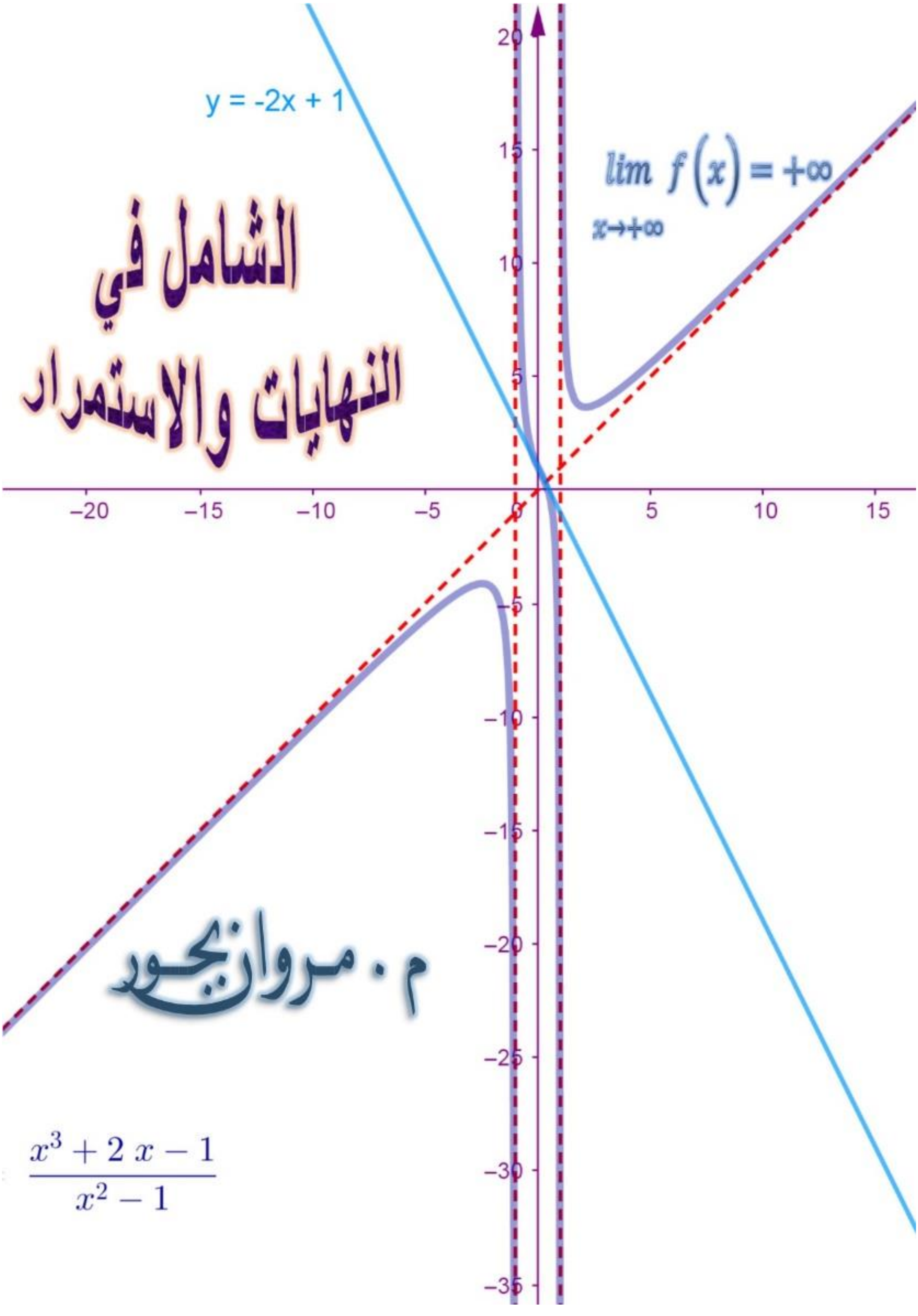
الشامل في النهايات والاستمرار

م . مروان بحور



❖ تذكرة بالمجالات (الجوارات) :

ليكن المجال المفتوح $]a,b[$ يُمثل هذا المجال على محور الأعداد الحقيقية بالقطعة المستقيمة $[ab]$ ، وطول هذا المجال يُساوي $\ell = b - a$ ، نُسمي العدد $c = \frac{a+b}{2}$ مركز المجال ، ونسمي العدد $r = \frac{|b-a|}{2}$ نصف قطر المجال ، ويُكتب المجال $]a,b[$ بدلالة مركزه ونصف قطره بالشكل .

$]c - r, c + r[$.

إن انتماء أي نقطة فاصلتها x إلى المجال $]a,b[$ يعني أن $|x - c| < r$ وإذا كان المجال مغلق $|x - c| \leq r$ أي أن بُعد x عن مركز المجال أصغر من نصف قطره .

ندعو المجال من الشكل : $]a, +\infty[$ جوار لـ $+\infty$

ندعو المجال من الشكل : $]-\infty, a[$ جوار لـ $-\infty$

ملاحظة هامة : لا معنى لأخذ نهاية تابع عند قيمة لا تنتمي إلى مجال مجموعة تعريفه أو إلى أحد طرفي فجال مجموعة التعريف .

❖ نهاية التابع

ندرس نهاية التابع في حالتين :

a) عندما تنتهي x إلى اللانهاية $\pm\infty$.

b) عندما تنتهي x إلى عدد حقيقي a .

