الآحاد ورقم عشرات الألوف

عدد طرق اختيار المئات

عدد طرق اختيار الألوف

العدد المطلوب $=a+b=24+54=78$

طريقة 2:

العدد مختلف الأرقام و أكبر من 20 000 مشكل من S مؤلف من خمس منازل

العدد المطلوب= عدد الأعداد المؤلفة من خمسة منازل مختلفة الأرقام وأكبر من $20\,000$

ويساوي (96) [حسب الطلب 26] − عدد الأعداد المؤلفة من خمسة منازل مختلفة

الأرقام ومضاعفة لـ 5 وأكبر من $20\,000$ ويساوي (18) [حسب الطلب 28]

العدد المطلوب $=96-18=78$

30– كم عدداً مؤلفاً من ست منازل مختلف الأرقام ماعدا الرقم 7 مكرر مرتين يمكن تشكيله من S ؟

مئات الألوف	عشرات الألوف	ألوف	مئات	عشرات	آحاد

العدد المطلوب $=6\times5\times4\times3\times1=360$

عدد طرق اختيار خانة للرقم 1

عدد طرق اختيار خانة للرقم 2

عدد طرق اختيار خانة للرقم 4

عدد طرق اختيار خانة للرقم 5

عدد طرق وضع الرقم 7 في الخانتين المتبقيتين

لدينا سبعة كتب مختلفة ثلاثة كتب منها للمؤلف A و أربعة كتب للمؤلف B

1– ما عدد طرق ترتيب الكتب على رف ؟

2– ما عدد طرق ترتيب الكتب على الرف بشرط أول كتاب للمؤلف B ؟

3– ما عدد طرق ترتيب الكتب على الرف بشرط أول كتاب-كتاب معين للمؤلف B ؟

4– ما عدد طرق ترتيب الكتب على الرف بشرط أول ثلاثة كتب للمؤلف B ؟

5– ما عدد طرق ترتيب الكتب على الرف بشرط لا يتجاور كتابان لنفس المؤلف ؟

6– ما عدد طرق ترتيب الكتب على الرف بشرط يتجاور كتابان معينان للمؤلف B؟

1– ما عدد طرق ترتيب الكتب على رف ؟

[طريقة] العدد المطلوب = $7!$

2– ما عدد طرق ترتيب الكتب على الرف بشرط أول كتاب للمؤلف B ؟

[طريقة] العدد المطلوب = $4 \times 6!$

عدد طرق اختيار كتاب للمؤلف B

عدد طرق توزيع الكتب من غير الكتاب المختار

3– ما عدد طرق ترتيب الكتب على الرف بشرط أول كتاب-كتاب معين للمؤلف B ؟

[طريقة] العدد المطلوب = $6!$

عدد طرق توزيع الكتب من غير الكتاب المعين للمؤلف B

4– ما عدد طرق ترتيب الكتب على الرف بشرط أول ثلاثة كتب للمؤلف B ؟

[طريقة] العدد المطلوب = $\binom{4}{3} \times 3! \times 4! = (4!)^2$

عدد طرق اختيار ثلاثة كتب للمؤلف B من أربعة كتب

عدد طرق ترتيب الكتب الثلاثة المختارة

عدد طرق ترتيب الكتب من غير الكتب الثلاثة المختارة

5– ما عدد طرق ترتيب الكتب على الرف بشرط لا يتجاور كتابان لنفس المؤلف ؟

لكي لا يتجاور كتابان لنفس المؤلف نرتب الكتب بالتناوب بدءاً من كتاب للمؤلف B

عندئذ:

[طريقة] العدد المطلوب = $4! \times 3!$

عدد طرق ترتيب كتب المؤلف B في المواقع 1,3,5,7

عدد طرق ترتيب كتب المؤلف A في المواقع 2,4,6

6– ما عدد طرق ترتيب الكتب على الرف بشرط يتجاور كتابان معينان للمؤلف B؟

[طريقة] العدد المطلوب = $6 \times 2! \times 5!$

عدد المواقع التي يمكن أنّ يتجاور فيها الكتابيين المعينين للمؤلف B كما يلي

إما أنّ يتجاوران في الموقعين 1,2

أو 2,3 او 3,4 أو 4,5 أو 5,6 أو 6,7

عدد طرق ترتيب الكتابين المعينين

عدد طرق ترتيب الكتب من غير الكتابين المعينين

❁ منشور ذي الحدين :

أياً كان العددين العقديان a, b وأياً كان العدد $n \geq 1$ كان :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

$$= a^n + n a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

❖ نتائج :

١) عدد حدود منشور ذي الحدين يساوي $n+1$ حد .

٢) صيغة الحد ذي الدليل r في منشور ذي الحدين هو $\boldsymbol{T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r}$.

٣) إن عدد المجموعات الجزئية من مجموعة مكونة من n عنصراً يُساوي 2^n .

❖ بماذا يفيد منشور ذي الحدين

❖ إيجاد منشور مقدار ما

أوجد منشور $(x+1)^4$

$$(x+2)^4 = \binom{4}{0} x^4 + \binom{4}{1} x^3 \times 2 + \binom{4}{2} x^2 \times (2)^2 + \binom{4}{3} x^1 \times (2)^3 + \binom{4}{0} \times (2)^4$$
$$= x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$$

❖ حساب مجموع

أنشر المقدار $(1+3x)^n$ واستنتج المجموع

$$S_n = 1 + \binom{n}{1} 3 + \binom{n}{2} 3^2 + \cdots + \binom{n}{r} 3^r + \cdots \binom{n}{n} 3^n$$

$$(1+3x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}(3x) + \binom{n}{2}(3x)^2 + \cdots . + \binom{n}{r}(3x)^r + \cdots + \binom{n}{n}(3x)^n$$

ولاستنتاج قيمة المجموع S_n يكفي أن نعوض بدل كل x بواحد في عبارة المنشور فنجد

$$S_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}(3) + \binom{n}{2}(3)^2 + \cdots . + \binom{n}{3}(3)^r + \cdots + \binom{n}{n}(3)^n = (1+3)^n = 4^n$$

✩ كيف نوجد الحد المستقل عن x في منشور ذي الحدين

من عبارة الحد العام لمنشور ذي الحدين $\boldsymbol{T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r}$ نضع أس x يساوي الصفر ونوجد قيمة r

التطبيقات الهندسية في التحليل التوافقي

في أي شكل هندسي محدب عدد رؤوسه n :

١- عدد الأقطار : $\binom{n}{2} - n$

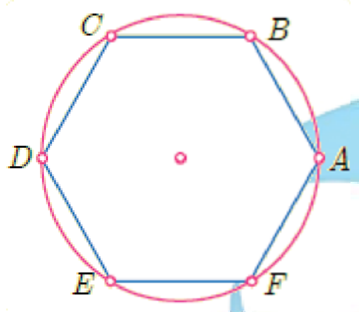
٢- عدد نقاط تقاطع الأقطار داخل الشكل : $\binom{n}{4} + n$

٣- عدد الاشعة المرسومة من نقاط الشكل يساوي: $2\binom{n}{2}$

في أي شبكة عدد المستطيلات او متوازيات الاضلاع الموجودة هو: $\binom{\text{خطوط عدد العرض}}{2} \cdot \binom{\text{خطوط عدد الطول}}{2}$

نشاط 2 مثلثات في مسدّس:

في الشكل المرسوم جانباً لدينا ست نقاط A و B و C و D و E و F موزّعة على دائرة بحيث تشكل رؤوس مسدّس منتظم.



نُجري التجربة الآتية: نصل بين ثلاث نقاط منها لنحصل على مثلّث.

