https://t.me/+CbbW8n6Up6U5OGE8

تجميع أسئلة مشابهة هيكل رياضيات 11 متقدم ف2 -20232022

1	Multiply matrices ضرب المصفوفات	(1-8)	291

الدرس 2-5

استخدم المصفوفات $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ لإيجاد كل ناتج ضرب، إن وجد.

a. AB

b. BA

2×3 2×2

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$2\times2 \quad = \quad 2\times3$

$$= \begin{bmatrix} -2(3)+3(-1) & 0(3)+5(-1) & 6(3)+1(-1) \\ -2(4)+3(0) & 0(4)+5(0) & 6(4)+1(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -9 & -5 & 17 \\ -8 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$2\times3 \quad \neq \quad 2\times2$

لأن عدد أعمدة الأولى لا يساوي عدد صفوف الثانية

فإن BA غير موجودة.

جد AB و BA، إن أمكن.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 5 & -7 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 5 & -7 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$

$2\times3 \quad = \quad 3\times2$

$$= \begin{bmatrix} 2(-2)+(-1)(0)+9(3) & 0(-2)+(0)(0)+3(3) \\ 2(5)+(-1)(-7)+9(1) & 0(5)+(0)(-7)+3(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 23 & 9 \\ 26 & 3 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 5 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

$3\times2 \quad = \quad 2\times3$

$$= \begin{bmatrix} -2(2)+5(0) & 0(2)+(-7)(0) & 3(2)+1(0) \\ -2(-1)+5(0) & 0(-1)+(-7)(0) & 3(-1)+1(0) \\ -2(9)+5(3) & 0(9)+(-7)(3) & 3(9)+1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -3 \\ -3 & -21 & 30 \end{bmatrix}$$

2	Find determinants and inverses of 2 × 2 and 3 × 3 matrices إيجاد معكوسات المصفوفات 2 ×2 والمصفوفات 3×3	(35-44)	292

الدرس 5-2

جد محدد كل من المصفوفات التالية. ثم جد معكوس المصفوفة، إن وُجدت.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 2(4) - (-3)(4) = 20$$

حيث أن $\det(A) \neq 0$ فإن A قابلة للعكس.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{20} & \frac{3}{20} \\ \frac{-4}{20} & \frac{2}{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{20} \\ \frac{-1}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = 6(6) - 4(9) = 0$$

حيث أن $\det(B) = 0$

فإن B غير قابلة للعكس

https://t.me/+CbbW8n6Up6U5OGE8

عمل المدرس / مصطفى أسامة علام
050-2509447

https://t.me/mathbook11ADV
قناة شرح فيديو الحادي عشر المتقدم
https://t.me/alllaaam82
قناة ملازم وامتحانات رياضيات
https://t.me/+CbbW8n6Up6U5OGE8

المفهوم الأساسي محدد مصفوفة 3 × 3

افترض $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$، إذًا

$$\det(A) = |A| = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

المحدد بالآلة الحاسبة 3x3

$\boxed{mode} \rightarrow \boxed{6} \rightarrow \boxed{1} \rightarrow \boxed{1} \rightarrow$ إدخال العناصر

$\rightarrow \boxed{AC} \rightarrow \boxed{shift} \rightarrow \boxed{4} \rightarrow \boxed{7} \rightarrow$

$\rightarrow \boxed{shift} \rightarrow \boxed{4} \rightarrow \boxed{3} \rightarrow \boxed{=}$

محدد ومعكوس مصفوفة 3 x 3

جد محدد كل من المصفوفات التالية. ثم جد معكوسها، إن وُجدت.

$$C = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(C) = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -3\left[-1(0)-2(4)\right] - 2\left[1(0)-2(-1)\right] + 4\left[1(4)-(-1)(-1)\right]$$

$$= -3(-8)-2(2)+4(3) = 24-4+12 = 32$$

حيث أن $\det(C) \neq 0$ فإن C^{-1} موجودة.

باستخدام الآلة الحاسبة $\boxed{mode} \rightarrow \boxed{6} \rightarrow \boxed{1} \rightarrow \boxed{1} \rightarrow$ إدخال عناصر المصفوفة $\rightarrow \boxed{AC}$

$\rightarrow \boxed{shift} \rightarrow \boxed{4} \rightarrow \boxed{3} \rightarrow \boxed{x^{-1}} \rightarrow \boxed{=}$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{5}{16} \\ \frac{3}{32} & \frac{5}{16} & \frac{1}{32} \end{bmatrix}$$

معكوس المصفوفة بدون الآلة 3x3

$$\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -2 & 3 \\ 16 & 4 & 10 \\ 8 & 10 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{تدوير المصفوفة}} \begin{bmatrix} -8 & 16 & 8 \\ -2 & 4 & 10 \\ 3 & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{\underset{32}{\det(C)}} \begin{bmatrix} -8 & 16 & 8 \\ -2 & 4 & 10 \\ 3 & 10 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{5}{16} \\ \frac{3}{32} & \frac{5}{16} & \frac{1}{32} \end{bmatrix}$$

عمود ① عمود ②

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{matrix}$$

طريقة أخرى للحل سواء للمحدد أو المعكوس

$$\Rightarrow \left[(3)(2)(3)+(1)(-1)(2)+(2)(1)(-1)\right] - \left[(2)(2)(2)+(-1)(-1)(3)+(3)(1)(1)\right]$$

$$= \left[18+(-2)+(-2)\right] - \left[8+3+3\right] = 14-14 = 0$$

لأن المحدد = 0 إذاً المصفوفة غير قابلة للعكس

3	Write equations of parabolas in standard form كتابة معادلات القطوع المكافئة بالصيغة القياسية	(1-4)	335

الدرس 6-1

اكتب كل معادلة بالصيغة القياسية. حدد رأس القطع المكافئ ومحور تماثله واتجاه فتحته.

$y = 2x^2 - 24x + 40$ $\left(\frac{-12}{2}\right)^2 = 36$

$y = 2(x^2 - 12x + 36) + 40 - 2(36)$

$y = 2(x-6)^2 - 32 \Rightarrow$ الصيغة القياسية

$(6,-32)$

رأس القطع المكافئ $(6,-32)$

محور التماثل $x = 6$

اتجاه فتحته للأعلى لأن معامل x^2 موجب.

$\left|\frac{1}{4a}\right| = \left|\frac{1}{4(2)}\right| = \frac{1}{8}$

$\Rightarrow$ البؤرة $= \left(6, -32 + \frac{1}{8}\right) = (6, -31.875)$

$\Rightarrow$ الدليل $\Rightarrow y = -32 - \frac{1}{8} = -32.125$

$\Rightarrow$ طول الوتر البؤري $= \left|\frac{1}{a}\right| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

$x + 3y^2 + 12y = 18$ $\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$

$x = -3y^2 - 12y + 18$

$= -3(y^2 + 4y + 4) + 18 + 3(4)$

$= -3(y+2)^2 + 30 \Rightarrow$ الصيغة القياسية

$(30,-2)$

رأس القطع المكافئ $(30,-2)$

محور التماثل $y = -2$

اتجاه فتحته لليسار لأن معامل y^2 سالب.

$\left|\frac{1}{4a}\right| = \left|\frac{1}{4(-3)}\right| = \frac{1}{12}$

$\Rightarrow$ البؤرة $= \left(30 - \frac{1}{12}, -2\right) = (29.91\overline{6}, -2)$

$\Rightarrow$ الدليل $\Rightarrow x = 30 + \frac{1}{12} = 30.08\overline{3}$

$\Rightarrow$ طول الوتر البؤري $= \left|\frac{1}{a}\right| = \left|\frac{1}{-3}\right| = \frac{1}{3}$

https://t.me/+CbbW8n6Up6U5OGE8
050-2509447

4	Graph circles تمثيل الدوائر بيانيًا	(31-36)	343

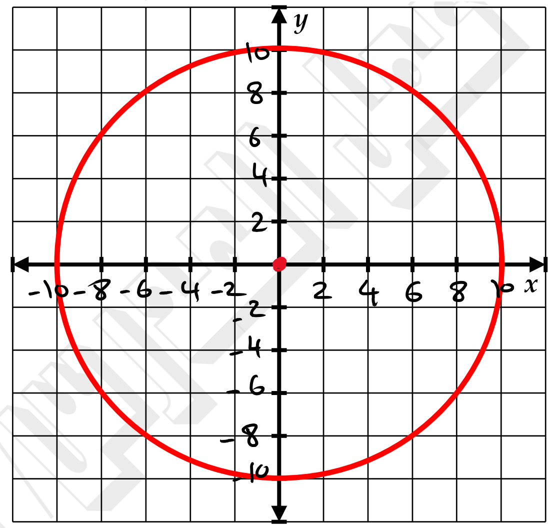
الدرس 6-2

أوجد مركز كل دائرة ونصف قطرها. ثم مثّل الدائرة بيانيًا.

$x^2 + y^2 = 100$

المركز $= (0, 0)$

$r = \sqrt{100} = 10$



أوجد مركز كل دائرة ونصف قطرها. ثم مثّل الدائرة بيانيًا.

$x^2 + y^2 - 8x + 12y - 12 = 0$

نكتب المعادلة في الصيغة القياسية (بإكمال المربع)

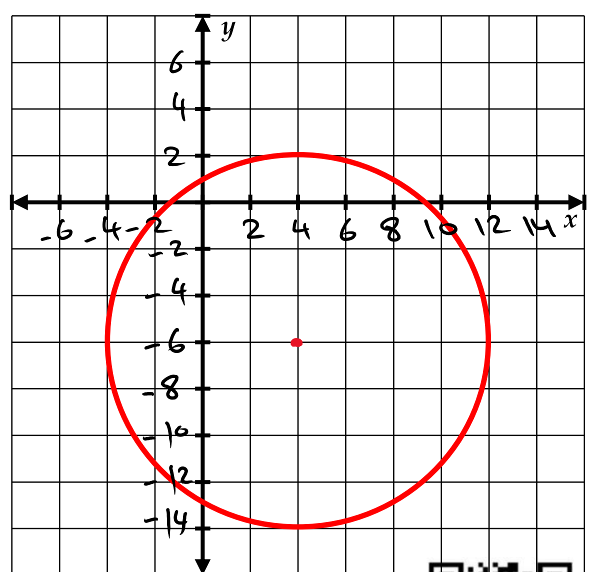
$x^2 - 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 + y^2 + 12y + \left(\frac{12}{2}\right)^2 = 12 + \left(\frac{8}{2}\right)^2 + \left(\frac{12}{2}\right)^2$

$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 12y + 36) = 12 + 16 + 36$

$(x - 4)^2 + (y + 6)^2 = 64$

$\Rightarrow$ المركز $= (4, -6)$

$r = \sqrt{64} = 8$



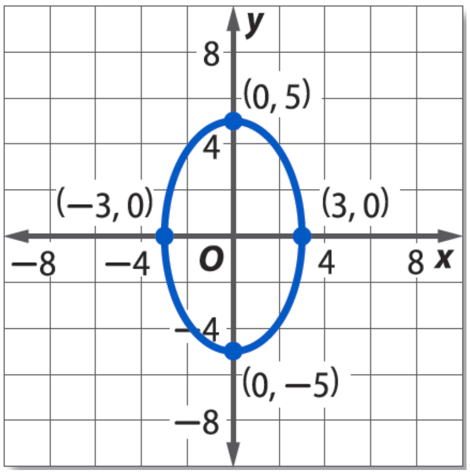
مع تمنياتي / مصطفى علام
مدرس الرياضيات

https://t.me/+CbbW8n6Up6U5OGE8

5	Write equations of ellipses كتابة معادلات القطوع الناقصة	(11-16)	352

الدرس 3-6

اكتب معادلة لكل قطع ناقص.



