تنويه

طلابنا الأعزاء: المصدر الدراسي الموثوق مئة بالمئة والطريق الوحيد لنيل العلامة الكاملة هو كتابك المدرسي الرسمي المقرر من وزارة التربية في الجمهورية العربية السورية وأي مصدر آخر يعتبر مساعد فقط في عملية الدراسة لمراجعة المعلومة بشكل سريع

إخلاء مسؤولية

إن هذا الملف وغيره من الملفات الدراسية التي نقوم بتحميلها ورفعها لكم عبر صفحتنا مرسلة من قبل طلاب قاموا بتصوير هذه الملخصات والأوراق الدراسية ليساعدوا زملائهم الذين لم يتمكنوا من تسجيل دورات مراجعة بسبب الظروف الخاصة للطالب وعليه فإن هذا الملف يجب مراجعته عند الدراسة تحسباً لوجود أخطاء غير مقصودة

ملاحظات هامة

هذا الملف ليس ملك لنا ولسنا نحن من حصل عليه وإنما مشاركة من قبل الطلاب وعليه نرجو الالتزام بالملاحظات الآتية

١- هذا الملف غير مخصص للبيع أو للتجارة

٢- في معظم الملفات نطلب أن يتم تصوير الغلاف وذلك حتى من يرغب بشراء نسخة من الملف يقوم بمراجعة صورة الغلاف وشراءه من المكتبة المعنية ببيع هذ الملخص

٣- نحن كـ جهة ناشرة لا نحقق أي مكاسب سواء مادية أو غير مادية من تلك الملفات التي نقوم برفعها لكم وإنما فقط لمساعدة الطلاب في الوصول لمراجع دراسية شاملة

٤- ملاحظة مكررة: لا يوجد أي ملخص أفضل من الكتاب المدرسي الرسمي المقرر

طريقة تحميل الملفات

جميع الملفات التي نقوم بنشرها ترفع مباشر على قناتنا (سوريانا التعليمية) عبر منصة التيليجرام بصيغة ملف جاهز للطباعة وبدقة عالية للدراسة وليس لدينا اسم آخر للنشر

الوحدة الأولى: الأعداد والكسور

أولاً: طبيعة الأعداد

❖ العدد الطبيعي: هو عدد موجب لا يحتوي على فواصل ولا جذور صماء مثال: $5,10,11,17$

❖ العدد الصحيح: هو كل عدد موجب وسالب ولا يحتوي على فاصلة عشرية ولا جذور صماء مثال: $-10 , -6 , +3$

❖ العدد العشري: هو كل عدد يكتب بالشكل $\frac{a}{b}$ حيث a عدد صحيح و b عدد طبيعي لا يساوي الصفر وتتكون قيمته منتهية وغير دورية $a \times 10^n$

مثال: $\frac{9}{2} = 4.5 / -3.22$

$\frac{19}{10} = 1.9$

❖ العدد غير عشري: هو عدد فاصلته العشرية غير منتهية ودورية ويمكن كتابته بشكل $\frac{a}{b}$

مثال: $\frac{5}{3} = 1.666^{-}$, $\frac{7}{3} = 2.3333^{-}$

❖ العدد العادي: هو كل عدد يمكن كتابته بالصيغة $\frac{a}{b}$ حيث a عدد صحيح و b عدد مغاير للصفر فالأعداد الصحيحة والطبيعية والعشرية وغير العشرية هي أعداد عادية

طبيعي← صحيح ← عشري ← غير عشري ← عادي

❖ الأعداد غير عادية: هو عدد يكتب بشكل كسر $\frac{a}{b}$ وتكون قسمته غير منتهية وغير دورية مثال: $\frac{2\pi}{3} , \pi , \sqrt{2} , \sqrt{3}$

العدد الغير عادي إما جذر صماء أو العدد π

ملاحظة:

لا نحدد طبيعة أي عدد إلا بعد إجراء العمليات الرياضية

أمثلة على طبيعة الأعداد:

1. العدد 10^3 هو عدد:
   A. عادي
   B. غير صحيح
   C. صحيح

2. $\frac{x}{3}$ هو عدد:
   A. عدد غير عادي
   B. عدد عادي
   C. عدد عشري

3. $\frac{1}{6} + \frac{1}{3}$ هو عدد:
   A. عشري
   B. غير عادي
   C. صحيح

4. العدد $(2\sqrt{3})^3$ هو عدد
   A. صحيح
   B. عادي غير صحيح
   C. غير عادي

5. $\frac{3\sqrt{4}}{5}$ هو عدد
   A. عادي
   B. غير عادي
   C. صحيح

6. $\left(\sqrt{\sqrt{5}}\right)^4$ هو عدد :
   A. عشري
   B. غير عادي
   C. صحيح

7. $\frac{\sqrt{27}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ هو عدد:
   A. عادي
   B. صحيح
   C. غير عادي

8. العدد $2\pi - \frac{1}{2}\pi$ هو عدد
   A. عادي
   B. غير عادي
   C. صحيح

ثانياً: القاسم المشترك الأكبر GCD

خواص هامة:

1. لكل عدد طبيعي عدا الواحد له قاسمان طبيعيان هما العدد 1 والعدد نفسه
2. $GCD(a, a) = a$
3. إذا كان b قاسم للعدد a كان $GCD(a, b) = b$
4. العدد الأولي: هو كل عدد طبيعي أكبر من واحد وله قاسمان هما نفسه والعدد واحد
5. القول أن a و b عددان أوليان فيما بينهما يعني القول $GCD(a, b) = 1$ مثل العددان 39 و 55
6. في حالة عددين $a > b$ $GCD(a, b) = GCD(b, a - b)$

طرق إيجاد GCD

1. خوارزمية الطرح المتتالي

طريقة الحل:

1) نطرح العدد الصغير وليكن b من الكبير وليكن a أي $a-b$

2) نستمر بالطرح معتمدين المبدأ

$GCD(a,b)=GCD(b,a-b)$

3) القاسم المشترك الأكبر هو أخر ناتج طرح غير معدوم

2. طريقة خوارزمية القسمة الإقليدية:

1) نقسم العدد الكبير على الصغير فينتج باقي القسمة

2) نقسم العدد الصغير على باقي فينتج باقي جديد

3) نكرر العملية السابقة حتى يبقى الباقي صفر

4) قاسم المشترك الأكبر هو أخر باقي غير معدوم

أمثلة: أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 130 , 520

الحل:

a	b	$a-b$
520	130	390
390	130	260
260	130	130
130	130	0

$GCD(520,130)=130$

مثال 2: أوجد القاسم المشترك للعددين 72 , 27

الحل

a	b	$a-b$
72	27	45
45	27	18
27	18	9
18	9	9
9	9	0

$GCD(72,72)=9$

مثال3: أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 224 , 512

مقسوم	مقسوم عليه	باقي
512	224	64
224	64	32
64	32	0

$GCD(512,224)=32$

مثال4: أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 231 ، 363

مقسوم	مقسوم عليه	باقي
363	231	132
231	132	99
132	99	33
99	33	0

$GCD(363\ ,231)=33$

اختر الإجابة الصحيحة

1. $GCD(3,3)$ يساوي

A. 1 B. 2 C. 3

2. إذا كان b قاسم للعدد a فإن

A. $GCD(a,b)=ab$
B. $GCD(a,b)=b$
C. $GCD(a,b)=a$

3. إذا كان a,b عددين أوليان فيما بينهما فإن $GCD(a,b)$ يساوي

A. b B. 1 C. a

4. العددان الأوليان فيما بينهما

A. 8و42 B. 11 و 32 C. 27و33

5. في حالة $a>b$ يكون

A. $GCD(a,b)=GCD(b,a-b)$
B. $GCD(a,b)=GCD(a,a-b)$
C. $GCD(a,b)=GCD(a,b-a)$

ثالثاً: الكسور المختزلة:

سؤال الكسور المختزلة بالفحص

1. أوجد الكسر المختزل
2. دلل على الكسر المختزل

اولاً: أوجد الكسر المختزل لإيجاد الكسر المختزل لأي كسر كان نقسم البسط والمقام على GCD على GCD فيظهر الكسر مختزل

أمثلة:

أوجد الكسر المختزل للكسر $\frac{171}{243}$

نوجد $GCD(243,171)$

$GCD(243,171)=9$

$\frac{171\div 9}{243\div 9}=\frac{19}{27}$

حالة الثانية: دلل على الكسر المختزل الذي يكون بسطه ومقامه عددان أوليان فيما بينهما يكون الكسر كسر مختزلاً

أمثلة: اختر الإجابة الصحيحة

1. دلل على الكسر المختزل
   - A. $\frac{33}{270}$
   - B. $\frac{2574}{1222}$
   - C. $\frac{34}{35}$
2. أحد الكسور الآتية هو كسر مختزل
   - A. $\frac{5}{19}$
   - B. $\frac{14}{35}$
   - C. $\frac{25}{45}$
3. أحد الكسور التالية كسراً مختزلاً هو
   - A. $\frac{11}{33}$
   - B. $\frac{15}{33}$
   - C. $\frac{11}{31}$

رابعاً: الجذر التربيعي للعدد الموجب

أولاً خواص الجذور

1. $\sqrt{a^2} = a$
2. $(\sqrt{a})^2 = a$
3. $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
4. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
5. إزالة الجذرين المقام نضرب البسط ومقام بنفس الجذر الموجود بالمقام

$$\frac{\text{عدد}}{\sqrt{\ }} \times \frac{\sqrt{\ }}{\sqrt{\ }} = \frac{\text{عدد}\sqrt{\ }}{\ }$$

6. قاعدة تحويل من $\sqrt{c}$ إلى $a\sqrt{b}$ نوجد عددين ضربهما يساوي العدد c إحداهما ينجذر وثاني لا نجذره ونخرج إلى خارج الجذر والذي لا ينجذر يبقى داخل الجذر $\sqrt{c} \rightarrow a\sqrt{b}$

7. عكس قاعدة تعديل

$\sqrt{c} \leftarrow a\sqrt{b}$

نربع العدد a وندخله بعملية جداء مع b فيصبح $\sqrt{a^2 \times b}$

نستخدم قاعدة جمع وطرح الجذور المختلفة

جمع وطرح الجذور: لا يمكن جمع وطرح الجذور إلا بأن تكون جذور متشابهة

مثال: $3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2}$

$6\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

أمثلة إيضاحية على قواعد

1. $\sqrt{9^2} = 9$
2. $(\sqrt{9})^2 = 9$
3. $\sqrt{25 \times 16} = \sqrt{25} \times \sqrt{16}$

   $5 \times 4 = 20$
4. $\sqrt{\frac{100}{4}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{4}} = \frac{10}{2} = 5$
5. $\frac{3}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{3\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} \rightarrow \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$
6. $\sqrt{27} \Rightarrow \sqrt{9 \times 3} \Rightarrow 3\sqrt{3}$
7. $2\sqrt{8} \Rightarrow 2\sqrt{4 \times 2} \Rightarrow 4\sqrt{2}$
8. $3\sqrt{108} = 3\sqrt{36 \times 3} \Rightarrow 18\sqrt{3}$
9. $2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{4 \times 2} \Rightarrow \sqrt{8}$
10. $3\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{9 \times 2} \Rightarrow \sqrt{18}$
11. $3\sqrt{2} + 4\sqrt{8} - 6\sqrt{18}$

الحل:

$3\sqrt{2} + 4\sqrt{4 \times 2} - 6\sqrt{9 \times 2}$

$3\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 18\sqrt{2}$

$11\sqrt{2} - 18\sqrt{2}$

$= -7\sqrt{2}$

12. $3 \times \sqrt{2} \times 6\sqrt{2}$

الحل :

$18 \times (\sqrt{2})^2 = 36$

أمثلة: اختر الإجابة الصحيحة

1. $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ يساوي
   - A. $1 + \sqrt{2}$
   - B. $1 - \sqrt{2}$
   - C. $5\sqrt{2}$
2. إن قيمة العدد

   $A = \sqrt{7 + \sqrt{7} - \sqrt{9}}$
   - A. $A = 4$
   - B. $A = 3$
   - C. $A = 2$
3. $\frac{3}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}$ يساوي

   A. 0   B. 3   C. $\sqrt{3}$
4. $\sqrt{75} - \sqrt{48}$ يساوي

   A. $2\sqrt{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $3\sqrt{3}$
5. $\sqrt{11^2 \times 7^4}$ يساوي
   - A. $(11 \times 7)^3$
   - B. $\sqrt{11 \times 7^2}$
   - C. 11×7^2
6. العدد $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$
   - A. 2
   - B. $\frac{1}{2}$
   - C. $2\sqrt{2}$
7. ثلاثة أمثال العدد $\sqrt{8}$ يساوي
   - A. $3\sqrt{72}$
   - B. $\sqrt{3 \times 8}$
   - C. $\sqrt{72}$
8. ناتج $(2\sqrt{3})^2 - 5^2$ هو العدد

   A. 25   B. 12   C. -13
9. نصف العدد $\sqrt{8}$
   - A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
   - B. $2\sqrt{2}$
   - C. $\sqrt{2}$

أمثلة شاملة على الوحدة الأولى

حل التمرينات الآتية

التمرين الأول

المستطيل $ABCD$ بعداه

$$AD = \sqrt{12} \quad , \quad AB = \sqrt{27} + 2\sqrt{3}$$

1. اكتب كلاً من بعدي المستطيل بالصيغة $a\sqrt{3}$
2. احسب محيط ومساحة المستطيل

الحل:

