

(٠_٠)

[T.me/Science_2022bot](https://t.me/Science_2022bot) : تم التحميل بواسطة 



Telegram : @Science_2022bot

(٠_٠)

أولاً: أجب عن الأسئلة الآتية: (40° درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: أثبت أن التابع $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ المعرف على \mathbb{R}^* يقبل مقاربتين أفقيين ، اكتب معادلة كل منهما.

السؤال الثاني: حل بالمجهول z المعادلة $2iz - (1+i)\bar{z} = 4i$.

السؤال الثالث: جد تابعاً أصلياً للتابع $f(x) = \frac{1}{\sin 2x}$ على المجال $]0, \frac{\pi}{2}[$.

السؤال الرابع: الجدول المجاور هو القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	

والمطلوب: اكمل هذا الجدول ثم احسب $E(X)$ و $V(X)$.

ثانياً: حل التمرينات الآتية: (60° درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس (O, \vec{u}, \vec{v}) لدينا النقاط A و B و C والتي تمثلها الأعداد

العقدية $a = \sqrt{3} + i$ و $b = \sqrt{3} - i$ و $c = 3\sqrt{3} + i$ والمطلوب:

(1) احسب الأطوال AB و AC و BC ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

(2) أثبت أن $b = a e^{\frac{\pi}{3}i}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث OAB .

(3) أثبت أن O مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, 2)$ و $(B, 1)$ و $(C, -1)$.

التمرين الثاني: لتكن لدينا التابع f المعرف على المجال $]1, +\infty[$ بالعلاقة $f(x) = \frac{2\ln x + 3}{\ln x - 1}$ والمطلوب:

(1) جد نهاية التابع f عند $+\infty$.

(2) عين عدداً حقيقياً A يحقق "أيأ كانت $x > A$ انتهى $f(x)$ إلى المجال المفتوح الذي مركزه 2 ونصف قطره 0.1".

(3) احسب $f'(x)$ ثم استنتج مشتق التابع $g(x) = \sqrt{\frac{2\ln x + 3}{\ln x - 1}}$.

التمرين الثالث: في مدرستنا يتفوق 40% من الطلاب في مادة الرياضيات ونعلم أن مدرستنا تضم نسبة 60% ذكور

و 55% منهم متفوقون في الرياضيات ، نختار طالباً عشوائياً من المدرسة ونميز الحدين ، الحدث B : "الطالب ذكر"

والحدث M : "الطالب متفوق في الرياضيات" والمطلوب:

	B	B'	
M			
M'			

(1) أكمل الجدول المجاور.

(2) ما احتمال أن يكون الطالب المختار أنثى متفوقة في الرياضيات.

(3) لقد اخترنا طالبة أنثى ، ما احتمال أن تكون متفوقة في الرياضيات.

التمرين الرابع: لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $u_{n+1} = \frac{4u_n + 3}{u_n + 2}$ و $u_0 = 0$ والمطلوب:

(1) أثبت أن المتتالية u_n متزايدة.

(2) أثبت أن المتتالية $-1 \leq u_n \leq 3$.

(3) استنتج تقارب المتتالية u_n واحسب نهايتها.

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: (100° درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه 3، وفيه النقاط I و J و K تحقق $\overline{DI} = k\overline{DA}$ و $\overline{DJ} = k\overline{DC}$

و $\overline{DK} = k\overline{DH}$ بالترتيب و M المسقط القائم للنقطة D على المستوي IJK ، والمطلوب:

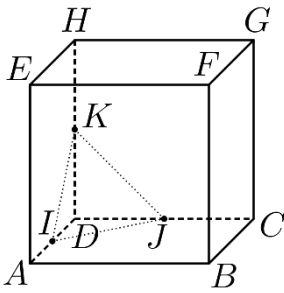
(1) باختيار معلم مناسب، احسب إحداثيات I و J و K بدلالة k .

(2) أثبت أن المثلث IJK متساوي الأضلاع واحسب مساحته.

(3) أثبت أن (DF) عمودي على المستوي IJK ، ثم اكتب معادلة المستوي IJK .

(4) جد إحداثيات النقطة M ثم استنتج أن M مركز ثقل المثلث IJK أيأ كانت k .

(5) أوجد قيمة k التي تجعل النقطة M منتصف القطعة المستقيمة $[DF]$.



المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على \mathbb{R} بالعلاقة $f(x) = (x+1)e^{-x}$ والمطلوب:

(1) أوجد $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ واستنتج معادلة المقارب الأفقي للخط C وادرس وضعه النسبي.

