الرياضيات

الثالث الثانوي

الفرع العلمي

الاستاذ: علي أحمد

M:0995534775

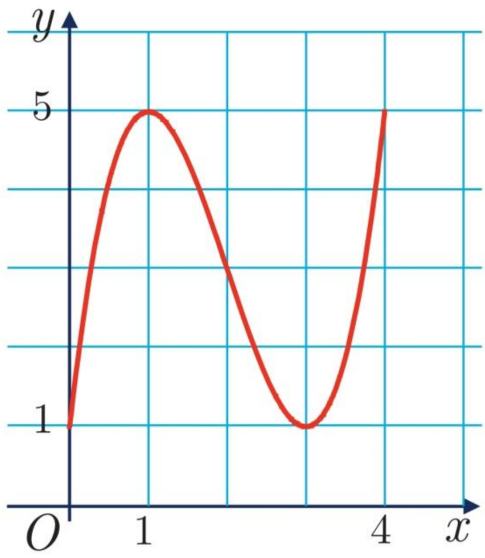
النهايات والاستمرار

الحل الهندسي للمعادلة $f(x) = k$

في كثير من الأحيان تواجهنا كثيرات حدود من الدرجة الثانية قد يصعب حلها جبريا وقد يستحيل حلها في الحالة العامة لذالك نلجأ إلى الحل الهندسي فما هو الحل الهندسي؟؟؟ فمثلا في هذه المعادلة نبحث عن وجود نقاط مشتركة بين الخط البياني C_F للتابع F والمستقيم d الذي معادلته y=k إي نرسم الخط البياني C_F للتابع f

ونرسم المستقيم الذي معادلته y=k فيكون الحل هو فواصل النقاط المشتركة بينهما

مثال: في الشكل المجاور الخط البياني لتابع f المعرف على المجال [0,4] فإنه أياً كان العدد الحقيقي k المحصور بين العددين 1 و 5 كان للمعادلة $f(x) = K$ حلول



وبما أن الشكل عبارة عن قطعة واحدة فالتابع مستمر عل المجال المطلوب

تابع الجزء الصحيح

أيا يكن العدد الحقيقي

x يوجد عدد صحيح وحيد

لنرمز له بالرمز n يحقق:

$n \leq x < n+1$ نسمي

العدد n الجزء الصحيح

للعدد الحقيقي n ونرمز له

بالرمز E(x)

مثال: E(π)=3 لأن

$3 \leq \pi < 3+1$

هذا يعني أن n=3 و x=π

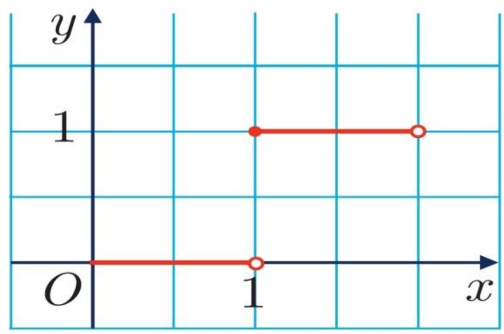
مثال ثاني: للتوضيح الفكرة

بشكل ممتاز في الشكل

المجاور هو خط البياني

لتابع معرف عل

المجال[0,2]



من الشكل المجاور نلاحظ

$\forall x \in [0,1[\Rightarrow E(x) = 0$

$\forall x \in [1,2[\Rightarrow E(x) = 1$

حيث *E(x)* تابع الجزء

الصحيح

E(1)=1 ⟵ هي ليست

نهاية للتابع

ونلاحظ أن الخط البياني

للتابع عل هذا المجال

[0,2[يتألف من قطعتين

منفصلتين إي أن التابع غير

مستمر عل المجال[0,2[

لان شرط استمرار التابع

يجب أن يتألف من قطعة

واحدة فقط

صورة مجال

صورة مجال I وفق تابع f

هي مجموعة الأعداد f(x)