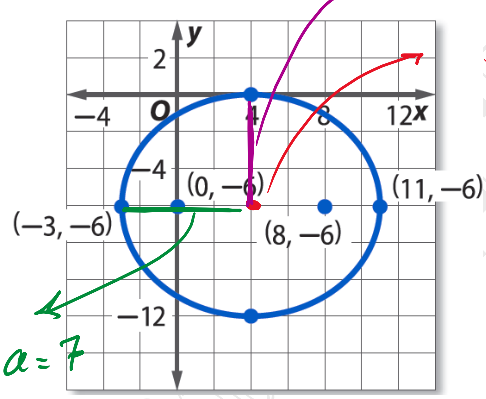
$a = 5$ ، $b = 3$ ، المركز $\overset{h}{(0},\overset{k}{0)}$

المعادلة $\Rightarrow \dfrac{(y-k)^2}{a^2} + \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

$\Rightarrow \dfrac{(y-0)^2}{5^2} + \dfrac{(x-0)^2}{3^2} = 1$

$\Rightarrow \dfrac{y^2}{25} + \dfrac{x^2}{9} = 1$

اكتب معادلة لكل قطع ناقص.



$b = 6$

$a = 7$

المركز $(4, -6)$

المعادلة $\Rightarrow \dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

$\Rightarrow \dfrac{(x-4)^2}{7^2} + \dfrac{(y-(-6))^2}{6^2} = 1$

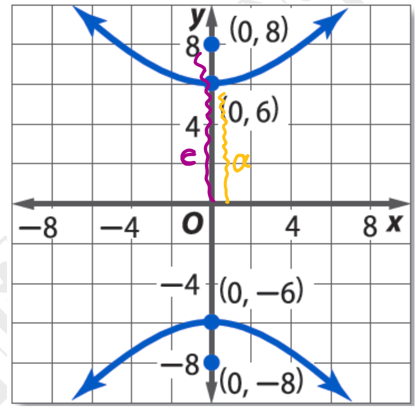
$\Rightarrow \dfrac{(x-4)^2}{49} + \dfrac{(y+6)^2}{36} = 1$

https://t.me/+CbbW8n6Up6U5OGE8

6	Write equations of hyperbolas كتابة معادلات القطوع الزائدة	Example-2-مثال+(2)	357

الدرس 6-4

اكتب معادلة لكل قطع زائد.

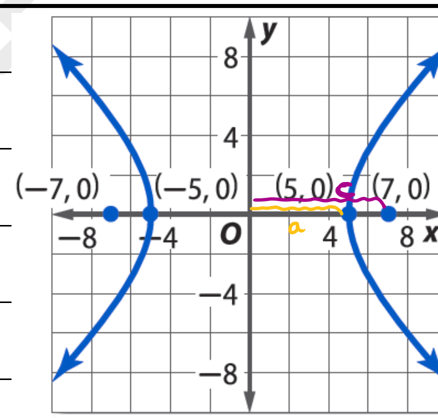


المركز $(0,0)$ ، $a = \boxed{6}$ ، $c = \boxed{8}$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 8^2 - 6^2 = \boxed{28}$

المعادلة $\Rightarrow \dfrac{(y-k)^2}{a^2} - \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

$\Rightarrow \dfrac{(y-0)^2}{6^2} - \dfrac{(x-0)^2}{28} = 1 \Rightarrow \boxed{\dfrac{y^2}{36} - \dfrac{x^2}{28} = 1}$

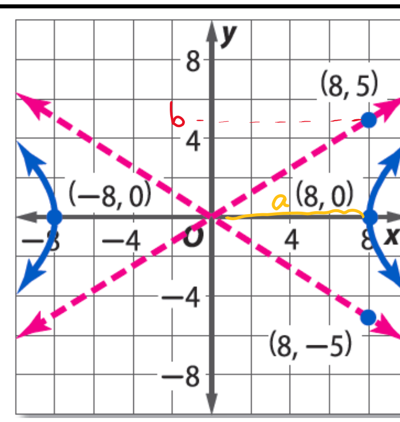


المركز $= (0,0)$ ، $a = \boxed{5}$ ، $c = \boxed{7}$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 7^2 - 5^2 = \boxed{24}$

المعادلة $\Rightarrow \dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

$\Rightarrow \dfrac{(x-0)^2}{5^2} - \dfrac{(y-0)^2}{24} = 1 \Rightarrow \boxed{\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{24} = 1}$



المركز $= (0,0)$ ، $a = \boxed{8}$ ، $b = \boxed{5}$

المعادلة $\Rightarrow \dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

$\Rightarrow \dfrac{(x-0)^2}{8^2} - \dfrac{(y-0)^2}{5^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{25} = 1}$

https://t.me/+CbbW8n6Up6U5OGE8
050-2509447

7	Solve systems of linear and nonlinear inequalities graphically حل أنظمة المتباينات الخطية واللاخطية بيانيًا	(27-38)	375

الدرس 6-6

حل أنظمة المتباينات باستخدام التمثيل البياني.

$$16x^2 + 4y^2 \le 64 \quad — ①$$
$$y \ge -x^2 + 2 \quad — ②$$

$\boxed{1}$ $16x^2 + 4y^2 \le 64$

$$\frac{x^2}{(\frac{1}{16})64} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}(64)} \le 1$$

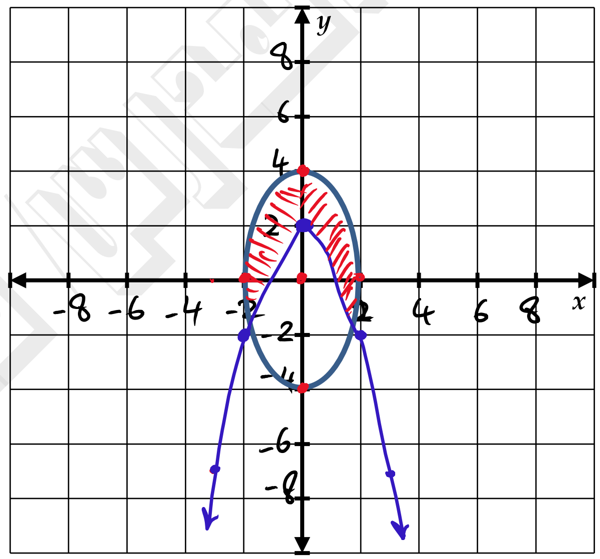
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \le 1 \rightarrow$$ قطع ناقص رأسي

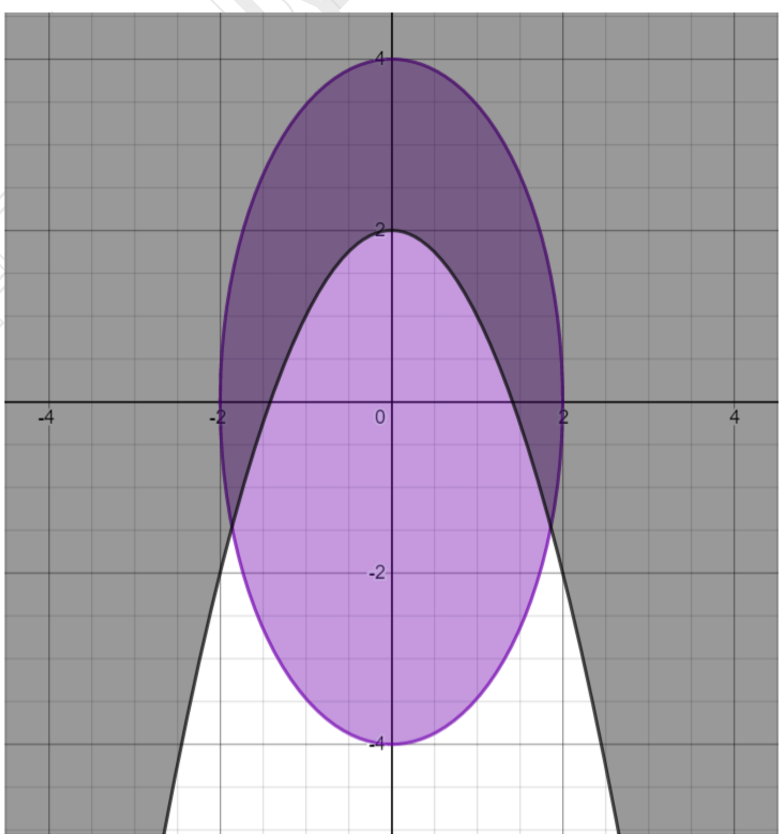
المركز $(0,0)$
$a = 4$
$b = 2$

$\boxed{2}$ $y \ge -x^2 + 2$

المركز $\rightarrow (0,2)$
الفتحة لأسفل

x	-3	4	2	0	-2	-4	$+3$
y	-7	-14	-2	2	-2	-14	-7





https://t.me/+CbbW8n6Up6U5OGE8
050-2509447

حل أنظمة المتباينات باستخدام التمثيل البياني.