❖
$$AD = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3}$$
$$AD = 2\sqrt{3}$$
$$AB = \sqrt{9 \times 3} + 2\sqrt{3}$$
$$= 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$$
$$AB = 5\sqrt{3}$$

❖
$$P = 2\left(\text{طول} + \text{عرض}\right)$$
$$P = 2(2\sqrt{3} + 5\sqrt{3})$$
$$P = 14\sqrt{3}cm$$
$$S = \text{طول} \times \text{العرض}$$
$$S = 2\sqrt{3} \times 5\sqrt{3}$$
$$S = 30\ cm^2$$

التمرين الثاني:

$ABCD$ متوازي أضلاع فيه

$$AB = \sqrt{125} + \sqrt{112}$$
$$BC = \sqrt{45} - \sqrt{28} + 6\sqrt{7} + 2\sqrt{5}$$

1. برهن أن الشكل $ABCD$ معين
2. احسب محيط الشكل

الحل:

1. حتى يثبت أن الشكل معين فيجب تساوي ضلعين

$$AB = BC$$
$$AB = \sqrt{25 \times 5} + \sqrt{16 \times 7}$$
$$AB = 5\sqrt{5} + 4\sqrt{7}$$
$$BC = \sqrt{9 \times 5} - \sqrt{7 \times 4} + 6\sqrt{7} + 2\sqrt{5}$$
$$BC = 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{7} + 6\sqrt{7}$$
$$BC = 5\sqrt{5} + 4\sqrt{7}$$

نجد أن $AB = BC$

إذاً الشكل $ABCD$ معين

2. $P = 4 \times$ طول الضلع

$$P = 4 \times (5\sqrt{5} + 4\sqrt{7})$$
$$P = 20\sqrt{5} + 16\sqrt{7}\ cm$$

تمرين الثالث

1. احسب $GCD(80,64)$ بطريقة القسمة الإقليدية
2. أوجد ناتج $\frac{64}{80} + \frac{1}{5} - 7$ وحل الناتج الصحيح

الحل:

مقسوم	مقسوم عليه	باقي
80	64	16
64	16	0

$$GCD(80,64) = 16$$

2) $\frac{64}{80} + \frac{1}{5} - 7$

$$\frac{4}{5} + \frac{1}{5} - 7 = \frac{5}{5} - 7$$
$$= 1 - 7 = -6$$

نعم الناتج عدد صحيح

تمرين الرابع:

$ABCD$ مستطيل فيه

$$AB = \sqrt{32} - \sqrt{18}$$
$$BC = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

1. اكتب كلاً من AB , BC بالصيغة $a\sqrt{2}$ واستنتج أن $ABCD$ مربع
2. احسب محيط ومساحة المربع
3. احسب نصف طول القطر الدائرة المارة برؤوسه

الحل:

$$AB = \sqrt{32} - \sqrt{18}$$
$$AB = \sqrt{16 \times 2} - \sqrt{9 \times 2}$$
$$AB = 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$$
$$AB = \sqrt{2}$$
$$BC = \frac{2 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$$
$$BC = \sqrt{2}$$

نستنتج أن $AB = BC$

إذاً الشكل $ABCD$ مربع

2) $P = 4 \times$ طول الضلع

$$P = 4 \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}\ cm$$
$$S = \left(\text{طول الضلع}\right)^2$$
$$S = (\sqrt{2})^2 = 2\ cm$$

3) القطر الدائرة هو قطر المربع وبحسب حسب مبرهنة فيثاغورث

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$
$$AC^2 = 2 + 2 = 4$$
$$AC = \sqrt{4} = 2\ cm$$

نصف القطر يساوي $\frac{2}{2}$ يساوي

$$r = 1$$

تمرين الخامس:

ليكن لدينا عددين m , h حيث

$$h = (\sqrt{7})(1 - \sqrt{7})$$

$$m = \sqrt{117} - 3\sqrt{28} + 3\sqrt{7} - \sqrt{36}$$

1. اكتب كلاً من العددين $m\,,h$ على الشكل $a\sqrt{7}+b$
2. أثبت أن $m-h$ عدد طبيعي
3. أحصر $\sqrt{112}$ بين عددين صحيحين متتاليين

الحل:

1) $h = \sqrt{7} - 7$

$$m = \sqrt{16\times 7} - 3\sqrt{4\times 7} + 3\sqrt{7} - 6$$
$$m = 4\sqrt{7} - 6\sqrt{7} + 3\sqrt{7} - 6$$
$$m = \sqrt{7} - 6$$

2) $m - h = \sqrt{7} - 6 - (\sqrt{7} - 7)$

$$m - h = \sqrt{7} - 6 - \sqrt{7} + 7$$

هو عدد طبيعي

$$m - h = 1$$

3) $\sqrt{121} < \sqrt{122} < \sqrt{144}$

$$11 < \sqrt{122} < 12$$

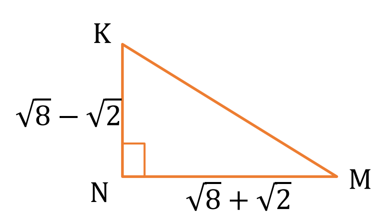
التمرين السادس

MNK مثلث قائم في N و $MN = \sqrt{8}+\sqrt{2}$ و $NK =$

المطلوب: $\sqrt{8}-\sqrt{2}$

1. اكتب MN و NK بالشكل $a\sqrt{2}$
2. احسب $\tan(\hat{M})$ واكتبه بأيسط صورة
3. احسب MK

الحل:



1. $MN = \sqrt{4\times 2} + \sqrt{2}$

$$MN = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$
$$KN = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

2. $\tan(\hat{m}) = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

$$\tan(\hat{m}) = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$$
$$\tan(\hat{m}) = \frac{1}{3}$$

---

3. MK حسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث KNM

$$KM^2 = MN^2 + KN^2$$
$$KM^2 = 18 + 2 = 20$$
$$KM^2 = 20$$
$$KM = \sqrt{20} = \sqrt{4\times 5}$$
$$KM = 2\sqrt{5}\ cm$$

الوحدة الثانية :

قوى ونشر وتحليل

أولاً: خواص قوى العدد العادي

القوى:

1) $a^n + a^m = a^{n+m}$
2) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
3) $((a)^n)^m$
4) $(a\times b)^n = a^n \times b^n$
5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
6) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
7) $a^0 = 1$ بحيث $a \neq 0$
8) $a^1 = a$ في حالة $n = 1$

- التمارين التي تأتي على هذا الدرس:

1) حساب قيمة كسر.
2) اختزال كسر بأبسط صورة.
3) اختر الإجابة الصحيحة.

أولاً: عند حساب كسر: نبسط القوى المختلفة ونجعلها متشابهة وأخيراً نفك القوى المتبقية.

أمثلة:

مثال1:

$$A = \frac{3^7\times 2^8}{9^3\times 2^5}$$

فأن قيمة A

$$A = \frac{3^7\times 2^3}{3^6}$$
$$A = 3\times 8 = 24$$

مثال2:

$$A = \frac{3^2\times 5^2\times 7^4}{(15)^2\times 7^2}$$

الحل:

$$A = \frac{3^2\times 5^2\times 7^4}{3^2\times 5^2\times 7^2}$$
$$A = \frac{7^4}{7^2} = 7^2$$
$$A = 49$$

مثال3:

$$A = \frac{6^4\times 7^2\times 5^3}{35^2\times 4^2\times 3^3}$$
$$A = \frac{3^4\times 2^4\times 7^2\times 5^3}{7^2\times 5^2\times 2^4\times 3^3}$$
$$A = 3\times 5 \Rightarrow A = 15$$

مثال4: اختزل الكسور التالية:

$$A = \frac{2^2\times 3^8\times 7^4}{4^2\times 9^3\times 7^6}$$

$$A=\frac{2^2\times3^8\times7^4}{2^4\times3^6\times7^6}$$

$$A=\frac{3^2}{2^2\times7^2}$$

$$A=\frac{3^2}{(14)^2}=\left(\frac{3}{14}\right)^2$$

- اختر الإجابة الصحيحة:

1) المقدار $A=3^{-3}+3^{-3}+3^{-3}$ يساوي:

A. 3^{-4} B. 3^{-2} C. 3^{4}

2) $((2)^{-2})^2$ هو عدد:

A. صحيح.
B. غير عادي.
C. عادي غير صحيح.

3) ربع العدد 8^5 هو:

A. 2^{13} B. 2^{8} C. 2^{15}

4) العدد 0,0001 هو:

A. 10^{-5} B. 10^{-4} C. 10^{-2}

5) الكتابة المعيارية للعدد 450,1 هي:

A. $0,4501\times10^3$
B. 4501×10^{-1}
C. $4,501\times10^2$

6) في حالة n عدد صحيح مربع العدد الصحيح التالي للعدد n هو:

A. $(n+1)^2$
B. $2(n+1)$
C. (n^2+1)

7) $10^3\times10^{-4}$

A. $0,1$
B. -10
C. 10^{-12}

8) العدد $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-2}$ هو:

A. 3 B. $\frac{1}{3}$ C. $2\sqrt{3}$

9) $\frac{1}{4}\times(2^5)$

A. 8 B. 1 C. 16

10) العدد 3^9+3^7 يساوي:

A. 6^{16} B. 3^{16} C. 10×3^7

11) إذا كان $3^n=9^4$ فإن قيمة n تساوي:

A. 6 B. 8 C. 4

ثانياً وثالثاً: النشر والتحليل:

النشر: توزيع الضرب على الجمع والطرح ذي الحد.

$$k(a+b)=ka+kb$$

ذي الحدين $(a+b)(c+d)$

$$ac+ad+bc+bd$$

- مطابقات:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$(a-b)(a+b)=a^2+b^2$$

أمثلة: إيضاحية فقط:

1) $3x-6$
$=3(x-2)$

2) $(x-7)(-3x-6)=$
$-3x^2-6x+21x+42$

3) $(3x+2)^2$
$=9x^2+12x+4$

4) $(2x-3)^2$
$=4x^2-12x+9$

5) $(x-2)(x+2)$
$=x^2-4$

التحليل: هو تحويل العبارات المعادلة من جمع وطرح الى جداء أقواس وإخراج عامل مشترك

رقم/ مجهول/ قوس

تحليل مطابقات

2+1: لهما شروط أن يكون الشكل ثلاثي الحدود وأن ينجذر الحد الأول وينجذر الحد الثالث ويكون ضعف الأول بالثاني مساوياً للحد الثاني عند ذلك نحلل المطابقة 2 و 1

$\left(\text{جذر الأول اشارت الحد الثاني جذر الثالث}\right)^2$

3: شرط وجود حدين الأول ينجذر والثاني ينجذر وبينهما إشارة (-) نحلل عند ذلك نفتح قوسين.

$$\left(\text{جذر الأول} + \text{جذر ثاني}\right)\left(\text{جذر الأول} - \text{جذر ثاني}\right)$$

أمثلة إيضاحية فقط:

1) $3x - 9$
$= 3(x-3)$

2) $3x^2 - 2x$
$= (x)(3x-2)$

3) $(3x-2) + (x-2)(3x-2)$
$= (3x-2)(1+x-2)$
$= (3x-2)(x-1)$

4) $(2x-2)^2 - 3(2x-2)$
$= (2x-2)(2x-2-3)$
$= (2x-2)(2x-5)$

4: $x^2 - 2x + 1$

ثلاثة حدود الأول ينجذر

الثالث ينجذر

الحد الثاني يساوي ضعف الأول بالثاني

$=> (x-1)^2$

5: $x^2 + 4x + 4$

$=> (x+2)^2$

6: $(x^2 - 4)$

الأول ينجذر والثاني ينجذر وبينهما إشارة (-)

$(x+2)(x-2)$

7: $(x-2)^2 - 4$

$(x-2-2)(x-2+2)$

$(x-4)(x)$

8: $(x^2-2)^2 - (x-1)^2$

$(x-2+x-1)(x-2-(x-1))$

$= (2x-3)(+1)$

$= (2x-3)$

في كل مما يلي أجب بكلمة صح أو خطأ:

1) العدد 5^{-2} هو عدد عشري
(صح)

2) قيمة A حيث
$A = \frac{2^3\times5^7\times7}{2^3\times5\times7}, A = 70$ (خطأ)

3) نصف العدد 6^4 هو 3^4 (خطأ)

4) إن العدد $\left(\frac{1}{\sqrt7}\right)^{-2}$ يساوي 7
(صح).

5) إن العدد
$A = \frac{2^3\times3}{8\times3^{-2}}$
والعدد $B = 3^3$ فإن $A = B$

6) قيمة العدد $\left(\sqrt3\right)^{-5}$ تساوي
9 (صح)

7) نصف العدد 4^6 هو 2^3
(خطأ)

8) ناتج نشر $\left(\sqrt{2x}+3\right)^2$
يساوي $2x^2 + 9$ (خطأ)

اختر الإجابة الصحيحة:

1) إن العدد $\left(\sqrt5-\sqrt2\right)^2$
A. غير عادي
B. عادي
C. صحيح

2) ناتج $(x-\sqrt3)(x+\sqrt3)$ النشر :
A. $x^2+\sqrt3$
B. $x^2-\sqrt3$
C. x^2-3

3) $\left(\sqrt3-1\right)\left(\sqrt3+1\right)$
A. 2 B. 4 C. $\sqrt2$

حل التمرينات التالية:

- التمرين الأول:

1) حلل المقدار $A = 4x^2 - 9$ إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى.