(2) أوجد $f'(x)$ واستنتج جدول تغيرات التابع f وحدد قيمته الحدية.

(3) أثبت أن للمعادلة $f(x) + 1 = 0$ حل وحيد أيأ كانت x من \mathbb{R} .

(4) ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم C .

(5) احسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيمين $x = -1$ و $x = 0$.

(6) استنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع $f_1(x) = (x-1)e^x$.

انتهى الاختبار الأول

الشامل

أولاً: أجب عن الأسئلة التالية: (40° درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: نتأمل في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ المستوي $P: ax + by + cz = 1$ والمطلوب:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{(bc)^2} + \frac{1}{(ac)^2} + \frac{1}{(ab)^2}$$

أثبت أن h بعد النقطة O عن المستوي P يحقق العلاقة

السؤال الثاني: حل في \mathbb{R} المعادلة $4^{x+1} = 5^{x-1}$.

السؤال الثالث: $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية تحقق $u_7 = 31$ و $u_{11} = 51$ ، احسب u_{20} .

السؤال الرابع: لتكن المجموعة $S = \{0, 1, 3, 5, 8\}$ والمطلوب:

(1) بكم طريقة يمكن تشكيل رقم مكون من منزلتين من عناصر المجموعة S .

(2) بكم طريقة يمكن تشكيل عدد فردي مؤلف من منزلتين من عناصر المجموعة S .

ثانياً: حل التمرينات التالية: (60° درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على \mathbb{R} بالعلاقة $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 2x$ والمطلوب:

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) عيّن العددين الحقيقيين a و b التي تحقق $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ و $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax)$.

(3) استنتج معادلة المقارب المائل للخط C وادرس وضعه النسبي.

التمرين الثاني: ليكن كثير الحدود $P(z) = z^3 - (2 + 2i)z^2 + (2 + 4i)z - 4i$ والمطلوب:

(1) أثبت أن $z_0 = 2i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$.

(2) عيّن كثير حدود من الدرجة الثانية $Q(z)$ يحقق $P(z) = (z - 2i)Q(z)$.

(3) حل في \mathbb{C} المعادلة $P(z) = 0$.

التمرين الثالث: نتأمل في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقاط التالية

$$A(1, 5, 4) \text{ و } B(10, 4, 3) \text{ و } C(4, 3, 5) \text{ و } D(0, 4, 5)$$

والمطلوب: (1) أثبت أن النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة.

(2) أثبت أن النقاط A و B و C تقع في مستوٍ واحد.

(3) عيّن α و β و γ لتكون D مركز الأبعاد المناسبة للنقاط (A, α) و (B, β) و (C, γ) .

التمرين الرابع: نضع $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x dx$ و $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x dx$ والمطلوب:

(1) أثبت أن $J - I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx$ ، ثم احسب $J - I$

(2) احسب $I + J$ ثم استنتج قيمة كل من I و J .

ثالثاً: حل المسألتين التاليتين: (100° درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: صندوق يحوي أربع كرات حمراء وكرتين سوداوين، نسحب عشوائياً كرة من الصندوق نسجل لونها ثم نعيدها إلى

الصندوق ونضاعف عدد الكرات من لونها في الصندوق ونسحب مجدداً كرة من الصندوق والمطلوب:

(1) اعطِ تمثيلاً شجرياً للتجربة.

(2) ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء.

(3) إذا كانت الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء، ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة في المرة الأولى حمراء.

(4) ليكن X المتحول العشوائي الذي يعطي نقطتين عند كل كرة حمراء مسحوبة و يخسر نقطة عند كل كرة سوداء مسحوبة

(a) اكتب مجموعة قيم X وقانونه الرياضي.

(b) احسب التوقع الرياضي والتباين.

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بالعلاقة $f(x) = \begin{cases} x - x \ln x & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$

والمطلوب: (1) أثبت أن f مستمر عند الصفر.

(2) ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند الصفر، ما طبيعة المماس في المبدأ.

(3) ادرس تغيرات التابع f وحدد قيمته الحدية ثم ارسم C .

(4) احسب مساحة السطح المحصور بين f والمستقيمين $x = 1$ و $x = e$.

(5) نعرف المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ بالعلاقة التدرجية $u_{n+1} = f(u_n)$ و $u_0 = \frac{1}{e}$ والمطلوب:

(a) أثبت مستعملاً البرهان بالتدرج أن $0 < u_n < 1$ أيأ كان العدد الطبيعي n .