عندما تتحول x في I آخذة

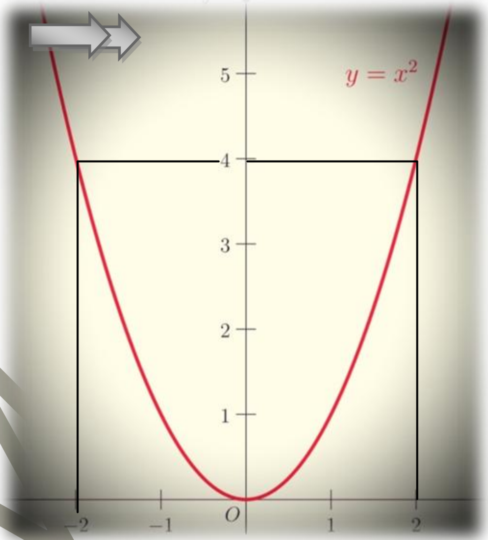
جميع القيم فيه ونرمز له

بالرمز f(I)

نهاية تابع عند اللانهاية

مثال: ليكن لدينا

التابع $f(x) = x^2$ المعرف على R وخطه البياني بالشكل التالي:



$f([-2,+2])$

$=f([-2,0]) \cup f(]0,+2])$

$=[0,4] \cup]0,4[$

$=[0,4]$

النهايات هي من المفاهيم الأساسية في علم التفاضل و التكامل الذي نشأ لوصف الكيفية التي تتغير فيها الأشياء وتستخدم النهاية لمعرفة سلوك الاقتران عندما تقترب قيم المتغير المستقل x من عدد معين

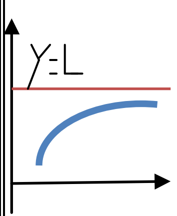
تعريف: نقول إن نهاية f عند $\pm\infty$ هي L إذا كانت قيم $f(x)$ تصبح قريبة من القيم ℓ أو تتجمع حول ℓ

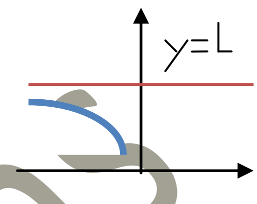
بمعنى ثاني: عندما تقترب قيمة x من $\pm\infty$ دون أن تساويه فإن التابع $f(x)$ تقترب قيمته من العدد ℓ دون أن تساويها:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell$$

النهاية تأخذ عند أطراف المجال المفتوحة فقط

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in R$$

كلما بدأت x تتزايد أكثر فأكثر فإن $f(x)$ يقترب من العدد ℓ .	نقول عن $y=\ell$ مستقيم مقارب أفقي عند $+\infty$ للمنحنى C_f	

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \in R$	
كلما بدأت x تتناقص أكثر فأكثر فإن $f(x)$ يقترب من العدد ℓ	نقول عن $y=\ell$ مستقيم مقارب أفقي عند $-\infty$ للمنحني C_f
	

نهاية تابع عند عدد حقيقي

نقول أن نهاية f عند a هي $\pm\infty$ إذا كانت قيم $f(x)$ تقترب من $\pm\infty$

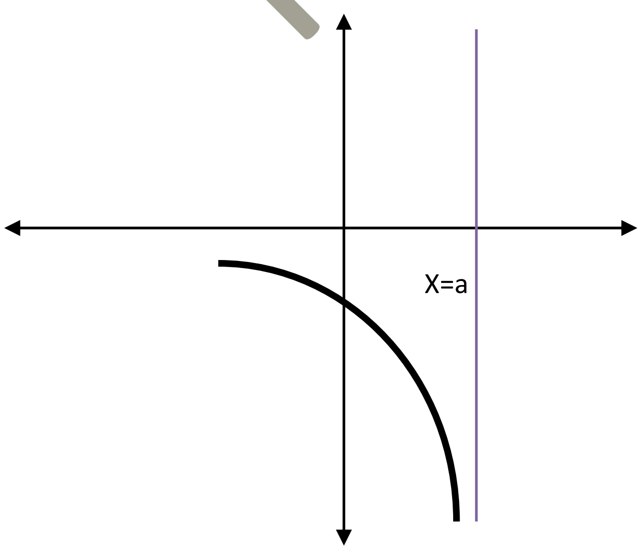
بمعنى ثاني: عندما تقترب قيمة x من العدد a دون أن تساويه فإن التابع $f(x)$ تقترب قيمته من $\pm\infty$:

$$lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$$

عندئذ نقول أن X=a مقارب شاقولي(عامودي) للمنحني C_f.