2) انشر مستفيداً من المطابقات الشهيرة $B = 4x^2 - 12 + 9$

3) حلل المقدار $(A-B)$

الحل:

1) $A = (2x-3)(2x+3)$

2) $B = 4x^2 - 12x + 9$

3) $A - B =$
$(2x-3)(2x+3) - (2x-3)^2$
$= 2x - 3[2x + 3 - 2x + 3]$
$A - B = [2x-3](6)$
$A - B = (6)(2x-3)$

- التمرين الثاني: لدينا الأعداد التالية:

$A = 3\sqrt{50}\ , B = 2\sqrt{24}$

$C = 5\sqrt{3}\,, E = \dfrac{4^3 \times 9^5 \times 25}{2^4 \times 3^8}$

1) احسب $A \times B \times C$ مبيناً طبيعة الناتج.

2) أوجد قيمة E.

3) استنتج قيمة $\frac{E}{A\times B\times C} = \frac{1}{2}$

الحل:

1) $A \times B \times C$

$=3\sqrt{50} \times 2\sqrt{24} \times 5\sqrt{3}$

$A \times B \times C = 1800$

2) $E = \frac{4^3\times9^5\times25}{2^4\times3^8}$

$E = \dfrac{2^6 \times 3^{10} \times 25}{2^4 \times 3^8}$

$E = 2^2 \times 3^2 \times 25$

$E = 900$

3) نستنتج أن $\frac{E}{A\times B\times C} = \frac{1}{2}$

لأن: $\frac{900}{1800} = \frac{1}{2}$

- التمرين الثالث:

لدينا المربع $ABCD$ طول ضلعه $3 + \sqrt{3}$ ومساحته S_1 ولدينا مستطيل $EFGH$ بعداه $EF = \sqrt{72} + 3\sqrt{6}$ و $EH = \sqrt{2}$ و مساحته S_2.

1) احسب S_2 واختزل الناتج.

2) أثبت أن $S_1 = S_2$.

الحل:

1) $S_2 =$ العرض $\times$ الطول

$S_2 = \left(\sqrt{72} + 3\sqrt{6}\right) \times \sqrt{2}$

$S_2 = \sqrt{144} + 3\sqrt{12}$

$S_2 = 12 + 3\sqrt{4} + 2$

$S_2 = 12 + 6\sqrt{2}\ cm^2$

$S_1 = \left(\text{طول الضلع}\right)^2$

$S_1 = \left(3 + \sqrt{3}\right)^2$

$S_1 = 9 + 6\sqrt{3} + 3$

$S_1 = 12 + 6\sqrt{3}\ cm^2$

نستنتج أن : $S_1 = S_2$

- التمرين الرابع:

لنتأمل المقدار : $A = (x - 5)^2$

1) انشر المقدار A ثم اختزله.

2) حلل A إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى

3) احسب قيمة $B = \frac{4^5\times3^2\times15}{2^6\times3^3}$

الحل:

1) $A = x^2 - 10x + 25 - 9$

$A = x^2 - 10x + 16$

2) $A = (x - 5 + 3)(x - 5 - 3)$

$A = (x - 2)(x - 8)$

3) $B = \frac{2^{10}\times3^2\times15}{2^6\times3^3}$

$B = \dfrac{2^4 \times 15}{3}$

$B = 16 \times 5 = 80$

$B = 80$

الوحدة الثالثة:

أولاً: حل المعادلات

المعادلة هي عبارة عن طرفين مساواة

درجة أولى $ax + b = c$

حيث $a b g c$ أعداد عادية و غير عادية.

لحل المعادلة: ننقل المجاهيل إلى طرف والمعاليم إلى طرف ونقسم على أمثال المجهول فنحصل على قيمة المجهول.

سؤال حل المعادلة <= أوجد جذر المعادلة أو حل المعادلة.

نقول عن المعادلتين المتكافئتين هما معادلتين لهما نفس الحلول.

أمثلة إيضاحية:

مثال1: $5y - 4 = 3y + 2$

$5y - 3y = 4 + 2$

$2y = 6\,, y = 3$

مثال2:

$6(x - 3) = 2(3x - 2) - 3x$

$6x - 18 = 6x - 4 - 3x$

$6x - 6x + 3x = +18 - 4$

$3x = 14$

$x = \dfrac{14}{3}$

مثال3: $\frac{y}{2} - \frac{3}{2} = \frac{y}{3} - \frac{1}{2}$

$\dfrac{y}{2} - \dfrac{y}{3} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}$

$(3) \quad (2)$

$\dfrac{3y - 2y}{6} = 1$

$\dfrac{y}{6} = 1 => y = 6$

معادلات من الدرجة الثانية

معادلات على شكل حدود جبرية.

نجعل أحد طرفي المعادلات صفر

نحلل وفق طرق تحليل المعروفة حتى نحولها إلى جداء أقواس يساوي الصفر

نطبق خاصية الجداء الصفري.

$(ax + b)(cx + d) = 0$

إما $ax + b = 0$

أو $cx + d = 0$

ونحل معادلة من الدرجة الأولى

$x^2 = a$

إذا كان لدينا حلان $a > 0$

اما $x = +\sqrt{a}$, او $x = -\sqrt{a}$

إذا كان $a = 0$ لدينا حل

$x = 0$

إذا كان $a < 0$ ليس لدينا حلول

مستحيلة الحل.

خطوات حل معادلة من الدرجة الثانية

1) أحد الأطراف يساوي الصفر
2) جعل طرف الأيسر من المعادلة جداء أقواس.
3) نستخدم خاصية الجداء الصفري.

أمثلة:

مثال1:

$$(x-3)^2 - 3(x-3) = 0$$
$$[x-3][x-3-3] = 0$$
$$[x-3][x-6] = 0$$

اما $x - 3 = 0 => x = 3$

او $x - 6 = 0 => x = 6$

مثال2: $x^2 - 16 = 0$

$x^2 = 16 =>$ اما $x = +\sqrt{16}$

او $x = -\sqrt{16}$

اما $x = 4$, او $x = -4$

مثال3:

$$x(x-3)(3x+9) = 0$$

اما $x = 0$ او $x - 3 = 0$

$x = 3$

او $3x + 9 = 0 => 3x = 9$

$$x = -\frac{9}{3} => x = -3$$

مثال4: $2y^2 + 12^2 + 18 = 0$

$$y^2 + 6y + 9 = 0$$
$$(y+3)^2 = 0$$
$$y + 3 = 0 => y = -3$$

مثال5: $16 - (2x-1)^2 = 0$

$$(4 + 2x - 1)[4 - (2x - 1)] = 0$$
$$(3 + 2x)(2x + 5) = 0$$

اما $3 + 2x = 0 => x = -\frac{3}{2}$

او $2x + 5 = 0 => x = \frac{5}{2}$

مثال6:

$$(4x-1)(x+3) = 11x + 13$$
$$4x^2 + 12x - x - 3 = 11x + 13$$
$$4x^2 = 16$$

$x^2 = 4 =>$ اما $x = +2$

او $x = -2$

ثانياً: المسائل الكلامية:

1) نرمز للمجهول بالرمزx.
2) نعين الفرض من المسألة.
3) نشكل معادلة عن طريق ربط بين المجهول والفرض
4) نحل المشكلة ونناقش قيم الحل.

أمثلة:

1) في أحد المجالس عدد الأشخاص ربعهم تنحصر أعمارهم بين 20سنة و30 سنة وثلثهم تنقص أعمارهم عن 20سنة ومنهم 20شخص تزيد أعمارهم عن 30سنة ما عدد الأشخاص في هذا المجلس.

الحل:

نفرض عدد الأشخاص x

$$x = \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + 20$$
$$x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x = 20$$
$$\frac{12}{12}x - \frac{4}{12}x - \frac{3}{12}x = 20$$
$$\frac{5}{12}x = 20$$
$$x = \frac{20}{\frac{5}{12}} \Longrightarrow x = \frac{20 \times 12}{5}$$

$x = 48$شخص

مسألة2: قبل خمس سنوات كان عمر أحمد نصف ما سيصبح عليه بعد خمس سنوات

ما هو عمر أحمد الأن.

نفرض عمر أحمد x .

قبل خمسة سنوات $x - 5$

بعد خمس سنوات $x + 5$

$$x - 5 = \frac{1}{2}(x + 5)$$
$$2x - 10 = x + 5$$
$$2x - x = 10 + 5$$

وهو عمر أحمد $x = 15$

مسألة3: ما هو العدد الذي إذا طرحنا خمسه من ثلاثة أمثاله كان الناتج 26.

الحل:

نفرض العدد x .

$$3x-\frac{2}{5}x=26$$
$$\frac{15}{5}x-\frac{2}{5}x=26$$
$$\frac{13}{5}x=26$$
$$x=\frac{26}{\frac{13}{5}}$$
$$x=\frac{26}{1}\times\frac{5}{13} => x=10$$

المتراجحات من الدرجة الأولى

شكل العام للمتراجحة هي:

$$ax+b\ \le c$$
$$\ge c$$
$$< c$$
$$> c$$

خطوات حل المتراجحة:

ننقل المجاهيل إلى طرف أخر ثم نقسم على أمثال المجهول ننتبه إلى أن تقسيم الطرفين أو ضرب الطرفين بعدد إذا كان سالب <= نغير جهة المتراجحة

إذا كان العدد موجب <= لا نغير جهة المتراجحة.

تمثل الحلول على مستقيم الأعداد

<= أولاً نحدد اتجاه الحل إذا كان

$<$ $\le$ اتجاه الحل يسار	$>$ $\ge$ اتجاه الحل يمين

فتحة المجال: تكون مع اتجاه الحل إذا كان في المتراجحة او يساوي.

تكون عكس اتجاه الحل إذا لم يوجد في المتراجحة او يساوي.

نأخذ الحل من مستقيم الأعداد والباقي نشطب عليه

أمثلة: حل المتراجحات ومثل حلولها على مستقيم الأعداد:

1) $3x+2\le 6x-7$

الحل: $3x-6x\le -9$

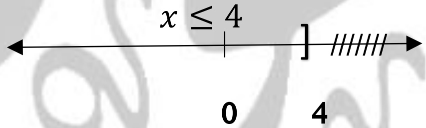
$$\frac{-3x}{-3}\le\frac{-9}{-3}$$
$$x\ge 3$$

تمثيل الحلول:

2) $\frac{3}{2}x-\frac{7}{4}\le\frac{1}{2}x+\frac{9}{4}$

نضرب طرفين المتراجحة ب 4

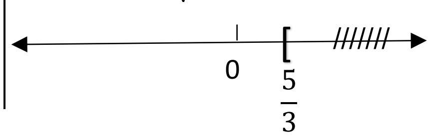
$$6x-7\le 2x+9$$
$$6x-2x\le 7+9$$
$$4x\le 16$$
$$x\le 4$$



3) $\sqrt{2}x-\sqrt{8}<-2\sqrt{2}x+\sqrt{18}$

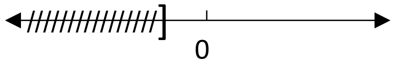
الحل:

$$\sqrt{2}x-2\sqrt{2}<-2\sqrt{2}x+\sqrt{9\times 2}$$
$$\sqrt{2}x+2\sqrt{2}x<2\sqrt{2}+3\sqrt{2}$$
$$3\sqrt{2}x<5\sqrt{2}$$
$$x<\frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}\Longrightarrow x<\frac{5}{3}$$



مثال4: $2x-3>-6$

$$2x>-6+3$$
$$2x>-3 => x>-\frac{3}{2}$$



مسائل كلامية:

مثال:

هنالك عرضان في محل تأجير أفلام فيديو اشتراك واستئجار:

يدفع المشترك 6000 ليرة سنوياً ويدفع 550 ليرة عن كل فلم يستعيره استئجار يدفع المستأجر 800 ليرة عن كل فلم يستأجره بدأ من كل فلم يشاهده الشخص سنوياً يكون العرض الأول أوفر له.

الحل:

$$550x+6000<800x$$

عدد الأفلام x

$$550x-800x<-6000$$
$$\frac{-250x}{-250}<\frac{-6000}{-250}$$
$$x=24$$

بدء من أكثر من 24 فيلم يشاهد يكون العرض الأول أوفر.

مثال2: هنالك عرضان في أحد المسابح.

☆ دفع نقدي: يدفع الشخص 340 ليرة عن كل زيارة مسبح.

☆ اشتراك: يشترك ببطاقة سنوية تصلح لعشرة زيارات للمسبح سعرها 1700 ليرة.

بدأ من كم زيارة للمسبح سنوياً يكون العرض الثاني أوفر للشخص.

الحل: نعرف عدد الزيارات x

$$\frac{340x}{340} > \frac{1700}{340}$$
$$x > 5$$

بدأً من أكثر من خمسة زيارات يكون العرض الثاني أوفر للشخص.

