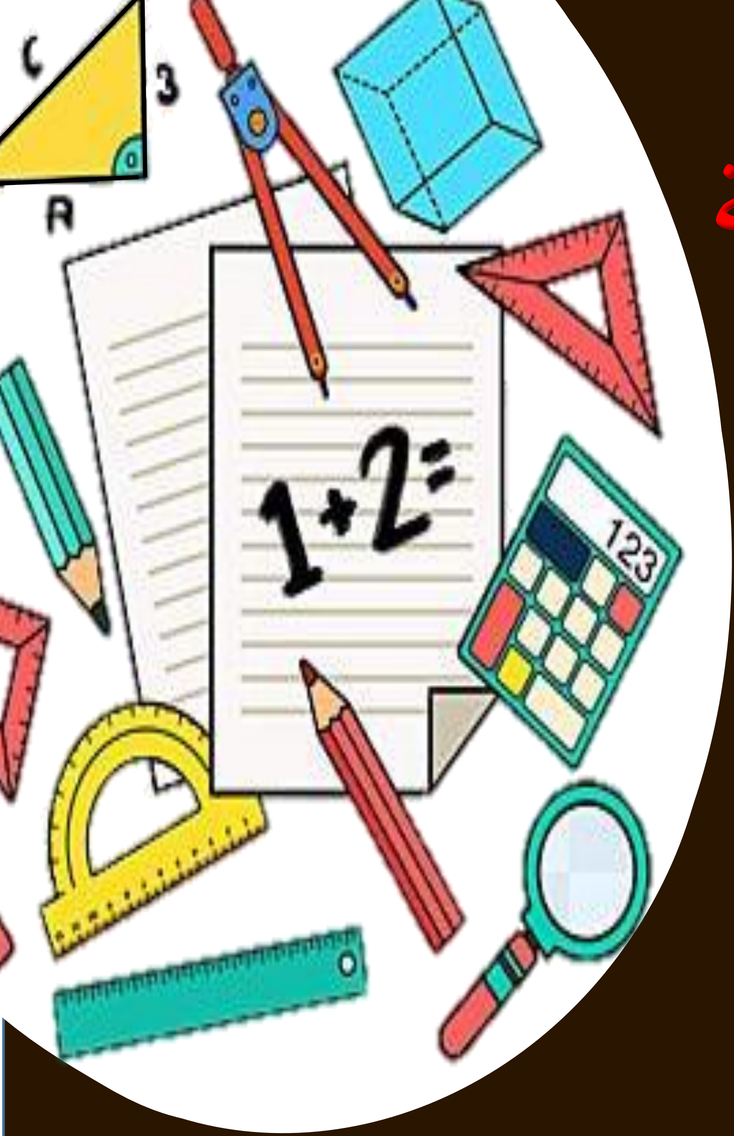

سلسلة النور التعليمية

تقدم

عشرون قاعدة

في الاشتقاق

ثاني
وثالث ثانوي
علمي

أ: روان الشايب

0954094146

حينما سُئِلَ أديسون عن أسباب فشله فقال:

أنا لم أفشل بل اكتشفت عدة طرق لا تؤدي لاختراع المصباح

قناة التلغرام: https://t.me/rawann20621

❖ **تعريف التابع وبصورة مبسّطة:** هو علاقة تربط بين المنطلقX والمستقر Y.

$$f : x \to y$$

$$f(x) = y$$

❖ **مفهوم الاشتقاق:** يعبّر عن المعدل الذي تتغير فيه قيم y (المستقرّ) بسبب تغيّر قيمة x مع بقاء علاقة رياضيّة بينهم.

- نرمز للاشتقاق غالباً ب $f'(x)$.

❖ **تعريف العدد المشتق:** $f'(a) = l$

هو العدد المشتق للتّابع f عند a عندما يكون التَّابع اشتقاقي عند a ومُمشتقه يساوي l وهذا يكافئ:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \to h \; (\text{معدل التغيّر})$$

نهاية حقيقية l عند عدد ما.

←**مُلاحظة:**

مُعَرَّف – مُعَدَّل التغيّر عندما يكون h غير معدوم وَ $a + h$ واقعاً ضمن مجموعة تعريف التّابع f .

أي أنَّه:

إذا كان f اشتقاقياً عندَ نقطة a كانَ

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

➢**بصيغة مبسَّطة:** يكون التّابع اشتقاقي إذا كانَ قابل للاشتقاق عِندَ كُلّ نقطة من نقاطه.

◆أنواع التّوابع المألوفة:

1- **التّابع الصّحيح:** هو تابع كثير حدود من الدّرجة n معرَّف على كامل R .

•**<u>مثال</u>:**

$$\boldsymbol{f(x) = x^4 + 4x + 1}$$

$$Df =]-\infty , +\infty[$$

◆التابع الصحيح اشتقاقي على مجموعة تعريفه.

