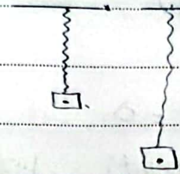
النواس المرن :

* الحركة الاهتزازية: هي حركة الجسم إلى جانبي نقطة ثابتة تسمى مركز الاهتزاز.

* النواس المرن: هو جسم صلب كتلته m يهتز تحت تأثير نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته K



س1: برهن في النواس المرن أن محصلة القوة الخارجية المؤثرة في الجسم المعلق إلى النابض هي قوة إرجاع تتناسب طرداً مع المطال 2016 ثانية

جملة المقارنة: خارجية.

الجملة المدروسة: (نابض - جسم صلب)

القوى الخارجية: (حالة سكون) $\vec{W}$ ، $\vec{F_{s0}}$

$$\Sigma\vec{F} = 0$$

$$\vec{W} + \vec{F_{s0}} = 0$$

بالإسقاط على محور موجه بجهة الحركة

$$W - F_{s0} = 0$$

$$W = F_{s0}$$

حيث $F_{s0}' = F_{s0} = k.x_0$

حيث $W = m.g$

$\Rightarrow m.g = k.x_0 \quad (1)$

(حالة الحركة)

$$\Sigma\vec{F} = m.\vec{a}$$

$$\vec{W} + \vec{F_s} = m.\vec{a}$$

بالإسقاط على محور موجه بجهة الحركة

$W - F_s = m.a \quad (2)$

قوة التوتر $\vec{F_s}$ تسبب له استطالة $(x+x_0)$

$\Rightarrow F_s' = F_s = k.(x+x_0)$

نعوض في 1، 2 :

$$k.x - k(x+x_0) = m.a$$

$$\cancel{k.x} - \cancel{k.x} - k.x_0 = m.a$$

$$-k.x_0 = m.a$$

محصلة القوى المؤثرة: على مركز عطالة الجسم هي قوة إرجاع تعمل على إرجاع الجسم إلى وضع التوازن $F = -kx$

عبارة: قوة الإرجاع تتناسب طرداً مع المطال x وعكساً معه في الإشارة.

* استنتاج عناصر قوة الإرجاع:

نقطة التأثير: مركز عطالة الجسم الصلب.

الحامل: القطعة المستقيمة التي يرسمها مركز العطالة.

الجهة: نحو وضع التوازن دوماً.

الشدة: $F = |-k.x|$

س2: انطلاقاً من العلاقة $\boxed{-k.x_0 = m.a}$ استنتج طبيعة الحركة للنواس المرن ومن ثم استنتج دوره الخاص. 2013، 2019 أول 2015 ثانية

$$-k.x_0 = m.a$$

حيث $a = (x)''_t$

$\Rightarrow -k.x = m.(x)''_t$

$\Rightarrow (x)''_t = \frac{-k.x}{m}$ معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية

تقبل حلاً جيبياً من الشكل

$$x = X_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

نشتق الحل مرتين :.

$(x)'_t = v = -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$(x)''_t = a = -\omega_0^2 X_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\Rightarrow (x)''_t = -\omega_0^2 x$ *

بتعويض * في المعادلة التفاضلية :.

$+\omega_0^2 x = \frac{+k x}{m}$

$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

الحركة جيبية انسحابية بشرط $\sqrt{\frac{k}{m}} > 0$

* استنتاج الدور الخاص :

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

* T_0 : الدور الخاص . s
* m : كتلة الجسم المعلق . kg
* k : ثابت صلابة النابض . $N.m^{-1}$

من علاقة الدور الخاص نستنتج :.

1. الدور الخاص لا يتعلق بسعة الاهتزاز X_{max}
2. " " " بالجاذبية الأرضية g.
3. الدور الخاص يتناسب طرداً مع m ومع الجذر التربيعي لـ k.

س3 :. اكتب الشكل العام لتابع المطال موضحاً دلالة الرموز والوحدات الدولية وفي شروط مناسبة $X = X_{max}, t = 0$ استنتج الشكل المختزل لتابع المطال ثم بين متى يكون المطال أعظمي ومتى يكون معدوم موضحاً بالرسم البياني لتابع المطال خلال دور واحد :.

$\bar{x} = X_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

نحسب φ من شروط البدء :.

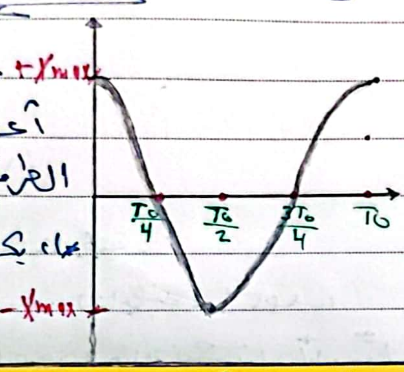
$x = X_{max}$, $t = 0$

$\cancel{X_{max}} = \cancel{X_{max}} \cos(\varphi)$

$\Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$

$\Rightarrow x = X_{max} \cos(\omega_0 t)$ :: الشكل المختزل :.

