BAC MATHS	مذاكرة التابع اللوغاريتمي "1" الدرجة الكاملة : 300	الاسم :

السؤال الأول (60 درجة) :

حل المعادلات الآتية :

1) $\ln(1+x)+\ln(1-x)=\ln(1-x^2)$ 2) $\ln\sqrt{2x-3}=\ln(6-x)-\ln\sqrt{x}$

3) $2\ln\sqrt{3x+2}+\ln(1+x^2)=\ln 2$ 4) $\ln(x+1)+\ln x=\ln(9x-3)-\ln 3$

السؤال الثاني (60 درجة) :

حل المتراجحات الآتية :

1) $\ln(x^2+3x)<\ln(-6-4x)$ 2) $2\ln(x)<\ln[(1+\sqrt{3})x-\sqrt{3}]$

3) $\ln(2-x)-\ln(x+2)\geq\ln\left(\frac{x-2}{2+x}\right)$ 4) $3\ln(x)<\ln(x^2-x+1)$

السؤال الثالث (40 درجة) :

ليكن التابع f المعرّف على المجال $I=]-1,+\infty[$ وفق : $f(x)=\ln(1+x)$

احسب $f(0)$, $f'(x)$, $f'(0)$ واستنتج أن : $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

السؤال الرابع (30 درجة) :

C_f و C_g هما الخطان البيانيّان للتابعين المعرّفين وفق : $f(x)=\frac{1}{2}\ln(x+1)$, $g(x)=\sqrt{x+1}-1$ **المطلوب** :

1- تحقق أن $g(x)\geq f(x)$ من أجل كل x من المجال $I=]-1,+\infty[$.

2- أثبت أن C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً T في نقطة فاصلتها $x=0$ ، ثم اكتب معادلة للمماس T .

السؤال الخامس (10 درجة) :

بسّط كتابة الأعداد :

$$a=\ln 27 \quad , \quad b=\ln 125 \quad , \quad c=\ln\frac{1}{16}$$

السؤال السادس : حل المسألة الآتية (100 درجة) :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]-a\,,a[$ وفق : $f(x)=\ln\left(\frac{x+a}{a-x}\right)$ حيث $a>0$ ، **المطلوب** :

1- أثبت أن التابع f فردي .

2- ادرس تغيرات f على المجال $[0,a[$.

3- اكتب معادلة المماس T عند النقطة التي فاصلتها $x=0$ و احسب القيمة التقريبية للتابع f عند النقطة التي فاصلتها $x=0.1$.

4- من أجل $a=1$ ارسم في معلم متجانس T ومقاربات C ثم ارسم C .

5- استنتج رسم الخط البياني C' للتابع $g(x)=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ على المجال $]-1\,,1[$.

-- انتهت الأسئلة --

حل من كراسة التابع اللوغاريتمي

السؤال الأول:

1) $\ln(1+x)+\ln(1-x)=\ln(1-x^2)$

شرط الحل:

$$\begin{cases}1+x>0\\1-x>0\\1-x^2>0\end{cases}\Rightarrow x\in\,]-1,1[$$

$$\ln[(1+x)(1-x)]=\ln(1-x^2)$$

$$\ln(1-x^2)=\ln(1-x^2)$$

محققة من أجل كل x في المجال $]-1,1[$.

2) $\ln\sqrt{2x-3}=\ln(6-x)-\ln\sqrt{x}$

شرط الحل:

$$\begin{cases}2x-3>0\\6-x>0\\x>0\end{cases}\qquad x\in\,]\tfrac{3}{2},6[$$

$$\frac{1}{2}\ln(2x-3)=\ln(6-x)-\frac{1}{2}\ln x$$

$$\frac{1}{2}\ln(2x-3)+\frac{1}{2}\ln x=\ln(6-x)$$

$$\frac{1}{2}[\ln(2x-3)+\ln x]=\ln(6-x)$$

$$\frac{1}{2}\ln(2x^2-3x)=\ln(6-x)$$

نضرب الطرفين بـ (2):

$$\ln(2x^2-3x)=\ln(6-x)^2$$

$$2x^2-3x=36-12x+x^2$$

$$x^2+9x-36=0$$

$$(x+12)(x-3)=0$$

إما $x=3$ مقبول.

أو $x=-12$ مرفوض.

3) $2\ln\sqrt{3x+2}+\ln(1+x^2)=\ln 2$

شرط الحل: $3x+2>0$

أي $x>\frac{-2}{3}$

$$\ln(3x+2)+\ln(1+x^2)=\ln 2$$

$$\ln\big((3x+2)(1+x^2)\big)=\ln 2$$

نأخذ exp الطرفين:

$$3x+2+3x^3+2x^2=2$$

$$3x^3+2x^2+3x=0$$

$$x(3x^2+2x+2)=0$$

إما $x=0$ مقبول.