$4x^2 - 8y^2 \ge 32$ — ①
$y \ge |1.5x| - 8$

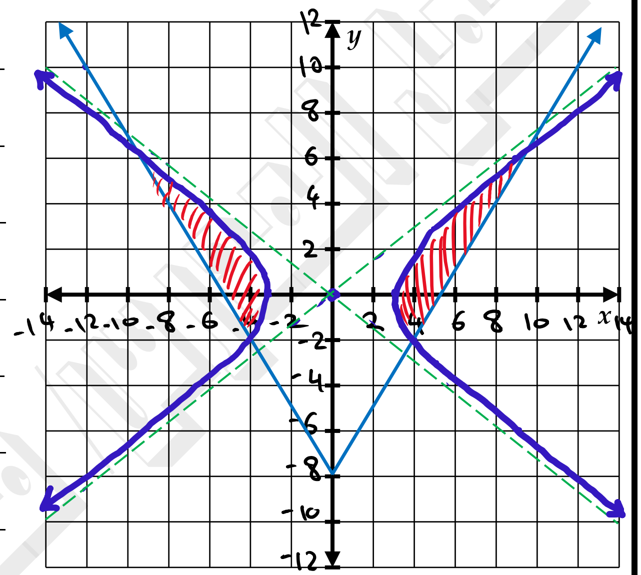
نكتب المتباينة ① في الصيغة القياسية

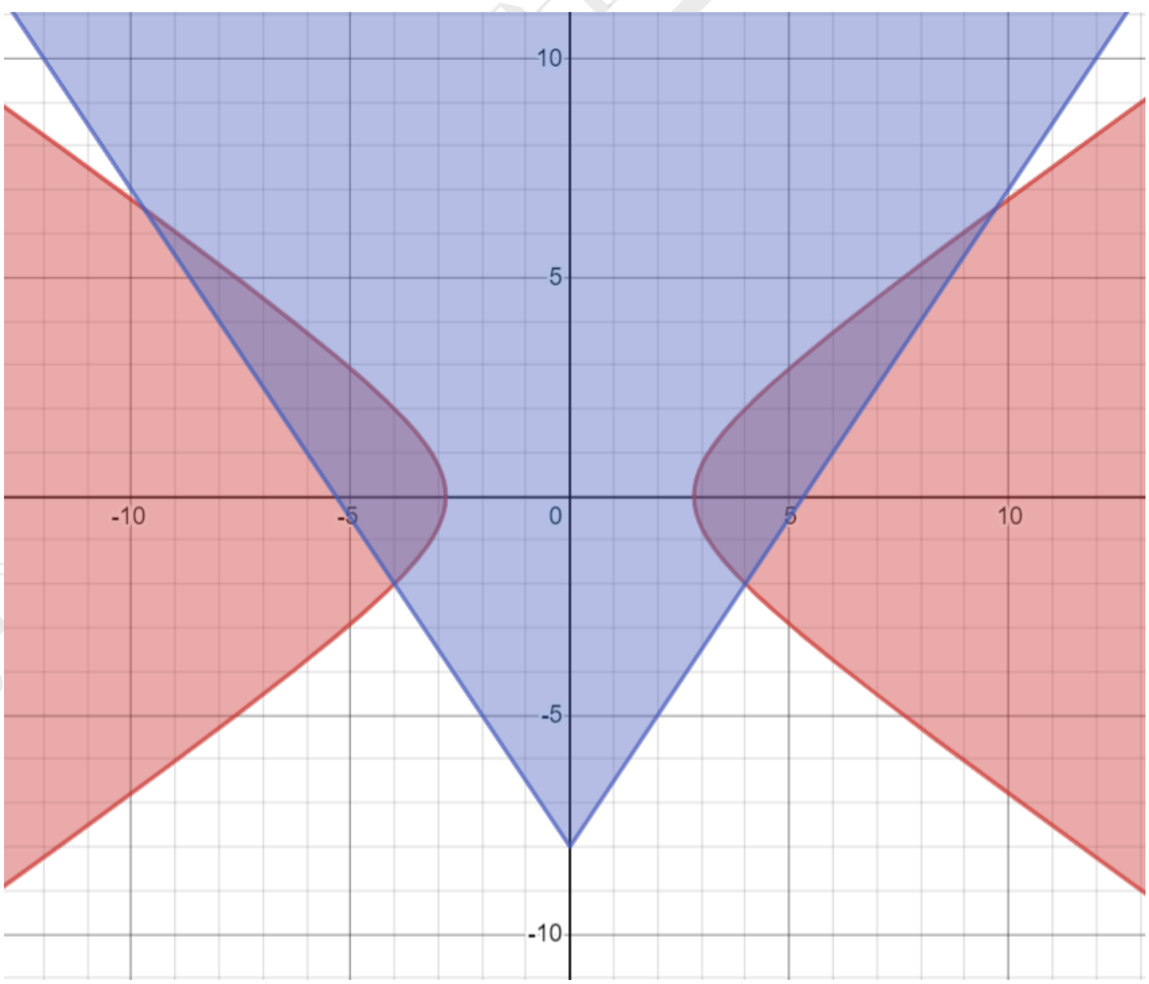
$$\frac{4x^2}{32} - \frac{8y^2}{32} \ge 1$$

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} \ge 1 \rightarrow$$ الصيغة القياسية

قطع زائد أفقي مركزه $(0,0)$ ، $b = 2$ ، $a = \sqrt{8}$ $= 2.8$

خطوط التقارب $y = \pm \frac{2}{\sqrt{8}} x$





https://t.me/+CbbW8n6Up6U5OOGE8

8	Represent and operate with vectors geometrically تمثيل المتجهات واستخدامها هندسيًا	(1-6)	416

الدرس 7-1

حدّد الكميات المتجهة، والكميات غير المتجهة في كلّ مما يأتي:

a. يسير قارب بسرعة 15 km/h.

كمية غير متجهة ، الكمية : 15 ، الاتجاه : غير موجود.

b. متجول يسير 25 خطوة باتجاه الغرب.

كمية متجهة ، الكمية : 25 ، الاتجاه : الغرب.

c. وزن شخص على ميزان حمّام.

كمية متجهة ، الكمية : الوزن ، الاتجاه : لأسفل بفعل الجاذبية الأرضية.

d. تسير السيارة بسرعة 60 km/h بزاوية $15°$ في اتجاه الجنوب الشرقي.

كمية متجهة ، الكمية : 60 ، الاتجاه : 15 اتجاه الجنوب الشرقي.

e. يهبط قافز بالمظلات لأسفل مباشرة بسرعة 20.2 km/h .

كمية متجهة ، الكمية : 20.2 ، الاتجاه : أسفل.

f. يسحب طفل زلاجة بقوة مقدارها 40 N.

كمية غير متجهة ، الكمية 40 ، الاتجاه : لا يوجد.

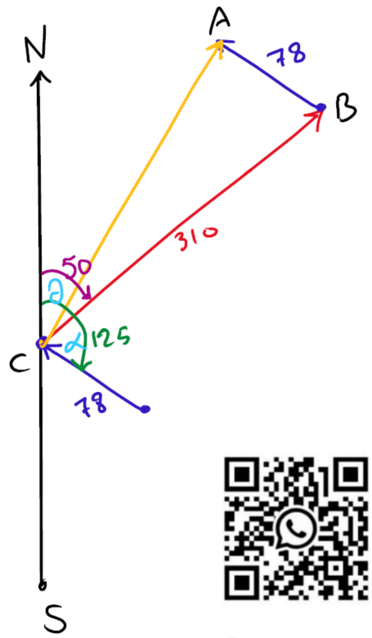
https://t.me/+CbbW8n6Up6U5OGE8

https://t.me/+CbbW8n6Up6U5OGE8

9	Solve vector problems and resolve vectors into their rectangular components حل مسائل المتجهات وتحليل المتجهات إلى مركباتها المتعامدة	(35-37)	416

الدرس 7-1

الطيران تطير طائرة بسرعة جوية 310 km/h باتجاه °050. إذا كانت الرياح تهب بسرعة 78-km/h من اتجاه حقيقي °125، فحدد سرعة الطائرة واتجاهها بالنسبة إلى الأرض.



ملاحظة: الرسم تقريبي وليس بمقياس معين

$m\angle B = m\angle \alpha = 125 - 50 = 75^\circ$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$\Rightarrow b = \sqrt{310^2 + 78^2 - 2(310)(78)\cos 75} = 299.45$

$\frac{\sin C}{78} = \frac{\sin 75}{299.445}$

$\Rightarrow C = \sin^{-1}\frac{78\sin 75}{299.445} = 14.57^\circ$

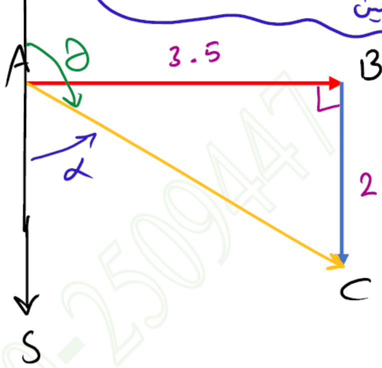
$\theta = 50 - 14.57 = 35.43^\circ$

سرعة الطائرة بالنسبة للأرض هي 299.45 km/h

في اتجاه $\boxed{035^\circ}$ تقريباً

السباحة يسبح إبراهيم في اتجاه الشرق بسرعة 3.5 ft/s عبر نهر متجهاً مباشرة نحو الضفة المقابلة. وفي الوقت ذاته، يحمله تيار النهر باتجاه الجنوب بمعدل 2 ft/s . جد سرعة إبراهيم واتجاهه بالنسبة للشاطئ.

ملاحظة: الرسم تقريبي وليس بمقياس معين



باستخدام فيثاغورس

$b = \sqrt{3.5^2 + 2^2} = 4.03$

$\tan A = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$

$\tan A = \frac{2}{3.5}$

$A = \tan^{-1}\frac{2}{3.5} = 29.74^\circ$

$\theta = 90 + 29.74 = 119.74^\circ$

$\alpha = 90 - 29.74 = 60.26^\circ$

السرعة ⟸ 4.03 ft/s

الاتجاه S 60.26 E

السرعة ⟸ 4.03 ft/s والاتجاه الحقيقي 120° تقريباً

10	Represent and operate with vectors in the coordinate plane تمثيل وإجراء العمليات على المتجهات في المستوى الإحداثي	(11-18)	425

الدرس 7-2

جد كلًّا مما يأتي للمتجهات $y = \langle 2, 5\rangle, z = \langle -3, 0\rangle, w = \langle -4, 1\rangle$:

$w + y$

$= \langle -4, 1\rangle + \langle 2, 5\rangle$

$= \langle -4 + 2 , 1 + 5\rangle$

$= \langle -2 , 6\rangle$

$z - 2y$

$= \langle -3, 0\rangle - 2\langle 2, 5\rangle$

$= \langle -3, 0\rangle - \langle 4, 10\rangle$

$= \langle -3 - 4 , 0 - 10\rangle = \langle -7, -10\rangle$

$2w + 4y - z$

$= 2\langle -4, 1\rangle + 4\langle 2, 5\rangle - \langle -3, 0\rangle$

$= \langle -8, 2\rangle + \langle 8, 20\rangle - \langle -3, 0\rangle$

$= \langle -8 + 8 - (-3) , 2 + 20 - 0\rangle = \langle 3, 22\rangle$

متجهات الوحدة: يُسمّى المتجه الذي طوله 1 **متجه الوحدة**، ويرمز له بالرمز u ، ولإيجاد متجه الوحدة u الذي له نفس اتجاه المتجه v ، اقسم المتجه v على طوله |v| .

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$

العمليات على المتجهات

أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه المُعطى في كلٍّ ممَّا يأتي:

$\mathbf{v} = \langle -2, 3\rangle$

$|v| = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$

$u = \frac{v}{|v|}$

$= \frac{\langle -2, 3\rangle}{\sqrt{13}}$

$= \left\langle \frac{-2}{\sqrt{13}} , \frac{3}{\sqrt{13}} \right\rangle$

$= \left\langle \frac{-2\sqrt{13}}{13} , \frac{3\sqrt{13}}{13} \right\rangle$

$\mathbf{x} = \langle -4, -8\rangle$

$|x| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2} = 4\sqrt{5}$

$u = \frac{x}{|x|}$

$= \frac{\langle -4, -8\rangle}{4\sqrt{5}}$

$= \left\langle \frac{-4}{4\sqrt{5}} , \frac{-8}{4\sqrt{5}} \right\rangle$

$= \left\langle -\frac{\sqrt{5}}{5} , \frac{-2\sqrt{5}}{5} \right\rangle$

$\mathbf{w} = \langle 6, -2\rangle$

$|w| = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{10}$

$u = \frac{w}{|w|}$

$= \frac{\langle 6, -2\rangle}{2\sqrt{10}}$

$= \left\langle \frac{6}{2\sqrt{10}} , -\frac{2}{2\sqrt{10}} \right\rangle$

$= \left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10} , -\frac{\sqrt{10}}{10} \right\rangle$

https://t.me/+CbbW8n6Up6U5OGE8

11	Solve systems of linear equations using inverse matrices حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات العكسية	(31-34)	301

الدرس 3-5

جد قيم n بحيث لا يمكن حل النظام الذي تعبر عنه المصفوفة الموسعة المعطاة باستخدام المصفوفة العكسية.