* يكون المطال أعظمي في الوضعين الطرفيين $x = \pm X_{max}$:.
* بينما يكون المطال معدوم في وضع التوازن $x = 0$



س4 :. انطلاقاً من الشكل العام لتابع المطال استنتج تابع السرعة وبين متى تكون معدومة ومتى تكون عظمى موضحاً ذلك بالرسم البياني للتابع خلال دور واحد :. 2 | 2015

2 | 2017

$x = X_{max} \cos(\omega_0 t)$

$(x)'_t = v = -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t)$.

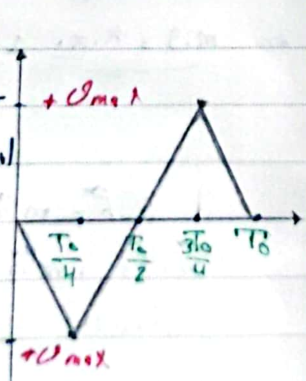
* تكون السرعة أعظمية عند المرور بوضع التوازن :. $x = 0$

$v = \pm \omega_0 X_{max}$

$\Rightarrow \sin(\omega_0 t) = \pm 1$

$\Rightarrow \cos(\omega_0 t) = 0$

* تكون السرعة معدومة عند المرور بالوضعين الطرفيين



$\sin(\omega_0 t) = 0 \Rightarrow \cos(\omega_0 t) = \pm 1$, $x = \pm X_{max}$

س: انطلاقاً من الشكل المختزل لتابع المطال استنتج تابع التسارع وبين متى يكون معدوم ومتى أعظمي مبيناً بالرسم البياني

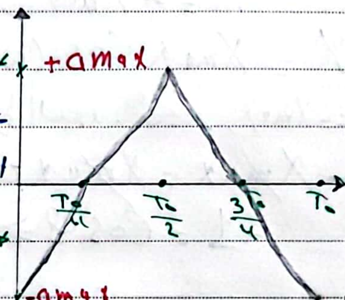
$X = X_{max}\cos(\omega_0 t)$

نشتق الحل مرتين..

$(X)'_t = v = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t)$

$(X)''_t = a = -\omega_0^2 . X_{max}\cos(\omega_0 t)$

$\Rightarrow (X)''_t = a = -\omega_0^2 . X$



* ينعدم التسارع عند المرور بالوضع التوازن $X=0$
* يكون التسارع أعظمي عند المرور بالوضعين الطرفين $\Rightarrow a_{max} = |\pm \omega_0^2 . X_{max}|$

س: استنتج علاقة الطاقة الميكانيكية وبين شكل الطاقة في كل من الوضعين الطرفين ووضع التوازن والاقتراب والابتعاد في كل منهما موضحاً بالرسم البياني (2016)

$E_{tot} = E_k + E_p$

* $E_k = \frac{1}{2} m . v^2$

ونحن نعلم أن $v = -\omega_0 . X_{max}\sin(\omega_0 t)$

$$\boxed{\Rightarrow E_K = \frac{1}{2} m . \omega_0^2 . X_{max}^2 \sin^2(\omega_0 t)}$$

* $E_p = \frac{1}{2} k . x^2$

ونحن نعلم أن $X = \cancel{\omega_0}\, X_{max}\cos(\omega_0 t)$

$$\boxed{\Rightarrow E_P = \frac{1}{2} k . X_{max}^2 . \cos^2(\omega_0 t)}$$

$E_{tot} = \frac{1}{2} m . \omega_0^2 X_{max}^2 \sin^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2} k X_{max}^2 \cos^2(\omega_0 t)$

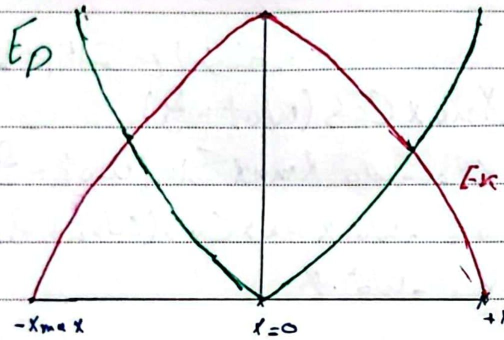
ونعلم أن $\boxed{m . \omega_0^2 = k}$

$\Rightarrow E_{tot} = \frac{1}{2} k X_{max}^2 \sin^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2} k X_{max}^2 \cos^2(\omega_0 t)$

نخرج $\frac{1}{2} k X_{max}^2$ عامل مشترك

$E_{tot} = \frac{1}{2} k X_{max}^2 [\underbrace{\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)}_{\text{قانون مثلثي} = 1}]$

$$\Rightarrow E_{tot} = \frac{1}{2} k X_{max}^2$$



$E_p = \frac{1}{2} k x^2$
* $X = 0 \Rightarrow E_p = 0$
* $X = \pm X_{max} \Rightarrow E_p =$ أعظمي

$E_k = \frac{1}{2} m . v^2$
* $\Rightarrow E_k = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow X = \pm X_m$
* $\Rightarrow E_k = v_{max} \Rightarrow X = 0$

* مناقشة الطاقة في الوضعين الطرفين:

$X = \pm X_{max}$

$\Rightarrow v = 0 \Rightarrow E_k = 0 \Rightarrow E_{tot} = E_p$

* في وضع التوازن:

$X = 0$

$\Rightarrow v = v_{max} \Rightarrow E_p = 0 \Rightarrow E_{tot} = E_k .$

* كلما اقتربنا من وضع التوازن تزداد السرعة تزداد Ek تتناقص Ep
" " " " وضعين طرفيين تتناقص السرعة و تتناقص Ek تزداد Ep

ملاحظة 5:

$X = X_{max}\cos(\omega_0 t+\varphi)$

$v = (X)'_t = X_{max} \cdot -\omega_0 \sin(\omega_0 t+\varphi)$

$a = (X)''_t = -\omega_0^2 \cdot X_{max}\cos(\omega_0 t+\varphi)$

$F = -k \cdot X \Rightarrow F_{max} = -k \cdot X_{max}\cos(\omega_0 t+\varphi)$

$E_p = \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow E_{p\,max} = \frac{1}{2} k X_{max}^2 \cos^2(\omega_0 t+\varphi)$

$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow E_{k\,max} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_{max}^2 \sin^2(\omega_0 t+\varphi)$

$P = m \cdot v \Rightarrow P_{max} = m \cdot -\omega_0 X_{max} \sin^2(\omega_0 t+\varphi)$

ملاحظات لحل مسائل النواس المرن لأي مسألة!

1) التوابع الزمنية:

$X = X_{max}\cos(\omega_0 t+\varphi)$

$(X)'_t = v = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t+\varphi)$

$(X)''_t = a = -\omega_0^2 X_{max}\cos(\omega_0 t+\varphi)$

$(X)''_t = a = -\omega_0^2 \cdot X$

2) التابع الزمني للمطال وثوابته

$X = X_{max}\cos(\omega_0 t+\varphi)$

$X_{max} = m$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, $\omega_0 = 2\pi f$ rad

$\varphi =$ من شروط البدء

$X = X_{max}$, $t = 0$

3) حالات شروط البدء

1) $X = +X_{max}$ $t = 0$

$X = X_{max}\cos(\omega_0 t+\varphi)$

نعوض شروط البدء: $X = +X_{max}$, $t = 0$

$+\cancel{X_{max}} = +\cancel{X_{max}}\cos\varphi$

$1 = \cos\varphi \Rightarrow \varphi = 0$ rad.

2) $X = -X_{max}$, $t = 0$

$X = X_{max}\cos(\omega_0 t+\varphi)$

نعوض شروط البدء، $X = -X_{max}$, $t = 0$

$-\cancel{X_{max}} = \cancel{X_{max}}\cos\varphi$

$-1 = \cos\varphi \Rightarrow \varphi = \pi$ rad

3) $X = \frac{\pm X_{max}}{2}$, $t = 0$

$X = X_{max}\cos(\omega_0 t+\varphi)$

نعوض شروط البدء: $X = \frac{X_{max}}{2}$, $t = 0$

$\frac{\cancel{X_{max}}}{2} = \cancel{X_{max}}\cos\varphi$

$\frac{1}{2} = \cancel{X_{max}}\cos\varphi \Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{3}$

نعوض φ في تابع السرعة حسب جهة الحركة

نقبل إما $-\frac{\pi}{3}$ أو $+\frac{\pi}{3}$

$v = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t+\frac{\pi}{3})$

$\rightarrow v < 0$ مقبول أو مرفوض

$v = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t+\frac{\pi}{3})$

$\rightarrow v > 0$ مقبول أو مرفوض

/ /

4: الاستطالة السكونية:

$W = F_{s_0} \Rightarrow m.g = K.x_0$

$x_0 = \frac{m.g}{K}$

أو

$K = m.\omega_0^2 \Rightarrow x_0 = \frac{m.g}{m.\omega_0^2} = \frac{g}{\omega_0^2}$

5: الدور الخاص:

* $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$
* $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

* $m.g = K.x_0 \Rightarrow \frac{m}{K} = \frac{x_0}{g}$

$\Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{x_0}{g}}$

* $T_0 = \frac{t}{N}$

6: قوة الإرجاع، التسارع، والسرعة.

$F = -K.x \quad : N$

$F = |-K.x| \quad : N$

$a = -\omega_0^2.x \quad . \, m.s^{-2}$

$v = -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t + \varphi)$

لحساب السرعة يجب استخراج الزمن.

* حساب السرعة عند مطال محدد:

$v = \omega_0\sqrt{X_{max}^2 - x^2}$

16: قوة الإرجاع والتسارع والسرعة العظمى

$F_{max} = K.X_{max}$

$a_{max} = \omega_0^2.X_{max}$

$v_{max} = \omega_0.X_{max}$

17: أزمنة المرور

الدور: هو الزمن اللازم لإتمام المتحرك لهزة كاملة.