2- **التّابع الكسري:** هو تابع بسطه ومقامه تابعان صحيحان.

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

وهو معرَّف بشرط: $h(x) \neq 0$

•**<u>مثال</u>:** أوجد مجموعة تعريف التابع الآتي:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{3x-1}{x-1}}$$

$$x - 1 \neq 0$$

$$x \neq 1$$

كُل R ماعدا (1)، نعبّر رياضياً عن هذه العبارة:

$$Df = R \setminus [1]$$

نوع التابع كسري
معرّف بشرط:
المقام لا يساوي الصفر
نطبق

◆التابع الكسري اشتقاقي على مجموعة تعريفه.

3- **التّابع الجذري:** هو تابع يحتوي على جذر.

$$f(x) = \sqrt{h(x)}$$

مجموعة تعريفهُ: $h(x) \geq 0$

مُعرّف بشرط مضمون الجذر أكبر أو يساوي الصّفر.

•مثال:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$x \geq 0$$

$$Df = [\,0, +\infty\,]$$

التّابع الجذري مشتق على المجال $[\,0\,,+\infty\,[$

4- **التّابع المثلثي:** هو تابع يحتوي إحدى الصّيغ

$$\sin\ ,\cos\ ,\tan\ ,\cot$$

بالحالة العامة: هو تابع معرّف على R وَاشتقاقي عليها (نُناقش في حالة الزاوية)

5- **التّابع اللوغاريتمي:** $\boldsymbol{x \to ln(x)}$

$$]\,0\,,+\infty\,[\ \to\ ]-\infty\,,+\infty\,[$$

مُعرّف بشرط $x > 1$

x أكبر تماماً من الصفر(موجب دوماً) على المجال Df .

x اشتقاقي على المجال I .

•مثال1:

$$\boldsymbol{f(x) = \ln(x)}$$

معرّف واشتقاقي على $I =]\,0\,,+\infty\,[$

•مثال2:

$$\boldsymbol{f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{\ln(x)}\right)} \quad ,I =]\,1\,,+\infty\,[$$

$x+1$ تابع صحيح اشتقاقي على I $\ln(x)$ اشتقاقي على I.

$f(x)$ التّابع معرّف واشتقاقي على $I =]1\,,+\infty\,[$.

2- **التّابع الأسي:** هو تابع يعبّر عن التبادل العكسي للتابع اللوغاريتمي.

نرمز لَهُ بِـــ

$$\exp(x)$$

$$f(x) = e^{u(x)}$$

$$x \to e^{x}$$

$$x \to R_{+}^{*}$$

مجموعة تعريف F هي دائماً مجموعة تعريف $u(x)$.

$$f(x) = e^{x}$$

$$Df = R$$

♦التابع الأسي اشتقاقي على مجموعة تعريفه.

- إذا كانَ $u(x)$ اشتقاقياً على المجال Df فإنَّ F اشتقاقي على ذلك المجال.

❖القاعدة الأولى:

$$\begin{cases} f(x) = ax^{0} \\ f(x) = a \end{cases}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = 0}$$

عندما يكون أسّ الأساس يساوي الصفر ← فالأساس يساوي الواحد

♦ **تعميم هذه القاعدة:** مشتق العدد الثّابت يساوي الصفر.

❖القاعدة الثّانية:

$$f(x) = ax^{1} + b$$

$$f'(x) = a \times 1 \times x^{1-1} + 0$$

$$f'(x) = a \times x^{0}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = a}$$

◆ **تعميم هذه القاعدة:**

يُمكننا التعميم هُنا وَبصورة مباشرة، مشتق المجهول من الدّرجة الأولى هو أمثالَهُ وَمشتق العدد الثّابت يساوي الصّفر.

❖ القاعدة الثّالثة:

$$f(x) = ax^{n} + b$$

$$\boldsymbol{f'(x) = n \times a^{n-1} + 0}$$

● **مثال:** أوجد المشتق من المرتبة الرابعة:

$$\boldsymbol{f(x) = 5x^3}$$

$$f'(x) = 5 \times 3x^{3-1}$$

$$f'(x) = 15x^2$$

$$f''(x) = 15 \times 2x^{2-1}$$

$$f''(x) = 30x^1$$

$$f'''(x) = 30 \times 1\, x^{1-1}$$

$$f'''(x) = 30$$

$$f''''(x) = 0$$

◆ **تعميم هذه القاعدة:**

إذا كان x مرفوع لقوّة، نخفض هذه القوّة درجة .

← **فمثلاً:** لو كانت القوة $\boxed{6 \text{ أصبحت } 5}$ ثمّ نضرب أمثال x بالقوة $\underline{n}$.