31. $\left[\begin{array}{cc|c} n & -8 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$ **32.** $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & n & 4 \\ n & 2 & -5 \end{array}\right]$

33. $\left[\begin{array}{cc|c} -5 & -9 & 3 \\ n & n & 11 \end{array}\right]$ **34.** $\left[\begin{array}{cc|c} n & -n & 0 \\ 7 & n & -8 \end{array}\right]$

Use an inverse matrix to solve the system of equations, if possible. استخدم المصفوفة العكسية لحل نظام المعادلات، إن أمكن.

$2x - 3y = -1$
$-3x + 5y = 3$

$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \dfrac{1}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{1}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1(5) + 3(3) \\ -1(3) + 3(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to x \\ \to y \end{array}$

حل النظام هو $(4, 3)$

$-3x + 9y = 36$
$7x - 8y = -19$

$A = \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$

$\det(A) = \begin{vmatrix} -3 & 9 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} = -39$

$A^{-1} = \dfrac{1}{-39}\begin{bmatrix} -8 & -9 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{8}{39} & \frac{3}{13} \\ \frac{7}{39} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}$

$AX = B$

$\Rightarrow X = A^{-1}B$

$= \begin{bmatrix} \frac{8}{39} & \frac{3}{13} \\ \frac{7}{39} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 36 \\ -19 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 36\left(\frac{8}{39}\right) + (-19)\left(\frac{3}{13}\right) \\ 36\left(\frac{7}{39}\right) + (-19)\left(\frac{1}{13}\right) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to x \\ \to y \end{array}$

حل النظام هو $(3, 5)$

https://t.me/+CbbW8n6Up6U5OGE8

12	Recognize situations in which there are no solutions or more than one solution of a linear programming application	Example-3-مثال+(3A+3B	316
	التعرف على الحالات التي لا يكون لها حلول أو لها أكثر من حل واحد لتطبيق البرمجة الخطية	20	325

الدرس 5-5

الأمثلية عند نقاط متعددة

جد القيمة العظمى لدالة الهدف $f(x, y) = 4x + 2y$ وحدد قيمتي كل من x و y اللتين تتحقق عندهما هذه القيمة، مع مراعاة القيود التالية.

① $y + 2x \leq 18$ منطقة الحل لها 5 رؤوس

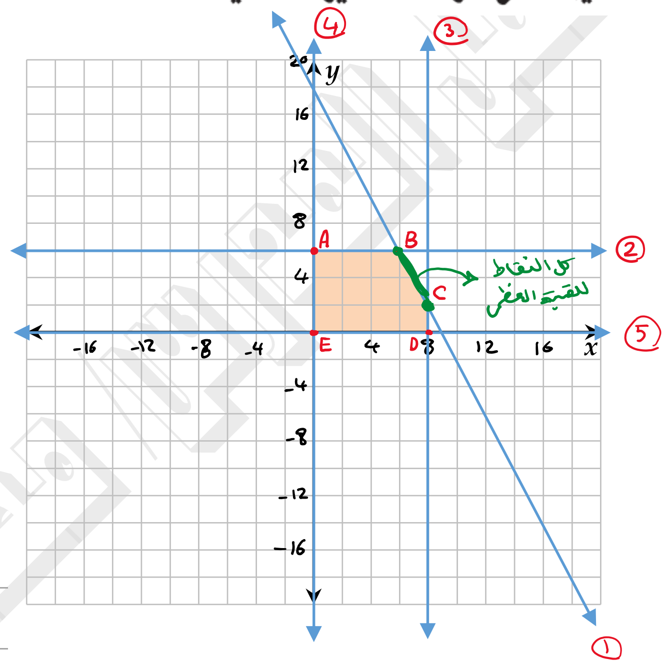
② $y \leq 6$

③ $x \leq 8$

④ $x \geq 0$

⑤ $y \geq 0$

	الرؤوس	$f(x, y) = 4x + 2y$	
A	(0,8)	4(0)+2(8) = 16	
B	(6,6)	4(6)+2(6) = 36	تعظم
C	(8,2)	4(8)+2(2) = 36	تعظم
D	(8,0)	4(8)+2(0) = 32	
E	(0,0)	4(0)+2(0) = 0	



لأن 36 قيمة عظمى لأكثر من رأس فإنه هناك نقاط متعددة يكون فيها هذه القيمة العظمى.

تكون للدالة قيمة عظمى عند كل النقاط التي تقع على المستقيم

$4x + 2y = 36 \Rightarrow y = -2x + 18$

$6 \leq x \leq 8$ بشرط

للدالة قيمة صغرى قيمتها صفر وذلك عند $x = 0$, $y = 0$

https://t.me/+CbbW8n6Up6U5OGE8
050-2509447

جد القيمتين العظمى والصغرى لدالة الهدف $f(x, y)$ وحدد قيمتي كل من x و y اللتين تتحققان عندهما، مع مراعاة القيود المحددة.

3B. $f(x, y) = 4x + 8y$

① $x + 2y \leq 16$

② $y \geq 2$

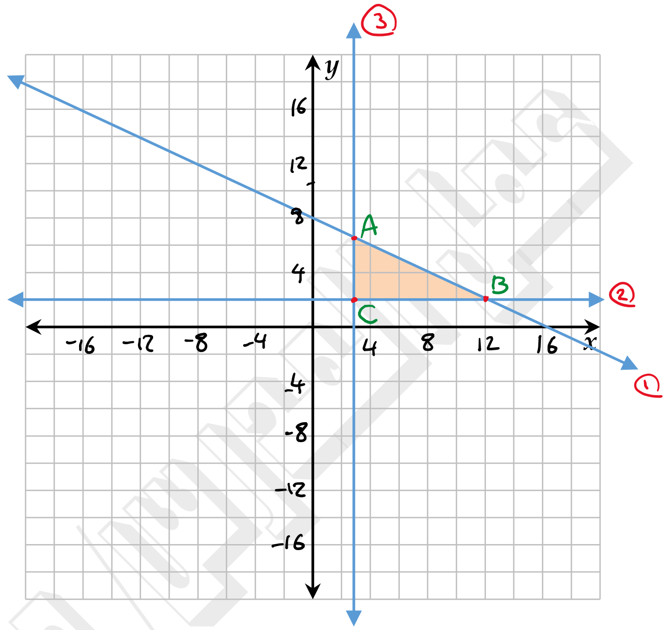
③ $x \geq 3$

منطقة الحل لها 3 رؤوس

الرأس A من تقاطع ①، ③

من النظام ⇐ $x = 3$

$y = 6.5$



	الرؤوس	$f(x, y) = 4x + 8y$		
A	$(3, 6.5)$	$4(3) + 8(6.5) = 64$	→	عظمى
B	$(12, 2)$	$4(12) + 8(2) = 64$	→	عظمى
C	$(3, 2)$	$4(3) + 8(2) = 28$	→	صغرى

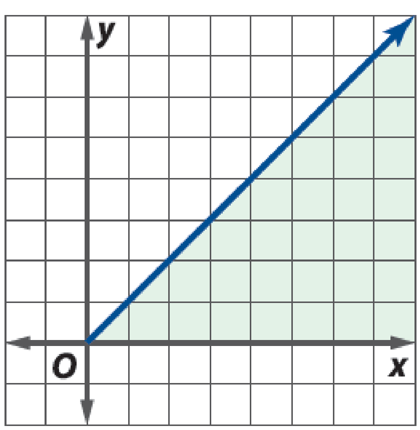
* لأن 64 قيمة عظمى عند أكثر من رأس فإنه هناك نقاط متعددة يكون فيها هذه القيمة العظمى

⇐ تكون للدالة قيمة عظمى 64 عند كل النقاط التي تقع على المستقيم $4x + 8y = 64 \Leftarrow y = -\frac{1}{2}x + 8$

بشرط $3 \leq x \leq 12$

* للدالة قيمة صغرى 28 عند $x = 3$ ، $y = 2$

.20 **الاختيار من متعدد** يعرض التمثيل البياني قيود دالة التركيز.
فأي مما يلي لا يمكن أن يكون أحد هذه القيود؟



A $y \geq 0$

B $x \geq 0$

C $x - y \leq 0$

D $x - y \geq 0$

https://t.me/+CbbW8n6Up6U5OGE8
050-2509447

https://t.me/+CbbW8n6Up6U5OGE8

الدرس 6-1

تمثيل القطع المكافئ بيانيًا

مثّل كل معادلة بيانيًا.

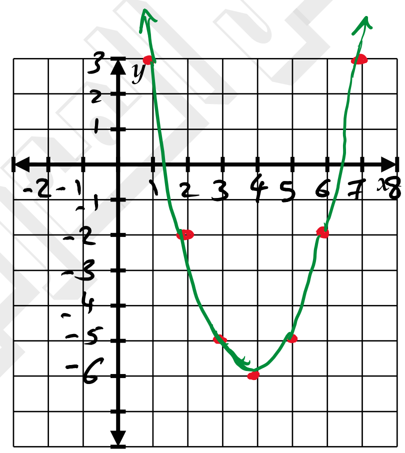
$y = (x-4)^2 - 6$

نقطة رأس $(4, -6)$

الفتحة لأعلى ، معادلة محور التماثل $x = 4$

الرأس

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	10	3	-2	-5	-6	-5	-2	3	10



$x = 3y^2 - 6y + 9$

$\left(\frac{-2}{2}\right)^2 = 1$

$x = 3(y^2 - 2y + 1) + 9 - 3(1)$

$= 3(y-1)^2 + 6 \Rightarrow$ الصيغة القياسية

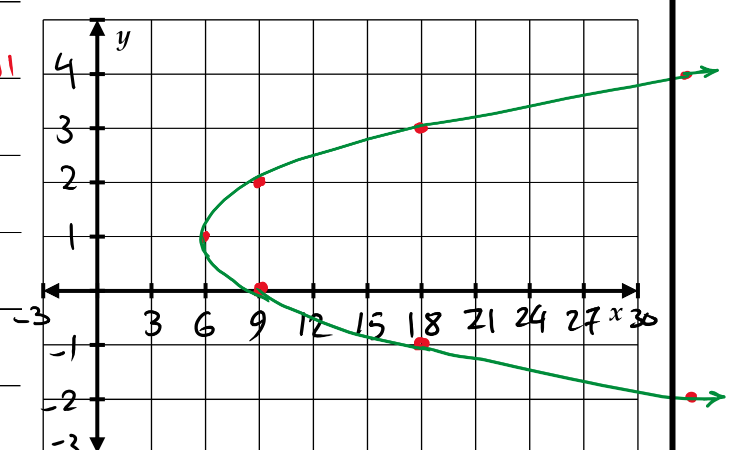
$(6, 1)$ نقطة الرأس

الفتحة لليمين

معادلة محور التماثل $y = 1$

الرأس

y	38	-118	9	1	22	38	43
x				6			



14	Write equations of circles كتابة معادلات الدوائر	(51-56)	344

الدرس 6-2

الدقة اكتب معادلة للدائرة التي تحقق كل مجموعة من الشروط.