نصف الدور: الزمن اللازم لانتقال الجسم

من $+X_{max} \longrightarrow -X_m$ $\quad t = \frac{T_0}{2}$

ملاحظة: عند بدء الحركة عند أحد المطالين الأعظميين ($-X_m$ و $+X_m$) فإن أزمنة المرور فردية من ربع الدور:

$t_1 = \frac{T_0}{4} \quad t_2 = \frac{3T_0}{4} \quad t_3 = \frac{5T_0}{4}$

$t_4 = \frac{7T_0}{4} \quad t_5 = \frac{9T_0}{4} \quad t_6 = \frac{11T_0}{4}$

* تعيين زمن المرور الجسم في المطال $\bar{x} = 0$

علماً أن شروط البدء هو $x_0 = \frac{X_m}{2}$

$x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\cos(\omega_0 t + \varphi) = 0$

$\omega_0 t + \varphi = \pi k + \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow t = \frac{\pi k + \frac{\pi}{2} - \varphi}{\omega_0}$

8. الطاقات:

$E_{tot} = \frac{1}{2} k X_{max}^2$

$E_p = \frac{1}{2} k . X^2$

$E_k = \frac{1}{2} m v^2$

$E_k = E_{tot} - E_p = \frac{1}{2} k [X_{max}^2 - X^2]$

تمرين: 16, 17, 18:

أولاً:

1. a: $X = 0,08 \cos(\pi t + \pi)$

2. c: $v = -0,12 \pi \sin(2\pi t)$

3. d: الاهتزاز من مطال الأول $-X_m$ ومطال الثانية $+X_m$

ثانياً: 11:

$\omega_0 \sqrt{X_m^2 - X^2} = v$

$E_{tot} = E_k + E_p$

$\Rightarrow E_k = E_{tot} - E_p = \frac{1}{2} k X_m^2 - \frac{1}{2} k X^2$

$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k [X_m^2 - X^2]$

$v^2 = \frac{k}{m} . [X_m^2 - X^2]$

$v^2 = \omega_0^2 [X_m^2 - X^2]$

$\Rightarrow v = \omega_0 \sqrt{X_m^2 - X^2}$

ت 12: a:

جملة المقارنة خارجية.

الجملة المدروسة: النواس المرن.

القوى المؤثرة: R, W, F_s

$\sum \vec{F} = m.\vec{a}$

$\vec{W} + \vec{F_s} + \vec{R} = m.\vec{a}$

بالإسقاط على محور موجه بجهة الحركة:

$-F_s = m.a$

$F_s = F_s' = k.x$

$\Rightarrow k.x = m.a$

حيث $a = (x)''_t$

$k.x = m(x)''_t$

$(x)''_t = \frac{k.x}{m}$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حل جيبي من الشكل:

$X = X_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

باشتقاق الحل مرتين:

$(X)'_t = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$(X)''_t = -\omega_0^2 . X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\boxed{(X)''_t = -\omega_0^2 . X}$

نعوض في المعادلة التفاضلية

$+\omega_0^2 . X = +\frac{k.x}{m}$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ حركة النواس جيبية انسحابية، نكتب ما يحاكي موضع ...

3): $x = 6 \times 10^{-2}\,m$

$v = \omega_0 \sqrt{X_m^2 - x^2} = \pi \sqrt{(10^{-1})^2 - (6 \times 10^{-2})^2}$

$v = \pi \sqrt{10^{-2} - 36 \times 10^{-4}} = \pi \sqrt{100 \times 10^{-4} - 36 \times 10^{-4}}$

$v = \pi \sqrt{64 \times 10^{-4}} = \pi \times 8 \times 10^{-2}$

$v = 6\pi\, 10^{-2} = 25 \times 10^{-2}\, m.s^{-1}$

2d.. عبر الطاقات , نعبر الطاقة الحركية بدلالة

4): $x = ?$, $t = 0$ موضع الجسم لحظة بدء الزمن

$X = 0{,}1 \cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$

$X = 0 \Rightarrow O : X$

أي عند بدء الزمن كان الجسم في وضع التوازن.

و هنا لدينا حالتين للسرعة اما $v < 0$ أو $v > 0$

ونسب احدهما لنعرف $\varphi = +\frac{\pi}{2}$

$v = -\omega_0 X_m \times \sin(\omega_0 t + \varphi)$.

$\Rightarrow \varphi = +\frac{\pi}{2} \Rightarrow v < 0$

أي أن الجسم المتحرك عند بدء الزمن كان يمر من وضع التوازن وهو يتحرك باتجاه السالب

1): $x_A = -\frac{X_m}{2}$

$E_{tot} = E_K + E_P$

$\Rightarrow E_K = E_{tot} - E_P = \frac{1}{2} K X_m^2 - \frac{1}{2} K X^2$

$E_K = \frac{1}{2} K X_{max}^2 - \frac{1}{2} K \frac{X_m^2}{4}$

$E_K = \frac{1}{2} K X_{max}^2 [1 - \frac{1}{4}]$

$E_K = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} K X_{max}^2 = \frac{3}{8} K X_m^2$

$\Rightarrow E_K = \frac{3}{8} E_{tot}$

2): $x_B = \frac{X_m}{\sqrt{2}}$

$E_{tot} = E_K + E_P$

$E_K = E_{tot} - E_P = \frac{1}{2} K X_m^2 - \frac{1}{2} K X^2$

$E_K = \frac{1}{2} K X_{max}^2 - \frac{1}{2} K \frac{X_{max}^2}{2}$

$E_K = \frac{1}{2} K X_{max}^2 [1 - \frac{1}{2}]$

$E_K = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} K X_{max}^2 = \frac{1}{4} X_{max}^2$

$\Rightarrow E_K = \frac{1}{4} E_{tot}$.