•**مثال1:**

$$\boldsymbol{f(x) = 5x^{2} + 4}$$

$$f(x) = ax^n + b$$

$$f'(x) = 2 \times 5x^{2-1} + 0$$

$$f'(x) = 10x^1$$

•**مثال2:**

$$\boldsymbol{f(x) = 3x^{4} + 2x^{2} + 5}$$

$$f'(x) = 4 \times 3x^{4-1} + 2 \times 2x^{2-1} + 0$$

$$f'(x) = 12x^3 + 4x$$

❖القاعدة الرّابعة:

$$f(x) = [g(x)]^n$$

$$\boldsymbol{f'(x) = n[g(x)]^{n-1}g'(x)}$$

◆ **تعميم هذه القاعدة:**

لاشتقاق تابع قوّة n ، نضرب التابع بهذه القوّة ثمَّ نخفض رتبة التابع درجة ثمَّ نضرب بمشتق هذا التابع.

⇦ **ملاحظة هامة:** يجب عدم الخلط بيّن القاعدة الرّابعة والثّالثة.

•**مثال:**

$$\boldsymbol{f(x) = (x + 5)^4}$$

نُلاحظ أنَّ هذه الدّالة من النمط $f(x) = [g(x)]^4$

$$\Longrightarrow f'(x) = 4\,[g(x)]^{4-1} \cdot g'(x)$$

$$f'(x) = 4\,[x + 5]^{4-1} \cdot 1$$

$$f'(x) = 4\,[x + 5]^3$$

❖القاعدة الخامسة:

$$f(x) = \sqrt{h(x)}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{h'(x)}{2\sqrt{h(x)}}}$$

◆ تعميم هذه القاعدة:

$$\text{مشتق التَّابع الجذري} = \frac{\text{مشتق مضمون الجذر}}{\text{ضعفيّ الجذر}}$$

•مثال1:

$$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$ ((حالة ثابتة))

•مثال2:

$$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{2x+1}}$$

نلاحظ أن هذه الدالة من النمط $f(x) = \sqrt{h(x)}$

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

★نحوّ الحل:

مضمون الجذر $= 2x+1$

مشتقه $= 2$

ضعفيّ الجذر $= 2\sqrt{2x+1}$

•مثال3:

$$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x^2+2}}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$$

★نحوَ الحل:

الجذر $= \sqrt{x^2+2}$

ضعفي الجذر $= 2\sqrt{x^2+2}$

مضمون الجذر $= x^2+2$

مضمون مشتق الجذر $= 2x$

❖القاعدة السادسة:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{g'(x).h(x) - h'(x).g(x)}{(h(x))^2}}$$

◆ تعميم هذه القاعدة:

مشتق تابع كسري $=$ (البسط × مشتق المقام + المقام × مشتق البسط) / $(\text{المقام})^2$

•مثال:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}}$$

نلاحظ أنَّ هذه الدّالة من النمط:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

فيكون مشتقها:

نحوَ الحل:

البسط $= x+1$

المقام $= x^2+1$

مشتق المقام $= 2x$

المقام للتربيع $= (x^2+1)^2$

مشتق البسط $= 1$

مشتق التابع الكسري $=$ (البسط × مشتق المقام + المقام × مشتق البسط) / $(\text{المقام})^2$

$$f'(x) = \frac{g'(x).h(x) - h'(x).g(x)}{(h(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{1(x^2+1) - 2x(x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$$

• **تمرين:** أوجد المشتق الثّاني للتابع الآتي:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

....

....

....

....

....

....

....

....

❖ القاعدة السّابعة:

$$f(x) = g(x) \cdot h(x)$$

$$\boldsymbol{f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + h'(x) \cdot g(x)}$$

◆ تعميم هذه القاعدة:

مشتق جداء تابعيّن = مشتق التابع الأول × التابع الثاني + مشتق التابع الثاني × التابع الأول

•**مثال1:**

$$\boldsymbol{f(x) = x\sqrt{x^2+2}}$$

نحوَّ الحل:

مشتق جداء تابعين

التَّابع الأول $g(x) = x$

مشتقه $g'(x) = 1$

التابع الثاني $h(x) = \sqrt{x^2+2}$

مشتقه $h'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}$

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + h'(x) \cdot g(x)$$

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{x^2+2} + \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} \cdot x$$

$$f'(x) = \sqrt{x^2+2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}$$

نوَّحد المقامات

$$f'(x) = \frac{x^2+2+x^2}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}$$

•**مثال2:**

$$\boldsymbol{f(x) = x\sqrt{x}}$$

تذكرة: التابع الأول × مشتق التابع الثاني + التابع الثاني × مشتق التابع الأول = مشتق جداء تابعيّن

نحوَّ الحل:

يوجد لدينا في هذا التَّابع جداء تابعين:

التَّابع الأول $h(x) = x$

مشتقه $h'(x) = 1$

التابع الثَّاني $g(x) = \sqrt{x}$

مشتقه $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

الحل:

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{2x+x}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{3x}{2\sqrt{x}}$$

$$x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$$ نحنُ نعلم أنَّ:

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

•**تمرين:** استنتج $f'(x)$ للتابع الآتي:

$$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x} \cdot x}$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

❖**القاعدة الثامنة: ((حالة ثابتة)):**

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = -\frac{1}{x^2}}$$

((التوابع المثلثيّة))

❖**القاعدة التَّاسعة: ((حالة ثابتة)):**

$$f(x) = \sin x$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \cos x}$$

❖القاعدة العاشرة:

$$f(x) = \sin(g(x))$$
$$\boldsymbol{f'(x) = g'(x) \cdot cos(g(x))}$$

◆ تعميم هذه القاعدة:

1. نشتق مضمون $\sin$
2. نحول $\sin \rightarrow \cos$
3. مع بقاء المضمون ذاته

نحوَّ الحل:

نلاحظ أنَّ التَّابع من الشكل:

$f(x) = [g(x)]^n$((بالعودة إلى الحالة الرَّابعة))

في هذا التمرين دمجنا بيّن القاعدة الرَّابعة والقاعدة العاشرة

$\boxed{n = 2}$

$f'(x) = 2[\mathrm{g(x)}]^{2-1} \cdot g'(x)$

•**مثال1:** أوجد المشتق الأوَّل للتابع:

$$\boldsymbol{f(x) = 3\sin^2 x}$$
$$f'(x) = 3(2)\sin x\,(\cos x)$$
$$f'(x) = 6\sin x\,(\cos x)$$

•**مثال2:**

$$\boldsymbol{f(x) = \sin x}$$
$$f'(x) = \cos x$$ **((حالة ثابتة))**

•**مثال3:**

نحوَّ الحل:

هي ذات المناقشة في المثال الأوَّل:

$\boxed{n = 3}$

$$\boldsymbol{f(x) = 4\sin^3 x}$$
$$\boldsymbol{f'(x) = 4(3)}\, sin^{3-1} x\,(\cos x)$$
$$f'(x) = 12\, sin^2 x\,(\cos x)$$

• **مثال4:**

$$f(x) = -x \sin x$$

تذكرة: التابع الأول × مشتق التابع الثاني + التابع الثاني × مشتق التابع الأول = مشتق جداء تابعيّن

الحل:

$$f'(x) = -[(1)(\sin x + x\cos x)]$$

$$f'(x) = -\sin x - x\cos x$$

نحوَ الحل:

نلاحظ أولاً وجود إشارة سالب فنهملها.

$f(x) = -(x \sin x)$

هُنا يوجد جداء تابعين

التَّابع الأوَّل $g(x) = x$

مشتق التَّابع الأوَّل $g'(x) = 1$

التَّابع الثاني $h(x) = \sin x$

مشتق التَّابع الثاني $h'(x) = \cos x$

❖القاعدة الحادية عشر: ((حالة ثابتة)):

$$f(x) = \cos x$$

$$f'(x) = -\sin x$$

❖القاعدة الثانيَّة عشر:

$$f(x) = \cos(g(x))$$

$$f'(x) = -g'(x)\sin(g(x))$$

◆ **تعميم هذه القاعدة:**

1. نشتق مضمون $\sin$
2. نحول $\cos \to -\sin$
3. مع بقاء المضمون ذاته

•**<u>مثال1</u>:** أوجد مشتق التّوابع الآتية:

$\boxed{1}$ $$\boldsymbol{f(x) = \cos x}$$

$$f'(x) = -\sin x$$ ((حالة ثابتة))

$\boxed{2}$ $$\boldsymbol{f(x) = \cos^2(3x)}$$

$$f'(x) = 2\cos(3x)\,(-3\sin 3x)$$

$\boxed{3}$ $$\boldsymbol{f(x) = \cos 2x + \sin 2x}$$

$$f'(x) = -2\sin 2x + 2\cos 2x$$

$\boxed{4}$ $$\boldsymbol{f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$f'(x) = 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + -\left[\left(\frac{-1}{x^2}\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]x^2$$

$$f'(x) = 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$$

•**<u>مثال2</u>:** أوجد المشتق الثَّاني للتابع الآتي:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\sin x}}$$

<u>الحل</u>: لإيجاد المشتق الأوَّل:

$$f'(x) = \frac{0(\sin x) - \cos x\,(1)}{(\sin x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\cos x}{(\sin x)^2}$$

نحوَّ الحل: لإيجاد المشتق الأول

تذكرة بفقرة اشتقاق تابع كسري:

البسط $= 1$

مشتق البسط $= 0$

المقام $= \sin x$

مشتق المقام $= \cos x$

مشتق التابع الكسري = (البسط × مشتق المقام + المقام × مشتق البسط) ÷ ^{2}(المقام)

لإيجاد المشتق الثاني:

$$f''(x) = \frac{\sin x\,(\sin x)^2 - 2\sin x\,(\cos x)(-\cos x)}{(\sin x)^4}$$

$$f''(x) = \frac{\sin x\,(\sin^2 x + 2\cos^2 x)}{(\sin x)^4}$$

$$= \frac{\sin^2 x + 2\cos^2 x}{(\sin x)^3}$$

نعلم أنَّ: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2$$

$$f''(x) = \frac{1 - \cos^2 x + 2\cos^2 x}{\sin^3 x}$$

$$f''(x) = \frac{1 + \cos^2 x}{\sin^3 x}$$

نحوَ الحل: لإيجاد المشتق الثاني:

تذكرة بفقرة اشتقاق تابع كسري:

البسط $= -\cos x$

مشتق البسط $= \sin x$

المقام $= \sin^2 x$

مشتق المقام $= 2\sin x\,(\cos x)$

❖القاعدة الثّالثة عشر:

$$f(x) = \tan x$$

إما $\rightarrow \boldsymbol{f'(x) = 1 + \tan^2 x}$

أو $\rightarrow \boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}}$

كلاهما صحيح لكن بحسب طبيعة المسألة نختار المناسب.

❖القاعدة الرَّابعة عشر:

$$f(x) = \tan(g(x))$$

$$\boldsymbol{f'(x) = g'(x)[1 + \tan^2(g(x))]}$$

◆ تعميم هذه القاعدة:

1. نشتق مضمون $\tan$
2. نحول $\tan \rightarrow 1 + \tan^2$
3. مع بقاء المضمون ذاته

•**مثال1:**

$$\boldsymbol{f(x) = tan\,x}$$

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x$$

•**مثال2:**

$$\boldsymbol{f(x) = tan\,3x}$$

$$f'(x) = 3(1 + \tan^2 3x)$$

نشّط عقلك: إذا علمتَ أنَّ مُشتق التَّابع:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$$

استنتج $f(x)$ ☺

•**مثال3:** أوجد مشتق التّوابع الآتية:

$\boxed{1}$ $$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{\cos x}}$$

$$f'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$$

$\boxed{2}$ $$\boldsymbol{f(x) = \tan 9x}$$

$$f'(x) = 9(1 + \tan^2 9x)$$

$\boxed{3}$ $$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{1 - x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$\boxed{4}$ $$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\cos^3 2x}}$$

$$f'(x) = \frac{0(\cos^3(2x)) - 1(3\cos^3 2x)(-2\sin 2x)}{(\cos^3 2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6\sin 2x}{\cos^4 2x}$$

$\boxed{5}$ $$\boldsymbol{f(x) = \frac{2x}{x-1}}$$

$$f'(x) = \frac{2(x-1) - (1)(2x)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x - 2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$\boxed{6}$ $$\boldsymbol{f(x) = \tan x - 1}$$

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x + 0$$ ((حالة ثابتة))

$\boxed{7}$ $$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{10}}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 0$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$\boxed{8}$ $$\boldsymbol{f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 2x\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x$$

$$f'(x) = 2x\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$$

$\boxed{9}$ $$\boldsymbol{f(x) = 4x - \tan^2 x}$$

$$f'(x) = 4 - 2\tan x\,(1 + \tan^2 x)$$

$\boxed{10}$ $$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + 1}$$

←**ملاحظة**: هذا التابع صحيح وليس كسري

$$f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 - \frac{1}{2} \times 2x + 1 + 0$$

$$f'(x) = x^2 - x + 1$$

$\boxed{11}$ $$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1}}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x+1) - 1(x^2 - 3x + 1)}{(x+1)^2}$$

أنتَ أكمل الجواب...

$\boxed{12}$ $$\boldsymbol{f(x) = \tan 3x}$$

$$f'(x) = 3(1 + \tan^2 3x)$$

•**تمرين:** أوجد مشتق التّوابع الآتية:

1 $$f(x)=\frac{x^2+x-\sqrt{x}}{x^2+1}$$

2 $$f(x)=\sqrt{x-1}-\sqrt{x}$$

3 $$f(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{x+1}$$

4 $$g(x)=\frac{3x+\cos x}{x+1}$$

5 $$m(x)=\frac{-x+\sqrt{x}}{x-1}$$

6 $$h(x)=\sqrt{x^2-2x+1}$$

7 $$E(x)=\frac{1}{x}+x$$

8 $$F(x)=-\frac{x}{2}+\frac{x-1}{x}$$

❖القاعدة الخامسة عشر:

$$f(x) = \cot(g(x))$$

$$\boldsymbol{f'(x) = -g'(x)\,[1 + \cot^{2}(g(x))]}$$

◆ **تعميم هذه القاعدة:**

1. نشتق مضمون $\cot$
2. نحول $\cot \rightarrow 1 + \cot^{2}$
3. مع بقاء المضمون ذاته