❶ ما عدد المثلثات التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب؟

❷ ما عدد المثلثات القائمة التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب؟

❸ ما عدد المثلثات المنفرجة الزاوية التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب؟

الحل :

❶ كلّ مثلث يتعيّن بثلاث نقاط من النقاط الست المعطاة، وأي مجموعة جزئية مؤلفة من ثلاث نقاط تعين إذاً عدد المثلثات التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب يساوي

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} = 20$$

❷ كل قطر في المسدس هو وتر لأربعة مثلثات قائمة رؤوسها هي رؤوس المسدس عدا طرفيّ القطر المختار ولدينا ثلاثة أقطار، فعدد المثلثات القائمة التي يمكن الحصول عليها هو

$$4 \times 3 = 12$$

❸ هناك مثلث واحدٌ منفرج الزاوية في A مثلاً. إذن عدد المثلثات المنفرجة الزاوية التي يمكن الحصول عليها بهذا الأسلوب يساوي عدد رؤوس المسدس أي 6

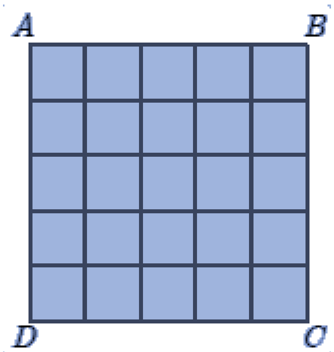
<u>بطريقة أخرى</u> :لدينا في الحالة العامة ٢٠ مثلث مشكلة من النقاط الست المتوضعة على دائرة بشكل مسدس منتظم منها منها ١٢ مثلث قائم و ٢ مثلث متساوي الاضلاع بقي لدينا المثلثات المنفرجة هي ((٢٠-١٤=٦))

$\left\{\frac{10}{165}\right\}$ التعداد على شبكة :

في الشكل المجاور تأمل شبكة منتظمة مرسومة في مربع $ABCD$.

نرغب بحساب عدد المستطيلات المرسومة في الشكل . علماً أنّ المربع مستطيل خاص .

الحل:



المستطيل ينتج من تقاطع خطين طول مع خطين عرض أي نحتاج من الخطوط الطولية خطين و من خطوط العرض خطين والترتيب غير مهم ومنه عدد المستطيلات هو :

$$\binom{6}{2} \times \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} \times \frac{6 \times 5}{2} = 15 \times 15 = 225$$

مع اطيب التمنيات للجميع بالنجاح

المدرس : عمـــار قدوري

نتأمل مضلع محدب مكون من 11 رؤوس

1– ما عدد القطع المستقيمة المشكلة من رؤوس المضلع ؟

2– ما عدد القطع المستقيمة التي تقبل A طرفاً لها حيث A رأس في المضلع؟

3– ما عدد الأشعة التي يمكن تشكيلها من رؤوس المضلع؟

4– ما عدد المثلثات المشكلة من رؤوس المضلع؟

5– ما عدد المثلثات التي تقبل A رأساً لها حيث A رأس في المضلع؟

6– ما عدد المثلثات التي تقبل $[AB]$ ضلعاً لها حيث B و A رأسين في المضلع؟

7– ما عدد المضلعات الرباعية المشكلة من رؤوس المضلع؟

8– ما عدد أقطار المضلع؟

9– ما عدد نقاط تقاطع أقطار المضلع(علماً أن كل قطرين يتقاطعان في نقطة واحدة فقط في غير الرؤوس)؟

1– ما عدد القطع المستقيمة المشكلة من رؤوس المضلع ؟

القطعة المستقيمة تتحدد بنقطتين عندئذ:

العدد المطلوب = $\binom{11}{2} = \frac{11\times10}{2\times1} = 55$ [قطعة مستقيمة]

عدد طرق اختيار نقطتين رؤوس المضلع

2– ما عدد القطع المستقيمة التي تقبل A طرفاً لها حيث A رأس في المضلع؟

كل قطعة مستقيمة تمر من A تتحدد بنقطة واحدة عندئذ:

العدد المطلوب = $\binom{10}{1} = 10$ [قطعة مستقيمة]

عدد طرق اختيار نقطة من رؤوس المضلع عدا الرأس A

3– ما عدد الأشعة التي يمكن تشكيلها من رؤوس المضلع؟

كل قطعة مستقيمة تعين شعاعين عندئذ:

العدد المطلوب = $\binom{11}{2} \times 2 = 110$ [شعاعاً]

عدد القطع المستقيمة المشكلة من رؤوس المضلع

عدد الأشعة المشكلة من قطعة مستقيمة

4– ما عدد المثلثات المشكلة من رؤوس المضلع؟

كل مثلث يتحدد بثلاث نقاط عندئذ:

العدد المطلوب = $\binom{11}{3} = \frac{11\times10\times9}{3\times2\times1} = 225$ [مثلثاً]

عدد طرق اختيار ثلاث نقط من رؤوس المضلع

5– ما عدد المثلثات التي تقبل A رأساً لها حيث رأس في المضلع؟

كل مثلث يمر من A يتحدد بنقطتين عندئذ:

العدد المطلوب = $\binom{10}{2} = \frac{10\times9}{2\times1} = 45$ [مثلثاً]

عدد طرق اختيار نقطتين من رؤوس المضلع عدا الرأس A

6– ما عدد المثلثات التي تقبل $[AB]$ ضلع ا لها حيث B و A رأسين في المضلع؟

كل مثلث يقبل $[AB]$ ضلع له يتحدد بنقطة عندئذ:

العدد المطلوب = $\binom{9}{1} = 9$ [مثلثاً]

عدد طرق اختيار نقطة من رؤوس المضلع عدا الرأسين A , B

7– ما عدد المضلعات الرباعية المشكلة من رؤوس المضلع؟

العدد المطلوب = $\binom{11}{4} = \frac{11\times10\times9\times8}{4\times3\times2\times1} = 330$ [مضلعاً]

عدد طرق اختيار أربع نقط من رؤوس المضلع

8– ما عدد أقطار المضلع؟

عدد القطع المستقيمة الواصبة بين كل راسين من رؤوس المضلع = عدد الأقطار – عدد الأضلاع

عدد الأقطار = $\binom{11}{2} - 11 = 44$ [قطراً]

عدد القطع المستقيمة الواصلة بين رؤوس المضلع

عدد الأضلاع

9– ما عدد نقاط تقاطع أقطار المضلع(علماً أن كل قطرين يتقاطعان في نقطة واحدة فقط في غير الرؤوس)؟

عدد الرؤوس + عدد نقاط تقاطع الأقطار داخل المضلع= عدد نقاط تقاطع الأقطار

عدد الرؤوس + عدد المضلعات الرباعية المشكلة من رؤوس المضلع= عدد نقاط تقاطع الأقطار

عدد نقاط تقاطع الأقطار = $\binom{11}{4} + 11 = 341$ [نقطة تقاطع]

عدد المضلعات الرباعية المشكلة من رؤوس المضلع

عدد الرؤوس

النموذج السادس (وزاري)

أوجد الحد المستقل عن x في منشور ذي الحدّين $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^6$

الحل:

$$T_r=\binom{n}{r}a^{n-r}.b^r=\binom{6}{r}(x^2)^{6-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r=\binom{6}{r}.x^{12-3r}$$

يكون الحد مستقل عن x في المنشور إذا كان $12-3r=0$ وبالتالي $r=4$

$$T_4=\binom{6}{4}=\frac{6\times5\times4\times3}{4\times3\times2}=70$$

النموذج الخامس (وزاري) : رف يحوي 7 كتب لمؤلّفين، ثلاث كتب للمؤلّف A وأربعة كتب للمؤلّف B

1. بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا كانت الكتب الثلاثة الأولى للمؤلّف B.
2. بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا اشترطنا أن يكون كتاباً معيّناً للمؤلّف B في البداية.

الحل:

1. يمكن اختيار الكتب الثلاثة الأولى بـ P_4^3 طريقة وباقي الكتب بـ P_4^4 وعدد الطرق
$P_4^3.P_4^4=(4\times3\times2).(4\times3\times2)=576$ طريقة
2. يمكن اختيار الكتاب المعيّن بطريقة واحدو والباقي بـ P_6^6 وعدد الطرق
$1.P_6^6=6!=6\times5\times4\times3\times2=720$ طريقة

الاختبار الثالث: نريد تأليف لجنة مكوّنة من (مدير ونائب مدير وأمين سر) من مجموعة تضم خمسة أشخاص. بكم طريقة يمكن اختيار هذه اللجنة علماً بأنّ في المجموعة شخصين متخاصمين لا يجتمعان في اللجنة ذاتها

الحل:

إذا تمّ اختيار المدير من أحد الأشخاص المتخاصمين فيتم الاختيار بطريقتين، وبعد اختيار المدير يُستثنى الشخص الخصم له فيتم اختيار النائب بثلاث طرق وأمين السر بطريقتين وعدد الطرق في هذه الحالة:

$$P_2^1\times P_2^3\times3=2\times6\times3=36$$

أما إذا استثنينا الشخصين المتخاصمين يتم اختيار المدير بثلاث طرق والنائب بطريقتين وأمين السر بطريقة واحدة فقط وعدد الطرق في هذه الحالة:

$$P_3^3=3\times2\times1=6$$

وعدد الطرق جميعاً هو: $36+6=42$ طريقة.