اختر الإجابة الصحيحة:

1) المعادلة التي تقبل $x = -2$ حلاً لها هي:

A. $x^2 + 4 = 0$

B. $5x + 2 = 3x - 2$

C. $3x + 1 = 2x$

2) حلول المتراجحة $4x \le 3$

A. $x \ge 3$ B. $x \le 4$ C. $x \le 3$

3) أحد حلول المتراجحة $2x - 1 \le 3x + 1$

A. -1 B. -3 C. -5

4) المعادلة $x^2 - 3 = 0$ لها حلان

A. $(-\sqrt{2}, +\sqrt{2})$

B. $(-\sqrt{3}, +\sqrt{3})$

C. $(-3, +3)$

5) حلول المعادلة $(x - 1)^2 = 4$

A. $(3, -1)$

B. $(-3, +1)$

C. $(3, 1)$

ضع كلمة صح او كلمة خطأ:

1) العدد الوحيد الذي مربعه يساويه هو العدد 0. خطأ

2) العدد الوحيد الذي ضعفيه يساوي مربعه هو 0. خطأ

3) إذا كانت $x < 3$ فإن $-x < -3$. خطأ

4) المعادلة $x^2 = -3$ مستحيلة الحل. صح

5) أي عدد موجب ليس حلاً للمتراجحة $-3x + 1 > 0$ خطأ.

6) كل عدد أكبر من 2 يكون مقلوبه أكبر من $\frac{1}{2}$. خطأ

حل التمرينات الآتية:

التمرين الأول: لدين المقداران:

$$A = 2x^2 - x - 1$$
$$B = (2x + 1)(x - 1)$$

1) أثبت أن $A = B$

2) استنتج حلول المعادلة $A = 0$

الحل:

1) $A = 2x^2 - x - 1$

$B = 2x^2 - 2x + x - 1$

$B = 2x^2 - x - 1$

إذا $A = B$

2) بما أن $A = B$ نحل معادلة $B = 0$

لان A مقدار درجة ثانية نأخذ B بالشكل المحلل

$(2x + 1)(x - 1) = 0$

اما $2x + 1 = 0$

$=> x = -\frac{1}{2}$

او $x - 1 = 0 => x = 1$

التمرين الثاني: لدينا المقدار:

$$E = (x - 1)^2 - 4$$

1) انشر E ثم اختزله.

2) حلل E إلى جداء عاملين.

3) حل المعادلة $E = -3$

الحل:

1) $E = x^2 - 2x + 1 - 4$

$E = x^2 - 2x - 3$

2) $E = (x - 1 - 2)(x - 1 + 2)$

$E = (x - 3)(x + 1)$

3) حل المعادلة $E = -3$

$(x - 1)^2 - 4 = -3$

$(x - 1)^2 = -3 + 4$

$\Longrightarrow (x - 1)^2 = 1$

اما $x - 1 = +1 => x = 2$

او $x - 1 = -1 => x = 0$

التمرين الثالث: لتكن العبارة:

$$E = (4x - 3)^2 - (2x + 2)^2$$

1) انشر ثم اختزل العبارة E.

2) حلل E إلى جداء عوامل.

3) حل المعادلة $E = 0$.

الحل:

1) $E = 16x^2 - 24x + 9$

$-[4x^2 + 8x + 4]$

$E = 16x^2 - 4x^2 - 24x$

$-8x + 9 - 4$

$E = 12x^2 - 32x + 5$

2) $E = (4x - 3 + 2x + 2)$

$[4x - 3 - (2x + 2)]$

$E = (6x - 1)(2x - 5)$

3) $E = 0$

$(6x - 1)(2x - 5) = 0$

اما $6x - 1 = 0$

$6x = 1 => x = \frac{1}{6}$

او $2x - 5 = 0 => x = \frac{5}{2}$

التمرين الرابع: إذا كان:

$A = x^2(x-3) - 4(x-3)$

1) انشر A ثم اختزل.
2) حلل A إلى جداء عوامل.
3) احسب A عندما $x = \frac{1}{2}$
4) حل المعادلة $A = 0$

الحل:

1) $A = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

$A = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

2) حلل A

$A = x - 3[x^2 - 4]$

$A = (x-3)(x-2)(x+2)$

3) حساب A

$A = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right) + 12$

$A = \frac{1}{8} - \frac{3}{4} - 2 + 12$

(2)

$A = \frac{1}{8} - \frac{6}{8} + 10$

$A = -\frac{5}{8} + \frac{80}{8} = +\frac{75}{8}$

4) $(x-3)(x-2)(x+2) = 0$

اما $x - 3 = 0 \quad x = 3$

او $x - 2 = 0 \quad x = 2$

او $x + 2 = 0 \quad x = -2$

التمرين الخامس: ليكن لدينا المقدار

$F = x^2(x-3) - 2x + 6$

1) حلل المقدار F الى جداء عوامل.
2) احسب قيمة F عندما $x = 0$.
3) حل المعادلة $F = 0$

الحل:

1) $F = x^2(x-3) - 2[x-3]$

$F = [x-3][x^2-2]$

$F = (x-3)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

2) قيمة F عندما $x = 0$

$F = 6$

3) $(x-3)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = 0$

اما $x - 3 = 0 \,, x = 3$

او $x - \sqrt{2} = 0 \,, x = \sqrt{2}$

او $x + \sqrt{2} = 0 \,, x = -\sqrt{2}$

التمرين السادس: إذا كان: $A = \frac{2x-1}{3}$

1) أوجد قيمة A عندما $x = \frac{1}{2}$
2) هل العدد $\frac{9}{2}$ حل للمتراجحة $\frac{2x-1}{3} > 5$
3) حل المتراجحة $\frac{2x-1}{3} > 5$ ومثل حلولها على مستقيم الأعداد

الحل:

1) $A = \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)-1}{3} = 0$

2) نعوض

$\frac{2\left(\frac{9}{2}\right)-1}{3} \overset{?}{>} 5$

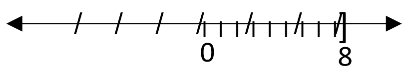
$\frac{8}{3} \overset{?}{>} 5 => \frac{8}{3} > \frac{15}{3}$

غير محققة.

3) $2x - 1 > 15$

$2x > 15 + 1 => 2x > 16$

$x > 8$



التمرين السابع:

$2x - \frac{5}{2} \le x + \frac{1}{2}$

1) تحقق فيما إذا كان العدد 1 يحقق المتراجحة السابقة.
2) حل المتراجحة ومثل حلولها على مستقيم الأعداد.
3) هل العدد $\sqrt{3}$ يمثل حلاً للمتراجحة برر اجابتك.

الحل:

1) نعوض بدل $x = 1$

$2(1) - \frac{5}{2} \overset{?}{\le} 1 + \frac{1}{2}$

$\frac{2}{1} - \frac{5}{2} \overset{?}{\le} \frac{2}{2} + \frac{1}{2}$

$\frac{4}{2} - \frac{5}{2} \overset{?}{\le} \frac{3}{2}$

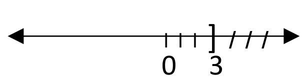
$-\frac{1}{2} \le \frac{3}{2}$ محققة

2) نضرب طرفين المتراجحة بالعدد 2.

$4x - 5 \le 2x + 1$

$4x - 2x \le 1 + 5$

$2x \le 6 => x \le 3$



3) $\sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4}$

$1 < \sqrt{3} < 2$

حل المتراجحة هو جميع قيم x التي تكون اصغر من 3 او تساويها. $\sqrt{3} < 3$

إذاً $\sqrt{3}$ هو حل للمتراجحة.

التمرين الثامن:

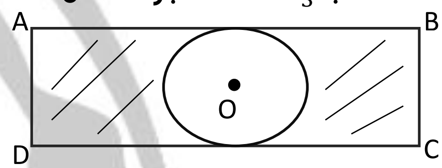
في الشكل المجاور $ABCD$ مستطيل فيه ABوDC مماسان للدائرة التي مركزها O ونصف قطرها$\sqrt{3}$.

$$AB = \sqrt{27}$$

1) احسب S_1 مساحة مستطيل.

2) احسب S_2 مساحة الدائرة.

3) احسب S_3 مساحة جزء مظلل.



الحل:

1) $S_1 =$ طول $\times$ عرض

$$S_1 = 2\sqrt{3} \times \sqrt{27}$$
$$S_1 = 2\sqrt{3} \times 3\sqrt{3}$$
$$S_1 = 18cm^2$$

2) $S_2 = \pi r^2$

$$S_2 = \pi.\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3\pi\ cm^2$$

3) $S_3 = S_1 - S_2$

$$S_3 = 18 - 3\pi\ cm^2$$

التمرين التاسع:

أولاً: ليكن لدينا المقدار

$$E = (x-1)^2 - 2(x-1) + 1$$

1) انشر E ثم اختزله.

2) حللE إلى جداء عوامل.

3) حل المعادلة $E = 0$

ثانياً: حل المتراجحة

$$(x-1)^2 \le x^2 + 3x$$

ومثل حلولها على مستقيم الأعداد.

الحل:

1)

$$E = x^2 - 2x + 1 - 2x + 2 + 1$$
$$E = x^2 - 4x + 4$$

2) $E = (x - 1 - 1)^2$

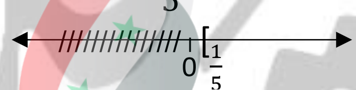
$$E = (x-2)^2$$

3) $(x-2)^2 = 0$

$$x - 2 = 0 => x = 2$$

ثانياً: $x^2 - 2x + 1 \le x^2 + 3x$

$$x^2 - x^2 - 2x - 3x \le -1$$
$$-5x \le -1$$
$$x \ge \frac{1}{5}$$



رابعاً: **الوحدة الرابعة:**

جمل المعادلات

شكل جملة المعادلتين:

$$ax + by = c$$
$$\grave{a}x + \grave{b}y = \grave{c}$$

حل جملة المعادلتين جبرياً أي إيجاد الحل المشترك

لدينا طريقتين

1b: حذف بالجمع:

1) نوحد أمثال x أو أمثال y مع معاكسه بالإشارة

2) نجمع المعادلة(1)مع المعادلة(2)

3) يظهر قيمة المجهول الأول نعوض في المعادلة إما (1) أو (2) ونظهر قيمة مجهول الثاني ويكون الحل المشترك ثنائية الحل (x, y)

2b: حذف بالتعويض

1) نكتب نجمة ✰ أي مجهول بدلالة الآخر

2) نعوض ✰ في المعادلة التي لم يصنع منها نجمة

3) نحل معادلة بمجهول واحد و نحسب قيمته و نعوضه في ✰ فيظهر قيمة المجهول الآخر فتظهر ثنائية الحل (x, y)

أمثلة: حل جمل المعادلات الآتية:

$$4x + y = -14 \ldots (1)$$
$$3x + 2y = -8 \ldots (2)$$

الحل: نوحد أمثال y بضرب المعادلة رقم (1) بالعدد (-2)

$$-8x - 2y = +28 \ldots (1)$$
$$3x + 2y = -8 \ldots (2)$$

بجمع المعادلة رقم (1) مع المعادلة رقم (2)

$$-5x = 20$$
$$x = -4$$

نعوض في المعادلة رقم (1)

$$4(-4) + y = -14$$
$$-16 + y = -14$$
$$y = -14 + 16 => y = 2$$

ثنائية الحل $(-4,2)$

للتحقق من الحل نعوض في الجملة

مثال2:

$$x - 11 = y + 11 \dots (1)$$
$$x - y = 2(y + 19) \dots (2)$$

الحل: نكتب ☆ من المعادلة رقم (1)

$$x = y + 11 + 11$$
$$x = y + 22 \dots ☆$$

نعوض ☆ في المعادلة رقم (2)

$$y + 22 - y = 2y + 38$$
$$22 - 38 = 2y$$
$$\frac{-16}{2} = \frac{2y}{2}$$
$$y = -8$$

نعوض y في ☆

$$x = -8 + 22$$
$$x = 14$$

ثنائية الحل $(14, -8)$

مثال3:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 7 \dots (1)$$
$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 8 \dots (2)$$

الحل: نضرب طرفين المعادلات بالعدد (6) للتخلص من الكسور

$$3x + 2y = 42 \dots (1)$$
$$2x + 3y = 48 \dots (2)$$

نضرب المعادلة رقم (1) بالعدد (-2) نضرب المعادلة رقم (2) بالعدد (3)

$$-6x - 4y = -84 \dots (1)$$
$$6x + 9y = 144 \dots (2)$$

نجمع المعادلتين (1) مع (2)

$$5y = +60 => y = 12$$

نعوض في المعادلة رقم (1)

$$3x + 2(12) = 42$$
$$3x + 24 = 42$$
$$3x = 42 - 24 => 3x = 18$$
$$x = 6 \quad (6,12)$$

مثال4: $\frac{x}{4} = \frac{y}{5} \dots (1)$

$$5x + 4y = 80 \dots (2)$$

الحل: $5x - 4y = 0 \dots (1)$

$$5x + 4y = 80 \dots (2)$$

نجمع المعادلتين (1) مع (2)

$$10x = 80 => x = 8$$

نعوض في المعادلة رقم (1)

$$5(8) - 4y = 0$$
$$40 - 4y = 0 => -4y = -40$$
$$y = 10$$

مثال5: $\sqrt{2}x + y = 5 \dots (1)$

$$x - \sqrt{2}y = 0 \dots (2)$$

الحل: نكتب ☆ في المعادلة (1)

$$y = 5 - \sqrt{2}x \dots . ☆$$

نعوض ☆ في المعادلة رقم (2)

$$x - \sqrt{2}(5 - \sqrt{2}x) = 0$$
$$x - 5\sqrt{2} + 2x = 0$$
$$3x = 5\sqrt{2} => x = \frac{5\sqrt{2}}{3}$$

نعوض قيمة x في ☆

$$y = 5 - \sqrt{2}\left(\frac{5\sqrt{2}}{3}\right)$$
$$y = \frac{5}{1} - \frac{10}{3}$$
$$y = \frac{15 - 10}{3} => y = \frac{5}{3}$$

جمل معادلات كلامية:

1) نفرض مجاهيل المسألة xy
2) نؤلف جملة عن طريق ربط بين المجاهيل وفرض المسألة
3) نحل جملة معادلتين.
4) نفي الفرض المسألة.