المسألة الأولى.

$g = 10\, m.s^{-2}$ $\pi^2 = 10$, $4\pi = 12{,}5$

$k = 10\, N.m^{-1}$; $x = 0{,}1 \cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$

1): $X_{max} = 0{,}1\, m$.

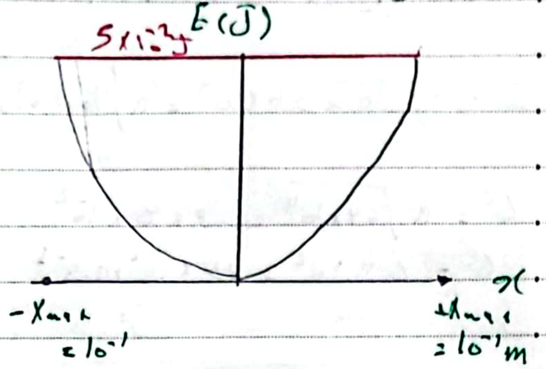
$\omega_0 = \pi\, rad.s^{-1}$

$\varphi = +\frac{\pi}{2}\, rad$.

2): $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow m = \frac{k}{\omega_0^2} = \frac{10}{10} = 1\,kg$

/ /

المسألة الثانية :



$\times\ X_{max} = 10\ cm = 10\times10^{-2} = 10^{-1}\ m$

$\times\ E_{tot} = 0{,}05\ J = 5\times10^{-2}\ J$

$\times\ m = 0{,}4\ kg = 4\times10^{-1}\ kg$

1) : $E_{tot} = \frac{1}{2} K . X_{max}^2$ $\quad K = ?$

$K = \frac{2E_{tot}}{X_{max}^2} = \frac{2\times5\times10^{-2}}{10^{-2}} = 10\ N.m^{-1}$

2) : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ $\quad T_0 = ?$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{10}{4\times10^{-1}}} = \sqrt{\frac{5\times10}{2}} = \sqrt{25} = 5\ rad.s^{-1}$

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{5}\ s.$

3) : عند مركز الاهتزاز تكون السرعة أعظمية $v = ?$

$v_{max} = |\pm \omega_0 X_{max}|$

$= |\pm 5\times10^{-1}|$

$v_{max} = 5\times10^{-1}\ m.s^{-1}.$

حل 2، عن طريق الطاقة الحركية

المسألة الثالثة :

$m = 1\ kg$

$N = 10$ هزات

$t = 10\ s.$

$d = 16\times10^{-2}\ m = 2X_{max}$

1) : $\sum \vec{F} = m\vec{a}_0$

- جملة المقارنة : خارجية .

الجملة المدروسة : نواس مرن.

القوى الخارجية المؤثرة : $\vec{R}, \vec{W}, \vec{F_s}$

$\sum \vec{F} = \cancel{m\vec{a}}\,0$

$\vec{W} + \vec{F}_{s_0} = \cancel{m\vec{a}}\,0$

$W - F_{s_0} = 0$

$W = F_{s_0}$

$m.g = K.x_0$

$x_0 = \frac{m.g}{K}$

$K = \omega_0^2 . m$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow \frac{2\pi}{\frac{10}{10}} = 2\pi\ rad.s^{-1}$

$K = (2\pi)^2 . m = 4\pi^2\times1 = 40\ N m^{-1}$

$\Rightarrow x_0 = \frac{1\times10}{40} = \frac{1}{4}\ m.$

2) : $v_{max} = |\pm \omega_0 X_{max}|$

$= |\pm 2\pi\times8\times10^{-2}|$

$= 16\pi\times10^{-2} = 50\times10^{-2}$

$= 5\times10^{-1}\ m.s^{-1}$

/ /

1) a $X = X_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$* X_{max} = 10^{-1}$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \, rad.s^{-1}$

φ : من شروط البدء

$X = \frac{+X_{max}}{2}$, $t = 0$

$\frac{X_{max}}{2} = \cancel{X_{max}} \cos \varphi$

$\frac{1}{2} = \cos \varphi \Rightarrow \varphi = +\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$

$v = -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{3})$

$v < 0$ مقبول

$v = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t - \frac{\pi}{3})$

$v > 0$ مرفوض

$\Rightarrow X = X_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$X = 10^{-1} \cos(2\pi t + \frac{\pi}{3})$

2) a t_1 , t_3

$X = 0$

$10^{-1} \cos(2\pi t + \frac{\pi}{3}) = 0$

$\cos(2\pi t + \frac{\pi}{3}) = 0$

$\Rightarrow 2\cancel{\pi} t + \frac{\cancel{\pi}}{3} = \cancel{\pi} k + \frac{\cancel{\pi}}{2}$