✍ يمكن الحل اعتماداً على الحدث المتمّم:

$$P_5^3-P_2^2\times P_3^1\times3=60-2\times3\times3=60-18=42$$

الاختبار الرابع : لتكن المجموعة $S = \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$

❶ ما عدد الأعداد المكوّنة من ثلاث خانات مختلفة مثنى مثنى وأرقامها مأخوذة من S ؟

❷ ما عدد الأعداد المؤلّفة من ثلاث خانات مختلفة مثنى مثنى وأرقامها مأخوذة من S وكل عدد منها من مضاعفات العدد 5 وأصغر من 500 ؟

الحل:

❶ يمكن اختيار الآحاد بست طرق والعشرات بخمس طرق والمئات بأربع طرق وعدد الأعداد:

$6 \times 5 \times 4 = 120$ عدد

❷ يمكن اختيار المئات بطريقتين والعشرات بأربع طرق والآحاد بطريقة واحدة وعدد الأعداد:

$2 \times 4 \times 1 = 8$ عدد

دورة أولى ٢٠١٧

السـؤال الرابع :

في أحد الامتحانات يطلب من الطالب الإجابة عن خمسة أسئلة من ثمانية أسئلة

a) بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة ؟

b) بكم طريقة يمكنه الاختيار إذا كانت الأسئلة الثلاثة الأخيرة إجبارية ؟

الحـــــــل :

- **عدد الطرق التي يختار بها الطالب خمسة أسئلة من ثمانية هو :** $\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3!} = 56$
- **إذا كانت ثلاثة أسئلة إجبارية فعلى الطالب أن يختار سؤالين من خمسة ويكون عدد الطرق هو :**

$$\binom{5}{2} \times 1 = \frac{5 \times 4}{2!} \times 1 = 10$$

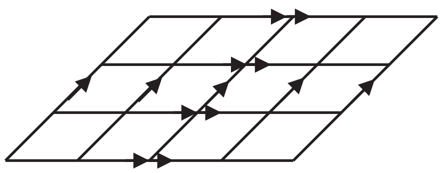
اولى ٢٠١٨

السؤال الثالث :

في الشكل المجاور نتأمل شبكة منتظمة من المستقيمات المتوازية تشكل فيما بينها متوازيات أضلاع والمطلوب :

احسب عدد متوازيات الأضلاع في الشبكة

الحـــــــل :



كل متوازي أضلاع ينتج عن تقاطع مستقيمين أفقيين مع مستقيمين مائلين

حيث عدد المستقيات الأفقية 4 وعدد المستقيمات المائلة 5

فيكون عدد متوازيات الأضلاع هو : $\binom{4}{2} \times \binom{5}{2} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 6 \times 10 = 60$

ثانية ٢٠١٨

السؤال الثالث :

في إحدى مركز الخدمة ثلاثة مهندسين وخمسة عمال ، كم لجنة قوامها مهندس واحد وعاملان يمكن تشكيلها لمتابعة أعمال الخدمة

الحـــــــــــــل :

$$\binom{3}{1}\times\binom{5}{2}=\frac{3}{1}\times\frac{5\times4}{2\times1}=3\times10=30$$

اولى ٢٠١٩

السؤال الثاني : عين الحد المستقل عن x في منشور $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^6$

الحـــــــــــــل :

- الحد العام في منشور $(a+b)^n$ هو : $T_r=\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$

$$T_r=\binom{6}{r}(x)^{6-r}\left(\frac{1}{x^2}\right)^r=\binom{6}{r}x^{6-r}\times\frac{1}{x^{2r}}=\binom{6}{r}\frac{x^{6-r}}{x^{2r}}=\binom{6}{r}x^{6-3r}$$

$$6-3r=0\Rightarrow 3r=6\Rightarrow r=2$$

أي أن الحد المستقل عن x هو الحد الثالث

$$T_2=\binom{6}{2}x^{6-6}=\frac{6\times5}{2\times1}\Rightarrow T_2=15$$

ثانية ٢٠١٩

السؤال الثاني : عين قيمة العدد الطبيعي n فيما يأتي : $\binom{15}{n+3}=\binom{15}{2n}$

الحـــــــــــــل :

شرط الحل $2n\le15 \wedge n+3\le15\Rightarrow n\le\frac{15}{2} \wedge n\le12\Rightarrow 0\le n\le7$

إما $2n=n+3\Rightarrow n=3$ فتكون قيمة العدد الطبيعي n هي 3

أو $2n+n+3=15\Rightarrow 3n=12\Rightarrow n=4$ فتكون قيمة العدد الطبيعي n هي 4

اولى ٢٠٢٠

السؤال الثالث : يوجد لبعض أنواع السيارات مذياع ذو قفل رقمي مضاد للسرقة يفتح عند إدخال كود مكون من ثلاث خانات يمكن لأي منها أن يأخذ أياً من القيم : $0,1,2,3,4,5$

① ما هو عدد الرمازات التي تصلح للقفل

② ما هو عدد الرمازات التي تصلح للقفل المكونة من خانات مختلفة مثنى مثنى

الحـــــــــــــل :

① $6\times6\times6=216$

② $6\times5\times4=120$

ثانية ٢٠٢٠

يحتوي صندوق على 5 كرات مرقمة بالأرقام $1,2,3,4,5$ نسحب من الصندوق كرتين على التتالي مع الإعادة والمطلوب :

① كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب

② كم عدد النتائج المختلفة والتي تشتمل على كرتين مجموعهما عدد فردي

الحـــــــــــل :

$$n(\Omega) = 5 \times 5 = 25$$

A (المجموع فردي أي كرة رقمها فردي وأخرى رقمها زوجي)

$$n(A) = 3 \times 2 \times 2 = 12$$

اولى ٢٠٢١

<u>السؤال الثاني</u> : عين قيمة الحد الثابت (المستقل عن x) في منشور $\left(x + \dfrac{1}{x^2}\right)^{12}$

الحـــــــــــل :

- الحد العام في منشور $(a+b)^n$ هو : $T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$

$$T_r = \binom{12}{r}(x)^{12-r}\left(\frac{1}{x^2}\right)^r = \binom{12}{r} x^{12-r} \times \frac{1}{x^{2r}} = \binom{12}{r}\frac{x^{12-r}}{x^{2r}} = \binom{12}{r} x^{12-3r}$$

$$12 - 3r = 0 \Rightarrow 3r = 12 \Rightarrow r = 4$$

أي أن الحد المستقل عن x هو الحد الخامس

$$T_4 = \binom{12}{4} x^{12-12} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \Rightarrow T_4 = 495$$

ثانية ٢٠٢١

عين قيمة n التي تحقق المعادلة : $P^3_{n+3} = 16\binom{n+2}{2}$

الحـــــــــــل :

شرط الحل $n+3 \ge 3 \wedge n+2 \ge 2 \Rightarrow n \ge 0$

$$P^3_{n+3} = 16\binom{n+2}{2} \Rightarrow (n+3)(n+2)(n+1) = 16 \times \frac{(n+2)(n+1)}{2!} \Rightarrow$$

$$(n+3)(n+2)(n+1) = 8(n+2)(n+1) \Rightarrow n+3 = 8 \Rightarrow \boxed{n = 5}$$

المدرس : عمار قدوري

مجموعة مؤلفة من خمسة أشخاص اثنان منهم متخاصمان

نريد تشكيل لجنة مؤلفة من ثلاثة أشخاص

1− ما عدد اللجان التي يمكن تشكيلها ؟

2− ما عدد اللجان التي لا تحوي أي متخاصم ؟

3− ما عدد اللجان التي تحوي أحد المتخاصمين فقط ؟

4− ما عدد اللجان التي تحوي أحد المتخاصمين على الأكثر ؟

أو: ما عدد اللجان التي يمكن تشكيلها بحيث لا يجتمع متخاصمان في اللجنة ؟

1− ما عدد اللجان التي يمكن تشكيلها ؟

العدد المطلوب = $\binom{5}{3} = \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = 10$ [لجنة]