(b) أثبت أن المتتالية u_n متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها.

انتهى الاختبار الثاني

الشامل

أولاً:

السؤال الأول:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-1}{x} = \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}\right) = 1$$

وبالتالي $y = 1$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}\right) = -1$$

وبالتالي $y = -1$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

السؤال الثاني:

$$(1) \dots 2iz - (1+i)\bar{z} = 4i$$

نوجد مرافق المعادلة (1) نجد $-2i\bar{z} - (1-i)z = -4i$

$$\bar{z} = \frac{4i - (1-i)z}{2i} = 2 - \frac{1-i}{2i}z = 2 - \frac{(1-i)(-2i)}{(2i)(-2i)}z = 2 - \frac{(-2i-2)}{4}z = 2 + \frac{1}{2}(1+i)z \text{ نجد (2)}$$

$$2iz - (1+i)\left(2 + \frac{1}{2}(1+i)z\right) = 4i \text{ فنجد (1)}$$

$$2iz - \frac{1}{2}(2i)z = 4i + 2 + 2i \text{ أي } 2iz - 2(1+i) - \frac{1}{2}(1+i)^2z = 4i$$

$$z = \frac{2+6i}{i} = \frac{(2+6i)(-i)}{(i)(-i)} = \frac{-2i+6}{1} = 6-2i \text{ أي } iz = 2+6i$$

السؤال الثالث:

$$]0, \frac{\pi}{2}[\text{ على المجال } f(x) = \frac{1}{\sin 2x}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sin 2x} = \frac{1}{2\sin x \cos x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2\sin x \cos x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos^2 x}{\tan x}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln(\tan x) \text{ وبالتالي}$$

السؤال الرابع:

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$

$$P(X = 3) = 1 - (P(X = 1) + P(X = 2)) = 1 - \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\right) = \frac{4}{8}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i p_i = \frac{3+2+12}{8} = \frac{17}{8}$$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^3 x_i^2 p_i = \frac{3+4+36}{8} = \frac{43}{8}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{43}{8} - \left(\frac{17}{8}\right)^2 = \frac{43}{8} - \frac{289}{64} = \frac{344-289}{64} = \frac{55}{64}$$

ثانياً:

التمرين الأول:

$$c = 3\sqrt{3} + i \text{ و } b = \sqrt{3} - i \text{ و } a = \sqrt{3} + i$$

$$AB = |z_{\overline{AB}}| = |b - a| = |\sqrt{3} - i - \sqrt{3} - i| = |-2i| = \sqrt{0+4} = 2 \quad (1)$$

$$AC = |z_{\overline{AC}}| = |c - a| = |3\sqrt{3} + i - \sqrt{3} - i| = |2\sqrt{3}| = \sqrt{12+0} = 2\sqrt{3}$$

$$BC = |z_{\overline{BC}}| = |c - b| = |3\sqrt{3} + i - \sqrt{3} + i| = |2\sqrt{3} + 2i| = \sqrt{12+4} = 4$$

$$AB^2 + AC^2 = 4 + 12 = 16 = BC^2 \text{ لدينا}$$

وبالتالي المثلث ABC قائم في A

$$e^{\frac{\pi i}{3}} \cdot b = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3} - i) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{3}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} + i = a \quad (2)$$

ومنه A صورة B وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$

وبالتالي المثلث OAB متساوي الأضلاع

لإثبات أن O مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, 2)$ و $(B, 1)$ و $(C, -1)$ نثبت صحة العلاقة: (3)

$$2\overline{OA} + \overline{OB} - \overline{OC} = \vec{0}$$

$$2\overline{OA} + \overline{OB} - \overline{OC} = z_{2\overline{OA} + \overline{OB} - \overline{OC}} = 2z_{\overline{OA}} + z_{\overline{OB}} - z_{\overline{OC}} = 2a + b - c$$

$$2(\sqrt{3} + i) + (\sqrt{3} - i) - (3\sqrt{3} + i) = 2\sqrt{3} + 2i + \sqrt{3} - i - 3\sqrt{3} - i = 0 \text{ محققة}$$