$2t_1 + \frac{1}{3} = k + \frac{1}{2}$

$k = 0$ زمن المرور الأول ،

$2t_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 0 \Rightarrow 2t_1 = \frac{1}{6}$

$t_1 = \frac{1}{12} s$

$a_{max} = -\omega_0^2 . X$

$= -(4\pi^2) . (6 \times 10^{-2})$

$= 24 \times 10^{-1} m.s^{-2}$

4) a $E_P = \frac{1}{2} k x^2$

$= \frac{1}{2} (40)(-4 \times 10^{-2})^2$

$= \frac{1}{2} 40 . 16 \times 10^{-4}$

$= 32 \times 10^{-3} J$

$* E_K = E_{tot} - E_P$

$E_{tot} = \frac{1}{2} k X_{max}^2 = \frac{1}{2} 40 (8 \times 10^{-2})^2$

$E_{tot} = 128 \times 10^{-3} J$

$\Rightarrow E_K = 128 \times 10^{-3} - 32 \times 10^{-3}$

$= 96 \times 10^{-3} J$

المسألة الرابعة :

$k = 16 N.m^{-1}$

$T_0 = 1 s$

$X_{max} = 10^{-1} m$

$X = \frac{X_{max}}{2}$

$t = 0$

$v < 0$

Nehad S A B B A G H

زمن المرور الثالث $k=2$

$\frac{\cancel{\pi}}{3}+2\cancel{\pi}t_3=\cancel{\pi}k+\frac{\cancel{\pi}}{2}$

$\frac{1}{3}+2t_3=k+\frac{1}{2}$

$2t_3=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{2}{}$
$\quad (2)\ (3)\ (6)$

$2t_3=\frac{12}{6}+\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{13}{6}$

$t_3=\frac{\frac{13}{6}}{\frac{2}{1}}=\frac{13}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{13}{12}$

$t_3=\frac{13}{12}s.$

3). $F=|-k.x|$, $x=0,1m$

$F=|-16.10^{-1}|=1,6N$

4). $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$

بتربيع الطرفين :

$\omega_0^2=\frac{k}{m}$

$\Rightarrow m=\frac{k}{\omega_0^2}=\frac{16}{4\pi^2}=4\times10^{-1}\,kg$

المسألة 3 خاصة (الأولى)

$k=10\,Nm^{-1}$

$m=0,1kg=10^{-1}kg$

$t=0$

$v=-3\,m.s^{-1}$

$x=0\,m$

1). $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{10}{10^{-1}}}=\sqrt{100}$

$\omega_0=10\,rad.s^{-1}$

2). $X=X_{max}\cos(\omega_0t+\varphi)$

$\omega_0=10\,rad.s^{-1}$

$X_{max}=?$

$\varphi=?$

* $v_{max}=\omega_0.X_{max}$

$X_{max}=\frac{v_{max}}{\omega_0}$

$X_{max}=\frac{3}{10}=3\times10^{-1}m$

* $\varphi=?$

من شروط البدء

$t=0$

$x=0$

$v=-3$ اتجاه سالب

$X=X_m\cos(\varphi)$

$\cos\varphi=0\Rightarrow\varphi \to +\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$

$v=-\omega_0.X_m\sin(\omega_0t+\frac{\pi}{2})$

$v<0$ مقبول

$v=-\omega_0X_m\sin(\omega_0t-\frac{\pi}{2})$

$v>0$ مرفوض

2). نجعل $X=0$

$8\times10^{-1}\cos(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{3})=0$

$\cos(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{3})=0$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{3}=\pi k+\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}t+\frac{1}{3}=k+\frac{1}{2}$

زمن المرور الأول $t_1 \Rightarrow k=0$

$\frac{1}{2}t=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$\Rightarrow t_1=\frac{1}{3}\,s.$

زمن المرور الثالث $t_3 \Rightarrow k=2$

$\frac{1}{2}t=\frac{1}{2}+2-\frac{1}{3}=\frac{13}{6}$

$t_3=\frac{13\times2}{6}=\frac{13}{3}\,s$

3). شدة لمحصلة قوة ارجاع (ارجاع)

a. تكون عظمى في الموضعين الطرفين $x=\pm X_m$

$F_m=|-k.X_m|=|-k.X_m|$

$k=?\Rightarrow \omega_0^2=\frac{k}{m}\Rightarrow k=\omega_0^2.m$

$k=125\times10^{-2}\,N.m^{-1}$

$F=|125\times10^{-2}\times8\times10^{-2}|$

$=1.N$

ب. تنعدم محصلة القوى (قوة الإرجاع) في مركز الإهتزاز $x=0\Rightarrow F=0$

$X=0,1\cos(10t+\frac{\pi}{2}).$

3). $F=|-k.X|$, $X=3\times10^{-2}m$

$F=|-10.3\times10^{-2}|=3\times10^{-1}N$

المسألة 2 عامة (الثانية)

$m=0,5kg$

$T_0=4s$

$X_{max}=8\,cm=8\times10^{-2}\,m.$

$X=\frac{X_m}{2}$

$t=0$

1). $X=X_{max}\cos(\omega_0 t+\varphi)$

$X_m=8\times10^{-2}m$

$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=\frac{\pi}{2}\,rad.s^{-1}$