مثال: زار مجد وسلوى معرضاً للكتب، اشترى مجد ستة قصص وخمسة روايات بمبلغ 1900 واشترت سلوى ثلاثة كتب وروايتان بمبلغ 850.

لذا رمزنا لسعر القصص x وسعر الرواية y.

1) اكتب جملة معادلتين تعبران عما اشتراه مجد وسلوى من المعرض
2) بحل جملة المعادلتين أوجد سعر القصة ورواية.
3) استنتج سعر 30 قصة و25 رواية.

الحل: 1)

$$6x + 5y = 1900 \dots (1)$$
$$3x + 2y = 850 \dots (2)$$

2) نضرب المعادلة رقم (2) بالعدد (-2)

$$6x + 5y = 1900$$
$$-6x - 6y = -1700$$

نجمع المعادلتين

سعر الرواية $y = 200$

$$3x + 2(200) = 850$$
$$3x + 400 = 850$$
$$3x = 450 => x = 150$$

سعر القصة

3) $30 \times 150 + 25 \times 200 = 9500$

مثال2: جد عددين صحيحين موجبين مجموعهما (123) وإذا قسمنا أكبرهما على مثلي

أصغرهما كان خارج القسمة (4) وباقيها (6).

الحل: نفرض العددين xوy

$$x+y=123\ ...(1)$$
$$8y+6=x\ ...(2)$$

من المعادلة رقم (2) نعوض في المعادلة رقم (1)

$$8y+y+6=123$$
$$9y=117$$
$$y=13$$
$$x=110$$

مثال3: قبل ثلاث سنوات كان عمر خالد خمسة أمثال عمر محمد وبعد ست سنوات من الآن سيصبح عمر خالد ثلاثة أمثال عمر محمد أوجد عمر خالد ومحمد.

الحل: نفرض عمر خالد x

نفرض عمر محمد y

$y-3$ محمد قبل ثلاثة سنوات	$x-3$ خالد قبل ثلاثة سنوات

$$x-3=5(y-3)\ ...(1)$$

$y+6$	$x+6$

بعد ستة سنوات

$$x+6=3(y+6)\ ...(2)$$

$$x-5y=-12\ ...(1)$$
$$x-3y=12\ ...(2)$$

نضرب المعادلة (2) بالعدد (-1)

$$x-5y=-12$$
$$-x+3y=-12$$

بجمع المعادلتين $-2y=-24$

$$y=12$$
$$x-5(12)=-12$$
$$x-60=-12 => x=48$$

ملاحظات:

1) إذا كان أمثال x أو أمثال y تساوي الواحد في جملة معادلتين نحل حذف بالتعويض أما العكس نحل حذف بالجمع.

2) للتحقق من الثنائية أنها حل لجملة أو ليس حلاً نعوض ثنائي في كل من جملتين. الأولى يجب ان تكون محققة والثانية يجب ان تكون محققة ايضاً.

معادلة المستقيم.....

أشكال معادلة المستقيم:

1) $y=mx+b$

مستقيم لا يمر من بدأ الاحداثيات.

2) $y=mx$

المستقيم يمر من مبدأ الإحداثيات.

d_2	x	y
A	0	0
B	1	2

3) $x=$ عدد

مستقيم عامودي يوازي محور تراتيب

4) $y=$ عدد

مستقيم أفقي يوازي محور الفواصل.

ملاحظة:

لأثبات نقطة تنتمي إلى مستقيم أو لا تنتمي نعوض في معادلة المستقيم xوy من نقطة إذا تحققت المعادلة تكون النقطة تنتمي وإذا لم تتحقق المعادلةإذاً النقطة لا تنتمي إلى المستقيم.

لرسم المستقيم من الشكل

$$y=mx+b$$
$$y=mx$$

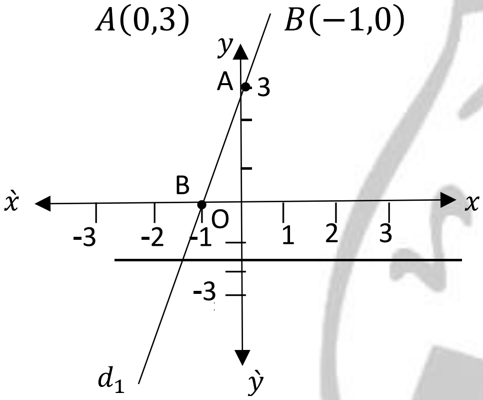
يلزم نقطتان، نعرف أحد النقاط فواصل صفر ونعوض في معادلة المستقيم فبظهر ترتيبها. ونعوض في النقطة الثانية تراتيب صفر ونحسب فواصلها ونصل بين النقطتين.

مثال: ارسم المستقيم

$$d_1: y=3x+3$$

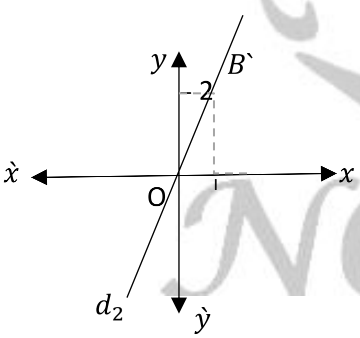
الحل: نوجد نقطتان

$A(0,3)$ $B(-1,0)$



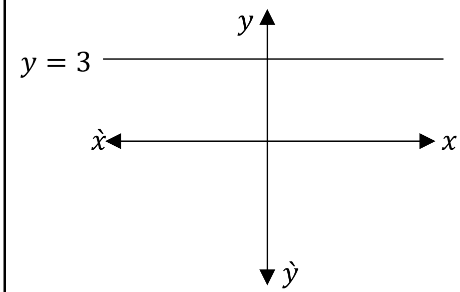
ارسم المستقيم الذي معادلته

$$d_2: y-2x=0$$



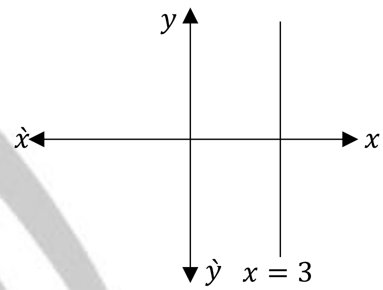
ارسم المستقيم الذي معادلته

$2y = 6 => y = 3$



ارسم المستقيم: $x - 3 = 0$

$x = 3$



ملاحظة: عندما يقول المستقيم يقطع محور الاحداثيات الفواصل نضع $y = 0$ ونحسب x من خلال معادلة المستقيم الذي قطع.

عندما يقول المستقيم يقطع محور احداثيات تراتيب نضع $x = 0$ ونحسب y.

حل جملة معادلتين بيانياً

خطوات الحل:

1) نرسم المستقيم الذي ممثل بالمعادلة الأولى ونرسم المستقيم الممثل بالمعادلة الثانية.

2) يتقاطع المستقيمان في نقطة نسقط هذه النقطة على محور الاحداثيات الفواصل والتراتيب وتكون ثنائية الحل هي نقطة التقاطع.

مثال: ليكن لدينا المستقيمان

Δ وd

الممثلان بالمعادلتان.

$$d_1: x + 2y = 4$$
$$d_2: x - 2y = 0$$

1) ارسم المستقيمان d_1وd_2

2) حل جملة المعادلتين بيانياً

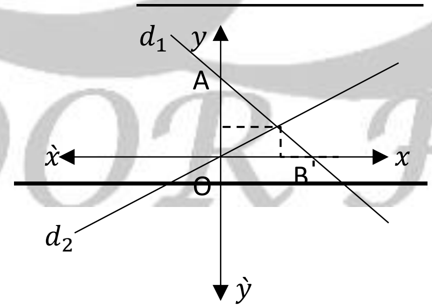
3) تأكد من الحل بالتعويض بالمعادلتين.

الحل: لرسم d_1 يلزمنا نقاط مساعدة

d_1	x	y
A	0	2
B	4	0

لرسم d_2 يلزمنا نقاط مساعدة

d_2	x	y
O	0	0
$\acute{B}$	+2	1



2) حل جملة هي نقطة تقاطع (2,1) ثنائية الحل.

3) نعوض في جملة معادلتين

$$x + 2y = 4$$
$$x - 2y = 0$$
$$2 + 2(1) = 4$$
$$2 + 2 = 4$$

$4 = 4$محققة

$$2 - 2(1) = 0$$

$2 - 2 = 0$ محققة

مسائل 100 علامة:

لدينا في معلم متجانس الاتي

لدينا dوΔ متعامدان ولدينا Nc يعامد

ox والمطلوب:

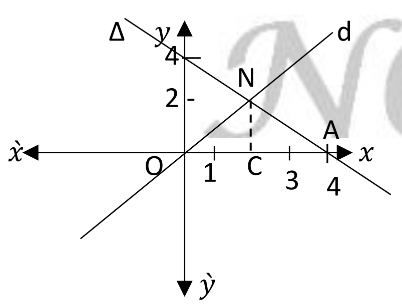
1) ماهي العبارة y بدلالة x بالمستقيم d.

2) استنتج الحل البياني لجملة معادلتين المتمثلتين بالمستقيم dوΔ

3) احسب مساحة المثلثين OCAوONA

4) احسب $\sin(A)$ وما نوع المثلث ONA.

5) ما مساحة الدائرة ومحيطها التي نصف قطرها OC.



الحل:

1) المستقيم d معادلته $y = mx$

حتى نحسب $m = \frac{y}{x}$

$$m = \frac{2}{2} = 1$$
$$y = x$$

2) الحل البياني لجملة معادلتين

$N(2,2)$

3) حساب مساحة

$$S_{ONA} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعدة}}{2}$$

$$S_{ONA} = \frac{4 \times 2}{2} = 4cm^2$$

$$S_{OCN} = \frac{\text{جداء ضلعين القائمين}}{2}$$

$$S_{OCN} = \frac{2 \times 2}{2} = 2cm^2$$

4) $\sin(A) = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

لحساب ON: $ON =$ المقابل

حسب مبرهنة فيثاغورث بالمثلث ONC.

$$ON^2 = OC^2 + CN^2$$
$$ON^2 = (2)^2 + (2)^2$$
$$ON^2 = 8 => ON = 2\sqrt{2}$$
$$\sin(\widehat{A}) = \frac{ON}{OA} = \frac{2\sqrt{2}}{4}$$
$$\sin(\widehat{A}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\hat{A} = 45^\circ$$

والمثلث ONA قائم ومتساوي الساقين.

5) $S = \pi . r^2$

$$S = \pi . 4 = 4\pi \, cm^2$$

$$P = 2\pi . r => 2\pi(2)$$
$$P = 4\pi \, cm$$

مسألة 100 علامة:

لدينا المستقيمان d و Δ

$$d: y = \frac{1}{2}x$$
$$\Delta: y + 2x = 5$$

أولاً:

1) حل جملة المعادلتين جبرياً.

2) هل النقطة $l(2,3)$ تنتمي الى المستقيم Δ أم لا.

3) هل الثنائية (1,3) هي حل للمعادلة.

4) ارسم المستقيمان d و Δ في معلم متجانس وعين N نقطة تقاطع المستقيمين.

5) جد احداثيات النقطة A نقطة تقاطع Δ مع محور فواصل واحداثيات النقطة M نقطة تقاطع Δ مع محور التراتيب

6) احسب $\tan(\widehat{A})$ في المثلث MOA واحسب مساحة المثلث NOA.

الحل:

$$d: y = \frac{1}{2}x \;...(1)$$
$$\Delta: y + 2x = 5 \;...(2)$$

1) الحل حذف بالتعويض من المعادلة رقم (1)

نكتب ☆ نجمة ونعوضها في المعادلة رقم (2).

$$\underset{(1)}{\frac{1}{2}}x + \underset{(2)}{\frac{2x}{1}} = 5$$

$$\frac{5}{2}x = 5$$
$$x = \frac{5}{\frac{5}{2}}$$
$$x = \frac{5}{1} \times \frac{2}{5} => x = 2$$

من ☆ $y = \frac{1}{2}x$

$$y = \frac{1}{2}(2) => y = 1$$

ثنائية الحل $(2,1)$

---

2) نعوض في معادلة المستقيم Δ

(2,3)

$$3 + 2(2) \overset{?}{=} 5$$
$$3 + 4 = 5$$
$$7 \neq 5$$

النقطة l لا تنتمي الى المستقيم Δ

---

3) نعوض في المعادلتين

- $y = \frac{1}{2}x => 3 \overset{?}{=} \frac{1}{2}(1)$
- $y + 2x = 5 => ?$

$$3 + 2(1) = 5$$

معادلة الأولى غير محققة

المعاجلة الثانية محققة وبما أن المعادلة الأولى غير محققة إذاً الثنائية (1,3) ليست حل للجملة.