التمرين الثاني:

$$]1, +\infty[\text{ و } f(x) = \frac{2\ln x + 3}{\ln x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln x + 3}{\ln x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x \left(2 + \frac{2}{\ln x}\right)}{\ln x \left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{2}{\ln x}}{1 - \frac{1}{\ln x}} = \frac{2+0}{1-0} = 2 \quad (1)$$

$$|f(x) - 2| < 0.1 \text{ ينتمي إلى المجال المفتوح الذي مركزه } 2 \text{ ونصف قطره } 0.1 \text{ أي } \quad (2)$$

$$\left| \frac{2\ln x + 3}{\ln x - 1} - 2 \right| < 0.1$$

$$\left| \frac{2\ln x + 3 - 2\ln x + 2}{\ln x - 1} \right| < 0.1$$

$$A = e^{51} \text{ ومنه } x > e^{51} \text{ وبالتالي } \ln x > 51 \text{ أي } 50 < \ln x - 1 \text{ أي } \frac{5}{\ln x - 1} < \frac{1}{10}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x}(\ln x - 1) - \frac{1}{x}(2\ln x + 3)}{(\ln x - 1)^2} = \frac{\frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x} - \frac{3}{x}}{(\ln x - 1)^2} = \frac{-\frac{5}{x}}{(\ln x - 1)^2} = \frac{-5}{x(\ln x - 1)^2} \quad (3)$$

$$\text{لدينا } g(x) = \sqrt{\frac{2\ln x + 3}{\ln x - 1}} = \sqrt{f(x)} \text{ وبالتالي}$$

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{\frac{-5}{x(\ln x - 1)^2}}{2\sqrt{\frac{2\ln x + 3}{\ln x - 1}}} = \frac{-5}{2x(\ln x - 1)^2} \sqrt{\frac{\ln x - 1}{2\ln x + 3}}$$

التمرين الثالث:

$$P(B') = 40\% = \frac{40}{100} \text{ وبالتالي } P(B) = 60\% = \frac{60}{100} \quad (1)$$

$$P(M') = 60\% = \frac{60}{100} \text{ وبالتالي } P(M) = 40\% = \frac{40}{100}$$

$$\text{ومنه نجد } P(M \cap B) = \frac{55}{100} \times \frac{60}{100} = \frac{33}{100} = 33\% \text{ وبالتالي يكون الجدول:}$$

	B	B'	
M	33%	7%	40%
M'	27%	33%	60%
	60%	40%	

$$P(M \cap B') = 7\% = \frac{7}{100} \text{ احتمال أن يكون الطالب المختار أنثى متفوقة في الرياضيات هو:} \quad (2)$$

$$P(M | B') = \frac{P(M \cap B')}{P(B')} = \frac{\frac{7}{100}}{\frac{40}{100}} = \frac{7}{40} \text{ احتمال أن تكون متفوقة في الرياضيات علماً أنها أنثى هو:} \quad (3)$$

$$u_0 = 0 \text{ و } u_{n+1} = \frac{4u_n + 3}{u_n + 2}$$

$$E(n): u_{n+1} > u_n \text{ نفرض القضية (1)}$$

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n = 0$: $u_0 = 0 < u_1 = \frac{3}{2}$ محققة.

- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n : $u_{n+1} > u_n$ محققة.

- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $u_{n+2} > u_{n+1}$. \therefore

$$f(x) = \frac{4x+3}{x+2} \text{ التابع } f(x) = \frac{4x+3}{x+2} \text{ متزايد تماماً لأن } f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2} > 0$$

من الفرض $u_{n+1} > u_n$ وبما أن التابع f متزايد تماماً فإن: $f(u_{n+1}) > f(u_n)$ أي $u_{n+2} > u_{n+1}$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أيضاً كان العدد الطبيعي n والمنتالية u_n متزايدة تماماً

$$E(n): -1 \leq u_n \leq 3 \text{ نفرض القضية (2)}$$

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n = 0$: $-1 \leq u_0 = 0 \leq 3$ محققة.

- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n : $-1 \leq u_n \leq 3$ محققة.

- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $-1 \leq u_{n+1} \leq 3$. \therefore

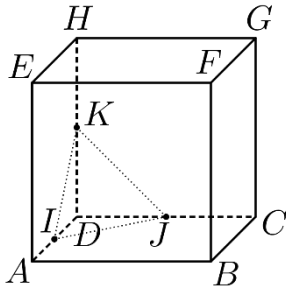
من الفرض $-1 \leq u_n \leq 3$ وبما أن التابع f متزايد تماماً فإن: $f(-1) \leq f(u_n) \leq f(3)$ أي $-1 \leq u_{n+1} \leq 3$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أيضاً كان العدد الطبيعي n

$$f(x) = x \text{ بما أن المنتالية } u_n \text{ متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة ونهايتها هي حل المعادلة } f(x) = x \text{ (3)}$$

$$\frac{4x+3}{x+2} = x \text{ المعادلة تكافئ } x^2 - 2x - 3 = 0 \text{ أي } (x-3)(x+1) = 0$$