φ: من الشروط الابتدائية $X=\frac{X_m}{2}$, $t=0$

$\frac{X_m}{2}=X_m\cos\varphi$

$\cos\varphi=\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi=+\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$

$v=-\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t+\frac{\pi}{3})$

$v<0$ مقبول

$v=-\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t-\frac{\pi}{3})$

$v>0$ مرفوض

$X=8\times10^{-2}\cos(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{3})$

/ /

1) $X = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$

* $X_{max} = 12\times10^{-2}\,m$

* $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} = 10\,rad.s^{-1}$

* $\varphi \Rightarrow x = \frac{X_m}{2}$, $t = 0$ من شروط البدء

$\frac{\cancel{X_m}}{2} = \cancel{X_m}\cos\varphi$

$\frac{1}{2} = \cos\varphi \Rightarrow \varphi = +\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$

$v = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{3})$

$v < 0$ مقبول

$v = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t - \frac{\pi}{3})$

$v > 0$ مرفوض

$\Rightarrow X = 12\times10^{-2}\cos(10t + \frac{\pi}{3})$

2) $x = 0$

$12\times10^{-2}\cdot\cos(10t + \frac{\pi}{3}) = 0$

$\Rightarrow \cos(10t + \frac{\pi}{3}) = 0$

$10t + \frac{\pi}{3} = \pi k + \frac{\pi}{2}$

المرور الأول $k = 0$

$10t = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$

$10t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{\frac{\pi}{6}}{10} = \frac{\pi}{60}\,s$

3) $m = ?$: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

تربيع الطرفين

$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow m = \frac{k}{\omega_0^2} = \frac{100}{100}$

$m = 1\,kg$.

5) $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m'}{K}}$

تربيع الطرفين

$T_0^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{m'}{K}$

$m' = \frac{K T_0^2}{4\pi^2} = \frac{\frac{5}{4}\times1}{40} = \frac{5}{16}\times10^{-1}\,kg$

مسألة نواس مرن دورة متوقعة

تهتز كتلة نقطية كتلتها m مربوطة نابض مرن شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته $K = 100\,N.m^{-1}$ حركة توافقية بسيطة دورها الخاص $T_0 = \frac{\pi}{5}\,s$ وسعة الهزاز $X_{max} = 12\times10^{-2}\,m$ باعتبار مبدأ الزمن $t = 0$ لحظة مرور الكرة في موضع مطاله $X = \frac{X_m}{2}$ وهي تتحرك باتجاه السالب.

المطلوب:

1. استنتج التابع الزمني للمطال
2. عين لحظة مرور الأول للكرة ~~...~~ في موضع التوازن ثم احسب سرعتها
3. احسب كتلة m
4. احسب شدة قوة الإرجاع في نقطة مطالها $x = 4\times10^{-2}\,m$
5. احسب الاستطالة السكونية للنابض واحسب الطاقة الميكانيكية.

المعطيات:

$m = 1kg$, $T_0 = 0,4s$, $d = 12cm = 12 \times 10^{-2} m$

1) : $x = X_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

* $X_{max} = \frac{d}{2} = \frac{12 \times 10^{-2}}{2} = 6 \times 10^{-2} m$.
* $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{4 \times 10^{-1}} = 5\pi \, rad.s^{-1}$
* φ : من شروط البدء $t=0$, $x = \cancel{X_{max}}$

$\cancel{X_{max}} = \cancel{X_{max}} \cos\varphi$

$\cos\varphi = 1$

$\Rightarrow \varphi = 0$

$x = 6 \times 10^{-2} \cos(5\pi t)$.

2) : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ نربع الطرفين نجد:

$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = \omega_0^2 . m = (5\pi)^2 . 1$

$\Rightarrow k = 25\pi^2 \times 1 = 250 \, N.m^{-1}$

3) : $m.g = k x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{mg}{k}$

$x_0 = \frac{1 \times 10}{250} = \frac{1}{25} m$.

4) : بما أن $x = X_{max}$, $t=0$

$\Leftarrow$ $t_1 = \frac{T_0}{4} \Rightarrow t = 0,1 s$

5) : * $E_p = \frac{1}{2} k . x^2 = \frac{1}{2}(250)(4 \times 10^{-2})^2$

$E_p = 125 \times 16 \times 10^{-4} = 2 \times 10^{-1} J$

* $E_{tot} = \frac{1}{2} k X_{max}^2 = \frac{1}{2}(250)(6 \times 10^{-2})^2$

$E_{tot} = 45 \times 10^{-2} J = 4,5 \times 10^{-1} J$

* $E_k = E_{tot} - E_p = 4,5 \times 10^{-1} - 2 \times 10^{-1} = 2,5 J$

4) : $F = ?$, $x = 4 \times 10^{-2} m$.