حالات المقارب الشاقولي بالتفصيل:

$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$	$X=a$ مقارب شاقولي ل cf والخط $c1$ يقع عل يمين المقارب $x=a$ باتجاه oy^- ويوازي yy'
$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$	$X=a$ مقارب شاقولي ل cf والخط $c2$ يقع على يسار المقارب $x=a$ باتجاه oy^- ويوازي yy'
$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$	$X=a$ مقارب شاقولي ل cf والخط $c3$ يقع على يمين المقارب $x=a$ باتجاه oy^+ ويوازي yy'
$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$	$X=a$ مقارب شاقولي ل cf والخط $c4$ يقع على يسار المقارب $x=a$ باتجاه oy^+ ويوازي yy'



ملاحظة هامة في تعين المجال:

عندما يطلب منا تعيين مجال

$[A,B]$ أو $]A,B[$ حيث $B>A$

فيجب أن تكون المعطيات التالية جاهزة:

طول المجال $= B-A$

مركز المجال $\ell = \dfrac{A+B}{2}$

نصف قطر المجال $£ = \dfrac{B-A}{2}$

الوضع النسبي للمقارب الأفقي

ليكن لدينا التابع $f(x)$ وخطه البياني C_f ومقاربه الأفقي ▲ الذي معادلته $y=a \in R$ نتبع الخطوات التالية:

1- نحسب المقدار $g(x)$

$g(x)=f(x) - y_\Delta$

2- ندرس أشارة $f(x)-y_\Delta$ على مجموعة تعريف التابع $f(x)$

يوجد ثلاث حالات:

$f(x)-y_\Delta>0$	الخط C يقع فوق المقارب ▲
$f(x)-y_\Delta<0$	الخط C يقع تحت المقارب ▲
$f(x)-y_\Delta=0$	عند النقطة $X=X_0$ فالخط C يشترك مع المقارب ▲ بالنقطة Q الذي إحداثيتها $(X_0,f(X_0))$

المقارب المائل

ليكن f تابع معرف عل مجال من النمط البياني للتابع f في معلم معطى وكذلك النهاية للدالة المطلوبة $\lim_{x \to a}$

ليكن ▲ المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ نقول إن المستقيم ▲ مقارب للخط البياني C_f في جوار $+\infty$، إذا وفقط إذا كان:

$$lim_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$$

وبنفس النمط عند $-\infty$

ملاحظة: دراسة الوضع النسبي للمقارب المائل هو ذاته للمقارب الأفقي

العمليات على النهايات

f,g دالتان وليكن a يمثل عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$

المبرهنات التالية تقبل دون برهان:

- **نهاية مجموع دالتين:**

$\lim_{x\to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

- **نهاية جداء دالتين:**

$\lim_{x\to a} f(x)$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a}(f(x)\times g(x))$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت

- **نهاية حاصل قسمة دالتين:**

$l'\neq 0$

$\lim_{x\to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت

$l'=0$

$\lim_{x\to a} f(x)$	$l<0$	$l>0$	$-\infty$	$+\infty$	$l<0$	$l>0$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{x\to a} g(x)$	0 و g سالبة				0 و g موجبة				0
$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت

صيغ عدم التعيين:

في هذه الصيغ لا يمكن أن نحدد النهاية اعتماد عل الجدول السابق وهي أربع حالات هي :

$$\left\{ \begin{array}{c} +\infty - \infty \\ 0 \times \infty \\ \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty} \\ \dfrac{0}{0} \end{array} \right.$$

طرق إزالة حالات عدم التعيين

طريقة القسمة والضرب بالمرافق: *تطبق في حالة* $\frac{0}{0}$ *والدالة تكون من الشكل الكسري بسطها أو مقامها يحوي جذر مضاف إليه او مطروح منه والحل يكون ثلاث خطوات:*

1-نضرب البسط والمقام بمرافق المقدار الحاوي على جذر تربيعي

2-نختصر للوصل إلى ابسط شكل

3-نعوض النهاية.