51. المركز $(9, -8)$، تمر بالنقطة $(19, 22)$

52. المركز $(-\sqrt{15}, 30)$ تمر بنقطة الأصل

53. المركز $(8, -9)$، تمس المحور الرأسي y

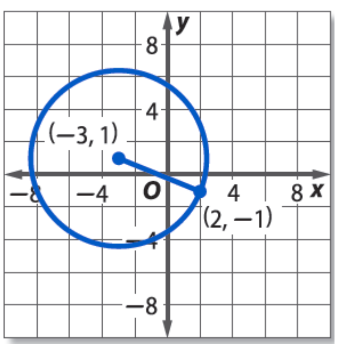
54. المركز $(2, 4)$، تمس المحور الأفقي x

55. المركز في الربع الأول، تمس $x = 5$، والمحور الأفقي x، والمحور الرأسي y

56. المركز في الربع الأول، تمس $y = 1$، و $y = 5$، والمحور الرأسي y

كتابة معادلة من تمثيل بياني

اكتب معادلة للتمثيل البياني.



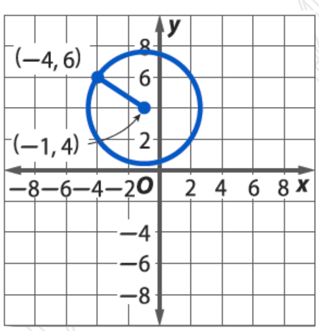
المركز $(-3, 1)$

$r = \sqrt{(-3-2)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{29}$

المعادلة $\Rightarrow (x+3)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{29})^2$

$\Rightarrow \boxed{(x+3)^2 + (y-1)^2 = 29}$

اكتب معادلة للتمثيل البياني.



المركز $(-1, 4)$

$r^2 = (-4-(-1))^2 + (6-4)^2 = 13$

$\Rightarrow (x-(-1))^2 + (y-4)^2 = 13$

$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 13$

https://t.me/+CbbW8n6Up6U5OGE8

اكتب معادلة لكل دائرة إذا علمتَ النقطتين الطرفيتين للقطر.

$\overset{A}{(1, 5)}$ و $\overset{B}{(3, -3)}$.

المركز هو نقطة منتصف $\overline{AB}$

المركز $= \left(\frac{1+3}{2}, \frac{5+(-3)}{2}\right) = \overset{M}{(2, 1)}$

$r = AM = \sqrt{(1-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{17}$

المعادلة $\rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{17})^2$

$\rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 17$

$\overset{A}{(-1, -8)}$ و $\overset{B}{(7, 6)}$.

المركز هو نقطة منتصف $\overline{AB}$

المركز $\left(\frac{-1+7}{2}, \frac{-8+6}{2}\right) = \overset{M}{(3, -1)}$

$r = AM = \sqrt{(-1-3)^2 + (-8-(-1))^2} = \sqrt{65}$

المعادلة $\rightarrow (x-3)^2 + (y-(-1))^2 = (\sqrt{65})^2$

$\rightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 = 65$

https://t.me/+CbbW8n6Up6U5OGE8
050-2509447

15	Graph ellipses تمثيل القطوع الناقصة بيانيًا	(24-31)	352

الدرس 6-3

تمثيل القطع الناقص بيانيًا

جد إحداثيات المركز والبؤرتين وطولي المحورين الأكبر والأصغر لقطع ناقص بالمعادلة المعطاة. ثم مثّل القطع الناقص بيانيًا.

$$\frac{(y+1)^2}{64}+\frac{(x-5)^2}{28}=1$$

المركز $= (5,-1)$ ، $a^2 = 64$ ، $b^2 = 28$

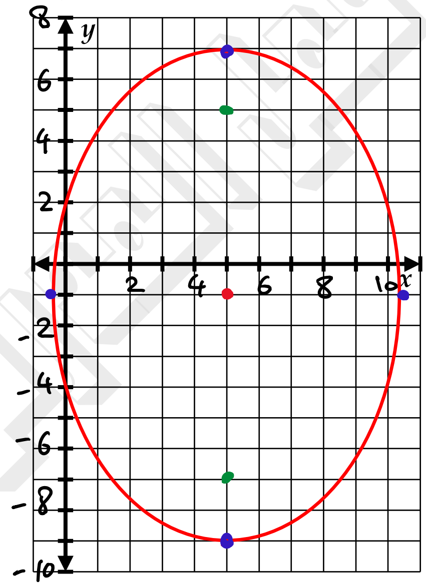
$\Rightarrow c = \sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{64-28} = 6$

البؤرة$_1$ $= (5, -1+6) = (5, 5)$

البؤرة$_2$ $= (5, -1-6) = (5, -7)$

المحور الأكبر $= 2a = 2(\sqrt{64}) = 16$

المحور الأصغر $= 2b = 2(\sqrt{28}) = 4\sqrt{7} \approx 10.58$



$$\frac{(x+2)^2}{48}+\frac{(y-1)^2}{20}=1$$

المركز $= (-2, 1)$ ، $a^2 = 48$ ، $b^2 = 20$

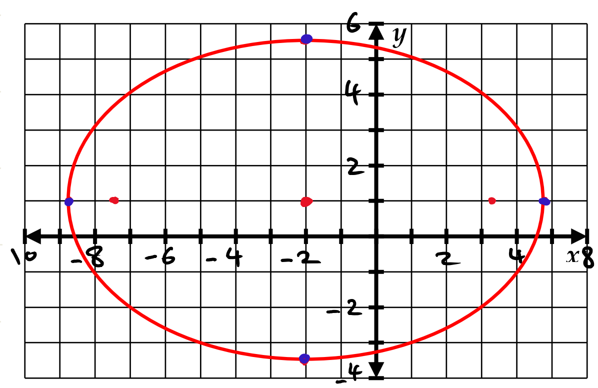
$\Rightarrow c = \sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{48-20} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} = 5.3$

البؤرة$_1$ $= (-2+2\sqrt{7}, 1) = (3.3, 1)$

البؤرة$_2$ $= (-2-2\sqrt{2}, 1) = (-7.3, 1)$

المحور الأكبر $= 2a = 2\sqrt{48} = 8\sqrt{3} = 13.86$

المحور الأصغر $= 2b = 2\sqrt{20} = 4\sqrt{5} = 8.94$



https://t.me/+CbbW8n6Up6U5OOGE8

جد إحداثيات المركز والبؤرتين وطولي المحورين الأكبر والأصغر لقطع ناقص بالمعادلة المعطاة. ثم مثّل القطع الناقص بيانيًا.

$$4x^2 + y^2 - 32x - 4y + 52 = 0$$

كتابة المعادلة في الصيغة القياسية

$$4x^2 - 32x + y^2 - 4y = -52$$

$$4\left(x^2 - 8x + \left(\tfrac{8}{2}\right)^2\right) + \left(y^2 - 4y + \left(\tfrac{4}{2}\right)^2\right) = -52 + 4\left(\tfrac{8}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{4}{2}\right)^2$$

$$4(x^2 - 8x + 16) + (y^2 - 4y + 4) = 16$$

$$4(x-4)^2 + (y-2)^2 = 16$$

$$\frac{(x-4)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{(y-2)^2}{1} = 16 \quad \boxed{\div 16}$$

$$\frac{(x-4)^2}{\frac{1}{4}(16)} + \frac{(y-2)^2}{1(16)} = 1$$

$$\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1 \Rightarrow$$ الصيغة القياسية

المركز $(4, 2)$, $a^2 = 16$, $b^2 = 4$

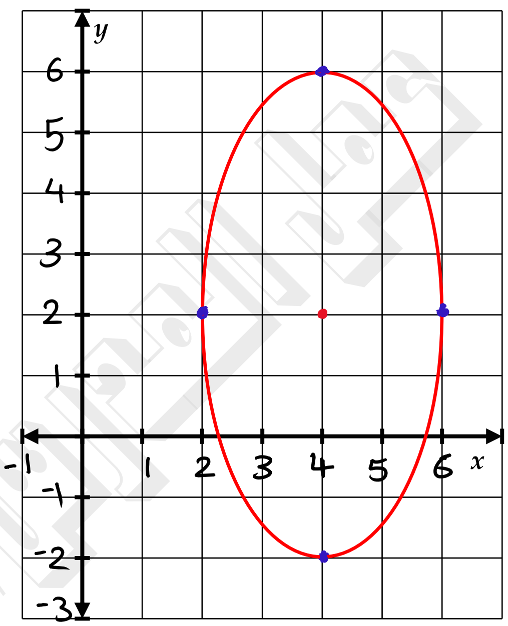
$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} = 3.46$

البؤرة1 $= (4, 2 + 2\sqrt{3}) = (4, 5.46)$

البؤرة2 $= (4, 2 - 2\sqrt{3}) = (4, -1.46)$

المحور الأكبر $= 2a = 2\sqrt{16} = 8$

المحور الأصغر $= 2b = 2\sqrt{4} = 4$

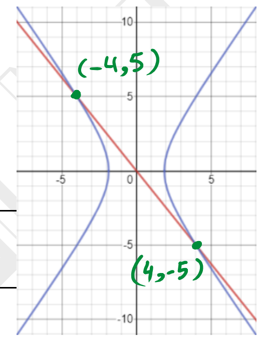


https://t.me/+CbbW8n6Up6U5OGE8

16	Solve systems of linear and nonlinear equations algebraically and graphically حل أنظمة المعادلات الخطية واللاخطية جبريًا وبيانيًا	(1-8)	374

الدرس 6-6

أوجد حلاً لنظام المعادلات.