إما $x = 3$ مقبول أو $x = -1$ مرفوض لأن المنتالية متزايدة وحدها الأول 0 ومنه $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 3$



(1) نفرض $\left(D, \frac{1}{3} \overrightarrow{DA}, \frac{1}{3} \overrightarrow{DC}, \frac{1}{3} \overrightarrow{DH} \right)$ معلم كيفي ومنه يكون إحداثيات النقاط:

$$K(0,0,3k) \text{ و } J(0,3k,0) \text{ و } I(3k,0,0)$$

$$IJ = \sqrt{9k^2 + 9k^2 + 0} = \sqrt{18k^2} = 3k\sqrt{2} \text{ أي } \overrightarrow{IJ}(-3k,3k,0) \text{ لدينا} \quad (2)$$

$$IK = \sqrt{9k^2 + 9k^2 + 0} = \sqrt{18k^2} = 3k\sqrt{2} \text{ أي } \overrightarrow{IK}(-3k,0,3k) \text{ لدينا}$$

$$JK = \sqrt{9k^2 + 9k^2 + 0} = \sqrt{18k^2} = 3k\sqrt{2} \text{ أي } \overrightarrow{JK}(0,-3k,3k) \text{ لدينا}$$

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{18k^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{9k^2 \sqrt{3}}{2} \text{ وبالتالي المثلث } IJK \text{ متساوي الأضلاع ومساحته}$$

لدينا $D(0,0,0)$ و $F(3,3,3)$ ومنه

$$DF \perp IJ \text{ أي أن } \overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{IJ} = (3,3,3) \cdot (-3k,3k,0) = -9k + 9k + 0 = 0$$

$$DF \perp IK \text{ أي أن } \overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{IK} = (3,3,3) \cdot (-3k,0,3k) = -9k + 0 + 9k = 0$$

وبالتالي (DF) عمودي على المستوى IJK ومنه $\overrightarrow{n_{IJK}} = \overrightarrow{DF}(3,3,3)$ ومنه معادلة المستوى تعطى بالشكل:

$$3x + 3y + 3z + d = 0$$

I نقطة من المستوى IJK فهي تحقق معادلته $9k + d = 0$ أي $d = -9k$

$$\text{ومنه } 3x + 3y + 3z - 9k = 0 \text{ وبالتالي } IJK : x + y + z = 3k$$

$$(3) \text{ نعوض المعادلات الوسيطة للمستقيم } (DF) : \begin{cases} x = 3t \\ y = 3t : t \in \mathbb{R} \\ z = 3t \end{cases} \text{ في معادلة المستوى } IJK : x + y + z = 3k$$

$$3t + 3t + 3t = 3k \text{ أي أن } t = \frac{k}{3} \text{ ومنه } M(k,k,k)$$

$$\frac{z_I + z_J + z_K}{3} = \frac{3k}{3} = k = z_M \text{ و } \frac{y_I + y_J + y_K}{3} = \frac{3k}{3} = k = y_M \text{ و } \frac{x_I + x_J + x_K}{3} = \frac{3k}{3} = k = x_M$$

وبالتالي M مركز ثقل المثلث IJK أيًا كانت k .

$$(3) \text{ بما أن } M \text{ منتصف القطعة المستقيمة } [DF] \text{ أي أن } \overrightarrow{DM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DF}$$

$$(k,k,k) = \frac{1}{2}(3,3,3) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

$$k = \frac{3}{2} \text{ ومنه}$$

$$f(x) = (x+1)e^{-x} \text{ و } D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} = 0 \quad (1)$$

وبالتالي $y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

الوضع النسبي: إشارة الفرق $f(x) - y_\Delta = (x+1)e^{-x}$ من إشارة $x+1$ لأن $e^{-x} > 0$ دوماً

عندما $x > -1$ فوق المقارب Δ عندما $x < -1$ تحت المقارب Δ

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = e^{-x} - e^{-x}(x+1) = (1-x-1)e^{-x} = -xe^{-x} \quad (2)$$

عندما $f'(x) = 0$ فإن $x = 0$ حيث $f(0) = 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	1	0