وتطبق في حالة $\infty \pm \infty$ *وفي كثير من الاحيان تكون التابع من جذر مضاف او مطروح منه والحل يكون ثلاث خطوات:*

1-نضرب بمرافق الحاوي عل الجذر ونقسم عليه

2- نختصر للوصل إلى ابسط شكل

3-نعوض النهاية.

💙طريقة التحليل إلى عوامل(جداء أقواس):

تطبق في حالة $\frac{0}{0}$

والحل يكون بثلاث خطوات:

1-تحليل البسط أو المقام أو كلاهما إلى عوامل

2-نختصر ونختزل للوصل إلى ابسط شكل

3-نعوض النهاية.

💙طريقة إخراج عامل مشترك:تطبق في حالتين

$\infty \pm \infty$ و $\frac{0}{0}$ والحل يكون بثلاث خطوات:

1-نخرج عامل مشترك من البسط والمقام

2-نختصر للوصل إلى ابسط شكل

3-نعوض النهاية.

ولكن في بعض الاوقات يكون من الصعب إخراج عامل مشترك لذالك نعمل على اظهاره قبل (نغير في قاعدة الربط

نغير في شكله)

💙تغير المتحول:

في حالة $\infty \times 0$ نقوم بتحويليها إلى احد الشكلين $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

ملاحظة هامة جدا: حتى نحسن إتقان النهايات يجب حل التمارين وإعادة الحل أكثر فإكثر ولا يجود طريقة أخرى لإتقانها بأمتياز ويمكن حل التمرين بأكثر من طريقة

نهاية تابع مركب

لنتأمل ثلاث توابع f,g,h

ولتكن a,b,c أعداد حقيقية

فإذا $f=g\circ h= g(h(x))$

كأن:

$\lim_{x\to a} h(x) = b$

$\lim_{x\to b} g(x) = c$

$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = b$

مبرهنات المقارنة

مبرهنة الإحاطة:

لتكن f و g و h ثلاث توابع معرفة على مجال من النمط $I\ =]b,+\infty[$

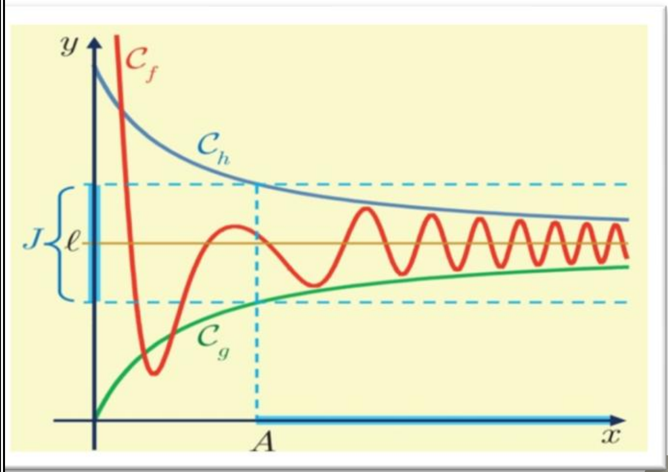
ولنفرض أنه عند كل x من I تحقق المتراجحة :

$g(x) \le f(x) \le h(x)$

ثم لنفترض أن للتابعين g,h النهاية ℓ ذاتها عند $+\infty$

عندئذ:

$lim_{x\to+\infty}\, f(x) = \ell$



ليكن f و g تابعين معرفين على المجال $I\ =]b,+\infty[$

ولنفترض أنه عند كل x من I تتحقق المتراجحة:

$|f(x) - \ell| \le g(x)$

ثم لنفترض أن

$lim_{x\to+\infty}\, g(x) = 0$

عندئذ

$lim_{x\to+\infty}\, f(x) = \ell$

على المجال $I =]b, +\infty[$

1- إذا كان

$f(x) \leq g(x)$ عند كل

x من ℓ وكان

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

كان

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

2-إذا كان

$f(x) \geq g(x)$ عند كل x

من ℓ وكان

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

كان

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

الاستمرار

ما معنى الاستمرار في الحياة العامة؟

عندما نتحدث عن الاستمرار إي عمل متواصل دون انقطاع أو توقف للحظة من الزمن

أما التعريف العلمي:

معناه أن الخط البياني للتابع ضمن المجال المطلوب لا يعاني من انقطاع

أما التعريف البياني:

يمكن رسم الخط البياني عل المجال المطلوب رسمه دون رفع القلم

تعريف:

لتكن a نقطة من D_f نقول أن التابع f مستمر عند a إذا

وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

$$lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

ونقول أن التابع f مستمر على مجموعة تقع ضمن مجموع تعريف التابع إذا كان f مستمر عند كل نقطة من نقاط تعريف التابع

النهاية بأستخدام العدد المشتق

ليكن لدينا التابع f(x) المعرف والمستمر على المجال D_f وأشتقاقي عند النقطة h التي تنتمي إلى D_f عندها:

$$f`(h) = \lim_{x\to h} \frac{f(x)-f(h)}{x-h}$$

ملاحظات:

1-إذا كان التابع f اشتقاقياً على المجال I كان مستمراً على المجال I والعكس ليس بالضرورة أن يكون صحيح

2-إذا كان التابع f اشتقاقياً عند نقطة a كان مستمراً عند a والعكس ليس بالضرورة أن يكون صحيح

3-إذا كان التابع f عبارة تركيب توابع مستمرة على مجموعة تعريفها فالتابع f مستمر على مجموعة تعريفه

استمرار التوابع المرجعية

1-التوابع<<كثيرات الحدود>>

اشتقاقية على R فهي مستمرة على R.

2- التوابع <<الكسرية>>

اشتقاقية على مجموعة تعريفها D فهي مستمرة على D.

3- التابعين Sin(x),Cos(x)

اشتقاقيان على R فهما مستمران على R.

4-التابع $\sqrt{x}$ مستمراً على المجال [0,+∞[

التابع الدوري	التابع الفردي	التابع الزوجي
هو التابع الذي يعيد تكرار نفسه ويحقق: $f(x+2\pi=f(x)$	أياً كان $x \in D$ فإن $x \in D`$ ويحقق $f(-x) = -f(x)$ خطه البياني متناظر بالنسبة إلى المبدا	أياً كان $x \in D$ فإن $x \in D`$ ويحقق $f(-x) = f(x)$ **خطه البياني متناظر بالنسبة إلى \`YY**

حل المعادلات

لإيجاد حلول المعادلة من الشكل f(x)=k يجب أن يتحقق ما يلي:

⇦ 1- أطراد التابع عند المجال المدروس من خلال جدول اطراد

⇦ 2-استمرار التابع عند المجال المدروس

3- K تنتمي إلى المجال المدروس

<u>حالة خاصة:</u>

K=0 نستبدل الخطوة الثالثة بإثبات $f(a) \times f(b) < 0$

<u>*مبرهنة القمية الوسطى:*</u>

إذا كان f تابع مستمر على المجال [a,b]. عندئذ أياً

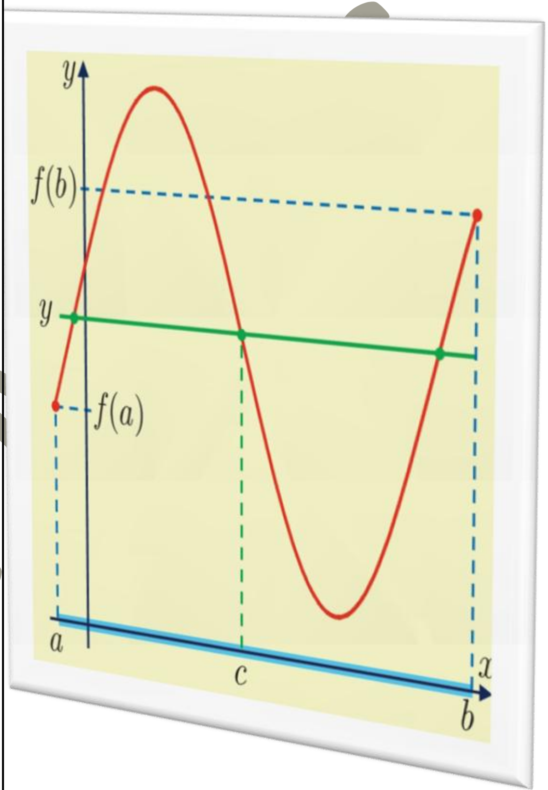
يكن العدد الحقيقي y

المحصور بين $f(a)$ و $f(b)$

يوجد على الأقل عدد حقيقي

c محصور بين a و b

يحقق: $f(c) = y$



ما خلقت
الأحلام حتى
تكون مستحيلة

مبرهنة: إذاكان f تابع مستمر ومتزايد على المجال

$I=[a,b]$.

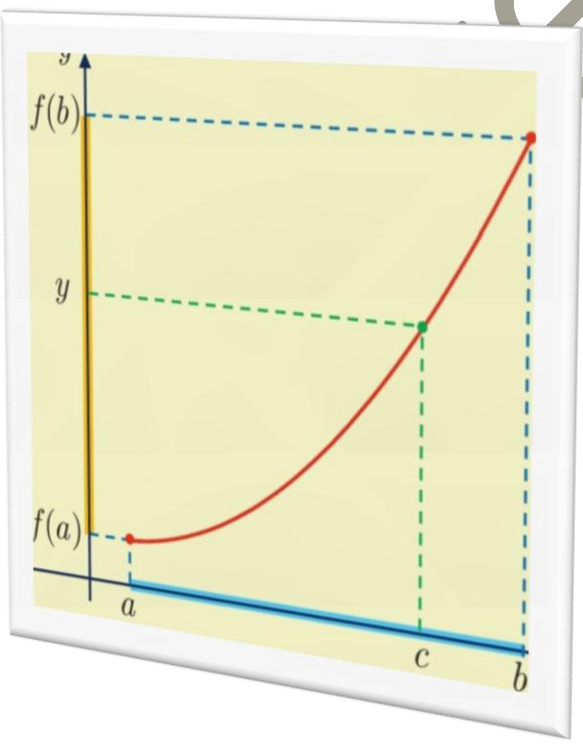
1- صورة المجال $[a,b]$ وفق f هو المجال

$[f(a),f(b)]$.

2- $y \in [f(a), f(b)]$

فللمعادلة $f(x)=y$ حل واحد

في I

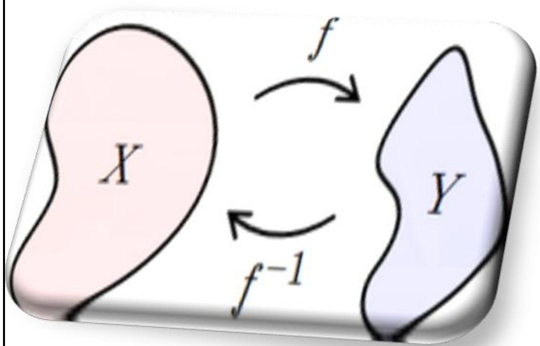


نتيجة: اذا كان f مستمراً ومطرداً على المجال $I=[a,b]$ وكان $f(a)\times f(b)<0$ كان للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في I.

التابع العكسي

هو التابع الذي يكون فيه عناصر المجال هي المعكوس لعناصر المجال المقابل مثل الدالة $y=f(x)$

التابع العكسي للدالة هو $x=f^{`}(y)$



$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

وتكون هذا نهاية وحدة النهايات والاستمرار
المدرس:علي أحمد
0995534775