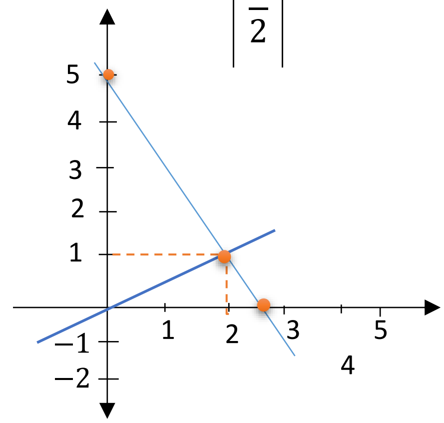
---

4) لرسم المستقيم d نفرض نقاط مساعدة

d	x	y
O	0	0
A	2	1

لرسم المستقيم Δ نفرض نقاط مساعدة

Δ	x	y
M	0	5
A	$\frac{5}{2}$	0



5) A نقطة تقاطع Δ مع محور الفواصل نضع $y = 0$

$0 + 2x = 5 => x = \frac{5}{2}$

M نقطة تقاطع محور التراتيب مع المستقيم Δ نضع $x = 0$

$y = 5 \quad M(0,5)$

6) $\tan(\widehat{MA0}) = \frac{5}{2.5} = 2$

$S_{NOA} = \frac{2.5 \times 1}{2} = 1.25\ cm^2$

مسألة 100 علامة:

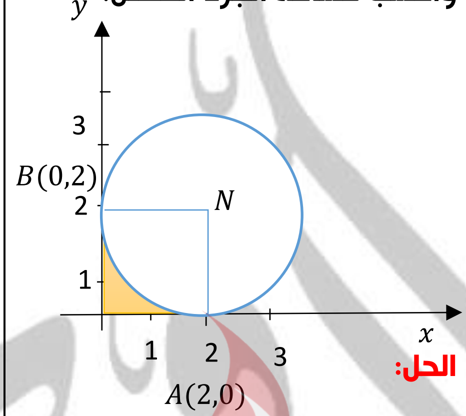
في معلم متجانس مرسوم فيه دائرة مركزها N ويمسها محور فواصل من النقطة $A(2,0)$ ويمسها محور التراتيب في النقطة $B(0,2)$ **المطلوب:**

1) تحقق أن النقطتين $A(2,0)$ و$B(0,2)$ تنتميان للمستقيم d الذي معادلته $d : y + x = 2$

2) من معلم متجانس ارسم المستقيم Δ الذي معادلته $y - x = 0$

3) جد احداثيتين نقطة تقاطع المستقيمين d و Δ

4) احسب قياس القوس $\widehat{AB}$ واحسب مساحة المربع $OANB$ واحسب مساحة الجزء المظلل.



الحل:

1) نعوض في معادلة المستقيم

$d: y + x = 2 \quad A(2,0)$

$0 + 2 = 2 => 2 = 2$

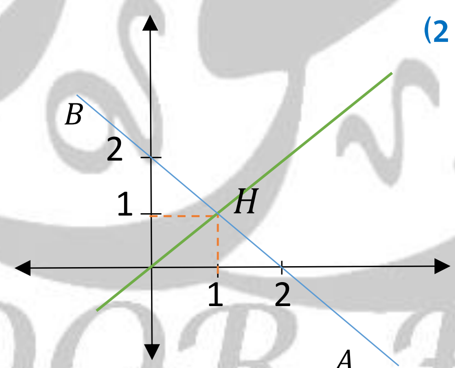
محققة إذاً النقطة تنتمي $A \in d$

$B(0,2)$

$2 + 0 = 2 => 2 = 2$

محققة , النقطة B تنتمي الى المستقيم d . $B \in d$

2)



نقاط مساعدة لرسم المستقيم Δ

Δ	x	y
A	1	1
O	0	0

3) نقطة التقاطع هي $H(1,1)$ ثنائية الحل.

4) قياس الزاوية $\widehat{AB} = A\hat{N}B$

لأن زاوية المركزية تساوي قياس القوس المقابل لها

$A\hat{N}B = 90° \quad \widehat{AB} = 90°$

$S_{ONAD} = (\text{طول الضلع})^2$

$S_{ONAD} = (2)^2 = 4\ cm^2$

$S_{\text{مظلل}} = S_{\text{مربع}} - S_{\text{ربع دائرة}}$

$S_{\text{مظلل}} = 4 - \frac{1}{4}\pi.4$

$S_{\text{مظلل}} = 4 - \pi\ cm^2$

الوحدة الخامسة: (التابع)

1) التابع هو إجرائية تربط بكل قيمة للمتحول x عدداً واحداً $f(x)$

2) يسمى $f(x)$ صورة x ويسمى x سلف $f(x)$.

3) يمكن لرمز التابع أن يكون $g \quad h \quad f$

4) تدعى $f(x) = y$ بقاعدة ربط التابع (الصيغة).

طرق تعريف التابع:

1) بإعطاء صيغة

يطلب طلبين مع تغير صيغة السؤال

1. ما صورة عدد □ أو أوجد $f(\text{عدد})$
2. • ما اسلاف العدد □.

• حل المعادلة $f(x) = \text{عدد}$

• ما أعداد التي صورتها .

أولاً: عند إيجاد صورة نعوض بدل كل x عدد المعطى ومن ثم نحسب $F(x) =$ لأن المعطى x والمراد حسابه هو y, $F(x) = y$

أم عند إيجاد اسلاف نضع بدل $f(x)$ العدد المعطى ونحسب قيم x عن طريق حل معادلة.

لأن المعطى y والمطلوب x

أمثلة:

ليكن لدينا التابع المعرف بالصيغة

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 4$$

1) أحسب صورة العدد 1 و $f(0)$.

2) أوجد صورة العدد $x = -1$

3) عين اسلاف العدد 4 أي حل المعادلة $f(x) = 4$

الحل:

1) $f(1) = 3(1)^2 - 5(1) + 4$
$f(1) = 2$
$f(0) = 3(0)^2 - 5(0) + 4$
$f(0) = 4$

2) $f(-1) = 3(-1)^2 - 5(-1) + 4$
$f(-1) = 3 + 5 + 4 = 12$

3) $f(x) = 4 => 3x^2 - 5x + 4 = 4$
$3x^2 - 5x = 0 => x[3x - 5] = 0$
اما $x = 0$
او $3x - 5 = 0 => 3x = 5 => x = \frac{5}{3}$

مثال2: ليكن لدينا التابع $h(x)$ معرف بالصيغة

$$h(x) = x^2 - 6x + 9$$

1) اكتب $h(x) = (x - a)^2$

2) أوجد $h(1)$ و $h(-2)$

3) أوجد اسلاف العدد 9.

4) أوجد قيم x التي تجعل قيمة التابع معدومة.

الحل:

1) $h(x) = x^2 - 6x + 9 => (x - 3)^2$
$h(x) = (x - 3)^2$

2) $h(1) = (1 - 3)^2 = 4$
$h(-2) = (-2 - 3)^2 = 25$

3) $(x - 3)^2 = 9 =>$ اما $x - 3 = 3$
او $x - 3 = -3$
أخر نقطة
اما $x = 6$ او $x = 0$

4) $h(x) = 0 => (x - 3)^2 = 0$
$x - 3 = 0 => x = 3$

ثانياً: يعرف التابع بإعطاء رسمة:

1) أوجد مجموعة تعريف التابع

نسقط أول نقطة وآخر نقطة على محور الفواصل ونكتب.

$$D_f = [x_1 \ , x_2]$$

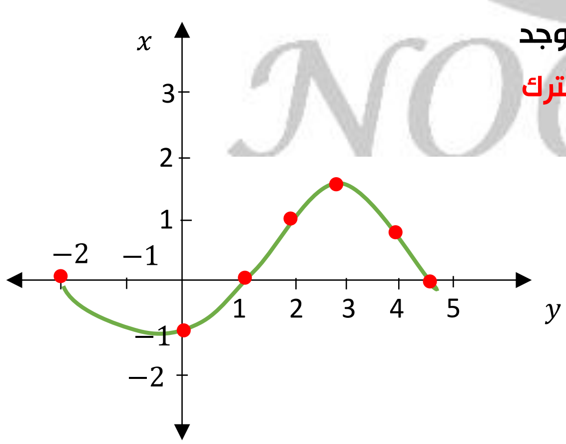
2) إيجاد صورة عدد أو (العدد) f نرسم مستقيم معادلته عدد معطى $x =$ ومن ثم نقطة تقاطع المستقيم مع الخط البياني المرسوم نسقطها على محور التراتيب.

3) إيجاد أسلاف أو حل المعادلة عدد $f(x) =$ او ما الاعداد التي صورتها (عدد), نرسم مستقيم معادلته عدد معطى $y =$ وعند تقاطع الخط البياني نسقط على محور الفواصل و نأخذ الأسلاف أي الأكسات.

4) تعين أكبر قيمة وأصغر قيمة للتابع المعرف بالرسمة التالية

1. أوجد مجموعة تعريف التابع
2. أوجد $f(3)$ و $f(0)$
3. جد أسلاف العدد (1)
4. عين أكبر قيمة أصغر قيمة
5. ارسم مستقيم معادلته $y = 2$ وأوجد

الحل المشترك



الحل:

1. $D_f = [-2,4.5]$
2. $f(0) = 1$ $\quad f(3) = 2$
3. $f(x) = 1 => x_1 = 2 \quad x_2 = 4$
4. أكبر قيمة $f(3) = 2$
أصغر قيمة $f(0) = -1$
5. الحل المشترك $x = 3\ ,\ y = 2$

ثالثاً: تعريف التابع بالجدول

في هذه الطريقة نتعرف على تابع من خلال جدول يربط عدد الاسطر الأول عدداً من السطر الثاني.

مثال: ليكن لدينا الجدول المرفق يمثل تابعاً F يربط عدد المقالات بعدد اسطرها في إحدى المجلات.

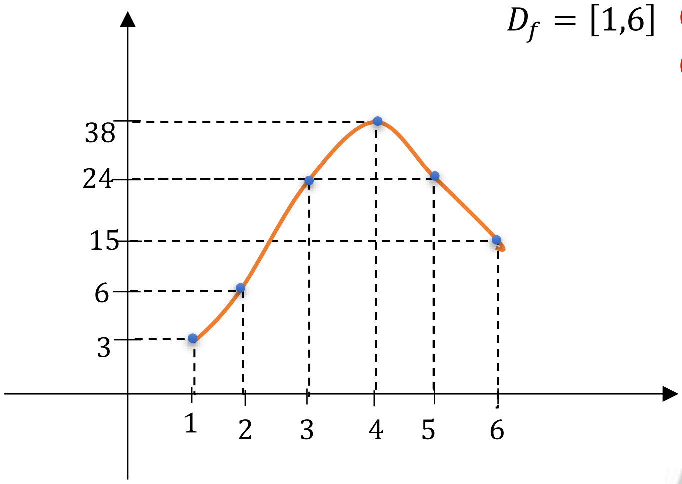
عدد الأسطر	6	5	4	3	2	1	x
عدد المقالات	15	24	38	24	6	3	$F(x)$

1) ماذا تعني $F(6) = 15$ و $F(1) = 3$
2) كم عدد المقالات المؤلفة من 4 أسطر عبر عن ذلك برموز رياضية باستعمال F.
3) ما صورة العدد 5 وما الأعداد التي صورتها العدد 15
4) أوجد مجموعة تعريف التابع F.
5) ارسم بيانياً التابع F .

الحل:

1) تعني كتابة $F(6) = 15$ صورة العدد 6 هي 15 وتعني أن عدد المقالات المؤلفة من ستة أسطر هي 15 مقالة وتعني كتابة $F(1) = 3$ صورة العدد (1)
هي (3) وعدد المقالات المؤلفة من سطر واحد هي ثلاثة مقالات.
2) عدد المقالات المؤلفة (38) مقالة $F(4) = 38$
3) $F(5) = 24 \qquad F(x) = 15 => x = 6$

4) $D_f = [1,6]$
5)



مثال: (هام) ليكن لدينا التابعان $F(x)$ و $g(x)$

$F(x) = (x-1)^2 + 1$
$g(x) = (x-1)^2$

1) انسخ وأكمل الجدول

x	1	2	3	4
$F(x)$				
$g(x)$				

2) ماذا تتوقع؟ عزز توقعك باختيار قيم أخرى من x.
3) أثبت ما توقعت.

الحل: يوجد ضمن دورة المكثفة.

اختر الإجابة الصحيحة:

1) ليكن h هو التابع المعطى وفق $h(x) = x^2 + 2x$
أحد اسلاف العدد (0) هو:

A. (0) B. (3) C. (2)

2) إذا كان F المعرف بالصيغة $F(x) = 2x - \sqrt{8}$
A. $(\sqrt{2})$ B. $(4\sqrt{2})$ C. (0)

3) التابع المعرف بالصيغة $F(x) = \frac{1}{x}$ فإن $F\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)$ يساوي.

A. $(2\sqrt{2})$ B. (8) C. $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

4) F تابع معرف بالعلاقة $F(x) = (x-1)^2$ فإن $F(\sqrt{3}+1)$ يساوي:

A. (3) **B.**$(\sqrt{3}+1)$ **C.** (2)

ضع كلمة صح أو كلمة غلط:

1) إذا كان $F(x) = x^2 + 4$ فإن للمعادلة $F(x) = 0$ لها حلان.

2) ليكن التابع $F(x) = (x-2)(x-5)$ فإن للمعادلة لها حلان.

3) k هو تابع المعرف وفق $k(x) = (x-1)^2$ يوجد عددان صورة كل منهما 9 وفق هذا التابع.