$f(0) = 1$ قيمة حدية كبرى

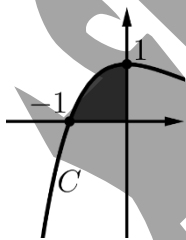
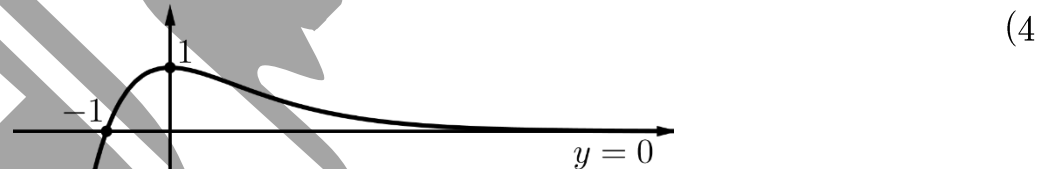
على المجال $]-\infty, 0]$ التابع مستمر و متزايد تماماً و $-1 \in f(]-\infty, 0]) =]-\infty, 1]$ (3)

وبالتالي للمعادلة $f(x) = -1$ حل وحيد في المجال $]-\infty, 0]$

على المجال $[0, +\infty[$ التابع مستمر و متناقص تماماً و $-1 \notin f([0, +\infty[) =]0, 1]$

وبالتالي ليس للمعادلة $f(x) = -1$ حل في المجال $[0, +\infty[$

وبالتالي للمعادلة $f(x) + 1 = 0$ حل وحيد أياً كانت x من \mathbb{R} .



$$S = \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 (x+1)e^{-x} dx \quad (5)$$

$u = x+1$	$u' = 1$
$v' = e^{-x}$	$v = -e^{-x}$

$$S = \left[-(x+1)e^{-x} \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 -e^{-x} dx = \left[-(x+1)e^{-x} \right]_{-1}^0 - \left[e^{-x} \right]_{-1}^0 = (-1-0) - (1-e) = e-2$$

$$f(-x) = (-x+1)e^x = -(x-1)e^x = -f_1(x) \quad (6)$$

انتهى حل النموذج الأول

الشامل

أولاً:

السؤال الأول:

$$P: ax + by + cz = abc$$

$$h = \text{dist}(O, P) = \frac{|-abc|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{abc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$h^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \text{ بالتربيع نجد وبالتالي}$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 b^2 c^2} = \frac{a^2}{a^2 b^2 c^2} + \frac{b^2}{a^2 b^2 c^2} + \frac{c^2}{a^2 b^2 c^2} = \frac{1}{(bc)^2} + \frac{1}{(ac)^2} + \frac{1}{(ab)^2}$$

السؤال الثاني:

$$4^{x+1} = 5^{x-1}$$

$$e^{(x+1)\ln 4} = e^{(x-1)\ln 5}$$

$$(x+1)\ln 4 = (x-1)\ln 5$$

$$x\ln 4 + \ln 4 = x\ln 5 - \ln 5$$

$$x\ln 4 - x\ln 5 = -\ln 4 - \ln 5$$

$$x(\ln 4 - \ln 5) = -(\ln 4 + \ln 5)$$

$$x = -\frac{\ln 4 + \ln 5}{\ln 4 - \ln 5} = -\frac{\ln 20}{\ln \frac{4}{5}}$$

السؤال الثالث:

$$u_{11} = 51 \text{ و } u_7 = 31$$

$$u_{11} - u_7 = (11 - 7)r$$

$$51 - 31 = 4r$$

$$r = 5 \text{ أي } 20 = 4r$$

$$u_{20} - u_{11} = (20 - 11)r$$

$$u_{20} = 9r + u_{11} = 9(5) + 51 = 45 + 51 = 96$$

السؤال الرابع:

$$S = \{0, 1, 3, 5, 8\}$$

$$5 \times 4 = 20 \quad (1)$$

$$3 \times 4 = 12 \quad (2)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 2x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad (1)$$

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 2 = -3 \quad (2)$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - 2x + 3x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x)$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = 0$$

وبالتالي C يقبل مقارب مائل من الشكل $y = ax + b$ أي $y = -3x$ Δ (3)

$$f(x) - y_{\Delta} = \sqrt{x^2 + 1} - 2x + 3x = \sqrt{x^2 + 1} + x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2}} > 0$$

الوضع النسبي:

وبالتالي C فوق المقارب Δ

$$P(z) = z^3 - (2 + 2i)z^2 + (2 + 4i)z - 4i$$

$$P(2i) = (2i)^3 - (2 + 2i)(2i)^2 + (2 + 4i)(2i) - 4i \quad (1)$$

$$P(2i) = -8i - (2 + 2i)(-4) + (2 + 4i)(2i) - 4i = -8i + 8 + 8i + 4i - 8 - 4i = 0$$