1) نهاية التابع عند اللانهاية $\pm\infty$:

1) نهاية منتهية عند $\pm\infty$ " المقارب الأفقي " :

إذا كان التابع f معرف على مجال من الشكل $]a, +\infty[$ أو $]-\infty, a[$ عندها $\Leftarrow$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$

ويُفسر ذلك هندسياً أن المستقيم $y = b$ مُقارب أفقي للخط البياني للتابع f في جوار $+\infty$ أو $(-\infty)$.

ماذا تعني النهاية المنتهية عند $+\infty$؟

تعني النهاية المنتهية (b) عندما تنتهي x إلى $+\infty$ أنَّ قيم $f(x)$ ستقع في مجال مركزه (b) ونصف قطره (ε) بدءاً من قيمة معينة A لـ x أي :

$$x > A \implies f(x) \in]b - \varepsilon, b + \varepsilon[$$

وينطبق الكلام نفسه عند $-\infty$:

$$x < A \implies f(x) \in]b - \varepsilon, b + \varepsilon[$$

تذكر : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{k}{x^n} = 0 \quad : n \neq 0$

2) نهاية غير منتهية عند $\pm\infty$:

إذا كان التابع f معرف على مجال من الشكل $]a, +\infty[$ أو $]-\infty, a[$ عندها $\Leftarrow$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$

ماذا تعني النهاية غير المنتهية عند $+\infty$؟

هذا يعني أن قيم $f(x)$ تكون أكبر من أي قيمة حقيقية M إذا كانت x أكبر من قيمة A وهذا يُكافئ :

$$x > A \Rightarrow f(x) > M$$

وينطبق الكلام نفسه عند $-\infty$:

$$x < A \Rightarrow f(x) < m$$

تذكر :

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^n = \begin{cases} (+\infty)^n = +\infty \\ (-\infty)^n = \begin{cases} -\infty : n = 2k+1 \\ +\infty : n = 2k \end{cases} \end{cases}$$

مثال : ليكن التابع f المعرف على $]-1,+\infty[$ وفق : $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$ أوجد عدداً حقيقياً A بحيث إذا كان $x > A \Leftarrow f(x) \in]2.9,3.1[$.

الحل : مركز المجال المُعطى هو 3 ونصف قطره هو 0.1

$$\Rightarrow |f(x) - 3| < 0.1 \Rightarrow$$

$$\left|\frac{3x-2}{x+1} - 3\right| < 0.1 \Rightarrow \left|\frac{3x-2-3x-3}{x+1}\right| < 0.1$$

$$\Rightarrow \left|\frac{-5}{x+1}\right| < 0.1 \Rightarrow \frac{5}{x+1} < \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow x+1 > 50 \Rightarrow x > 49 \Rightarrow A = 49$$

2) نهاية التابع عند عدد حقيقي a :

1) نهاية منتهية عند a :

تقول عن نهاية f عند عدد حقيقي a أنها تُساوي ℓ إذا تحقق : $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$

ماذا تعني النهاية المنتهية عند عدد حقيقي؟

تعني أنَّ مجموعة قيم f ستقع داخل مجال مركزه ℓ ونصف قطره ε وذلك عندما تقع x في مجال مركزه a ونصف قطره δ وهذا يُكافئ :

$$x \in]a-\delta, a+\delta[\Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

مثال 1 : تعيين مجال صفحة 27 :

نعلم أن نهاية التابع $f(x) = \sqrt{4x+1}$ عند $x = 2$ هو 3 ، عيّن مجال I يحقق الشرط : إذا كان x من المجال I كان $f(x) \in]2.99,3.01[$.

الحل : $2.99 < f(x) < 3.01 \Rightarrow$

$$2.99 < \sqrt{4x+1} < 3.01 \Rightarrow$$

$$(2.99)^2 < 4x+1 < (3.01)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{(2.99)^2-1}{4} < x < \frac{(3.01)^2-1}{4} \Rightarrow$$

$$1.985 < x < 2.015 \Rightarrow x \in]1.99,2.01[$$

مثال 2 تعيين مجال تدرب صفحة 42 :

أوجد نهاية f المعرف بالعلاقة $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$ عند 5 ثم أوجد مجالاً I مركزه 5 يحقق الشرط : إذا انتمى x إلى المجال I انتمى $f(x)$ إلى المجال $]3.95,4.05[$.

الحل : $3.95 < f(x) < 4.05 \Rightarrow$

$$3.95 < \frac{x+3}{x-3} < 4.05 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x+3}{x-3} < 4.05 \Rightarrow x+3 < 4.05x - 12.15$$

$$4.05x - x > 15.15 \Rightarrow 3.05x > 15.15$$

$$\Rightarrow \quad x > 4.97$$

من جهة أخرى

$$3.95 < \frac{x+3}{x-3} \quad \Rightarrow$$

$$-11.85 + 3.95x < x + 3 \quad \Rightarrow$$

$$2.95x < 14.85 \quad \Rightarrow \quad x < 5.03 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x \in]4.97,5.03[$$

2) نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي a :

نقول أن نهاية التابع f عند a هي $+\infty$ إذا تحقق :

$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ ويُفسر ذلك هندسياً بأن المستقيم $x = a$ هو مقارب شاقولي للخط البياني للتابع f .

ماذا تعني النهاية غير المنتهية للتابع عند عدد حقيقي a؟

تعني بأنه عندما تقترب x من a بقدر كافي $\propto$ فإن قيم التابع تتجاوز قيمة معينة M وهذا يُكافئ :

$$x \in]a-\propto, a+\propto[\quad \Rightarrow \quad f(x) > M$$

مثال تدرب 2 صفحة 42 :

أوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x) = \frac{5x-1}{(x-1)^2}$ عند 1 ثم عيِّن العدد $\propto$ الذي يحقق الشرط : إذا كان x من المجال $]1-\propto ,1+\propto[$ كان $f(x) > 10^3$.