$8y = -10x$ ①

$y^2 = 2x^2 - 7$ ②

من المعادلة ① $\rightarrow y = \frac{-10}{8}x \rightarrow y = -\frac{5}{4}x$ ---- ③

نعوض قيمة y في المعادلة ②

$\Rightarrow \left(\frac{-5}{4}x\right)^2 = 2x^2 - 7$

$\frac{25}{16}x^2 = 2x^2 - 7$

$\Rightarrow 2x^2 - \frac{25}{16}x^2 = 7$

$\frac{7}{16}x^2 = 7$

$x^2 = 16$

$x = \mp 4$

نعوض $x = \mp 4$ في ③

$x = 4$ $\downarrow$ $y_1 = \frac{-5}{4}(4)$ | $x = -4$ $\downarrow$ $y_2 = \frac{-5}{4}(-4)$

$y_1 = -5$ | $y_2 = 5$

حل النظام $(4, -5)$

$(-4, 5)$

النظام التربيعي-التربيعي

$x^2 + y^2 = 16$ ①

$x^2 - y^2 = 20$ ②

من المعادلة ② $\rightarrow x^2 = 20 + y^2$

نعوض في ①

$(20 + y^2) + y^2 = 16$

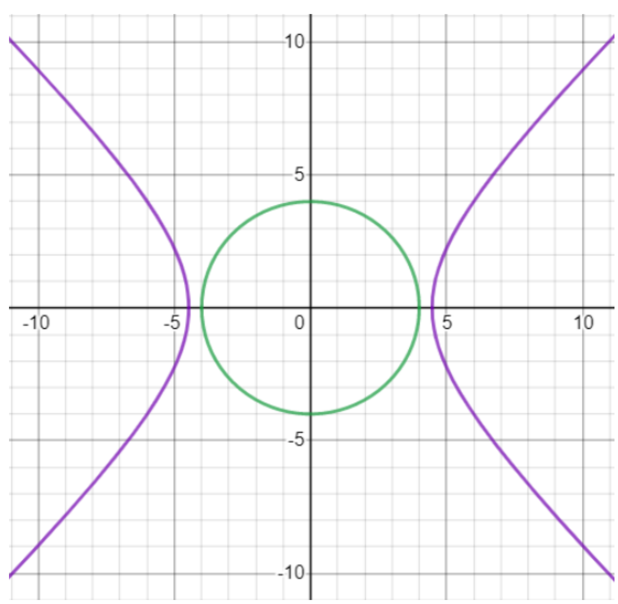
$20 + y^2 + y^2 = 16$

$2y^2 = 16 - 20$

$y^2 = -2$

$y = \mp\sqrt{-2}$ → حل غير حقيقي

لا يوجد حل للنظام



https://t.me/+CbbW8n6Up6U5OGE8

أوجد حلاً لنظام المعادلات.

$$y^2 - 2x^2 = 8 \quad \text{—} ①$$
$$3y^2 + x^2 = 52 \quad \text{—} ②$$

من المعادلة ① $\Rightarrow y^2 = 8 + 2x^2 \longrightarrow ③$

نعوض ③ في ②

$3(8 + 2x^2) + x^2 = 52$

$24 + 6x^2 + x^2 = 52$

$7x^2 = 52 - 24$

$x^2 = \frac{28}{7}$

$x^2 = 4 \Rightarrow x = \mp 2$

نعوض x في ③

$x = 2$

$y^2 = 8 + 2(2)^2$

$y^2 = 16$

$\Rightarrow y = \mp\sqrt{16} = \mp 4$

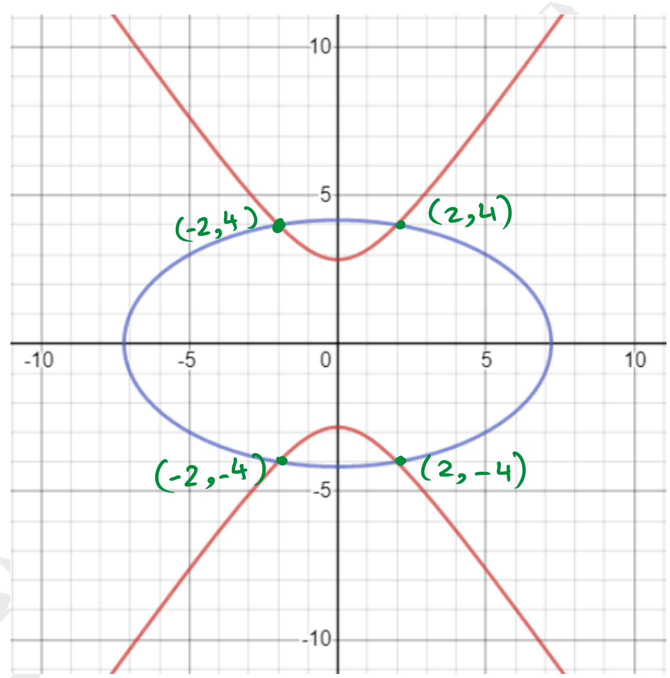
$x = -2$

$y^2 = 8 + 2(-2)^2$

$y^2 = 16$

$\Rightarrow y = \mp\sqrt{16} = \mp 4$

حل النظام $(2, 4), (2, -4), (-2, 4), (-2, -4)$



https://t.me/+CbbW8n6Up6U5OGE8
050-2509447

17	Graph parametric equations تمثيل المعادلات الوسيطية بيانيًا	(9-16)	393

الدرس 8-6

كتابة معادلات وسيطية بالصورة الديكارتية

اكتب المعادلتين الوسيطيتين $y = t^2 + 2\ ,\ x = 3t - 1$ بالصورة الديكارتية.

من المعادلة الأولى $x = 3t - 1 \Leftarrow$ $t = \frac{x+1}{3}$ $\quad y = \left(\frac{x+1}{3}\right)^2 + 2$

نعوض t في المعادلة الثانية $\Leftarrow$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{9}x^2 + \frac{2x}{9} + \frac{1}{9} + 2$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^2}{9} + \frac{2x}{9} + \frac{19}{9}$$

اكتب المعادلتين الوسيطيتين $y = 4t\ ,\ x = t^2 - 5$ بالصورة الديكارتية.

من المعادلة الثانية $y = 4t \Leftarrow$ $t = \frac{y}{4}$ $\quad x = \left(\frac{y}{4}\right)^2 - 5$

نعوض في المعادلة الأولى $\Leftarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{y^2}{16} - 5$$

مجال الصورة الديكارتية للمعادلة الوسيطية

في حال عدم تحديد فترة الوسيط الخاص بـــ t. تحدّد فترة الوسيط على أنها جميع قيم t التي تعطي قيمًا حقيقيةً لـــ x و y.

اكتب المعادلتين الوسيطيتين $y = \frac{t+1}{t},\ x = \frac{1}{\sqrt{t}}$ بالصورة الديكارتية، ثم مثّل المنحنى بيانيًا، وحدّد المجال.

من المعادلة $x = \frac{1}{\sqrt{t}} \Leftarrow x^2 = \frac{1}{t} \Leftarrow t = \frac{1}{x^2}$

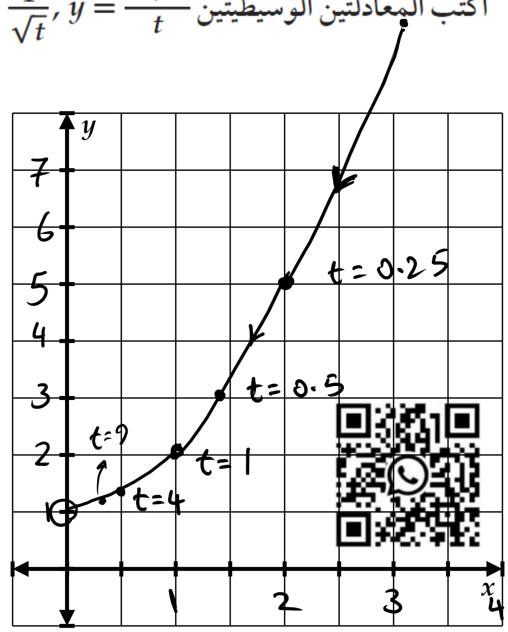
نعوض في المعادلة الثانية

$$y = \frac{\frac{1}{x^2} + 1}{\frac{1}{x^2}} \times \frac{x^2}{x^2} \Rightarrow y = \frac{1 + x^2}{1} \Rightarrow y = x^2 + 1$$

المنحنى معرّف فقط عند $t > 0$ ، وذلك لأن $x = \frac{1}{\sqrt{t}}$ معرفة فقط عند $t > 0$.

وكما يظهر في الشكل فإن مجال المعادلة الديكارتية يكون

هو $\{x \mid x \in R\ ,\ x > 0\}$



t	0.25	0.5	1	4	9
x	2	$\sqrt{2}$	1	0.5	$\frac{1}{3}$
y	5	3	2	1.25	$\frac{10}{9}$

في المعادلة $x = \frac{1}{\sqrt{t}}$ مع زيادة t تقترب x من الصفر ولن تساوي الصفر

https://t.me/+CbbW8n6Up6U5OGE8

اكتب $x = \sqrt{t+4}$, $y = \frac{1}{t}$ بالصورة الديكارتية، ثم مثِّل المنحنى بيانيًّا، وحدِّد المجال.

t	-4	-2	-1	0.25	0.5	4	8	12	
x	0	1.4	1.7	2.06	2.1	2.8	3.5	4	
y	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	4	2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	

$y = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{y}$

نعوض $x = \sqrt{t+4}$

$x = \sqrt{\frac{1}{y} + 4}$

$x^2 = \frac{1}{y} + 4 \Rightarrow x^2 - 4 = \frac{1}{y}$

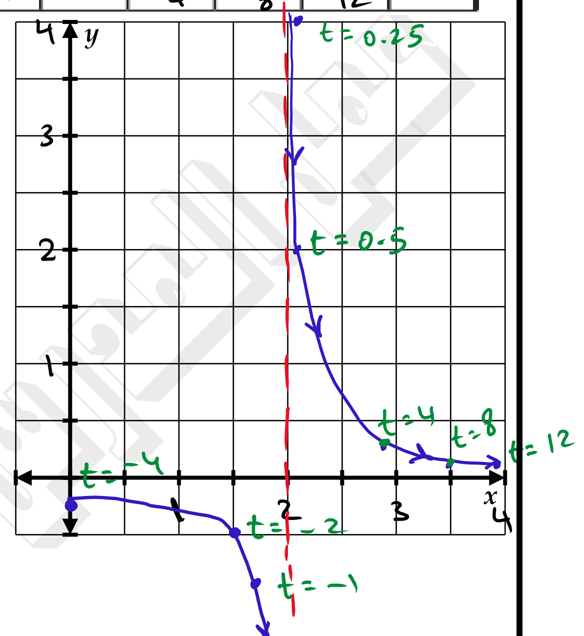
$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{x^2-4}}$

مجال المعادلتين الوسيطيتين x, y هو $t \geq -4$, $t \neq 0$

مجال $y = \frac{1}{x^2-4}$ هو $x \neq \mp 2$ (جبريًا) — ①

مدى الدالة $x = \sqrt{t+4}$ هو $x \geq 0$ — ②

①∩② هو $\boxed{x \neq 2,\ x \geq 0}$

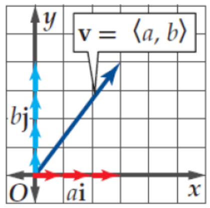


https://t.me/+CbbW8n6Up6U5OGE8
050-2509447

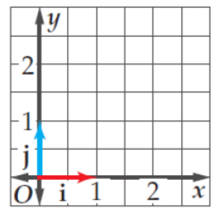
18	Write a vector as a linear combination of unit vectors كتابة متجه كتوفيق خطي لمتجهات الوحدة	(28-35)	425

الدرس 2-7

يُرمز لمتجهي الوحدة بالاتجاه الموجب لمحور x، والاتجاه الموجب لمحور y بالرمزين $\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle$، $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$، على الترتيب كما في الشكل 1.2.3 . كما يُسمَّى المتجهان $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ **متجهَي الوحدة القياسيين**.