وبالتالي $z_0 = 2i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$.

$$P(z) = (z - 2i)Q(z) = (z - 2i)(z^2 - 2z + 2) \quad (2)$$

$$P(z) = 0 \quad (3)$$

$$z_0 = 2i \text{ إما!}$$

$$\text{أو } z^2 - 2z + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 8 = -4$$

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$$

$$z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i$$

$$\begin{array}{r} z^2 - 2z + 2 \\ \hline z - 2i \overline{) z^3 - (2 + 2i)z^2 + (2 + 4i)z - 4i} \\ \underline{\square z^3 \quad \square 2iz^2} \\ -2z^2 \quad + (2 + 4i)z - 4i \\ \underline{\square 2z^2 \quad \square 4iz} \\ 2z \quad + 4i \\ \underline{\square 2z \quad \square 4i} \\ 0 \end{array}$$

$$D(0,4,5) \text{ و } C(4,3,5) \text{ و } B(10,4,3) \text{ و } A(1,5,4)$$

(1) الشعاعين $\overrightarrow{AC}(3,-2,1)$ و $\overrightarrow{AB}(9,-1,-1)$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة

وبالتالي النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة.

$$\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} \text{ بحيث } a \text{ و } b \text{ عددين} \quad (2)$$

$$(-1,-1,1) = a(9,-1,-1) + b(3,-2,1) = (9a+3b, -a-2b, -a+b)$$

$$\begin{cases} (1) & 9a+3b = -1 \\ (2) & -a-2b = -1 \\ (3) & -a+b = 1 \end{cases} \text{ بالمطابقة نجد}$$

$$b = \frac{2}{3} \text{ بطرح (2) و (3) نجد } -3b = -2 \text{ أي } b = \frac{2}{3}$$

$$a = -\frac{1}{3} \text{ نعوض في (3) أي } -a + \frac{2}{3} = 1 \text{ أي } -a = \frac{1}{3} \text{ أي } a = -\frac{1}{3}$$

$$\text{للتأكد نعوض في (1) فنجد } 9\left(-\frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{2}{3}\right) = -3 + 2 = -1 \text{ محققة}$$

$$\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \text{ أي}$$

وبالتالي الأشعة \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} و \overrightarrow{AD} مرتبطة خطياً ومنه النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد.

$$\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \quad (3)$$

$$3\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$$

$$3\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{DC}$$

$$2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{CD} = \vec{0}$$

وبالتالي D مركز الأبعاد المناسبة للنقاط $(A,2)$ و $(B,-1)$ و $(C,2)$.

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x dx \text{ و } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x dx$$

$$J - I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx \quad (1)$$

$$\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ \hline v' = \cos 2x & v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array}$$

$$J - I = \left[\frac{1}{2} x \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2x dx = \left[\frac{1}{2} x \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-\frac{1}{4} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

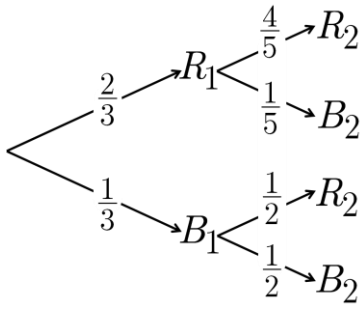
$$(1) \dots J - I = (0 - 0) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x (\sin^2 x + \cos^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx \quad (2)$$

$$(2) \dots I + J = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 = \frac{\pi^2}{8}$$

$$J = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4} \text{ ومنه } 2J = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \text{ نجد (2) و (1) بجمع}$$

$$I = J + \frac{1}{2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4} \text{ وبالتالي}$$



(1)

$$P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P(B_1 \cap R_2)$$

(2)

$$P(R_2) = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{8}{15} + \frac{1}{6} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10}$$

$$P(R_1 | R_2) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{8}{15}}{\frac{7}{10}} = \frac{16}{21}$$

(3)

$$X = \{-2, 1, 4\}$$

(4)

$$P(X = -2) = P(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P(X = 1) = P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap B_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{6} + \frac{2}{15} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

$$P(X = 4) = P(R_1 \cap R_2) = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

x_i	-2	1	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{8}{15}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i p_i = \frac{2}{6} + \frac{3}{10} + \frac{32}{15} = \frac{-10 + 9 + 64}{30} = \frac{63}{30} = \frac{11}{10}$$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^3 x_i^2 p_i = \frac{4}{6} + \frac{3}{10} + \frac{128}{15} = \frac{20 + 9 + 256}{30} = \frac{285}{30} = \frac{57}{6}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{57}{6} - \frac{121}{100} = \frac{1019}{100}$$

$$[0, +\infty[\text{ و } f(x) = \begin{cases} x - x \ln x : x > 0 \\ 0 : x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x - x \ln x) = 0 - 0 = 0 = f(0) \quad (1)$$