الحل :

$$f(x) > 10^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{5x-1}{(x-1)^2} > 10^3 \quad \Rightarrow$$

بوضع $x - 1 = t \quad \Rightarrow x = t + 1$

$$\frac{5t+5-1}{t^2} > 10^3 \quad \Rightarrow \quad 10^3t^2 - 5t - 4 < 0$$

$$10^3t^2 - 5t - 4 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Delta = 25 + 16.10^3 = 16025 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 40\sqrt{10} = 126.58 \quad \Rightarrow$$

$$t_1 = \frac{5+126.58}{2.10^3} = 0.06 \, , t_2 = \frac{5-126.58}{2.10^3} = -0.06$$

$$x - 1 = 0.06 \quad \Rightarrow x = 1.06$$

$$x - 1 = -0.06 \quad \Rightarrow x = 0.94$$

$$\Rightarrow \quad x \in]0.94,1.06[\quad \Rightarrow \propto = 0.06$$

★ النهاية من اليمين:

عندما نكون أمام مجموعة تعريف من الشكل $]a,+\infty[$ وكان للتابع f نهاية ℓ منتهية أو غير منتهية عند a عندها نقول أن التابع يقبل نهاية من اليمين عند a ونكتب :

$$\lim_{x \overset{>}{\to} a} f(x) = \ell \; or \; \lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$$

★ النهاية من اليسار :

عندما نكون أمام مجموعة تعريف من الشكل $]-\infty, a[$ وكان للتابع f نهاية ℓ منتهية أو غير منتهية عند a عندها نقول أن التابع يقبل نهاية من اليسار عند a ونكتب :

$$\lim_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = \ell \; or \; \lim_{x\to a^-} f(x) = \ell$$

متى نلجأ إلى دراسة النهاية من اليمين أو اليسار ؟

1) عندما نجد أنفسنا أمام تابع ليس له نهاية عند a لا حقيقية ولا نهائية .

2) في حالة وجود قيمة مطلقة وبعد التخلص منها .

3) إذا كانت قاعدة ربط التابع f يتغير عند a .

أمثلة :

-1 $a=0$ $f(x)=\frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \,,\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

-2 $f(x)=\frac{|x|}{x}$

$$f(x)=\begin{cases} +1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \,,\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = +1$$

-3 $$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x\in]-\infty,0[\\ 2x & x\in[0,+\infty[\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \,,\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

❖ تتمات في النهاية عند a :

1) إذا كان المقام من الدرجة الأولى بالنسبة لـ x

$$f(x)=\frac{k}{ax+b}$$

ندرس إشارة المقام :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$a>0$	$-$	0	$+$
$a<0$	$+$	0	$-$

نأخذ النهاية من اليمين ومن اليسار ، الإشارة تؤخذ من الجدول ، الناتج حسب إشارة k مع الإشارة في المقام .

2) *المقام من الدرجة الثانية بالنسبة لـ x والمميز أكبر من الصفر*

$f(x)=\frac{k}{ax^2+bx+c}$ *النهاية عند جذور المقام :*

$f(x)=\frac{k}{a(x-a_1)(x-a_2)}$ *ندرس إشارة المقام لتحديد إشارة المقام عند النهاية :*

x	$-\infty$		a_1		a_2		$+\infty$
$a>0$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$a<0$		$-$	0	$+$	0	$-$	

النهاية تعتمد على إشارتي المقام و k .

ملاحظة : *في الحالتين السابقتين ستكون النهاية غير منتهية $\pm\infty$ تبعاً للإشارات .*

3) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ *في حالتين :*

* a *ليست طرفاً في مجموعة التعريف .*

* f *لا يُغير قاعدة ربطه عند a .*

❖ قواعد هامة :

(1 $\lim_{x\to\pm\infty} k = k$

(2 $\lim kf(x) = k\lim f(x)$

(3 $\lim|f(x)|$

تتخلص من القيمة المطلقة حسب إشارة f ثم نأخذ النهاية .

(4 أثناء دراسة تابع ندرس النهايات عند أطراف المجالات

المفتوحة : $D_f =]-\infty, a[\cup]a, +\infty[$

يجب حساب النهايات كما يلي :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\ ,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x)\ ,\quad \lim_{x\to a^-} f(x)$$

(5 إذا قبل التابع نهاية فهذه النهاية وحيدة .

(6 في بعض الأحيان لا يقبل التابع نهاية :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sin x\ ,\quad \lim_{x\to\pm\infty} \cos x$$

$$\lim_{x\to+\infty} (-1)^x$$

❖ عمليات على النهايات :

★ نهاية مجموع تابعين :

f	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	a	$+\infty$
g	$+\infty$	a	$-\infty$	a	à	$-\infty$
$f+g$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	a + à	ع.ت

★ نهاية جداء تابعين :

f	∞	∞	a	∞
g	∞	à $\neq 0$	à	0
$f.g$	الإشارة ∞	الإشارة ∞	a.à	ع.ت

★ نهاية حاصل القسمة :

f	∞	$a \neq 0$	$a \neq 0$	∞
g	à $\neq 0$	∞	à $\neq 0$	∞
$\frac{f}{g}$	الإشارة ∞	الإشارة 0	a/à	ع.ت

f	∞	0	à $\neq 0$	0	0
g	0	∞	0	à $\neq 0$	0
$\frac{f}{g}$	الإشارة ∞	الإشارة 0	الإشارة ∞	0	ع. ت

❖ حالات عدم التعيين :

$$\frac{0}{0} \;,\; \frac{\infty}{\infty} \;,\; 0.\infty \;,\; +\infty-\infty$$

★ الحالة الأولى $\frac{0}{0}$ عند $a \in \mathcal{R}$:

يجب إظهار $(x-a)$ في كل من البسط والمقام ، ويتم الإختصار عليها ويتم ذلك :

* التحليل المباشر للبسط والمقام .
* الضرب والقسمة على المرافق .