2− ما عدد اللجان التي لا تحوي أي متخاصم ؟

العدد المطلوب = $\binom{3}{3} = 1$ [لجنة]

عدد طرق اخيار ثلاثة أشخاص

من المجموعة من غير المتخاصمين

3− ما عدد اللجان التي تحوي أحد المتخاصمين فقط ؟

العدد المطلوب = $2 \times \binom{3}{2} = 6$ [لجنة]

عدد طرق اختيار أحد المتخاصمين

عدد طرق اخيار شخصين من المجموعة من غير المتخاصمين

4− ما عدد اللجان التي تحوي أحد المتخاصمين على الأكثر ؟

عدد اللجان التي تحوي متخاصم فقط + عدد اللجان التي لا تحوي أي متخاصم = العدد المطلوب

عدد اللجان التي لا تحوي أي متخاصم = $\binom{3}{3} = 1$ [لجنة]

عدد طرق اخيار ثلاثة أشخاص

من المجموعة من غير المتخاصمين

عدد اللجان التي تحوي متخاصم فقط = $2 \times \binom{3}{2} = 6$ [لجنة]

عدد طرق اختيار أحد المتخاصمين

عدد طرق اخيار شخصين من المجموعة من غير المتخاصمين

العدد المطلوب = $1 + 6 = 7$ [لجنة]

نريد تشكيل لجنة مؤلفة من ثلاثة أشخاص (مدير – نائب مدير – أمين سر)

1− ما عدد اللجان التي يمكن تشكيلها ؟

2− ما عدد اللجان التي لا تحوي أي متخاصم ؟

3− ما عدد اللجان التي تحوي أحد المتخاصمين فقط ؟

4− ما عدد اللجان التي تحوي أحد المتخاصمين على الأكثر ؟

أو: ما عدد اللجان التي يمكن تشكيلها بحيث لا يجتمع متخاصمان في اللجنة ؟

1− ما عدد اللجان التي يمكن تشكيلها ؟

العدد المطلوب = $5 \times 4 \times 3 = 60$ [لجنة]

عدد طرق اختيار مدير من المجموعة

عدد طرق اختيار نائب مدير من المجموعة

عدد طرق اختيار أمين سر من المجموعة

2− ما عدد اللجان التي لا تحوي أي متخاصم ؟

العدد المطلوب = $3 \times 2 \times 1 = 6$ [لجنة]

عدد طرق اختيار مدير من المجموعة من غير المتخاصمين

عدد طرق اختيار نائب مدير من المجموعة من غير المتخاصمين

عدد طرق اختيار أمين سر من المجموعة من غير المتخاصمين

3− ما عدد اللجان التي تحوي أحد المتخاصمين فقط ؟

العدد المطلوب = $2 \times \binom{3}{2} \times 3 \times 2 \times 1 = 36$ [لجنة]

عدد طرق اختيار أحد المتخاصمين

عدد طرق اختيار شخصين من المجموعة من غير المتخاصمين

عدد اللجان التي يمكن تشكيلها من المجموعة التي تحوي

الشخصين غير المتخاصمين المختارين و أحد المتخاصمين المختار

4− ما عدد اللجان التي تحوي أحد المتخاصمين على الأكثر ؟

عدد اللجان التي تحوي متخاصم فقط + عدد اللجان التي لا تحوي أي متخاصم = العدد المطلوب

عدد اللجان التي لا تحوي أي متخاصم = $3 \times 2 \times 1 = 6$ [لجنة]

عدد طرق اختيار مدير من المجموعة من غير المتخاصمين

عدد طرق اختيار نائب مدير من المجموعة من غير المتخاصمين

عدد طرق اختيار أمين سر من المجموعة من غير المتخاصمين

العدد المطلوب = $2 \times \binom{3}{2} \times 3 \times 2 \times 1 = 36$ [لجنة]

عدد طرق اختيار أحد المتخاصمين

عدد طرق اختيار شخصين من المجموعة من غير المتخاصمين

عدد اللجان التي يمكن تشكيلها من المجموعة التي تحوي

الشخصين غير المتخاصمين المختارين و أحد المتخاصمين المختار

العدد المطلوب = $6 + 36 = 42$ [لجنة]

1− كم نتيجة مختلفة للسباق ؟(لا توجد حالات تساوٍ)

2− ما عدد الطرق الممكنة لشغر المراتب الثلاث الأولى لنتيجة السباق ؟(لا توجد حالات تساوٍ)

3− بكم طريقة يمكن توزيع n جائزة مختلفة على المتسابقين حيث يحصل كل متسابق على جائزة واحدة فقط ؟

4− بكم طريقة يمكن توزيع ثلاث جوائز مختلفة على المتسابقين حيث يحصل كل متسابق على جائزة على الأكثر ؟

5− بكم طريقة يمكن توزيع $n+1$ جائزة مختلفة على المتسابقين حيث يحصل كل متسابق على جائزة على الأقل ؟

6− في نهاية المباراة يصافح كل متسابق باقي المتسابقين جميعاً مرة واحدة فقط، ما عدد المصافحات التي جرت؟ وبفرض عدد المصافحات 36 مصافحة ما عدد المتسابقين ؟

1− كم نتيجة مختلفة للسباق ؟(لا توجد حالات تساوٍ)

[لنتيجة] $n!$ = العدد المطلوب

2− ما عدد الطرق الممكنة لشغر المراتب الثلاث الأولى لنتيجة السباق ؟(لا توجد حالات تساوٍ)

[طريقة] $n \times (n-1) \times (n-2)$= العدد المطلوب

عدد طرق اخيار الفائز الأول

عدد طرق اخيار الفائز الثاني

عدد طرق اخيار الفائز الثالث

3− بكم طريقة يمكن توزيع n جائزة مختلفة على المتسابقين حيث يحصل كل متسابق على جائزة واحدة فقط ؟

[طريقة] $n!$ = العدد المطلوب

4− بكم طريقة يمكن توزيع ثلاث جوائز مختلفة على المتسابقين حيث يحصل كل متسابق على جائزة على الأكثر ؟

[طريقة] $n \times (n-1) \times (n-2)$= العدد المطلوب

عدد طرق توزيع الجائز الأول

عدد طرق توزيع الجائز الثاني

عدد طرق توزيع الجائز الثالث

5− بكم طريقة يمكن توزيع $n+1$ جائزة مختلفة على المتسابقين حيث يحصل كل متسابق على جائزة على الأقل ؟

[طريقة] $\binom{n+1}{2} \times n!$ = العدد المطلوب

عدد طرق اخيار جائزتين من الجوائز ثم نضعهما في كيس ونعتبرهما جائزة واحدة

عدد طرق توزيع جائزة مع الكيس على المتسابقين حيث يحصل كل واحد منهم على جائزة واحدة فقط

6− في نهاية المباراة يصافح كل متسابق باقي المتسابقين جميعاً مرة واحدة فقط، ما عدد المصافحات التي جرت؟ وبفرض عدد المصافحات 36 مصافحة ما عدد المتسابقين ؟

المصافحة تتم بين كل شخصين

[مصافحة] $\binom{n}{2}$ = عدد المصافحات

عدد المصافحات 36 عندئذٍ: $\binom{n}{2} = 36$ شرط الحل $n \geq 2$

$$\frac{n\times(n-1)}{2} = 36$$

$$n^2 - n - 72 = 0$$

$$(n-1)(n-2) = 0$$

إما: [متسابقين] $n = 9$

أو: [مرفوض] $n = -8$

مسألة الرمازات

يوجد لبعض أنواع السيارات مذياع ذو قفل رقمي مضاد للسرقة يفتح عند إدخال رمّاز (كود) مكون من عدد ذي أربع خانات يمكن لأيّ منها أن يأخذ أياً من القيم $0, 1, \cdots, 9$

❶ **a .** ما هو عدد الرمّازات التي تصلح للقفل ؟

ينطلق الإنذار في السيارة إذا لم يجرِ إدخال أي خانة صحيحة في مكانها . ما عدد الرمّازات التي تُسبب انطلاق الإنذار .

b . ما هو عدد الرمّازات التي تصلح للقفل والمكوّنة من خانات مختلفة مثنى مثنى ؟

❷ عند فصل التغذية الكهربائية عن المذياع، يجب على مالك السيارة أن يعيد إدخال الرمّاز الصحيح مجدداً ليتمكن من استعمال المذياع .