وبالتالي f مستمر عند الصفر.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \ln x) = +\infty \quad (2)$$

وبالتالي التابع f غير اشتقاقي عند الصفر ويقبل مماساً شاقولياً في المبدأ معادلته $x = 0$

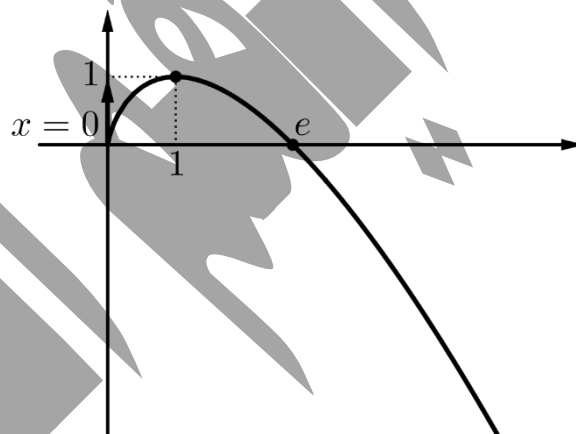
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x) = -\infty \quad (3)$$

$$f'(x) = 1 - \ln x - \frac{1}{x} \cdot x = -\ln x$$

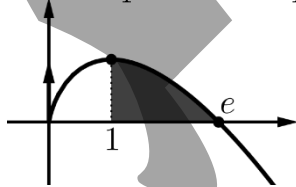
عندما $f'(x) = 0$ فإن $x = 1$ حيث $f(1) = 1$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
			-
$f(x)$	0	↗ 1 ↘	$-\infty$

$f(1) = 1$ قيمة حدية كبرى



$$S = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e (x - x \ln x) dx = \int_1^e x dx - \int_1^e x \ln x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^e - I = \frac{e^2 - 1}{2} - I \quad (4)$$



$u = \ln x$	$u' = \frac{1}{x}$
$v' = x$	$v = \frac{1}{2} x^2$

$$I = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^e - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^e = \left(\frac{e^2}{2} - 0 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{e^2 - 1}{2} \right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2 - 1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}$$

$$S = \frac{e^2 - 1}{2} - I = \frac{e^2 - 1}{2} - \frac{e^2 + 1}{4} = \frac{e^2 - 3}{4} \text{ وبالتالي}$$

$$u_0 = \frac{1}{e} \text{ و } u_{n+1} = f(u_n) = u_n - u_n \ln(u_n) \quad (5)$$

$$E(n): 0 < u_n < 1 \text{ نفرض القضية } \quad (a)$$

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n = 0$: $0 < u_0 = \frac{1}{e} < 1$ محققة.

- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n : $0 < u_n < 1$ محققة.

- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $0 < u_{n+1} < 1$. \therefore

من الفرض $0 < u_n < 1$ وبما أن التابع f متزايد تماماً على المجال $]0,1[$ فإن:

$$0 < u_{n+1} < 1 \text{ أي } f(0) < f(u_n) < f(1)$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أيضاً كان العدد الطبيعي n

$$E(n): u_{n+1} > u_n \text{ نفرض القضية } \quad (b)$$

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n = 0$: $u_1 = \frac{2}{e} > u_0 = \frac{1}{e}$ محققة.

- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n : $u_{n+1} > u_n$ محققة.

- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $u_{n+2} > u_{n+1}$. \therefore

من الفرض $u_{n+1} > u_n$ وبما أن التابع f متزايد تماماً على المجال $]0,1[$ فإن:

$$u_{n+2} > u_{n+1} \text{ أي } f(u_{n+1}) > f(u_n)$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أيضاً كان العدد الطبيعي n والمتتالية u_n متزايدة تماماً

• بما أن المتتالية u_n متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة ونهايتها هي حل المعادلة $f(x) = x$

$$\text{المعادلة } x - x \ln x = 0 \text{ تكافئ } x \ln x = 0$$

إما $x = 1$ مقبول أو $x = 0$ مرفوض لأن المتتالية متزايدة وحدها الأول $\frac{1}{e}$ ومنه $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$

انتهى حل النموذج الثاني

الشامل