أو $3x^2+2x+2=0$

$\Delta=4-24<0$ مستحيلة الحل

إذن: مجموعة الحلول $S=\{0\}$

2) $2\ln x < \ln\left((1+\sqrt{3})x-\sqrt{3}\right)$

شرط الحل:

$x>0$

$(1+\sqrt{3})x-\sqrt{3}>0 \Rightarrow$

$$\boxed{x>\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}}$$

$\ln(x^2)<\ln\left((1+\sqrt{3})x-\sqrt{3}\right)$

$x^2<(1+\sqrt{3})x-\sqrt{3}$

$x^2-(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3}<0$

$(x-1)(x-\sqrt{3})<0$

$x\in\,]1,\sqrt{3}[$

نأخذ التقاطع مع شرط الحل نجد أن:

$x\in\,]1,\sqrt{3}[$

3) $\ln(2-x)-\ln(x+2)\geq\ln\left(\frac{x-2}{2+x}\right)$

$$\begin{cases} 2-x>0 \Rightarrow D_1=]-\infty,2[\\ x+2>0 \Rightarrow D_2=]-2,+\infty[\\ \frac{x-2}{2+x}>0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	0	$+$
$2+x$	$-$	0 $+$		$+$
$\frac{x-2}{2+x}$	$+$	$\|$ $-$	0	$+$
	محققة	غير محققة		محققة

$D_3=]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$

نأخذ التقاطع نجد $x\in\emptyset$

4) $\ln(x+1)+\ln x=\ln(9x-3)-\ln 3$

شرط الحل:

$$\begin{cases} x>0 \\ x>-1 \\ x>\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow x>\frac{1}{3}$$

$\ln(x^2+x)=\ln\left(\frac{9x-3}{3}\right)$

نأخذ exp الطرفين:

$x^2+x=3x-1$

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$x=1$ جذر مضاعف مقبول.

السؤال الثاني:

1) $\ln(x^2+3x)<\ln(-6-4x)$

شرط الحل:

$x^2+3x>0$

$x(x+3)>0$

$x\in\,]-\infty,-3[\cup]0,+\infty[$

نأخذ exp الطرفين:

$x^2+3x<-6-4x$

$x^2+7x+6<0$

$(x+1)(x+6)<0$

$x\in\,]-6,-1[$

نتقاطع مع شرط الحل:

$x\in\,]-6,-3[$

4) $3\ln x < \ln(x^2-x+1)$

شرط الحل $x>0$

و $x^2-x+1>0$

$\Delta = 1-4 = -3 < 0$

متحققة الحل في $\mathbb{R}$.

$x^2-x+1>0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

إذن شرط الحل $x>0$.

$\ln(x^3) < \ln(x^2-x+1)$

$x^3 < x^2-x+1$

$x^3-x^2+x-1<0$

نعدم $x^3-x^2+x-1=0$

نلاحظ أن $x_0=1$ حل للمعادلة.

$$\begin{array}{r|l} x^3-x^2+x-1 & x-1 \\ \hline -x^3+x^2 & x^2+1 \\ x-1 & \\ -x+1 & \\ 0\;0 & \end{array}$$

$(x-1)\underbrace{(x^2+1)}_{\text{موجبة تماماً}} < 0$

$x-1<0$

$x<1$

بأخذ التقاطع مع مجموعة شرط الحل:

$x \in]0,1[$.

السؤال الثالث :

$f(0) = \ln(1) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x}$ ، $f'(0)=1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

حسب تعريف العدد المشتق نجد أن النهاية هو $f'(0)=1$ إذن:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$$

السؤال الرابع :

1) ليكن التابع h المعرف على I وفق:

$h(x) = g(x) - f(x)$

$h(x) = \sqrt{x+1} - \frac{1}{2}\ln(x+1) - 1$

ندرس اطراد h على I:

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2(x+1)}$$

$h'(x)=0 \iff \sqrt{x+1} = x+1$

$\boxed{x=0}$

$h(0) = 1 - \frac{1}{2}\ln(1) - 1 = 0$

x	-1	0	$+\infty$
$h'(x)$	‖ $-$	0	$+$
$h(x)$	‖ $\searrow$	0	$\nearrow$

من جدول الإشارات نلاحظ أن :

$h(x) \geq 0$

$g(x) - f(x) \geq 0$

$\boxed{g(x) \geq f(x)}$

2) وجدنا أن :

$h(0)=0 \Rightarrow g(0)-f(0)=0$

$g(0)=f(0)$

الشرط الأول محقق .