4) r تابع الذي يربط بكل عدد موجب جذر تربيعي موجب يوجد عددان صورة كل منهما تساوي (1).

5) نقرن بكل عدد x بعدد y يحقق $(y-x)(y-2x)(y-3x) = 0$ إذا نعرف العلاقة هذه بالتابع.

حل التمرينات الآتية:

1) ليكن لدينا التابع المعرف بالصيغة:

$$F(x) = (x-2)^2 - 4x + 8$$

والتابع المعرف وفق $h(x) = (x-2)(x-6)$

1) أثبت أن $F(x) = h(x)$

2) حل المعادلة $F(x) = 0$

الحل:

1) $F(x) = x^2 - 4x + 4 - 4x + 8$

$F(x) = x^2 - 8x + 12$

$h(x) = x^2 - 6x - 2x + 12$

$h(x) = x^2 - 8x + 12$

إذاً $F(x) = h(x)$

2) بما أن $F(x) = h(x)$ نحل المعادلة $h(x) = 0$

$(x-2)(x-6) = 0$

اما $x - 2 = 0 => x = 2$

او $x - 6 = 0 => x = 6$

---

2) ليكن التابع المعرف $F(x) = 2x + 1$

والمطلوب: **أولاً:**

1) احسب $F(1)$ و $F(0)$ و $F\left(\frac{1}{2}\right)$

2) جد اسلاف العدد 5.

ثانياً: حل المتراجحة $2x + 1 \leq 5$ ومثل حلولها على مستقيم الأعداد.

الحل: أولاً:

1) $F(1) = 2(1) + 1 = 3$

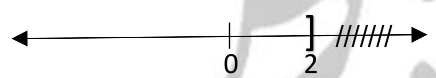
$F(0) = 1$

$F\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 2$

2) $F(x) = 5$

$2x + 1 = 5 => 2x = 4 => x = 2$

ثانياً: $2x + 1 \leq 5 => 2x \leq 4 => x \leq 2$



الوحدة السادسة:

مبادئ الاحتمال والإحصاء

أولاً: **مفهوم الاحتمالات.**

1) تجربة العشوائية: نقول عن التجربة عشوائية هي مجموعة نتائج لا نعلم بالبداية أي منها سوف يحدث مثل إلقاء حجر نرد أو إلقاء قطعة نقود.

2) فضاء العينة: هي عبارة عن مجموعة نتائج الممكنة في التجربة العشوائية.

3) الحدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة.

4) رمز الحدث اما A أو B أو C وقانون الاحتمال العام

$$P\left(\text{رمز حدث}\right) = \frac{\text{عدد حالات عشوائية}}{\text{عدد حالات الكلية}}$$

5) مجموع الاحتمالات أحداث بسيطة من تجربة يساوي 1 وأن أي احتمال $0 \leq P(A) \leq 1$

6) الحدث الغير قابل للتحقق من حدوثه نسميه حدث مستحيل واحتماله $P(\emptyset) = 0$

7) الحدث المؤكد حدوثه هو حدث أكيد واحتماله $P(\Omega) = 1$

مثال: في تجربة إلقاء حجر نرد متوازن مرة واحدة

1) أكتب فضاء العينة
2) احسب احتمال الحدث A ظهور عدد زوجي.
3) احسب احتمال الحدث B ظهور عدد فردي.
4) احسب احتمال C ظهور عدد أولي.
5) احسب احتمال الحدث D ظهور عدد h يحقق $1 \leq h \leq 6$ ماذا نسمي الحدث D.
6) احسب احتمال الحدث E ظهور عدد h يحقق $h > 6$ ماذا نسمي الحدث.

الحل:

1) $\Omega = [1,2,3,4,5,6]$
2) $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
3) $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
4) $P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
5) $P(D) = 1$ حدث مؤكد
6) $P(E) = 0$ حدث مستحيل

ثانياً: العمليات على المجموعات...

التقاطع رمزه $\cap$ التقاطع بين مجموعتين أو حدثين A أو B نأخذ منها العناصر المشتركة فقط الدلالة المعبرة عن تقاطع وقوع حدثين في آنٍ معاً أو حرف (و).

الاجتماع رمزه $\cup$ اجتماع مجموعتين او حدثين A و B نأخذ العناصر المشتركة وغير مشتركة دلالة المعبرة من الاجتماع هو وقوع الحدثين أحدهما على الأقل أو الحرف (أو).

مثال: نتأمل المجموعة $\Omega = [0,1,2,3,4,5,6,7,8,9]$
وليكن الحدث A الحدث الموافق للأعداد الزوجية.
وليكن الحدث B الحدث الموافق للأعداد الفردية.
وليكن الحدث C موافق لمضاعفات العدد 4
وليكن D موافق للأعداد الأولية
وليكن E حدث موافق للأعداد الأولية أو الأعداد الزوجية والحدث F الموافق للأعداد الأولية ومضاعفات العدد 4.

---

1) اكتب عناصر المجموعات A, B, C, D, E, F
2) اكتب بصيغة القائمة $A \cap B, A \cup B, A \cap C, A \cup C,$
$B \cup C, B \cap C, D \cap C$.

الحل:

1) $A = [0,2,4,6,8] \quad B = [1,3,5,7,9]$
$C = [4,8,0] \quad E = D \cup A[0,2,3,4,5,6,7,8,]$
$F = D \cap C = [\emptyset]$

---

2) $A \cap B = \emptyset => A \cup B = \Omega$
$A \cap C = [0,4,8] \quad A \cup C = [0,2,4,6,8]$
$B \cup C = [1,3,4,5,7,8,9]$
$B \cap C = \emptyset \quad D \cap F = [\emptyset]$

الحدثين المتنافيين: نقول عن حدثين أنهما متنافيان إذا استحال تحققهما في آنٍ معاً أي أن $A \cap B = \emptyset \quad A \cup B \neq \Omega$
$P(A) + P(B) \neq 1$
$P(A) + P(B) = P(A \cup B)$

الحدثين المتعاكسين: هما حدثين إذا لم يقع الحدث A يقع حصراً الحدث $\acute{A}$ المعاكس له.
$A \cap B = \emptyset \quad A \cup B = \Omega$
$P(A) + P(B) = 1$

مثال شامل: نلقي حجر نرد متجانس محمل بالأرقام
$\Omega = [1,2,3,4,5,6]$
A حدث ظهور عدداً أصغر من او يساوي 2
B ظهور عدد أكبر تماماً من 4.
I ظهور أعداد فردية
J ظهور اعداد زوجية

(1 هل الحدثين A و B متنافيان ولماذا ثم احسب احتمال $P(A), P(B)$

(2 احسب احتمال الحدث E ظهور عدد n يحقق $n \leq 2$ أو $n > 4$.

(3 هل الحدثين I وJ متعاكسان ولماذا احسب احتمال الحدث I

(4 احسب احتمال J بطريقتين مختلفتين

الحل: $A = [1,2]$ $\quad B = [5,6]$

(1 نلاحظ ان الحدثين A و B متنافيان لأن يستحال تحققهما في آن معاً.

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(2 $P(E) = P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

(3 I ظهور الأعداد فردية.

$$I = [1,3,5] \quad J = [2,4,6]$$

نعم هذين الحدثين متعاكسين لإن إن لم يظهر الأعداد الفردية تظهر الاعداد الزوجية $P(I) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(4 ط$_1$: $P(J) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

ط$_2$: $P(I) + P(J) = 1$

$$P(J) = 1 - P(I) = 1 - \frac{1}{2}$$

$$P(J) = \frac{1}{2}$$

المخطط الشجري وتجارب بسيطة ومركبة..

ملاحظات:

1. المخطط الشجري يستخدم اما عند طلب او عندما تكون التجربة مركبة.
2. عدد أفرع المخطط الشجري يساوي عدد نتائج المختلفة
3. احتمال حدث مؤلف من أكثر من فرع يساوي مجموع احتمالات الأفرع المؤدية إليه.
4. مجموع الأفرع الصادرة عن عقدة واحدة دوماً تساوي 1
5. نسمي فرعين متتالين في تجارب المركبة مسار.
6. احتمال مسار هو جداء ضرب احتمالات الفرعين المتتالين المؤلف منه المسار.

يحوي صندوق عشر كرات متماثلة مرقمة بالأرقام التالية

1,1,1,1,2,2,2,3,3,4

نسحب عشوائياً كرة ونقرأ رقمها

(1 ارسم مخطط شجرة الإمكانيات وزود فروعها بالاحتمالات ونتائج الممكنة

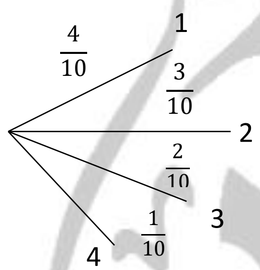
(2 احسب احتمال الحدث A سحب كرة تحمل رقم 2

(3 احسب احتمال الحدث B سحب كرة رقمها على الأقل 2

(4 احسب احتمال C سحب كرة رقمها 2 على الأكثر.

الحل:

(1



(2 $P(A) = \frac{3}{10}$

(3 $P(B) = \frac{3}{10} + \frac{2}{10} + \frac{1}{10} = \frac{6}{10}$

(4 $P(C) = \frac{4}{10} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$

يحوي مغلف خمسة بطاقات متماثلة ثلاث منها زرقاء B واثنتان خضراوان G نسحب من المغلف عشوائياً بطاقة ثم نعيدها إلى المغلف لنسحب منه عشوائياً بطاقة للمرة الثانية ونسجل لوني البطاقتين المسحوبتين.

(1 ارسم شجرة الإمكانات وزود فروعها بالاحتمالات النتائج.

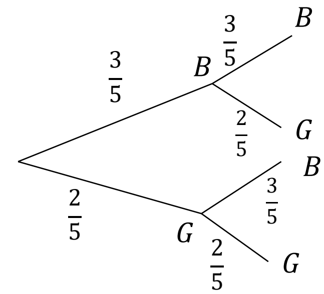
(2 احسب احتمال سحب بطاقتين زرقاوتين

(3 احسب احتمال سحب بطاقتين من نفس اللون

(4 احسب احتمال الحدث بطاقتين من لونين مختلفين

الحل:

1) L



2) (B,B)

$$P(A)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$$

3) (B,B)أو(G,G)

$$P(A)+P(B)$$
$$\frac{9}{25}+\frac{4}{25}=\frac{13}{25}$$

4) اما (B,G) أو (G,B)

$$P(C)=\frac{6}{25}+\frac{6}{25}=\frac{12}{25}$$

في صف يحوي على 40 طالب من الذكور والإناث لدينا10 طلاب ذكور يتعلمون اللغة الإنكليزية وخمسة طلاب لا يتعلمونها ويوجد 20 طالبة تتعلم اللغة الإنكليزية من أصل 25 نختار عشوائياً.

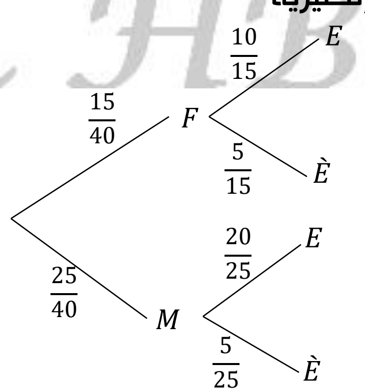
1) ارسم شجرة الإمكانات وحمل فروعها بالاحتمالات النتائج بعد ترميز التجربة.
2) ما احتمال أن يكون الطالب ذكر
3) ما احتمال أن يكون الطالب انثى
4) ما احتمال أن يكون ذكر ويتعلم اللغة الإنكليزية
5) ما احتمال ان يكون انثى لا تتعلم اللغة الإنكليزية

الحل: نرمز بالرموز: F طالب ذكر لا يتعلم

M طالبة انثى E يتعلم اللغة الإنكليزية

$\grave{E}$ لا يتعلم اللغة الإنكليزية

1)



2) $P(F)=\frac{15}{40}$

3) $P(M)=\frac{25}{40}$

4) (F,E)

$$P(C)=\frac{15}{40}\times\frac{10}{15}=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$$

5) $(M,\grave{E})$ $P(D)=\frac{25}{40}\times\frac{5}{25}=\frac{5}{40}=\frac{1}{8}$

مقاييس الإحصائية والربيعات

- متوسط الحسابي

$$\bar{x}=\frac{\text{مجموع مفردات العينة}}{\text{عدد مفردات العينة}}$$

- المدى E: $E=x_{max}-x_{min}$
- المنوال الأكثر فئة تكراراً Mميو
- وسيط$<=M<=Q_2$ ربيع ثاني
- ربيع اول Q_1 ربيع ثالثQ_3 الوسيط <=عينة

فردية: عدد المفردات $=2n+1$

نسحب قيمة n <= يكون وسيط المفردات التي ترتيبها درجتها $n+1$

عدد المفرادات العينة الزوجية   عدد المفردات $=2n$

نسحب قيمة n <= يكون وسيط للمفردتين التين ترتيبهما n و$n+1$

$$m=\frac{\blacksquare+\blacksquare}{2}$$

ربيع اول هو الوسيط للمفرادات الأصغر من Q_2

ربيع ثالث Q_3 هو وسيط المفردات الأكبر من Q_3

مثال: ليكن لدينا العينة التالية:

[6,7,9,9,9,10,12,12,14,15,]

1) أوجد المتوسط الحسابي.
2) احسب المدى
3) اوجد المنوال.
4) ماقيمة الوسيط.
5) أوجد Q_1 و Q_2 .