أمثلة :

1) $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$ $\qquad a = 1$

$\lim\limits_{x\to1} f(x) = \frac{0}{0}$ ع.ت

$f(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)} = x^2 + x + 1$

$\Longrightarrow \quad \lim\limits_{x\to1} f(x) = 3$

2) $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ $\qquad a = 0$

$\lim\limits_{x\to0} f(x) = \frac{0}{0}$ ع.ت

$f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} . \frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{x+4-4}{x.(\sqrt{x+4}+2)} \Longrightarrow$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to0} f(x) = \frac{1}{4}$

ملاحظة 1 : قد نضطر أحياناً إلى الضرب والقسمة على مرافقي البسط والمقام ثم الاختصار .

مثال :

$f(x) = \frac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3}$ $\qquad a = 2$

$\lim\limits_{x\to2} f(x) = \frac{0}{0}$ ع.ت

$f(x) =$

$\frac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3} . \frac{\sqrt{2x+5}+3}{2+\sqrt{3x-2}} . \frac{2+\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}+3}$

$= \frac{(4-3x+2)(\sqrt{2x+5}+3)}{(2x+5-9)(2+\sqrt{3x-2})}$

$= \frac{(6-3x)(\sqrt{2x+5}+3)}{(2x-4)(2+\sqrt{3x-2})}$

$= \frac{-3(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)}{2(x-2)(2+\sqrt{3x-2})}$

$= \frac{-3(\sqrt{2x+5}+3)}{2(2+\sqrt{3x-2})} \Longrightarrow$

$\lim\limits_{x\to2} f(x) = \frac{-3(6)}{2(4)} = -\frac{9}{4}$

ملاحظة 2 : يُمكن إزالة عدم التعيين من النمط $\frac{0}{0}$ باستخدام تعريف العدد المشتق .

تذكر : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\acute{f}(a)$

فإذا صادفنا تابع من الشاكل $g(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

وطُلب إيجاد نهايته عند a نفرض التابع f ونتأكد أنه اشتقاقي عند a

ثم نكتب : $\lim_{x\to a}g(x)=\acute{f}(a)$

مثال :

$$g(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}\qquad a=1$$

$\lim_{x\to 1}g(x)=\frac{0}{0}$ ع.ت

نفرض $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ وهو معرف واشتقاقي عند 1

$$\acute{f}(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Rightarrow f(1)=\sqrt{2}\,,\ \acute{f}(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow\quad g(x)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 1}g(x)=\acute{f}(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

★ **الحالة الثانية $\frac{\infty}{\infty}$ عند $\pm\infty$:**

1– البسط والمقام كثيري حدود من الشكل :

$$f(x)=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}$$

نأخذ نهاية الحد المسيطر من البسط على الحد المسيطر من المقام ونوجد النهاية بعد الاختصار .

مثال 1 :

$$f(x)=\frac{x^2+3x-2}{x^3-2x^2+5}\qquad a=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

إذا كانت درجة البسط أصغر من درجة المقام فالنهاية صفر .

مثال 2 :

$$f(x)=\frac{2x^2-2x+1}{-3x^2+1}\qquad a=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{-3x^2}=-\frac{2}{3}$$

فإذا كانت درجة البسط تُساوي درجة المقام فالنهاية هي أمثال الحد المسيطر في البسط على أمثال الحد المسيطر في المقام .

مثال 3 :

$$f(x)=\frac{-3x^3+2x^2-3x+1}{2x^2+5x-6}\qquad a=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^3}{2x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{2}x=-\infty$$

فإذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام فالنهاية $\pm\infty$ حسب الإشارات .

2– إذا احتوى الكسر على تابع جذري :

* طريقة إخراج عامل مشترك :

نخرج الحد الأكثر تأثيراً في البسط والمقام ثم نختزل

(الحد الأكثر تأثيراً هو الحد الأعلى درجة)

انتبه: $\begin{cases} |x| = x & x \to +\infty \\ |x| = -x & x \to -\infty \end{cases}$

مثال 1 :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} \qquad a = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}{x} = \frac{\sqrt{1+\frac{4}{x}}-\frac{2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} = 0$$

مثال 2 :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}+3}{x+1} \qquad a = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{+\infty}{-\infty}$$

$$f(x) = \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+3}{x(1+\frac{1}{x})} \; : |x| = -x \quad x \to -\infty$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) = \frac{-x.\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{3}{x}\right)}{x(1+\frac{1}{x})}$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{3}{x}}{(1+\frac{1}{x})} \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$$

* طريقة الضرب والقسمة على المرافق :

تُستخدم عندما يكون جذر الحد المسيطر داخل الجذر مساوياً للحد الموجود بجانب الجذر .