$h'(0)=0 \Rightarrow g'(0)-f'(0)=0$

$g'(0)=f'(0)$

الشرط الثاني محقق .

وبالتالي C_f و C_g متماسان عند النقطة التي فاصلتها $x=0$

$T: y=f'(0)(x-0)+f(0)$

حيث: $f(0)=\frac{1}{2}\ln(1)=0$

$f'(0)=\frac{1}{2}$

$\boxed{T: y=\frac{1}{2}x}$

السؤال الخامس :

$a=\ln(3^3)=3\ln 3$

$b=\ln(5^3)=3\ln 5$

$c=\ln(2^{-4})=-4\ln 2$

السؤال السادس :

$f(x)=\ln\left(\frac{x+a}{a-x}\right)$

1) $\forall x \in]-a, a[$

عندئذ $-x \in]-a, a[$

الشرط الأول محقق .

$f(-x)=\ln\left(\frac{a-x}{a+x}\right)=\ln\left(\frac{x+a}{a-x}\right)^{-1}$

حسب الخاصية $\ln(a^b)=b\ln a$

نجد أن : $f(-x)=-\ln\left(\frac{x+a}{a-x}\right)$

$f(-x)=-f(x)$

الشرط الثاني محقق . فالتابع f فردي .

2) f معرف ومستمر واشتقاقي على $[0,a[$

$f(0)=\ln\left(\frac{a}{a}\right)=\ln(1)=0$

$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{t\to+\infty}\ln t=+\infty$

$f(x)=\ln(x+a)-\ln(a-x)$

$f'(x)=\frac{1}{x+a}-\frac{-1}{a-x}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x+a=x-a$ مستحيلة الحل .

$f'(x)>0$

x	0		a
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3- معادلة المماس من الشكل:

$T_\alpha \quad y = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha)$

حيث $\alpha = 0$

$f(0) = 0, \quad f'(0) = \frac{2}{a}$

$\boxed{T: \; y = \frac{2}{a}x}$

نطبق دستور التقريب التآلفي:

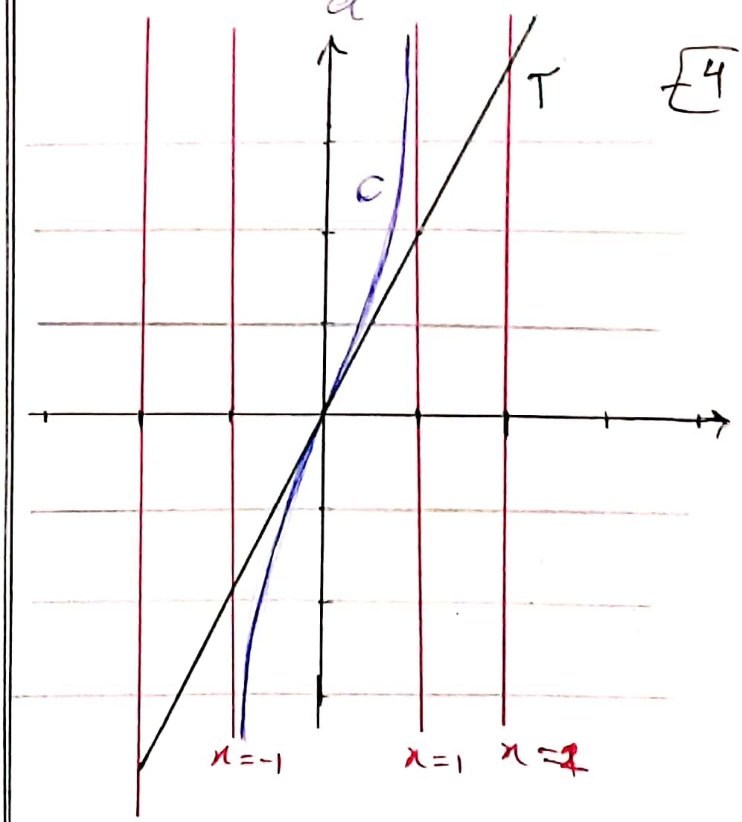
$f(a+h) \simeq f(a) + f'(a) \cdot h$

$a = 0 \qquad h = 0.1$

$f(0) = 0 \qquad f'(0) = \frac{2}{a}$

$f(0.1) \simeq \frac{0.2}{a}$

4-



5-

$g(x) = f(-x)$

C' نظير C بالنسبة إلى محور التراتيب $y'y$

ب)

$g(x) = -f(x)$

C' نظير C بالنسبة إلى محور الفواصل.