يتذكر المالك أنّ الرمّاز الصحيح مكوّن من الأرقام 1 و 5 و 9 و 9 ولكنّه نسي ترتيبها .

كم رمّازاً مختلفاً يمكن للمالك أن يكوّن من هذه الأرقام ؟

الحل:

❶ **a .** ما هو $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$. واحدٌ منها فقط صحيحٌ ولا يسبب انطلاق الإنذار أمّا البقية وعددها 9999 فأي منها يُطلق الإنذار .

b . $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$

❷ هناك أربعة خيارات لموقع الرقم 1، وتبقى ثلاثة لموقع الرقم 5 ، وبعدها يملأ الخانتين المتبقيتين بالرقم 9 إذاً هناك $4 \times 3 = 12$ رمازاً مختلفاً يمكن للمالك أن يكونه من هذه الأرقام.

الاختبارالاول : يحوي صندوق 6 بطاقات مرقّمة بالأرقام $1,2,3,4,5,6$ نسحب منها عشوائيّاً بطاقتين على التتالي دون إعادة، ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يدل على أصغر رقمي البطاقتين المسحوبتين.

1. عيّن مجموعة قيم المتحوّل العشوائي X ، واكتب جدول قانونه الاحتمالي.

2. احسب التوقّع الرياضي $\mathbb{E}(X)$ والتباين $\mathbb{V}(X)$.

الحل:

m	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1		1	1	1	1	1
2			2	2	2	2
3				3	3	3
4					4	4
5						5
6						

1 مجموعة قيم المتحوّل العشوائي X هي $I=\{1,2,3,4,5\}$ ، و جدول قانونه الاحتمالي هو :

x	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{5}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

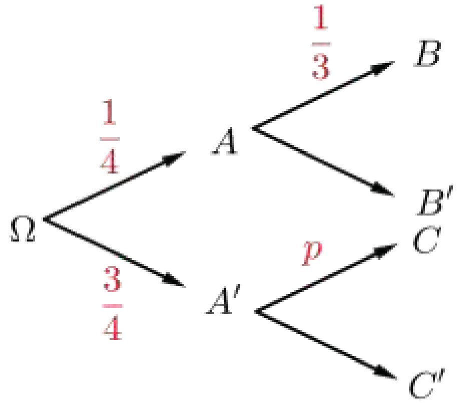
2. حساب التوقّع الرياضي $\mathbb{E}(X)$ والتباين $\mathbb{V}(X)$.

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{i=1}^{m} x_i p_i'$$
$$=1\times\frac{5}{15}+2\times\frac{4}{15}+3\times\frac{3}{15}+4\times\frac{2}{15}+5\times\frac{1}{15}=\frac{35}{15}=\frac{7}{3}$$

$$\mathbb{V}(X)=\sum_{i=1}^{m}\left(x_i-\mathbb{E}(X)\right)^2.p_i'=\frac{210}{135}$$
$$=1.555$$

الاختبار الثاني: ليكن A و B مرتبطين بتجربة عشوائيّة معروضة بالمخطّط الشجري المجاور.

كيف نختار قيمة p حتّى يكون الحدثان A و B مستقلّين احتماليّاً.

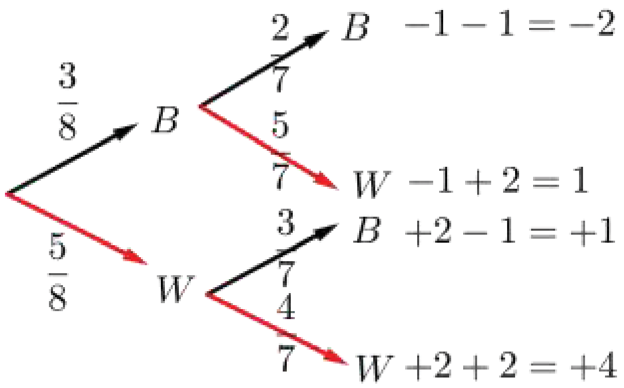


الحل: حتّى يكون الحدثان A و B مستقلّين احتماليّاً يجب أن يتحقّق:

$$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$$
$$\frac{1}{4}.\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}.\frac{1}{3}+\frac{3}{4}.p\right)\Rightarrow\frac{1}{3}=\frac{1}{4}.\frac{1}{3}+\frac{3}{4}.p$$
$$\frac{3}{4}p=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{3}{12}\Rightarrow p=\frac{1}{3}$$

الاختبار الثالث: يحوي صندوق ثلاث كرات سوداء و خمس كرات بيضاء، عند سحب كرة سوداء يخسر اللاعب نقطة واحدة، وعند سحب كرة بيضاء ينال نقطتين. يسحب اللاعب كرتن على التتالي دون إعادة. ما احتمال أن يحصّل اللاعب نقطة واحدة فقط؟

الحل:



حتّى يحصل اللاعب على نقطة واحدة عليه أن يختار كرة من كل لون:

نفرض هذا الحدث هو A

$$P(A)=\frac{3}{8}.\frac{5}{7}+\frac{5}{8}.\frac{3}{7}=\frac{30}{56}=\frac{15}{28}$$

النموذج الوزاري الاول:

ليكن X متحوّل عشوائي يمثّل عدد النجاحات في تجربة برنوليّة. الجدول غير المكتمل المجاور هو القانون الاحتمالي لـ X.

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{16}{81}$				

1 .ما عدد الاختبارات في التجربة؟

2 .أكمل الجدول المجاور.

3 .احسب التوقّع الرياضي وتباين المحوّل العشوائي X

الحل:

1 .عدد الاختبارات في التجربة هو $n=4$ اختبارات لأنّه هو القيمة العظمى للنجاحات.

2 .ومن الجدول نلاحظ أنّ:

$$p^4=\frac{16}{81} \Rightarrow p=\frac{2}{3}$$

ونكمل الجدول اعتماداً على قانون التوزيع الاحتمالي للتجارب البرنوليّة:

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k.q^{n-k}$$
$$=\binom{4}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k.\left(\frac{1}{3}\right)^{4-k}$$

$$\mathbb{P}(X=0)=\binom{4}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0.\left(\frac{1}{3}\right)^4$$
$$=(1)(1)\left(\frac{1}{81}\right)=\frac{1}{81}$$

$$\mathbb{P}(X=1)=\binom{4}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1.\left(\frac{1}{3}\right)^3$$
$$=(4)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{27}\right)=\frac{8}{81}$$

$$\mathbb{P}(X=2)=\binom{4}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2.\left(\frac{1}{3}\right)^2$$
$$=(6)\left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{24}{81}$$

$$\mathbb{P}(X=3)=\binom{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3.\left(\frac{1}{3}\right)^1$$
$$=(4)\left(\frac{8}{27}\right)\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{32}{81}$$

$$\mathbb{P}(X=4)=\binom{4}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4.\left(\frac{1}{3}\right)^0$$
$$=(1)\left(\frac{16}{81}\right)(1)=\frac{16}{81}$$

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{16}{81}$
$x_i.p_i$	0	$\frac{8}{81}$	$\frac{48}{81}$	$\frac{96}{81}$	$\frac{64}{82}$
$x_i^2.p_i$	0	$\frac{8}{81}$	$\frac{96}{81}$	$\frac{288}{81}$	$\frac{256}{82}$

3 .احسب التوقّع الرياضي وتباين المحوّل العشوائي X

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{1}^{5}x_i.p_i$$
$$=\frac{0+8+48+96+64}{81}$$
$$=\frac{216}{81}=\frac{8}{3}$$

$$\mathbb{E}(X)=n.p=4\times\frac{2}{3}$$
$$=\frac{8}{3}$$

أو :

$$\mathbb{V}(X)=\sum_{1}^{5}x_i^2.p_i-\left(\mathbb{E}(X)\right)^2$$
$$=\frac{648}{81}-\frac{64}{9}$$
$$=\frac{648-576}{81}=\frac{72}{81}=\frac{8}{9}$$

$$\mathbb{V}(X)=n.p.q=4\times\frac{2}{3}.\frac{1}{3}$$
$$=\frac{8}{3}$$

النموذج الثاني : يحتوي صندوق على أربع كرات زرقاء، وثلاث كرات خضراء وواحدة بيضاء. نسحب عشوائيّاً معاً ثلاث كرات من الصندوق. ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يمثّل عدد الألوان المختلفة بين الكرات المسحوبة.