مثال :

$$f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+1}-2x}{x-3} \qquad a = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{+\infty-\infty}{+\infty}$$

بملاحظة أن $\sqrt{4x^2} = 2x \Longleftarrow$ نضرب ونقسم على مرافق البسط $\Longleftarrow$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{4x^2+1}-2x)(\sqrt{4x^2+1}+2x)}{(x-3)(\sqrt{4x^2+1}-2x)} =$$

$$= \frac{4x^2+1-4x^2}{(x-3)(\sqrt{4x^2+1}-2x)} = \frac{1}{(x-3)(\sqrt{4x^2+1}-2x)}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

★ الحالة الثالثة $+\infty - \infty$ عند $\pm\infty$:

نميز حالتين :

* **تابع كثير حدود** : عندها نأخذ فقط نهاية الحد المسيطر

مثال : $f(x) = x^3 - 3x^2 \quad a = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

* **تابع يحوي جذر :** وهنا نميز حالتين :

A) جذر الحد المسيطر داخل الجذر $=$ الحد بجانب الجذر

$$\sqrt{a^2x^2+bx+c}-ax$$

وفي هذه الحالة نستخدم الضرب والقسمة على المرافق

مثال :

$$f(x)=\sqrt{9x^2+3}-3x \quad a=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty-\infty$$

$$f(x)=\frac{(\sqrt{9x^2+3}-3x)(\sqrt{9x^2+3}+3x)}{\sqrt{9x^2+3}+3x}=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{9x^2+3}+3x} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

ملاحظة : في بعض الحالات وبعد الضرب بالمرافق يلزم العودة إلى الحالة $\frac{\infty}{\infty}$ أي إخراج الحد الأكثر تأثيراً في البسط والمقام ثم الاختصار .

مثال :

$$f(x)=\sqrt{x^2+x}+x \quad a=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty-\infty$$

نضرب ونقسم على المرافق :

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+x}-x)}{\sqrt{x^2+x}-x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}$$

$$=\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}=\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}$$

$$=\frac{x}{-x(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)}=-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{1}{2}$$

B) جذر الحد المسيطر داخل الجذر $\neq$ الحد بجانب الجذر

وفي هذه الحالة نقوم بإخراج الحد المسيطر كعامل مشترك .

مثال :

$$f(x)=\sqrt{2x^2-1}-x \quad a=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty-\infty$$

$$f(x)=|x|\sqrt{2-\frac{1}{x}}-x=x\sqrt{2-\frac{1}{x}}-x$$

$$=x\left(\sqrt{2-\frac{1}{x}}-1\right) \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(\sqrt{2}-1)=+\infty$$

☆ **الحالة الرابعة $0.\infty$:**

تُحل بإحدى الطرق السابقة

❖ نهاية التوابع المثلثية :

★ عند عدد حقيقي a :

نهايات شهيرة :

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan ax}{ax}$
$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\tan x=+\infty$	$\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}}\tan x=-\infty$
$\lim\limits_{x\to 0^-}\sin x=0^-$	$\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x=0^+$
$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\cos x=0^-$	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\cos x=0^+$

علاقات هامة وضرورية :

1)	$\cos^2 x+\sin^2 x=1$
2)	$1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$
3)	$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$
4)	$\sin x=2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}$
5)	$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$
6)	$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$
7)	$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$

إزالة عدم التعيين من النمط $\frac{0}{0}$ عند وجود تابع مثلثي :

1− استعمال تعريف العدد المشتق : يُمكن إزالة عدم التعيين مثل ما تعلمناه باستخدام تعريف العدد المشتق .

مثال:

أوجد نهاية $f(x)=\frac{\tan x-\sqrt{3}}{x-\frac{\pi}{3}}$ عند $x=\frac{\pi}{3}$

نأخذ التابع $g(x)=\tan x$ وهو معرف واشتقاقي عند

$x=\frac{\pi}{3}$ و $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ $\Leftarrow$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}=g'\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$g'(x)=1+\tan^2 x\Rightarrow g'\left(\frac{\pi}{3}\right)=1+\left(\sqrt{3}\right)^2=4$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x)=4$$

2− استعمال تعريف العدد المشتق مرتين :

مثال :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin 6x}{2\cos x-\sqrt{3}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin 6x}{2\cos x-\sqrt{3}}=\frac{0}{0}$$

نفرض

$$\begin{cases} g(x)=\sin 6x \quad ,g\left(\frac{\pi}{6}\right)=0 \\ h(x)=2\cos x \quad ,h\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{\frac{\sin 6x}{x-\frac{\pi}{6}}}{\frac{2\cos x-\sqrt{3}}{x-\frac{\pi}{6}}}=\frac{\frac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}}{\frac{h(x)-h\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin 6x}{2\cos x-\sqrt{3}}=\frac{g'\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h'\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{6\cos 6\frac{\pi}{6}}{-2\sin\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{-6}{-\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

3− استخدام العلاقات المثلثية للعودة إلى إحدى النهايات الشهيرة

مثال : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}=\frac{0}{0}$$

$$\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}=\frac{\sin 2x}{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}}=\frac{2x.\frac{\sin 2x}{2x}}{\sqrt{2}.\frac{x}{2}.\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}=\frac{4}{\sqrt{2}}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}\Longrightarrow\lim_{x\to0^+}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

عند $\pm\infty$:

نضطر عند حساب نهاية التوابع المثلثية غير المنتهية إلى :

- تغيير المتحول .
- استخدام مبرهنة الإحاطة والمقارنة .