$F = |-k . x|$

$F = |-100 \times 4 \times 10^{-2}|$

$\Rightarrow F = 4 N$

5) : * $m . g = k . x_0$

$x_0 = \frac{m . g}{k}$

$x_0 = \frac{10}{100}$

$\Rightarrow x_0 = \frac{1}{10} m$

* $E_{tot} = \frac{1}{2} k . X_{max}^2$

$E_{tot} = \frac{1}{2} 100 . 144 \times 10^{-4}$

$E_{tot} = 72 \times 10^{-2} J$

مسألة 2020:

هزازة توافقية بسيطة غير متخامدة مؤلفة من جسم صلب كتلته $m = 1kg$ معلق بأحد أطراف نابض مرن شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة يهتز بدور خاص $T_0 = 0,4s$ ويرسم أثناء حركته قطعة مستقيمة $d = 12cm$ المطلوب.

1) أكتب تابع زمني للمطال انطلاقاً من شكله العام باعتبار مبدأ الزمن لحظة كان الجسم في مطاله الأعظمي الموجب.

2) احسب ثابت صلابة النابض K.

3) احسب قيمة الاستطالة السكونية x_0.

4) عين لحظة المرور الأول للجسم في مركز الاهتزاز.

5) احسب الطاقة الكامنة عند نقطة مطالها $x = 4cm$ ثم احسب الطاقة الحركية.

مسألة نواس مرن دورة 2013 (ثانية)

هزازة توافقية بسيطة مؤلفة من نقطة مادية $m=100g$ معلقة بنابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة شاقولي تهتز بدور خاص $T_0=1s$ ومطال اهتزاز $X_{max}=16cm$ بفرض مبدأ الزمن عندما تكون النقطة المادية في مطالها الأعظمي الموجب والمطلوب:

1. استنتج التابع الزمني لمطال الحركة.
2. عين لحظة المرور الأول للنقطة المادية في مركز الاهتزاز واحسب قيمة السرعة العظمى (الطويلة).
3. احسب ثابت صلابة النابض.
4. احسب تسارع النقطة المادية لحظة مرورها في مطال $X=5cm$
5. احسب الطاقة الميكانيكية لهذه الهزازة.
6. احسب الطاقة الحركية للنقطة المادية عندما يكون مطالها $X=16cm$.

الحل

1: $X = X_{max}\cos(\omega_0 t+\varphi)$

$X_{max} = 16\,cm = 16\times10^{-2}\,m$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi\, rad.s^{-1}$

$\varphi = ?$

من شرط البدء نحسب φ

من شروط البدء: $t=0$ ، $X=X_{max}$

$X_{max} = X_{max}\cos(\varphi)$

$\cos(\varphi) = 1 \Rightarrow \varphi = 0\,rad.$

$\Rightarrow X = 16\times10^{-2}\cos(2\pi t)$

2: ط1: $X=0$

$16\times10^{-2}\cos(2\pi t) = 0$

$\Rightarrow \cos(2\pi t) = 0$

$2\pi t + 0 = \pi k + \frac{\pi}{2}$

لحظة المرور الأول: $k=0$

$2\pi t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2t = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow t = \frac{\frac{1}{2}}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{4}\,s$

ط2: هذه الطريقة تستخدم فقط عندما تكون شروط البدء $X = X_{max}$ ، $t=0$

$\Rightarrow t_1 = \frac{T_0}{4} = \frac{1}{4}\,s$

$v = (x)'_t = -\omega_0 X_{max}\underbrace{\sin(\omega_0 t+\varphi)}_{1}$

$v_{max} = |\pm\omega_0 X_{max}\times 1|$

$v_{max} = 2\pi\times16\times10^{-2} = 32\pi\times10^{-2}$

$v_{max} = 100\times10^{-2} = 1\,m.s^{-1}$

3: $k = ?$

$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = \omega_0^2 . m$

$\Rightarrow k = (2\pi)^2.(10^{-1}) = 40.10^{-1} = 4\,N.m^{-1}$

$k = 4\,N.m^{-1}$

4) $a = ?$

$a = -\omega_0^2 \cdot x$

$= (-2\pi)^2 \cdot (5 \times 10^{-2})$

$= 40 \cdot 5 \times 10^{-2}$

$a = 20 \times 10^{-1} = 2\ m \cdot s^{-2}$

5) $E_{tot} = ?$

$E_{tot} = \frac{1}{2} k \cdot x_{max}^2$

$E_{tot} = \frac{1}{2} (4) (16 \times 10^{-2})^2$

$E_{tot} = 2 (16 \times 10^{-2})^2$

$\Rightarrow E_{tot} = 2 \times 256 \times 10^{-4}$

$\Rightarrow E_{tot} = 512 \times 10^{-4}\ J$

6) $E_k = ?$ .. $E_{tot} = E_k + E_p$

$E_k = E_{tot} - E_p$

$* E_p = \frac{1}{2} k \cdot x^2 = \frac{1}{2} (4) (1\ 10^{-1})^2 = 2 \times 10^{-2}\ J$

$\Rightarrow E_k = 512 \times 10^{-4} - 2 \times 10^{-2}$

$= 5{,}12 \times 10^{-2} - 2 \times 10^{-2}$

$\Rightarrow E_k = 3{,}12 \times 10^{-2}\ J$