الشكل 1.2.4



الشكل 1.2.3

ويمكن استعمال هذين المتجهين للتعبير عن أي متجه $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ على الصورة $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ كما في الشكل 1.2.4
تسمى الصورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ **توافقًا خطيًّا** للمتجهين $\mathbf{i}, \mathbf{j}$. ويُقصد بها كتابة المتجه بدلالة متجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$

كتابة متجهٍ على صورة توافق خطي لمتجهَي الوحدة

اكتب المتجه $\overrightarrow{DE}$ المُعطى نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ في كلٍّ ممَّا يأتي :

$D(-6, 0), E(2, 5)$

الصورة المركبة

$\overrightarrow{DE} = \langle 2-(-6), 5-0\rangle$

$= \langle 8, 5\rangle$

صورة التوفيق الخطي

$\overrightarrow{DE} = 8i + 5j$

$D(-3, -8), E(-7, 1)$

الصورة المركبة

$\overrightarrow{DE} = \langle -7-(-3), 1-(-8)\rangle$

$= \langle -4, 9\rangle$

صورة التوفيق الخطي

$\overrightarrow{DE} = -4i + 9j$

$D(-2, 3), E(4, 5)$

الصورة المركبة

$\overrightarrow{DE} = \langle 4-(-2), 5-3\rangle$

$= \langle 6, 2\rangle$

صورة التوفيق الخطي

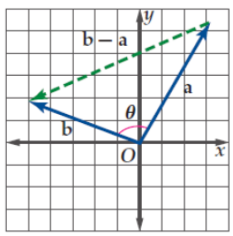
$\overrightarrow{DE} = 6i + 2j$

https://t.me/+CbbW8n6Up6U5OGE8
050-2509447

19	Find the dot product of two vectors and use the dot product to find the angle between them إيجاد ناتج الضرب النقطي لمتجهين، واستخدام ناتج الضرب النقطي لإيجاد الزاوية بينهما	(16-23)	434

الدرس 7-3

مفهوم أساسي — الزاوية بين متجهين



إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، فإن:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

$a\cdot b = |a||b|\cos\theta$

$\frac{a\cdot b}{|a||b|} = \cos\theta$

إيجاد قياس الزاوية بين متجهين

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

$\cos\theta = \frac{u\cdot v}{|u||v|}$

$\mathbf{u} = \langle 6, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 3\rangle$

$|u| = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$

$|v| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$

$\cos\theta = \frac{6(-4)+2(3)}{2\sqrt{10}\cdot 5} = \frac{-9\sqrt{10}}{50}$

$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{-9\sqrt{10}}{50}\right)$

$= 124.7^\circ$

$\mathbf{u} = \langle 3, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -3\rangle$

$|u| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

$|v| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{3(3)+1(-3)}{\sqrt{10}\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

$= 63.4^\circ$

$\mathbf{u} = \langle -5, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 4\rangle$

$|u| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$

$|v| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{(-5)(4)+(-2)(4)}{\sqrt{29}\cdot 4\sqrt{2}} = \frac{-7}{\sqrt{58}}$

$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{-7}{\sqrt{58}}\right)$

$= 156.8^\circ$

https://t.me/+CbbW8n6Up6U5OGE8
050-2509447

20	Express vectors algebraically and operate with vectors in space التعبير الجبري للمتجهات في الفضاء وعملياتها	(25-34)	442

الدرس 7-4

التعبير عن المتجهات في الفضاء جبريًا

جد الصورة المركبة وطول $\overline{AB}$ (مقدار) المعطاة نقطتا بدايته ونهايته، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$ في كلٍّ مما يأتي:

$A(-4,-2,1)$, $B(3,6,-6)$

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1 \rangle$

$= \langle 3-(-4), 6-(-2), -6-1 \rangle$

$= \langle 7, 8, -7 \rangle$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2+8^2+(-7)^2}$

$= 9\sqrt{2} = \boxed{12.7}$

$u = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{\langle 7,8,-7 \rangle}{9\sqrt{2}}$

$= \left\langle \dfrac{7}{9\sqrt{2}}, \dfrac{8}{9\sqrt{2}}, \dfrac{-7}{9\sqrt{2}} \right\rangle$

$= \left\langle \dfrac{7\sqrt{2}}{18}, \dfrac{4\sqrt{2}}{9}, -\dfrac{7\sqrt{2}}{18} \right\rangle$

$A(-2,-5,-5)$, $B(-1,4,-2)$

$\overrightarrow{AB} = \langle -1-(-2), 4-(-5), -2-(-5) \rangle$

$= \langle 1, 9, 3 \rangle$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2+9^2+3^2}$

$= \sqrt{91} = \boxed{9.5}$

$u = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{\langle 1, 9, 3 \rangle}{\sqrt{91}}$

$= \left\langle \dfrac{1}{\sqrt{91}}, \dfrac{9}{\sqrt{91}}, \dfrac{3}{\sqrt{91}} \right\rangle$

$= \left\langle \dfrac{\sqrt{91}}{91}, \dfrac{9\sqrt{91}}{91}, \dfrac{3\sqrt{91}}{\sqrt{91}} \right\rangle$

$A(-1,4,6)$, $B(3,3,8)$

$\overrightarrow{AB} = \langle 3-(-1), 3-4, 8-6 \rangle$

$= \langle 4, -1, 2 \rangle$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2+(-1)^2+2^2}$

$= \sqrt{21} = \boxed{4.6}$

$u = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{\langle 4, -1, 2 \rangle}{\sqrt{21}}$

$= \left\langle \dfrac{4}{\sqrt{21}}, -\dfrac{1}{\sqrt{21}}, \dfrac{2}{\sqrt{21}} \right\rangle$

$= \left\langle \dfrac{4\sqrt{21}}{21}, -\dfrac{\sqrt{21}}{21}, \dfrac{2\sqrt{21}}{21} \right\rangle$

3

https://t.me/+CbbW8n6Up6U5OGE8

ورقي – ورقي - ورقي – ورقي - ورقي – ورقي - ورقي – ورقي - ورقي – ورقي - ورقي – ورقي - ورقي

21	Solve systems of linear equations using Cramer's rule حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كرامر	(11-18)	300

الدرس 3-5

استخدام قاعدة كرامر لحل نظام 2x2

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل نظام المعادلات الخطية، إن وُجد حل وحيد.

Use Cramer's Rule to find the solution of the system of linear equations, if a unique solution exists.

$3x_1 + 2x_2 = 6$
$-4x_1 - x_2 = -13$

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 \\ -13 \end{bmatrix}$

$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 5$

$x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -13 & -1 \end{vmatrix}}{5} = \dfrac{20}{5} = \boxed{4}$

$x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -4 & -13 \end{vmatrix}}{5} = \dfrac{-15}{5} = \boxed{-3}$

حل النظام هو $(4, -3)$

$-9x + 3y = 8$
$2x - y = -3$

$A = \begin{bmatrix} -9 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} -9 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3$

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \dfrac{1}{3}$

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} -9 & 8 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}{3} = \dfrac{11}{3}$

حل النظام هو $\left(\frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right)$

https://t.me/+CbbW8n6Up6U5OGE8

استخدام قاعدة كرامر لحل نظام 3x3

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل نظام المعادلات الخطية، إن وُجد حل وحيد.

Use Cramer's Rule to find the solution of the system of linear equations, if a unique solution exists.

$$\left.\begin{aligned} -x - 2y &= -4z + 12 \\ 3x - 6y + z &= 15 \\ 2x + 5y + 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} -x - 2y + 4z &= 12 \\ 3x - 6y + z &= 15 \\ 2x + 5y + 0z &= -1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 3 & -6 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -1 & -2 \\ 3 & -6 \\ 2 & 5 \end{matrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 12 \\ 15 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \big(\underbrace{-1(-6)(0) + (-2)(1)(2) + 4(3)(5)}_{56}\big) - \big(\underbrace{2(-6)(4) + 5(1)(-1) + 0(3)(-2)}_{-53}\big) = \boxed{109}$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 12 & -2 & 4 \\ 15 & -6 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 12 & -2 \\ 15 & -6 \\ -1 & 5 \end{matrix}$$

$$= \big(\underbrace{12(-6)(0) + (-2)(1)(-1) + 4(15)(5)}_{302}\big) - \big(\underbrace{-1(-6)(4) + 5(1)(12) + 0(15)(-2)}_{84}\big) = \boxed{218}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -1 & 12 & 4 \\ 3 & 15 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & 12 \\ 3 & 15 \\ 2 & -1 \end{matrix}$$

$$= \big(\underbrace{-1(15)(0) + 12(1)(2) + 4(3)(-1)}_{12}\big) - \big(\underbrace{2(15)(4) + (-1)(1)(-1) + 0(3)(12)}_{121}\big) = \boxed{-109}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 3 & -6 & 15 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & -2 \\ 3 & -6 \\ 2 & 5 \end{matrix}$$

$$= \big(\underbrace{-1(-6)(-1) + (-2)(15)(2) + 12(3)(5)}_{114}\big) - \big(\underbrace{2(-6)(12) + 5(15)(-1) + (-1)(3)(-2)}_{-213}\big) = \boxed{327}$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{218}{109} = \boxed{2}$$

$$y = \frac{|A_y|}{A} = \frac{-109}{109} = \boxed{-1}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{327}{109} = \boxed{3}$$

حل النظام هو

$(2, -1, 3)$

https://t.me/+CbbW8n6Up6U5OGE8
050-2509447

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل نظام المعادلات الخطية، إن وُجد حل وحيد.

$$8x + 12y - 24z = -40$$
$$3x - 8y + 12z = 23$$
$$2x + 3y - 6z = -10$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 8 & 12 & -24 \\ 3 & -8 & 12 \\ 2 & 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{matrix} 8 & 12 \\ 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{matrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} -40 \\ 23 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \Big(\overbrace{8(-8)(-6) + 12(12)(2) + (-24)(3)(3)}^{456}\Big) - \Big(\overbrace{2(-8)(-24) + 3(12)(8) + (-6)(3)(12)}^{456}\Big) = 0$$

لأن $det(A)=0$ فإن النظام ليس له حل وحيد ولن نستطيع استخدام قاعدة كرامر.

https://t.me/+CbbW8n6Up6U5OGE8
050-2509447 / مصطفى أسامة علام

ورقي – ورقي - ورقي – ورقي - ورقي – ورقي - ورقي – ورقي - ورقي – ورقي - ورقي – ورقي - ورقي

22	Graph hyperbolas	Example-4-مثال+(4)	359
	تمثيل القطوع الزائدة بيانيًا	(31-35)	361

الدرس 6-4

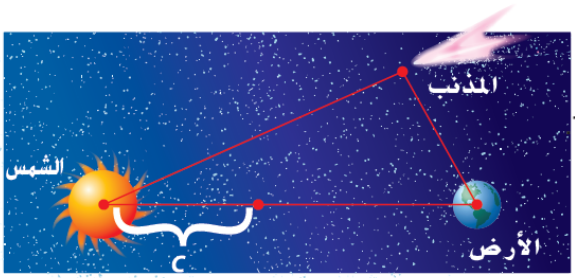
مثال من الحياة اليومية 4 كتابة معادلة قطع زائد

الفضاء تبعد الأرض عن الشمس بمسافة **146** مليون كيلومتر. يتبع المذنب مسارًا يشبه فرعًا من قطع زائد. افترض أن المسافة بين المذنب والشمس أكبر من المسافة بين المذنب والأرض بمقدار **30** مليون كيلومتر. حدد معادلة القطع الزائد الذي يقع مركزه عند نقطة الأصل لمسار المذنب.

الفهم علينا تحديد معادلة القطع الزائد.

التخطيط جد المركز وقيمتي a وb. عند الحصول على هذه المعلومات، يمكن تحديد المعادلة.

الحل البؤرتان هما الأرض والشمس، ونقطة الأصل بينهما.



قيمة c هي $146 \div 2$ أو 73

الفرق بين المسافتين من المذنب إلى كل جسم هي 30.
إذًا، a تساوي $30 \div 2$ أو 15 مليون كيلومتر.