❖ مبرهنة الإحاطة :

* إذا كان f,g,h ثلاثة توابع معرفة على مجال I من النمط $]b,+\infty[$ وتحقق المتراجحة :

$g(x)\le f(x)\le h(x)$ وبفرض أن :

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}h(x)=\ell\ \Longrightarrow$$
$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty}f(x)=\ell}$$

ملاحظة 1 : تبقى هذه المبرهنة صحيحة بجالة $-\infty$. ومن أجل أي عدد حقيقي a

ملاحظة 2 : تُستخدم مبرهنة الإحاطة على التوابع التي تحوي $\sin ax$, $\cos ax$ بالاستفادة من :

$-1\le\sin ax\le+1$	$-1\le\cos ax\le+1$

مثال : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}$

عند كل $x\in\,]0,+\infty[$ فإن : $-1\le\sin x\le+1$

$$\Longrightarrow\ \frac{-1}{x}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{1}{x}$$

وبما أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ فإنّ :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

* إذا كان f,g تابعين معرفين على مجال $I=\,]b,+\infty[$ وبفرض أنّه عند كل x من I تتحقق :

$|f(x)-\ell|\le g(x)$ ولنفرض أنّ :

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ عندئذٍ :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\ell$$

* إذا كان f,g تابعين معرفين على مجال $I=\,]b,+\infty[$

A) إذا كان $f(x)\ge g(x)$ عند كل x من I

وكان $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

كان $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

B) إذا كان $f(x) \le g(x)$ عند كل x من I

وكان $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

مثال :

احسب نهاية $f(x) = x + \cos x$ عند $+\infty$

$\cos x \ge -1 \implies x + \cos x \ge x - 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty \implies \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ملاحظة : تبقى المبرهنتين السابقتين صحيحتين عند $-\infty$ وعند كل عدد حقيقي a .

مثال :

احسب نهاية $f(x) = x + \cos x$ عند $-\infty$

$\cos x \le +1 \implies x + \cos x \le x + 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (x+1) = -\infty \implies \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

مثال :

أوجد نهاية $f(x) = x.\sin\frac{1}{x}$ عند الصفر .

طريقة 1) $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1$

$|f(x) - 0| = |x|.\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le |x|$

وبما أنَّ $\lim\limits_{x\to0}|x| = 0$ فإنَّ $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$

طريقة 2) $-1 \le \sin\frac{1}{x} \le +1$

$-x \le x.\sin\frac{1}{x} \le +x$

بما أنَّ : $\lim\limits_{x\to0} -x = \lim\limits_{x\to0} +x = 0$

$\implies \lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$

من المعلومات التي قد تقدمها مبرهنة الإحاطة :

1) معرفة القيم التقريبية لتابع عند قيم المتحول التي هي في غاية الكبر.

2) معرفة سلوك الفرع اللانهائي للخط البياني للتابع .

مثال : ادرس سلوك التابع $f(x) = \frac{x}{2} + 2\sin x$ في جوار $+\infty$ ، ماذا يمكن أن نعرف أكثر عن سلوك التابع عند $+\infty$.

الحل : مهما يكن $x \in \mathcal{R}$:

$-1 \le \sin\frac{1}{x} \le +1 \implies$

$\frac{x}{2} - 2 \le \frac{x}{2} + 2\sin x \le 2 + \frac{x}{2}$

بما أنَّ :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{2} - 2\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 + \frac{x}{2}\right) = +\infty$

فإنَّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

وذلك حسب المبرهنة (1) من مبرهنة الإحاطة .

ويمكن أن نعلم أنَّ :

* إنَّ $\frac{x}{2}$ هي قيمة تقريبية للعدد $f(x)$ بخطأ يُساوي 2 زيادة أو نقصان ، فمثلاً :

$$\frac{10\,000}{2} - 2 \le f(10\,000) \le \frac{10\,000}{2} + 2$$

$$4\,998 \le f(10\,000) \le 5\,002$$

* الخط لبياني للتابع f محدود بالمستقيمين :

$$\begin{cases} y = \frac{x}{2} - 2 \\ y = \frac{x}{2} + 2 \end{cases}$$

❖ نهاية تابع مركب :

بفرض لدينا ثلاث توابع f, g, h :

$$f(x) = goh(x) = g(h(x))$$

$$\lim_{x \to a} h(x) = b \ \& \ \lim_{t \to b} g(t) = c$$

عندئذٍ : $\lim_{x \to a} f(x) = c$.

أي أننا نوجد نهاية h عند a ولتكن تساوي b وعندها نبحث عن نهاية g عند b ولتكن c .

مثال :

أوجد نهاية التابع $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x+2}}$ عند $+\infty$

الحل :

بفرض $g(x) = \frac{2x+1}{x+2} \quad \Leftarrow \quad f(x) = \sqrt{g(x)}$

$$\Leftarrow \lim_{x \to +\infty} g(x) = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sqrt{2}$$

❖ تابع الجزء الصحيح E :

نسمي تابع الجزء الصحيح التابع المعرف على $\mathcal{R}$ والذي يحقق :

$n \le x \le n+1 \ : \ E(x) = n$ حيث n هو الجزء الصحيح للعدد x.