1 . ما هي مجموعة القيم التي يأخذها X؟

2 . احسب كلاً من $\mathbb{p}(X=1)$ و $\mathbb{p}(X=3)$ ثمّ استنتج قيمة $\mathbb{p}(X=2)$.

3 . احسب توقّع X وانحرافه المعياري.

الحل:

1. $\Omega =$
$\{wgg, wgb, wbb, ggb, ggg, bbg, bbb\}$

$$X(\Omega) = \{1\,,2\,,3\,\}$$

2. $\mathbb{p}(X=1) = \dfrac{2}{7}$ &

$$p(X=3) = \frac{1}{7}$$

$$\mathbb{p}(X=3) = 1 - \left(\frac{2}{7} + \frac{1}{7}\right) = \frac{4}{7}$$

k	1	2	3
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$
$x_i.p_i$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{12}{7}$
$x_i^2.p_i$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{36}{7}$

3. احسب التوقّع الرياضي وتباين المحوّل العشوائي X

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{1}^{3} x_i.p_i = \frac{2+2+12}{7} = \frac{16}{7}$$

$$\mathbb{v}(X) = \sum_{1}^{3} x_i^2.p_i - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$$

$$= \frac{42}{7} - \frac{256}{49}$$

$$= \frac{294-256}{49} = \frac{38}{49}$$

النموذج الثالث

صندوق يحتوي على على ثلاث كرات حمراء وأربع كرات سوداء. نسحب عشوائيّاً من الصندوق ثلاث كرات في آن معاً وليكن الحدث A الحصول على كرة حمراء على الأقل والحدث B الحصول على كرتين سوداوين على الأقل احسب الاحتمالات التالية:

1. A و B و $A|B$

2. إذا كان X متحوّل عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة، اكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقّعه الرياضي وتباينه.

الحل:

1. $3R$ & $4B$

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} \{R,R,R\},\{R,R,B\},\{R,B,B\} \\ ,\{B,B,B\} \end{matrix} \right\}$$

$$n(\Omega) = \binom{7}{3} = \frac{7\times6\times5}{3\times2} = 35$$

$$n(A') = \binom{4}{3} = 4$$

$$A = \{\{R,R,R\},\{R,R,B\},\{R,B,B\}\}$$

$$\mathbb{p}(A) = 1 - \mathbb{p}(A') = 1 - \frac{4}{35} = \frac{31}{35}$$

$$B = \{\{R,B,B\},\{B,B,B\}\}$$

$$\mathbb{p}(B) = \frac{\binom{4}{2}.\binom{3}{1} + \binom{4}{3}.\binom{3}{0}}{35} = \frac{18+4}{35}$$

$$= \frac{22}{35}$$

$$A \cap B = \{\{R,B,B\}\}$$

$$\mathbb{p}(A\cap B) = \frac{\binom{3}{1}.\binom{4}{2}}{35} = \frac{18}{35}$$

$$\mathbb{p}(A|B) = \frac{\mathbb{p}(A\cap B)}{\mathbb{p}(B)} = \frac{18}{22} = \frac{9}{11}$$

2. X
$= \{\,0\,,1\,,2\,,3\,\}$

$$\mathbb{p}(X=0) = \frac{\binom{3}{0}.\binom{4}{3}}{35}$$

$= \dfrac{4}{35}$ & $\mathbb{p}(X=1)$

$$= \frac{\binom{3}{1}.\binom{4}{2}}{35} = \frac{18}{35}$$

$$\mathbb{p}(X=2) = \frac{\binom{3}{2}.\binom{4}{1}}{35}$$

$= \dfrac{12}{35}$ & $\mathbb{p}(X=4)$

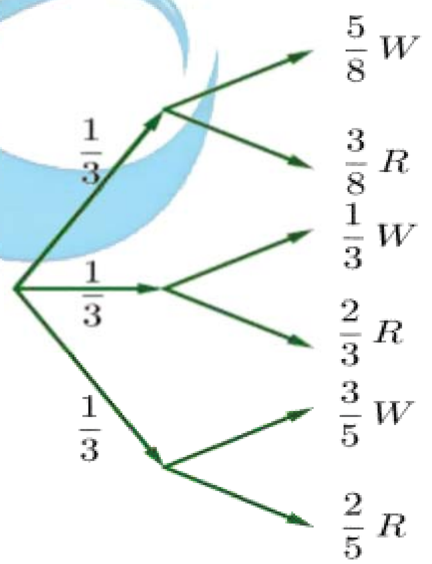
$$= \frac{\binom{3}{3}.\binom{4}{0}}{35} = \frac{1}{35}$$

x_i	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$
$x_i.p_i$	$\frac{0}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{24}{35}$	$\frac{3}{35}$
$x_i^2.p_i$	$\frac{0}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{48}{35}$	$\frac{9}{35}$

النموذج الرابع في المخطّط الشجري المرسوم جانباً، الرمز W يدل على الكرات البيضاء والرمز R علا عدد الكرات الحمراء حيث يتم عشوائيّاً اختيار كرة واحدة.

1 . ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء.

2 . إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء فما احتمال أن تكون سحبت من الصندوق الأوّل.



الحل:

1 . بفرض الحدث B الكرة المسحوبة حمراء:

$$\mathbb{p}(B)=\frac{1}{3}.\frac{3}{8}+\frac{1}{3}.\frac{2}{3}+\frac{1}{3}.\frac{2}{5}=\frac{1}{3}.\frac{141}{120}=\frac{47}{120}$$

بفرض الحدث A الكرة المسحوبة من الصندوق الأوّل يكون المطلوب حساب:

$$\mathbb{p}(A|B)=\frac{\mathbb{p}(A\cap B)}{\mathbb{p}(B)}=\frac{\frac{1}{3}.\frac{3}{8}}{\frac{47}{120}}=\frac{15}{47}$$

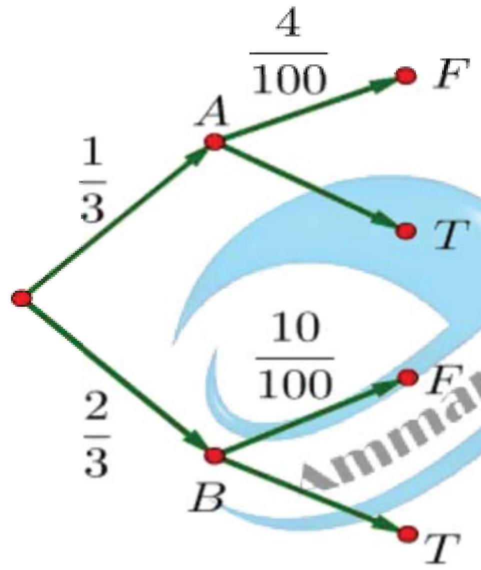
النموذج الخامس

يشتري محل للأدوات الكهربائيّة 100 مصباح من المصنع A و 200 مصباح من المصنع B، نعلم أنّ نسبة المصابيح المعطوبة في انتاج A هي 4% وفي إنتاج B هي 10% نسحب عشوائيّاً مصباحاً.

1 . ما احتمال أن يكون المصباح معطوباً.

2 . إذا علمت أنّ المصباح معطوب ما احتمال أن يكون من المصنع B.

الحل:



1 . بفرض الحدث F المصباح معطوباً

$$F=(A\cap F)\cup(B\cap F)$$

$$\mathbb{P}(F)=\mathbb{P}(A).\mathbb{P}(F|A)+\mathbb{P}(B).\mathbb{P}(F|B)$$

$$\mathbb{P}(F)=\frac{1}{3}.\frac{1}{100}+\frac{2}{3}.\frac{10}{100}=\frac{22}{300}=\frac{11}{150}$$

2 . المطلوب حسابه هو $\mathbb{P}(B|F)$:

$$\mathbb{P}(B|F)=\frac{\mathbb{P}(B\cap F)}{\mathbb{P}(F)}=\frac{\frac{2}{3}.\frac{10}{100}}{\frac{22}{300}}=\frac{20}{22}=\frac{10}{11}$$

<u>النموذج السادس</u> صندوق يحوي خمس كرات حمراء وخمس كرات خضراء. نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات معاً. نتأمّل المتحوّل العشوائي X الذي يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السحب ثلاث كرات حمراء ويأخذ القيمة 3 إذا كانت نتيجة السحب كرتان حمراوان وكرة خضراء والقيمة صفر فيما عدا ذلك.