❖القاعدة السادسة عشر: ((حالة ثابتة)):

$$f(x) = \ln(x)$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{x}}$$

❖القاعدة السابعة عشر:

$$f(x) = \ln(g(x))$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}}$$

◆ **تعميم هذه القاعدة:**

$$\text{مشتق تابع لوغاريتمي } (\ln) = \frac{\text{مشتق ما ضمن اللوغاريتم}}{\text{مضمون اللوغاريتم}}$$

• **مثال1:**

$$f(x) = \ln(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$ ((حالة ثابتة))

• **مثال2:**

$$f(x) = x - x\ln(x)$$

تذكرة: التابع الأول × مشتق التابع الثاني + التابع الثاني × مشتق التابع الأول = مشتق جداء تابعيّن

$$f'(x) = 1 - \ln(x)\,(1) + x\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 1 - \ln(x) + 1$$

$$f'(x) = 2 - \ln(x)$$

نحوَّ الحل:

هنا التَّابع عبارة عن:

xمطروح منه جداء تابعين

x مشتق $= 1$

$x \cdot \ln x$

$g(x) = x$ التَّابع الأوَّل

$g'(x) = 1$ مشتق التَّابع الأوَّل

$h(x) = \ln(x)$ التَّابع الثاني

$h'(x) = \frac{1}{x}$ مشتق التَّابع الثاني

• **مثال3:** أوجد مشتق التابع الآتي:

$$f(x) = \ln[\ln(\ln x)]$$

$$f'(x) = \ln\left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

❖القاعدة الثَّامنة عشر:

$$f(x) = \ln\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]$$

$$f'(x) = \frac{g'(x)\cdot h(x) - h'(x)\cdot g(x)}{(h(x))^2} \times \frac{h(x)}{g(x)}$$

◆ تعميم هذه القاعدة:

عندما يكون مضمون اللوغاريتم كسر فإننا نقول ونُعَمم بصورة مباشرة:

$$\text{المشتق} = \frac{\text{البسط} \times \text{مشتق المقام} - \text{المقام} \times \text{مشتق البسط}}{(\text{المقام})^2} \times \text{مقلوب الكسر}$$

• **مثال1:** أوجد مشتق التابع الآتي:

$$\boldsymbol{f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)}$$

$$\text{المشتق} = \frac{\text{البسط} \times \text{مشتق المقام} - \text{المقام} \times \text{مشتق البسط}}{(\text{المقام})^2} \times \text{مقلوب الكسر}$$

$$f'(x) = \frac{1(1-x)+1(x+1)}{(1-x)^2} \times \frac{x-1}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{(1-x)+x+1}{(1-x)(x+1)}$$

$$f'(x) = \frac{2}{(1-x)(x+1)}$$

نحوَّ الحل:

نلاحظ أنَّ هذا التَّابع من الشكل:

$$f(x) = \ln\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)$$

$\text{الكسر} = \frac{x+1}{1-x}$ ➔ $\text{مقلوبه} = \frac{1-x}{x+1}$

$\text{البسط} = x+1$

$\text{مشتقه} = 1$

$\text{المقام} = 1-x$

$\text{مشتقه} = 1$

$\text{مربعه} = (1-x)^2$

• **مثال2:** أوجد المشتق الرَّابع للتابع الآتي:

$$\boldsymbol{f(x) = \ln[\ln(\ln x)]}$$

$\leftarrow ln(x)$: حالة ثابتة حسب القاعدة السادسة عشر

$$f'(x) = \ln\left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

نلاحظ أنَّه تحوَّل المضمون إلى ((كسر))

بتطبيق القاعدة الثامنة عشر

$$f''(x) = \ln\left[-\frac{1}{x^2} \times \frac{x}{1}\right]$$

$$f''(x) = \ln\left[-\frac{1}{x}\right]$$

$$f'''(x) = -\frac{1}{x}$$

$$f''''(x) = +\frac{1}{x^2}$$ ((حالة ثابتة حسب القاعدة الثامنة))

•**مثال3:** أوجد مشتق التّوابع الآتية:

$$\boldsymbol{f(x) = \ln\left[\frac{x+1}{\ln x}\right]}$$

نحوَ الحل:

تذكرة بفقرة اشتقاق تابع كسري:

$\frac{x+1}{\ln x} =$ الكسر

$\frac{\ln x}{x+1} =$ مقلوب الكسر

$x + 1 =$ البسط

$1 =$ مشتقه

$\ln x =$ المقام

$\frac{1}{x} =$ مشتق المقام ((حالة ثابتة))

تابع لوغاريتمي مضمونه كسري

مقلوب الكسر × $\frac{\text{البسط} \times \text{مشتق المقام} - \text{المقام} \times \text{مشتق البسط}}{(\text{المقام})^2}$ = مشتقه

$$f'(x) = \frac{\ln x\,(1) - \frac{1}{x}(x+1)}{(\ln x)^2} \times \frac{\ln x}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1 - \frac{1}{x}}{(\ln x)(x+1)}$$

أصلح الشكل وَأكمل الاختصارات ...