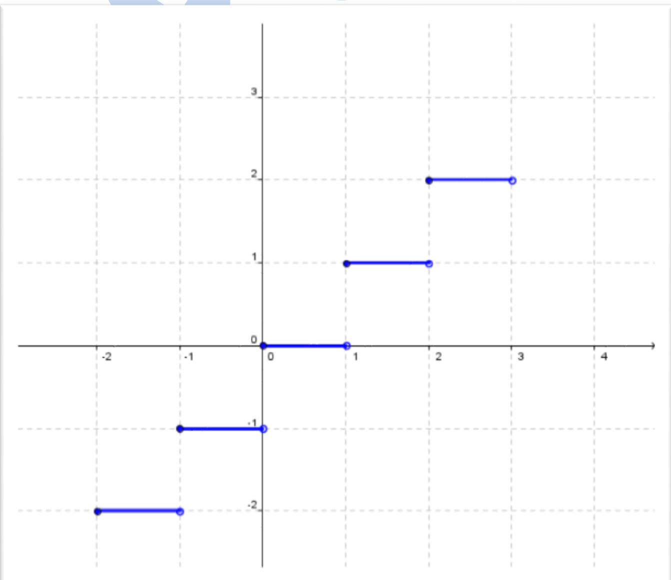
أمثلة : $E(2.3) = 2 \ , \ E(4) = 4$

$$E(-3.5) = -4 \ , \ E(\pi) = 3$$

عبارة $E(x)$ في المجال $[2,3[$:

$$E(x) = \begin{cases} -2 & x \in [-2,-1[\\ -1 & x \in [-1,0[\\ 0 & x \in [0,1[\\ 1 & x \in [1,2[\\ 2 & x \in [2,3[\end{cases}$$

الرسم :



ملاحظة : تابع الجزء الصحيح مستمر على كل من المجالات :

$$[-2,-1[\ ,[-1,0[\ ,[0,1[\ ,[1,2[,[2,3[$$

لكنه غير مستمر على $\mathcal{R}$.

نهاية $\frac{E(x)}{x}$ عند $+\infty$:

$E(x)$ هو العدد الصحيح الوحيد الذي يحقق :

$$\Leftarrow \quad x-1 \le E(x) \le x$$

$$\Leftarrow \quad \frac{x-1}{x} \le \frac{E(x)}{x} \le 1$$

بما أنَّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x} = 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 \Leftarrow$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{E(x)}{x} = 1$$

❖ المستقيم المقارب المائل :

نقول عن المستقيم $\Delta: y = ax+b$ بأنه مقارب مائل للخط البياني للتابع f إذا تحقق :

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x)-(ax+b)] = 0$$

ويُدرس الوضع النسبي للخط البياني C للتابع f مع المستقيم المقارب المائل بدراسة إشارة الفرق $f(x)-(ax+b)$

فإذا كان :

★ $f(x)-(ax+b) > 0$ كان C فوق Δ .

★ $f(x)-(ax+b) < 0$ كان C تحت Δ .

إيجاد المستقيم المقارب المائل :

كل تابع يكتب بالشكل $f(x) = ax+b+Q(x)$ ويحقق $\lim\limits_{x\to\infty} Q(x) = 0$ تقبل المستقيم $y = ax+b$ مقارب مائل في جوار ∞ وسنأخذ بعض الحالات الخاصة :

1) التوابع الكسرية التي درجة البسط فيها أكبر من درجة المقام بدرجة واحدة : بقسمة البسط على المقام نحصل على تابع من الشكل : $f(x) = ax+b+\frac{r(x)}{Q(x)}$

حيث $\deg r(x) < \deg Q(x)$ وعندها :

$y = ax+b$ هو المقارب المائل في جوار ∞ .

2) التابع الجذري من الشكل $f(x) =$ $\sqrt{ax^2 + bx + c}$

طريقة (1) نأخذ جذر الحد المسيطر في كثير الحدود

$ax^2 + bx + c$ وهو ax^2 فيكون مساوياً $\sqrt{a}x$

نأخذ النهاية التالية : $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - \sqrt{a}x] = \grave{b}$

$\Leftarrow y = \sqrt{a}x + \grave{b}$ هو المقارب المائل في جوار $\pm\infty$

طريقة 2) بإتمام كثير الحدود $ax^2 + bx + c$ إلى مربع

كامل نحصل على : $f(x) = \sqrt{a(x-A)^2 + B}$

عندها :

$y = \left|\sqrt{a}(x - A)\right|$ هو مقارب مائل لـ C وندرس إشارته

حسب الجوار عند $(+\infty)$ أو $(-\infty)$.

في الحالة العامة : ليقبل C مقارب مائل في جوار ∞ يجب أن

يُحقق الشرطين :

- $a \in \mathcal{R}^*$ $\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = a$
- $b \in \mathcal{R}$ $\quad \lim_{x\to+\infty}[f(x) - ax] = b$

ملاحظة هامة :

إن اختلال أحد الشرطين السابقين ينفي وجود المقارب المائل

للخط البياني ولا يكفي تحقق أحدهما دون الآخر .

أمثلة :

1- بيِّن إذا كان للتابع f المعرف بالعلاقة

$f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x-1}$ يقبل مقارب مائل بجوار $+\infty$

الحل : بقسمة البسط على المقام :

$$f(x) = x - 2 - \frac{1}{x-1}$$

نأخذ $y = x - 2$ ونلاحظ أنَّ :

$$f(x) - (x-2) = -\frac{1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (x-2)] = 0$$

أي أنَّ $y = x - 2$ هو مقارب مائل في جوار $+\infty$.

2- ليكن C الخط البياني للتابع :

$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ استنتج وجود

مقارب مائل في جوار $\pm\infty$.