عيّن القانون الاحتمالي للمتغيّر العشوائي X، واحسب توقّعه وتباينه.

<u>الحل:</u>

$$5\,\mathbf{R} \quad \& \quad 5\,\mathbf{G}$$

$$\Omega = \{RRR, RRG, RGG, GGG\}$$

$$X(\Omega) = \{5,3,0\}$$

$$n(\Omega) = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

$$\mathbb{p}(X=5) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12} \quad \& \quad \mathbb{p}(X=3) = \frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}$$

$$\mathbb{p}(X=0) = \frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{5}{2} + \binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{50+10}{120} = \frac{60}{120} = \frac{6}{12}$$

x_i	5	3	0
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{6}{12}$
$x_i \cdot p_i$	$\frac{5}{12}$	$\frac{15}{12}$	$\frac{0}{12}$
$x_i^2 \cdot p_i$	$\frac{25}{12}$	$\frac{45}{12}$	$\frac{0}{12}$

<u>دورة أولى ٢٠١٧</u>

نلقي قطعة نقود غير متوازنة ثلاث مرات متتالية ، بحيث يكون احتمال ظهور الشعار في كل رمية يساوي $\frac{1}{3}$

نعرف X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد مرات ظهور الشعار

اكتب مجموعة قيم المتحول العشوائي X ثم اكتب جدول قانونه الاحتمالي و احسب توقعه الرياضي ، وتباينه

الحـــــــــــــــــــــــــل :

$$\Omega = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),(T,T,H),(T,H,T),(H,T,T),(T,T,T)\}$$

مجموعة قيم المتحول هي :

$$I = X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$$

القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي :

$$P(X = x_i) = P_i'$$

$P(X=0)$ احتمال ظهور ثلاث كتابات :

$$P(X=0) = \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

$P(X=1)$ احتمال ظهور شعار وكتابتين :

$$P(X=1) = \frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times 3 = \frac{12}{27}$$

$P(X=2)$ احتمال ظهور شعارين وكتابة :

$$P(X=2) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times 3 = \frac{6}{27}$$

$P(X=3)$ احتمال ظهور ثلاث شعارات :

$$P(X=3) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

جدول القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X

:

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$
$x_i P'_i$	0	$\frac{12}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{3}{27}$

التوقع الرياضي للمتحول العشوائي :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i P'_i = 0 + \frac{12}{27} + \frac{12}{27} + \frac{3}{27} = \frac{27}{27} = 1$$

التباين :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 P'_i - E^2(X) = 0 + \frac{12}{27} + \frac{24}{27} + \frac{9}{27} - 1 = \frac{45}{27} - 1 = \frac{45-27}{27} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$$

طريقة ثانية :

تجربة برنولية والمتحول العشوائي X يتبع قانوناً حدانياً وسيطاه $P = \frac{1}{3}, n = 3$

مجموعة قيم المتحول هي :

$I = X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$

$$P(X=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3 = 1 \times 1 \times \frac{8}{27} = \frac{8}{27}$$

$$P(X=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} = \frac{12}{27}$$

$$P(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1 = 3 \times \frac{1}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{27}$$

$$P(X=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1 \times \frac{1}{27} \times 1 = \frac{1}{27}$$

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$
$x_i P'_i$	0	$\frac{12}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{3}{27}$

$E(X) = np = 3 \times \frac{1}{3} = 1$ ، $V(X) = npq = 3 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

٢/ ٢٠١٧

يضم مصنع ورشتين A و B لتصنع الأقلام عندما ورد طلب لعدد من الأقلام قدره 1000 قلم ، صنعت الورشة A منها 600 قلماً وصنعت البقية الورشة B هناك نسبة 5% من أقلام الورشة A غير صالحة للاستعمال ، في حين تكون نسبة 2% من أقلام الورشة B غير صالحة للاستعمال ، نسحب عشوائياً قلماً من الطلب نرمز بالرمز A إلى الحدث " القلم مصنوع في الورشة A " وبالرمز B إلى الحدث " القلم مصنوع في الورشة B " وبالرمز D إلى الحدث " القلم غير صالح للاستعمال "

① – أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة

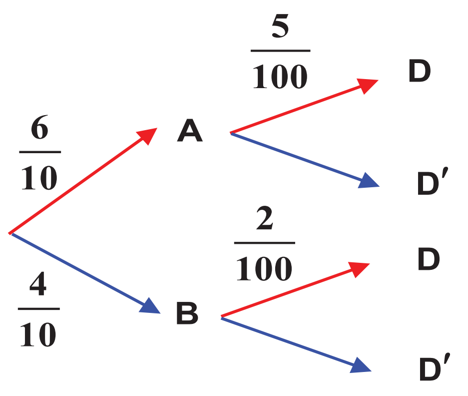
② – احسب احتمال أن يكون القلم صالح للاستعمال

③ – إذا كان القلم صالحاً للاستعمال فما احتمال أن يكون مصنوعاً في الورشة A

④ – نسحب عشوائياً من الورشة A قلمين معاً وليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد الأقلام المسحوبة الصالحة للاستعمال .

احسب $P(X = 0)$

الحـــــــــــل :



$$P(D) = \frac{6}{10}\times\frac{5}{100} + \frac{4}{10}\times\frac{2}{100} = \frac{30}{1000}+\frac{8}{1000} \Rightarrow$$

$$P(D)=\frac{38}{1000} \Rightarrow P(D')=1-\frac{38}{1000}=\frac{962}{1000}$$

$$P(A \mid D') = \frac{P(A\cap D')}{P(D')} = \frac{\frac{6}{10}\times\frac{95}{100}}{\frac{6}{10}\times\frac{95}{100}+\frac{4}{10}\times\frac{98}{100}} \Rightarrow$$

$$P(A \mid D') = \frac{\frac{570}{1000}}{\frac{570}{1000}+\frac{392}{1000}} = \frac{570}{570+392}=\frac{570}{962}=\frac{285}{481}$$

عدد الأقلام غير الصالحة في الورشة A :

$$5\%\times 600 = 30$$

$$P(X=0) = \frac{\binom{30}{2}}{\binom{600}{2}} = \frac{\frac{30\times29}{2}}{\frac{600\times599}{2}} = \frac{30\times29}{600\times599}=\frac{29}{20\times599}=\frac{29}{1180}$$

۱/۲۰۱۸

ليكن X متحولاً عشوائياً يمثّل عدد النجاحات في تجربة برنولية . الجدول غير المكتمل المجاور هو القانون الاحتمالي للمتحول X الممثّل لثلاث نجاحات ، إذا علمت أن احتمال النجاح يساوي $\frac{2}{3}$ و $P(X=0)=\frac{1}{27}$ و $P(X=1)=\frac{6}{27}$

1) جد $P(X=2)$ و $P(X=3)$

2) ما التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X ؟

3) ما تباين المتحول العشوائي X ؟

الحـــل :

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$		

تجربة برنولية والمتحول العشوائي X يتبع قانوناً حدانياً وسيطاه $P=\frac{2}{3}, n=3$

$$P(X=k) = \binom{n}{k}(p)^k(q)^{n-k}$$

$$P(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1 = 3\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{12}{27}$$

$$P(X=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1\times\frac{8}{27}\times 1=\frac{8}{27}$$

$$E(X)=np=3\times\frac{2}{3}=2 \quad , \quad V(X)=npq=3\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

۲/۲۰۱۸

صندوق يحوي (9) كرات متماثلة منها (4) كرات خضراء و (5) حمراء نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات معاً ، نتأمل المتحول العشوائي X الذي يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السحب ثلاث كرات حمراء والقيمة 3 إذا كانت نتيجة السحب كرتين حمراوين وكرة خضراء والقيمة 0 فيما عدا ذلك والمطلوب اكتب القانون الاحتمالي للمتحول X و احسب توقعه الرياضي .