•**مثال4:**

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{\ln x}{x}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x) - 1(\ln(x))}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

•**تمرين:** أوجد مشتق التّوابع الآتية:

$\boxed{1}$ $$\boldsymbol{f(x) = x^2(1 - \ln x)}$$

$\boxed{2}$ $$\boldsymbol{g(x) = \frac{x}{\ln(x)}}$$

$\boxed{3}$ $$\boldsymbol{h(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}$$

$\boxed{4}$ $$\boldsymbol{m(x) = x\ln x - x}$$

$\boxed{5}$ $$\boldsymbol{z(x) = x + 1 - \frac{\ln(x)}{x}}$$

6 $$y(x) = \frac{-x}{2} + \ln\left[\frac{x-1}{x}\right]$$

7 $$f(x) = m(x) \cdot \ln(1 - x)$$

8 $$h(x) = \ln\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)$$

9 $$f(x) = \ln(1 + x^2)$$

10 $$g(x) = \ln(x^2 - 1)$$

11 $$f(x) = 2x + \frac{1}{x}\ln x - 2$$

12 $$m(x) = \ln\left(\frac{-x + 1}{x - 1}\right)$$

13 $$c(x) = x + x(\ln x)^{-2}$$

❖القاعدة التاسعة عشر:

التَّابع الأسّي:

$$\boldsymbol{f(x) = e^{x}}$$

$$f'(x) = e^{x} \qquad \text{((حالة ثابتة))}$$

←مُلاحظة:

1) نرمز أحياناً للتابع الأسّي بِـ $f(x) = \exp$

2) التَّابع الأسّي: هو التبادل العكسي للتابع اللوغاريتمي

•مثال1:

$$\boldsymbol{f(x) = e^{x}}$$

$$f'(x) = e^{x} \quad \left(\left(\text{حالة ثابتة}\right)\right)$$

•مثال2:

$$\boldsymbol{f(x) = e^{-x}}$$

$$f'(x) = -e^{-x} \qquad \text{((حالة ثابتة))}$$

❖القاعدة العشرون:

$$f(x) = e^{u(x)}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = u'(x) \cdot e^{u(x)}}$$

◆ **تعميم هذه القاعدة:** مشتق الأسّ × الأساس نفسهُ مرفوع للقوّة ذاتها .

• مثال1:

$$f(x) = e^{-x} + x - 2$$

$$f'(x) = -(1)e^{-x} + 1 - 0$$

$$f'(x) = -e^{-x} + 1$$

• مثال2:

$$f(x) = e^{x} + x(\ln x)^2$$

تذكرة: التابع الأول × مشتق التابع الثاني + التابع الثاني × مشتق التابع الأول = مشتق جداء تابعيّن

$$f'(x) = e^{x} + 1(\ln x)^2 + 2x(\ln x) \times \left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = e^{x} + (\ln x)^2 + 2(\ln x)$$

نحوَّ الحل:

e^x مشتقها $e^x \leftarrow$ ((حالة ثابتة))

$x(\ln x)$

هُنا جداء تابعيّن:

التَّابع الأول $= x$

مشتقه $= 1$

التَّابع الثَّاني $= (\ln x)^2$

مشتقه $= 2\left(\frac{1}{x}\right)\ln(x)$

• مثال3:

$$f(x) = \frac{2x}{e^{x}}$$

$$f'(x) = \frac{2(e^{x}) - e^{x}(2x)}{(e^{x})^2}$$

$$f'(x) = \frac{2e^{x} - 2xe^{x}}{(e^{x})^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{x}[2 - 2x]}{(e^{x})^2}$$

$$f'(x) = \frac{2 - 2x}{e^{x}}$$

نحوَّ الحل:

البسط $= 2x$

مشتقه $= 2$

المقام $= e^{x}$

مشتقه $= e^{x}$

مربععه $= (e^{x})^2$

• **مثال4:**

$$\boldsymbol{f(x) = \ln(e^{-x} + 1)}$$

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}}{e^{-x} + 1}$$

• **مثال5:**

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + e^x}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \left[\frac{x - (x+1)}{x^2} \times \frac{x}{(x+1)}\right] + e^x$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \left[\frac{x - x - 1}{x(x+1)}\right] + e^x$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \left[\frac{-x + x + 1}{x(x+1)}\right] + e^x$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x(x+1)} + e^x$$