الحل :

طريقة (1) : في جوار $+\infty$ يكون: $\sqrt{x^2} = |x| = x$

ع.ت $\quad \lim_{x\to+\infty}[f(x) - x] = +\infty - \infty$

نضرب ونقسم على المرافق :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x+5-x^2}{\sqrt{x^2+4x+5}+x} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(4+\frac{5}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x}}+1)}$$

$$= \frac{4}{2} = 2 \Longrightarrow$$

$y = x + 2$ هو مقارب مائل في جوار $+\infty$ ويمكن

التأكد بأخذ النهاية

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (x+2)] = +\infty - \infty$$

بالضرب والقسمة على المرافق تحقق أن النهاية السابقة تساوي

(0) .

طريقة (2) $\quad x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1$

$$\Leftarrow \quad f(x) = \sqrt{(x+2)^2 + 1}$$

في جوار $+\infty$ يكون: $\sqrt{(x+2)^2} =$

$$y = x + 2 \Leftarrow |x+2| = x + 2$$

مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$.

طريقة (3) الطريقة العامة :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2+4x+5}}{x} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x}}}{x} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x}} = 1$$

وذلك كما وجدنا في الطريقة $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - x] = 2$

(1)

إذاً $y = x + 2$ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$.

❖ الاستمرار

* يكون التابع f مستمراً عند نقطة a من مجموعة تعريف التابع D_f إذا تحقق الشرط :

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

ملاحظات حول الاستمرار :

- لا معنى لدراسة الاستمرار إذا كانت $D_f \not\ni a$
- إذا كانت مجموعة التعريف من النمط $[a, +\infty[$ عندها يكون التابع مستمراً عند a من اليمين هذا يُكافئ : $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$
- إذا كانت مجموعة التعريف من النمط $]-\infty, a]$ عندها يكون التابع مستمراً عند a من اليسار هذا يُكافئ : $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$
- إذا كان لدينا تابعين مستمرين عند نقطة a عندئذٍ مجموعهما وجداءهما وتركيبهما وحاصل قسمتهما "بشرط أن يكون حاصل القسمة معرفاً عند a" يكون تابعاً مستمراً عند a .
- يكون التابع مستمراً على مجال إذا كان مستمراً عند كل نقطة من هذا المجال .
- إذا كان التابع f اشتقاقي عند نقطة a فهو مستمراً عندها .

- إذا كان التابع f اشتقاقياً على مجال I فهو مستمر عليه .

★ إذا كان التابع مستمر عند a أو على مجال I ليس بالضرورة أن يكون اشتقاقي عند a أو على المجال I

★ **التوابع المرجعية المستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها :**

- توابع كثيرات الحدود و sin و cos على $\mathcal{R}$.
- حاصل قسمة كثيري حدود على كل مجال من مجموعة التعريف .
- تابع الجذر التربيعي $\sqrt{x}$ على $[0,+\infty[$.

★ **التفسير الهندسي للاستمرارية :**

f تابع مستمر على مجال I $\Leftrightarrow$ يُمكن رسم C على المجال I دون رفع القلم .

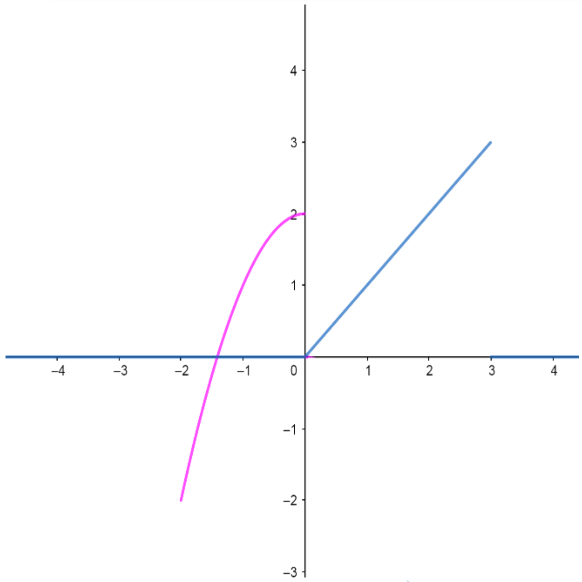
مثال لتابع غير مستمر :

ليكن التابع f المعرف بالشكل التالي :

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+2 & x\in[-2,0[\\ x & x\in[0,+3]\end{cases}$$

والمطلوب : 1− ارسم الخط البياني للتابع في المجال $[-2,+3]$

2− ادرس استمرارية التابع عند الصفر .



$$\lim_{x\to0^-} f(x)=2 \quad , \quad f(0)=0$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)\neq f(0)$$

فالتابع غير مستمر عند الصفر ، وهذا واضح من الخط البياني للتابع

★ **تابع الجزء الصحيح والاستمرار :**

ليكن f التابع المعرف على $]-1,2[$ بالشكل :

$$f(x)=xE(x)+1$$

حيث $E(x)$ هو تابع الجزء الصحيح ، والمطلوب :

1− عيِّن عبارة $f(x)$ في كل من المجالات :

$[-1,0[\ ,\ [0,1[\ ,\ [1,2[$

2− ارسم الخط البياني C .

3− هل التابع مستمر على المجال $]-1,1[$ والمجال $[-1,2[$

الحل :

$$\Rightarrow E(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-1,0[\\ 0 & x \in [0,1[\\ 1 & x \in [1,2[\end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & x \in [-1,0[\\ +1 & x \in [0,1[\\ x+1 & x \in [1,2[\end{cases}$$

التابع مستمر على $]-1,1[$ وغير مستمر على $[-1,2[$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1\ ,\ f(1) = 2 \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq f(1)$$