الحـــــــــــــــــــــــل :

السحب : ثلاث كرات معاً

- مجموعة قيم المتحول هي :

$$X(\Omega)=\{5,3,0\}$$

- القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي :

$$P(X=x_i)=P'_i$$

$P(X=5)$ هو احتمال سحب ثلاث كرات حمراء :

$$P(X=5)=\frac{\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}}=\frac{10}{84}=\frac{5}{42}$$

$P(X=3)$ هو احتمال سحب كرتين حمراوين وكرة خضراء :

$$P(X=3)=\frac{\binom{5}{2}\times\binom{4}{1}}{\binom{9}{3}}=\frac{10\times 40}{84}=\frac{40}{84}=\frac{20}{42}$$

$$P(X=0)=1-\left[P(X=5)+P(X=3)\right]$$

$$=1-(\frac{5}{42}+\frac{20}{42})=1-\frac{25}{42}=\frac{17}{42}$$

جدول القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X :

x_i	5	3	0
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{42}$	$\frac{20}{42}$	$\frac{17}{42}$
$x_i P'_i$	$\frac{25}{42}$	$\frac{60}{42}$	0

– التوقع الرياضي للمتحول العشوائي :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3} x_i P'_i=\frac{25}{42}+\frac{60}{42}+\frac{0}{42}=\frac{85}{42}$$

<u>١/٢٠١٩</u> يحتوي صندوق على خمس كرات ثلاث حمراء اللون وتحمل الأرقام $0,1,2$ وكرتان بيضاء اللون تحمل الأرقام $0,1$ نسحب كرتين عشوائياً على التتالي دون إعادة من هذا الصندوق

١) الحدث A : الكرتان المسحوبتان لهما اللون ذاته ، احسب $P(A)$

٢) نعرف متحولاً عشوائياً X يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين ، عين مجموعة قيم المتحول العشوائي X واكتب جدول قانونه الاحتمالي ثم احسب توقعه الرياضي

الحـــــــــــــــــــل :

A : الكرتان المسحوبتان من اللون ذاته

$$P(A)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{6}{20}+\frac{2}{20}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$$

– مجموعة قيم المتحول هي :

$$X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$$

– القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي :

$$P(X=x_i)=P'_i$$

$$P(X=0)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$$

$$P(X=1)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}\times 2=\frac{8}{20}=\frac{4}{10}$$

$$P(X=2)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times 2+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$$

$$P(X=3)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times 2=\frac{4}{20}=\frac{2}{10}$$

– جدول القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X :

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$
$x_i P'_i$	0	$\frac{4}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{6}{10}$

– التوقع الرياضي للمتحول العشوائي :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{4} x_i P'_i=0+\frac{4}{10}+\frac{6}{10}+\frac{6}{10}=\frac{16}{10}=\frac{8}{5}$$

<u>٢/٢٠١٩</u>

يحتوي صندوق على خمس كرات منها كرتان حمراوين وثلاث كرات زرقاء

نكرر عملية سحب عشوائياً لكرة من الصندوق حتى لا يبقى في الصندوق إلا كرات من اللون ذاته

نعرف متحولاً عشوائياً X يمثل عدد مرات السحب اللازمة ، عين مجموعة قيم المتحول العشوائي X واكتب جدول قانونه الاحتمالي ثم احسب توقعه الرياضي

الحــــــــــــــــــــــــــــــــل :

- مجموعة قيم المتحول هي :

$X(\Omega)=\{2,3,4\}$

- القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي :

$P(X=x_i)=P'_i$

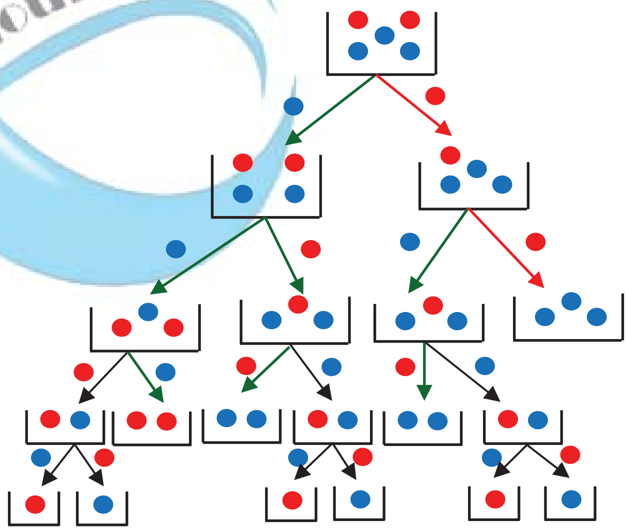
$P(X=2)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$

$P(X=3)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}$

$=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$

$P(X=4)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times2+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times2+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times2$

$=\frac{2}{10}+\frac{2}{10}+\frac{2}{10}=\frac{6}{10}$



- جدول القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X :

x_i	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$
$x_iP'_i$	$\frac{2}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{24}{10}$

- التوقع الرياضي للمتحول العشوائي :

$E(X)=\sum_{i=1}^{3}x_iP'_i=\frac{2}{10}+\frac{9}{10}+\frac{24}{10}=\frac{35}{10}$

طريقة ثانية لحساب $P(X=4)$:

$P(X=4)=$

$1-\left[P(X=2)+P(X=3)\right]=$

$1-(\frac{1}{10}+\frac{3}{10})=1-\frac{4}{10}=\frac{6}{10}$

<u>١/٢٠٢١</u> : نتأمل حجر نرد فيه أربعة وجوه ملونة بالأسود ووجهان ملونان بالأحمر ، نلقي هذا الحجر خمس مرات على التوالي

نعرف متحولاً عشوائياً X يدل على عدد الوجوه السوداء التي نحصل عليها والمطلوب

① عين قيم المتحول X واحسب $P(X=0)$

② احسب التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X وتباينه

الحــــــــــــــــــــــــــــــــل :

تجربة برنولية والمتحول العشوائي X يتبع قانوناً حدانياً وسيطاه $P=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}, n=5$

مجموعة قيم المتحول هي :

$I=X(\Omega)=\{0,1,2,3,4,5\}$

$P(X=0)=\binom{5}{0}(\frac{2}{3})^0(\frac{1}{3})^5=1\times1\times\frac{1}{243}=\frac{1}{243}$

التوقع الرياضي و التباين :

$X)=np=5\times\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$, $V(X)=npq=5\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{10}{9}$

<u>٢/٢٠٢١</u> صندوق يحوي كرات حمراء وكرات بيضاء وعدد الكرات الحمراء يساوي ثلاثة أضعاف عدد الكرات البيضاء والمطلوب :

① نسحب عشوائياً من الصندوق كرة ، ما احتمال أن تكون بيضاء اللون ؟

② نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي مع الإعادة وليكن X متحولاً عشوائياً يدل على عدد الكرات البيضاء المسحوبة ، أثناء عمليات السحب الثلاث عين مجموعة قيم المتحول العشوائي X ثم اكتب جدول قانونه الاحتمالي

الحـــــــــــــــــــــــــل :

نفرض عدد الكرات البيضاء n فيكون عدد الكرات الحمراء 3n

الحدث A : الكرة المسحوبة بيضاء اللون ويكون

$$P(A) = \frac{n}{4n} = \frac{1}{4}$$

– مجموعة قيم المتحول هي :

$$X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$$

– القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي :

$$P(X = x_i) = P_i$$

$P(X = 0)$ احتمال سحب ثلاث كرات حمراء :

$$P(X = 0) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$$

$P(X = 1)$ احتمال سحب كرة بيضاء و كرتين حمراوين :

$$P(X = 1) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times 3 = \frac{27}{64}$$

$P(X = 2)$ احتمال سحب كرتين بيضاوين و كرة حمراء :

$$P(X = 2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times 3 = \frac{9}{64}$$

$P(X = 3)$ احتمال سحب ثلاث كرات بيضاء :

$$P(X = 3) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$$

– جدول القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$
$x_i P'_i$	0	$\frac{27}{64}$	$\frac{18}{64}$	$\frac{3}{64}$

طريقة ثانية :

تجربة برنولية والمتحول العشوائي X يتبع قانوناً حدانياً وسيطاه $P = \frac{1}{4}, n = 3$

مجموعة قيم المتحول هي :

$$I = X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$$

$$P(X = 0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^3 = 1 \times 1 \times \frac{27}{64} = \frac{27}{64}$$

$$P(X = 1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{9}{16} = \frac{27}{64}$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^1 = 3 \times \frac{1}{16} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$$

$$P(X = 3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1 \times \frac{1}{64} \times 1 = \frac{1}{64}$$

وبالتالي يصبح الجدول على الشكل :

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$