$c^2 = a^2 + b^2$ معادلة تربط a و b و c بالقطع الزائد.

$73^2 = 15^2 + b^2$ $\quad a = 15$ و $c = 73$

$5104 = b^2$ بسّط

معادلة القطع الزائد هي $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{5104} = 1$

حيث إن المسافة من المذنب إلى الشمس أكبر، فهو يقع على فرع القطع الزائد القريب من الأرض.

التحقق $(21, 70)$ نقطة تحقق المعادلة.

المسافة بين هذه النقطة والشمس $(-73, 0)$ هي

$\sqrt{[21-(-73)]^2+(70-0)^2}$ أو 117.2 مليون كيلومتر.

المسافة بين هذه النقطة والأرض $(73, 0)$ هي

$\sqrt{(21-73)^2+(70-0)^2}$ أو 87.2 مليون كيلومتر

الفرق بين المسافتين 30. ✓

تمرين موجّه

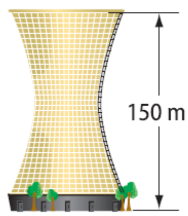
4. **البحث والإنقاذ** تتلقى محطتا استقبال المسافة بينهما 150 km إشارة من طائرة سقطت. تم تحديد المسافة بين الطائرة والمحطة A وكانت أكبر من المسافة بين الطائرة والمحطة B بمقدار 80 km.
حدد معادلة القطع الزائد الذي يقع مركزه عند نقطة الأصل لموقع الطائرة.

https://t.me/+CbbW8n6Up6U5OGE8

https://t.me/+CbbW8n6Up6U5OGE8

.31 الفضاء راجع التطبيق في بداية الدرس. عندما تمثل الشمس إحدى البؤرتين ويقع المركز عند نقطة الأصل، يتبع مسار مذنب معين فرعًا من قطع زائد. إذا كان زوج إحداثيات المسار هو $(10, 0)$ و$(30, 100)$ حيث الوحدات بالمليون كيلومتر، فحدد معادلة المسار.

.32 التبريد يتم بناء أبراج التبريد بتيارات الهواء الطبيعية على شكل قطوع زائدة للمزيد من كفاءة تبريد مصانع الطاقة. يمكن تمثيل القطع المكافئ للبرج الموضح بواسطة $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{225} = 1$، حيث الوحدات بالمتر. جد عرض البرج عند القمة وعند أضيق نقطة في المنتصف.



.33 التمثيلات المتعددة فكّر في $xy = 16$.

a. جدوليًا قم بعمل جدول قيم للمعادلة $-12 \le x \le 12$.

b. بيانيًا مثّل بيانيًا القطع الزائد الممثل بالمعادلة.

c. منطقيًا حدد خطي التقارب للقطع الزائد ومثلهما بيانيًا.

d. تحليليًا ما الخاصية الفريدة التي يمكن ملاحظتها بشأن خطي التقارب؟ القطوع الزائدة التي تمثل هذه الخاصية *تُسمى القطوع الزائدة المستطيلة.*

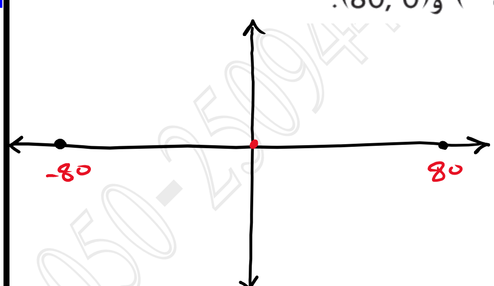
e. تحليليًا بدون أي حسابات، باعتقادك ماذا ستكون إحداثيات الرأسين لكل من $xy = 25$؟ و$xy = 36$؟

.34 استخدام النماذج تتلقى محطتا استقبال المسافة بينهما 250 mi إشارة من طائرة سقطت. تم تحديد المسافة بين الطائرة والمحطة B وكانت أكبر من المسافة بين الطائرة والمحطة A بمقدار 70 mi. حدد معادلة القطع الزائد الأفقي الذي يقع مركزه عند نقطة الأصل لموقع الطائرة.

.35 الطقس يبعد منزل فاطمة عن منزل عائشة بمسافة 4000 ft بالضبط. أثناء التحدث عبر الهاتف وكل منهما في منزلها، سمعت فاطمة صوت الرعد من النافذة وسمعته عائشة من نافذة منزلها بعد 3 s. إذا علمتَ أن سرعة الصوت 1100 ft/s، فحدد معادلة القطع الزائد الأفقي لموقع البرق.

من الحياة اليومية: كتابة معادلة قطع زائد

الملاحة افترض أن سفينةً توصلت إلى أن الفرق في بعدها عن محطتين يساوي 60 ميلاً بحريًا. اكتب معادلة القطع الزائد الذي تقع عليه السفينة إذا علمت أن المحطتين تقعان عند النقطتين $(-80, 0)$ و$(80, 0)$.



البؤرتين $(80, 0)$, $(-80, 0)$

المركز = منتصف البؤرتين $\left(\frac{80-80}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (0,0)$

$c = \boxed{80}$

الفرق الثابت $= 2a \Rightarrow 60 = 2a \Rightarrow a = 30$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b^2 = 80^2 - 30^2 = 5500$

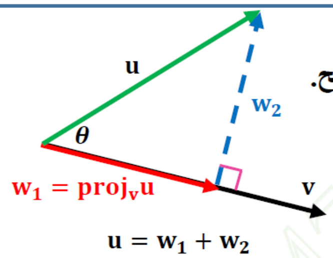
المعادلة $\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{30^2} - \frac{y^2}{5500} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{900} - \frac{y^2}{5500} = 1$

ورقي – ورقي - ورقي – ورقي - ورقي – ورقي - ورقي – ورقي - ورقي – ورقي - ورقي – ورقي - ورقي – ورقي

23	Find the projection of one vector onto another إيجاد مسقط متجه على آخر	(25-32)	434

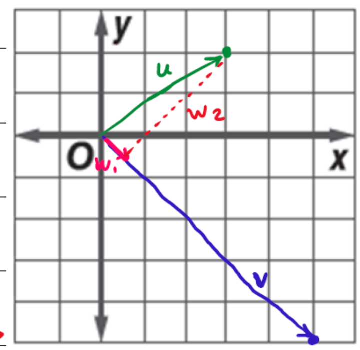
الدرس 3-7

إذا كان u و v متجهان غير صفريان، وكان $\mathbf{w_1}$ و $\mathbf{w_2}$ مركَّبا المتجه u بحيث $\mathbf{w_1}$ توازي v كما هو موضح.
فإن المتجه $\mathbf{w_1}$ يسمَّى مسقط المتجه u على v. ويرمز إليه بالرمز $\mathrm{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ و $\mathrm{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}$



العمليات على المتجهات

جـد مسقط المتجه $\mathbf{u} = \langle 3, 2\rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 5, -5\rangle$. ثم اكتب u على هيئة مجموع متجهين متعامدين، أحدهما مسقط المتجه u على v.



$W_1 = \mathrm{proj}_v u$

$= \left(\frac{u \cdot v}{|v|^2}\right) v$

$= \left(\frac{5(3)+(-5)(2)}{5^2+(-5)^2}\right) \langle 5, -5\rangle$

$= \frac{1}{10} \langle 5, -5\rangle$

$= \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle$

$u = W_1 + W_2$

$W_2 = u - W_1$

$= \langle 3, 2\rangle - \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$

$= \langle \frac{5}{2}, \frac{5}{2} \rangle$

$\Rightarrow u = \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + \langle \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\rangle$

2

https://t.me/+CbbW8n6Up6U5OGE8
050-2509447

https://t.me/+CbbW8n6Up6U5OGE8

جـد مسقط المتجه $\mathbf{u} = \langle 1, 2 \rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 8, 5 \rangle$. ثم اكتب $\mathbf{u}$ على هيئة مجموع متجهين متعامدين، أحدهما مسقط المتجه $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$.

$w_1 = \text{proj}_v u$

$= \left(\frac{u \cdot v}{|v|^2}\right) v$

$= \left(\frac{8(1) + 5(2)}{8^2 + 5^2}\right) \langle 8, 5 \rangle$

$= \frac{18}{89} \langle 8, 5 \rangle$

$= \langle \frac{144}{89}, \frac{90}{89} \rangle$

$u = w_1 + w_2$

$w_2 = u - w_1$

$= \langle 1, 2 \rangle - \langle \frac{144}{89}, \frac{90}{89} \rangle$

$= \langle \frac{-55}{89}, \frac{88}{89} \rangle$

$\Rightarrow u = \langle \frac{144}{89}, \frac{90}{89} \rangle + \langle \frac{-55}{89}, \frac{88}{89} \rangle$

المسقط في عكس اتجاه v

جـد مسقط المتجه $\mathbf{u} = \langle 4, -3 \rangle$ على المتجه $\mathbf{v} = \langle 2, 6 \rangle$. ثم اكتب u على هيئة مجموع متجهين متعامدين، أحدهما مسقط المتجه u على المتجه v.

$\text{proj}_v u = \left(\frac{u \cdot v}{|v|^2}\right) \cdot v$

$= \left(\frac{4(2) + 6(-3)}{2^2 + 6^2}\right) \cdot \langle 2, 6 \rangle$

$= -\frac{1}{4} \langle 2, 6 \rangle$

$w_1 = \langle -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rangle$

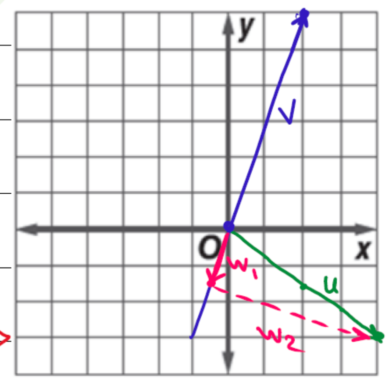
$u = w_1 + w_2$

$w_2 = u - w_1$

$= \langle 4, -3 \rangle - \langle -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rangle$

$= \langle \frac{9}{2}, -\frac{3}{2} \rangle$

$\Rightarrow u = \langle -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rangle + \langle \frac{9}{2}, -\frac{3}{2} \rangle$



جـد مسقط المتجه $\mathbf{u} = \langle -3, 4 \rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 6, 1 \rangle$. ثم اكتب $\mathbf{u}$ على هيئة مجموع متجهين متعامدين، أحدهما مسقط المتجه $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$.

$\text{proj}_v u = \left(\frac{u \cdot v}{|v|^2}\right) \cdot v$

$= \left(\frac{-3(6) + 4(1)}{6^2 + 1^2}\right) \cdot \langle 6, 1 \rangle$

$= -\frac{14}{37} \langle 6, 1 \rangle$

$w_1 = \langle -\frac{84}{37}, -\frac{14}{37} \rangle$

$u = w_1 + w_2$

$w_2 = u - w_1$

$= \langle -3, 4 \rangle - \langle -\frac{84}{37}, -\frac{14}{37} \rangle$

$= \langle -\frac{27}{37}, \frac{162}{37} \rangle$

$\Rightarrow u = \langle -\frac{84}{37}, -\frac{14}{37} \rangle + \langle -\frac{27}{37}, \frac{162}{37} \rangle$