نحوَّ الحل:

نجزئه إلى توابع بسيطة:

$\text{التابع} = \frac{1}{x}$

$\text{مشتقه} = -\frac{1}{x^2}$

$\text{التابع} = e^x$

$\text{مشتقه} = e^x$

$\text{التابع} = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

$\text{مشتقه} = \frac{\text{البسط} \times \text{مشتق المقام} - \text{المقام} \times \text{مشتق البسط}}{(\text{المقام})^2} \times \text{مقلوب الكسر}$

$$= \frac{x - (x+1)}{(x^2)} \times \frac{x}{x+1}$$

• **مثال6:**

$$\boldsymbol{f(x) = e^{x^2}}$$

$$f'(x) = 2x \cdot e^{x^2}$$

إضاءة:

x^2 مشتقه $2x$

•**مثال7:**

$$f(x) = e^{\frac{2x-1}{3x-6}}$$

$$f'(x) = \frac{2(3x-6) - 3(2x-1)}{(3x-6)^2} \cdot e^{\frac{2x-1}{3x-6}}$$

$$f'(x) = \frac{6x - 12 - 6x + 3}{(3x-6)^2} \cdot e^{\frac{2x-1}{3x-6}}$$

$$f'(x) = \frac{-9}{(3x-6)^2} \cdot e^{\frac{2x-1}{3x-6}}$$

نحوَّ الحل:

نجزئه إلى توابع بسيطة:

الأسّ $= \frac{2x-1}{3x-6}$

مشتقه $= \frac{-9}{(3x-6)^2}$

الأساس $= e$

مشتق تابع أسّي = مشتق الأس × الأساس ذاته مرفوع للقوة ذاتها

التابع $= \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

•**مثال8:**

$$g(x) = e^{-x} + x - 2$$

$$g'(x) = (-1)e^{-x} + 1 - 0$$

$$g'(x) = -e^{-x} + 1$$

•**مثال9:** أوجد مشتق التَّابع الآتي:

$$f(x) = \frac{4}{1+e^x}$$

$$f'(x) = \frac{0(1+e^x) - (4)(e^x)}{(1+e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-4e^x}{(1+e^x)^2}$$

نحوَّ الحل:

نجزئه إلى توابع بسيطة:

البسط $= 4$

مشتقه $= 0$

المقام $= 1 + e^x$

مشتقه $= e^x$

مشتق تابع كسري = $\frac{\text{البسط × مشتق المقام – المقام × مشتق البسط}}{(\text{المقام})^2}$

نشّط عقلك: أوجد المشتق من المرتبة الخامسة.

•**<u>تمرين</u>:** أوجد مشتق التّوابع الآتية:

تجدون حلول هذهِ التَّوابع على قناة التلغرام التَّابعة لفريقنا عبر الرابط الآتي:

https://t.me/rawann20621

أو انضموا إلى مجموعات الواتس آب للمناقشة والاستفسارات

$\boxed{1}$ $$A(x) = e^{2x} - 5e + 4$$

$\boxed{2}$ $$B(x) = e^{x} + 4e^{-x}$$

$\boxed{3}$ $$C(x) = \ln\sqrt{e^{x}}$$

$\boxed{4}$ $$D(x) = 4e^{-x}$$

$\boxed{5}$ $$E(x) = e^{x+2}$$

$\boxed{6}$ $$F(x) = \ln\left(\frac{e^{x} - 1}{x}\right)$$

$\boxed{7}$ $$h(x) = exp\left[\frac{x}{x^2 +}\right]$$

8 $$J(x) = x^6 \cdot e^x$$

9 $$I(x) = \left[e^x\left(1 - \frac{\ln x}{e^x}\right)\right]$$

10 $$k(x) = \left[\frac{x-2}{x+1}\right]^x$$

11 $$L(x) = 2xe^{-x}$$

12 $$M(x) = \ln\left[1 + \frac{x}{x^2}\right]$$

13 $$N(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

14 $$O(x) = \sqrt{x^2 - 4x + e^x}$$

15 $$P(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$$

16 $$Q(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$$

17 $$R(x) = \frac{\tan x}{x}$$

18 $$L(x) = \frac{1}{\ln(x) + 1}$$

19 $$M(x) = \ln(1 - x)$$

20 $$N(x) = \frac{2e^{x} + 1}{1 + e^{x}}$$

21 $$Y(x) = \frac{x}{e^{x}} - 1$$

22 $$W(x) = \ln(x) - x^{2}e^{-x}$$

23 $$Z(x) = \frac{e^{x}(2 + e^{-x})}{(e^{-x} + 1)}$$

((لازلتَ موفقاً))