الحل :

$$[6,7,9,9,9,10,12,12,14,15,]$$

$$\bar{x} = \frac{6+7+9+9+9+10+12+12+14+15}{10}$$

$$\bar{x} = \frac{103}{10} = 10,3$$

2) $E = x_{max} - x_{min}$

$E = 15 - 6 = 9$

3) المنوال $M = 9$

4) عينة زوجية $M => 2n = 10$

$n = 5 => n+1 = 6$

$$M = \frac{9+10}{2} = \frac{19}{2} = 9,5$$

9,5

5) $\underbrace{6,7,9,9,9}_{Q_1},\uparrow,\underbrace{10,12,12,14,15}_{Q_3}$

نستخرج منها $[6,7,9,9,9,]$

Q_1 عينة فردية

$2n+1 = 5 => 2n = 5 => n = 2$

$n+1 = 3$

$Q_1 = 9$

$[10,12,12,14,15]$

عينة فردية $n = 2$ $2n+1 = 5$

$n+1 = 3$

$Q_3 = 12$

اختر الإجابة الصحيحة:

1) وسيط عينة الإحصائية $9,3,,1,12,8,6,5,3$

A. (9) B. (6) C. (3)

2) احتمال حدث بسيط هو

A. (1) B. (0) C. عدد محصور بين(0) والعدد1

3) إذا كان احتمال الحدث $P(A) = \frac{2}{3}$ فان احتمال المعاكس $P(\acute{A})$ هو

A. $\left(\frac{1}{3}\right)$ B. $\left(\frac{2}{3}\right)$ C. (1)

4) تحتوي جرة على كرة حمراء R و كرة خضراء V وأخرى بيضاء B نعلم ان $P(R) = \frac{3}{8}$ و $P(V) = \frac{1}{8}$ فان احتمال $P(B) = ?$ هو

A. $\left(\frac{7}{8}\right)$ B. $\left(\frac{1}{2}\right)$ C. $\left(\frac{3}{8}\right)$

سؤال ضع كلمة صح او كلكة غلط

1) احتمال الحدث E يساوي مجموع احتمالات فروع الشجرة التي تؤدي ال الحدث E (صح)

2) احتمال أي حدث Ω هو $P(\Omega) = 1$ (غلط)

3) نقول عن حدثين متنافيان اذا كان مجموع احتمالهما يساوي العدد واحد (غلط)

4) تجربة احتمالية لها نتيجتان احتمال النتيجة الأولى 0,18 اذا احتمال النتيجة الثانية هي 0,18 (غلط)

تمرين: صندوق يحوي 5 بطاقات متماثلة كتب عليها الأرقام 2,2,3,,4,4 نسحب عشوائياً من الصندوق بطاقة واحدة ونقرأ رقمها و المطلوب

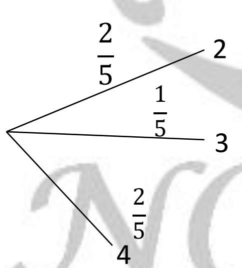
1) ارسم شجرة الإمكانات وزود فروعها بالاحتمالات ونتائج الممكنة

2) اذا كان الحدث A حدث سحب بطاقة تحمل رقماً أصغر تماماً من 4 احسب احتمال كل من الحدثين A و $\acute{A}$ المعاكس للحدث A .

3) احسب وسيط العينة $[[2,2,3,4,4]$

الحل:

1)



2) $P(A) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

$$P(\acute{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{5}$$

$$P(\acute{A}) = \frac{2}{5}$$

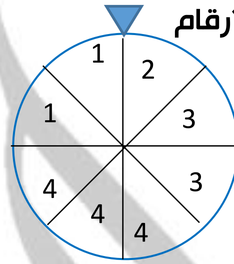
3) العينة فردية $2n + 1 = 5$

$$2n = 4 \quad n = 2 \quad n + 1 = 3$$
$$M = 3$$

في الشكل المجاور دولاب مقسم الى ثمانية

اقسام متساوية كتب عليها الأرقام

1,1,2,3,3,4,4,4



ندور الدولاب مرة واحدة

ونقرأ الرقم الذي يستقر

على المؤشر لنعرف الحدثين

الحدث A ان يستقر المؤشر عند العدد3

الحدث B ان يستقر المؤشر عند عدد أكبر تماماً

من 2 والمطلوب.

1) ارسم شجرة الإمكانات وزود فروعها

بالاحتمالات ونتائج الممكنة

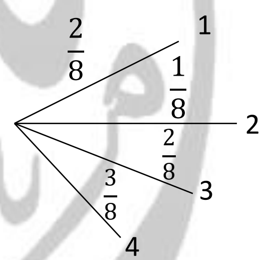
2) احسب احتمال الحدث A واحتمال الحدث B

3) هل الحدثين A و B متنافيان ولماذا؟

4) احسب مدى العينة $[1,1,2,3,3,4,4,4]$

الحل:

.1



.2 $P(A) = \frac{2}{8}$

$$P(B) = \frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

.3 نعم، الحدثين متنافيين لأن استحال تحققهما

في آنٍ معاً

.4 $P(A) + P(B) \neq 1$

$$E = 4 - 1 = 3$$

الوحدة الأولى: النسب المثلثية لزاوية حادة.

أولاً: النسب والتناسب

1. التناسب: هو مساواة بين نسبتين أو اكثر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$
حيث الحدود الأربعة غير معدومة.
2. خواص التناسب:

1. خاصية الضرب التقاطعي أو جداء الطرفين يساوي جداء الوسطين: تستخدم هذه القاعدة بوجود أحد الحدود الأربعة مجهولاً أو لحساب مجهول موجود في حدين وعلم حدين آخرين.
2. إذا ثبتنا البسوط وجمعنا أو طرحنا فنحصل على تناسب جيد.
3. إذا ثبتنا المقامات وضفناها أو طرحناها إلى البسوط فنحصل على تناسب جيد.

شروط تطبيق القاعدة $(2)+(3)$

1) وجود مجهولين في نسبة واحدة.
2) وجود علامة جمع أو طرح بينهما
3) إذا بادلنا بين الوسطين أو بين الطرفين نحصل على نسب متناسبة جديدة.
4) إذا قلبنا النسبتين نحصل على تناسب جديد.

مثال 1: ABC مثلث فيه $\hat{C}$ تساوي $45°$ و $\frac{\hat{A}}{\hat{B}}=\frac{1}{2}$

المطلوب:

1) احسب $\hat{A}+\hat{B}$
2) احسب قياس الزاويتين $\hat{A}$ و $\hat{B}$.

الحل:

1) $\hat{C}=45°$: احسب قانون مجموع زوايا المثلث
$$\hat{A}+\hat{B}=180°-45°=135° \Leftrightarrow 180°$$
2) $\frac{\hat{A}}{\hat{B}}=\frac{1}{2} <= \hat{A}+\hat{B}=135$

نثبت البسوط ونضيفها إلى المقامات

$$\frac{\hat{A}}{\hat{A}+\hat{B}}=\frac{1}{1+2} => \frac{\hat{A}}{135°}=\frac{1}{3}$$
$$\hat{A}=\frac{135°\times 1}{3} => \hat{A}=45°$$
$$\hat{A}+\hat{B}=135°$$
$$\hat{B}=135°-45°=90°$$

مثال2: إذا كان $\frac{b}{3}=\frac{a}{2}$ وكان $a+b=15$ احسب a و b الحل:

إذا بادلنا بالنسب نجد أن $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$

نثبت المقامات ونضيفها إلى البسوط.

$$\frac{a+b}{b}=\frac{2+3}{3} => \frac{15}{b}=\frac{5}{3}$$
$$b=\frac{3\times 15}{3} => b=9$$
إذاً $a=6$

مثال3: يزيد عمر خالد على عمر أحمد بمقدار 3 سنوات إذا علمت أن نسبة عمريهما $\frac{5}{4}$ احسب عمر كل منهما.

الحل:

نفرض عمر أحمد x إذاً خالد $x+3$

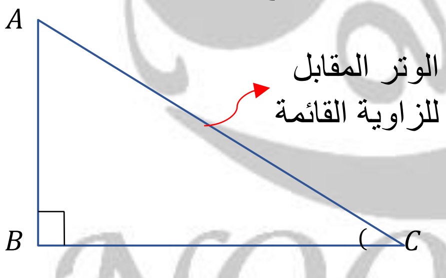
نضرب طرفين بالوسطين $\frac{x+3}{x}=\frac{5}{4}$

$$4(x+3)=5x$$
$$4x+12=5x => -x=-12$$
$$\Rightarrow \underbrace{x=12}_{\text{عمر أحمد}} \Rightarrow \underbrace{x+3=1}_{\text{عمر خالد}}$$

ثانياً: النسب المثلثية

أولاً: النسب المثلثية تستخدم في المثلث القائم ولدينا ثلاثة نسب:

$$\text{جيب}\ \sin(\theta)=\frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الوتر}}$$
$$\text{تجيب}\ \cos(\theta)=\frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}}$$
$$\text{ظل}\ \tan(\theta)=\frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الضلع المجاور}}$$



بالنسبة للزاوية $\hat{C} \Leftrightarrow$ يكون AB مقابل ويكون BC مجاور.

- ❖ تستخدم النسب المثلثية
1) لحساب النسب المثلثية
2) لحساب أطوال أضلاع المثلث القائم.
- ❖ خواص النسب المثلثة
- دوماً موجبة

- ليس لها واحدة
- $0 < \sin(\theta) < 1$
- $0 < \cos(\theta) < 1$

تتراوح قيم الsin و cos بين الصفر والعدد واحد لأن الزاوية حادة.

- $\sin(90° - \theta) = \cos(\theta)$

ال sin تساوي cos عندما يكون مجموع الزاويتان 90° أي متتامتان.

عند طلب حساب ضلع مشترك بين مثلثين قائمين أو عند إثبات علاقة نستخدم تعريف

$\sin(\theta) = \sin(\theta)$ اما

$\cos(\theta) = \cos(\theta)$ أو

$\tan(\theta) = \tan(\theta)$ أو

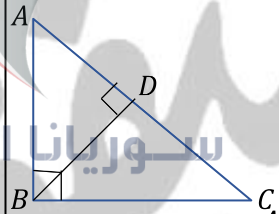
لنفس الزاوية المشتركة بين المثلثين.

مثال1: في الشكل المرسوم جانباً ABC مثلث قائم في B و

$BC \perp AC$ ، $AB = \sqrt{72}$

$BC = \sqrt{50} + \sqrt{2}$

1) أثبت أن المثلث ABC متساوي الساقين ثم أثبت أن $AC = 12$.
2) احسب $\sin(C\hat{A}B)$من المثلثين القائمين ABC ADB واستنتج طول BD.



الحل:

1) حتى نثبت أن المثلث ABC متساوي الساقين يجب أن نثبت أن

$$AB = BC$$

$$AB = \sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{50} + \sqrt{2} = \sqrt{25 \times 2} + \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

نجد أن $AB = BC$

إذاً المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.

طول AC يحسب حسب مبرهنة فيثاغورث بالمثلث ABC .

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow$$

$$AC^2 = 72 + 72 = 144 \Rightarrow AC = 12\ cm$$

2) $$\underset{ABC}{\sin(C\hat{A}B)} = \frac{BC}{AC}$$

لاستنتاج طول BD $\underset{ADB}{\sin(B\hat{A}D)} = \frac{BD}{AB}$

نستخدم تعريف للزاوية $\hat{A}$

$$\underset{ADB}{\sin(B\hat{A}D)} = \underset{ABC}{\sin(C\hat{A}B)}$$

$$\frac{BD}{AB} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{6\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{12}$$

$$BD = \frac{6\sqrt{2} \times 6\sqrt{2}}{12} = \frac{72}{12} = 6$$

ملاحظة: لإثبات المثلث أن نوعه قائم مع وجود أطوال أضلاعه نستخدم مبرهنة عكس مبرهنة فيثاغورث
دون وجود أضلاع دائرة مارة برؤوسه وأحد أضلاعه قطر فيها.

لحساب أطوال أضلاع المثلث القائم

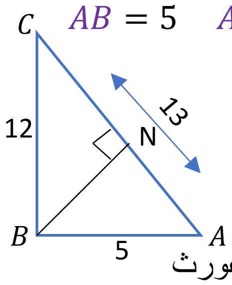
⇦ بوجود ضلعين وثالث مطلوب نستخدم فيثاغورث

⇦ بوجود ضلع ونسبة مثلثية نستخدم تعريف النسب المثلثية.

مثال2: من الشكل المرسوم جانباً ABC مثلث فيه

$AB = 5$ $AC = 13$ $BC = 12$

و $CA \perp BN$ والمطلوب:



1) أثبت أن المثلث ABC قائم.
2) احسب $\sin(C)$ و $\tan(A)$.
3) بالاستفادة من $\sin(\hat{C})$ احسب طول BN.

1) الحل: حسب مبرهنة عكس فيثاغورث

$$AC^2 \overset{?}{=} AB^2 + BC^2$$

$$(13)^2 \overset{?}{=} (5)^2 + (12)^2 =>$$

$$169 = 25 + 144$$

$$169 = 169$$

محققة فالمثلث قائم في B.

2) $$\sin(C) = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{13}$$

$$\tan(\hat{A}) = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{5}$$

3) $$\underset{ABC}{\sin}(C) = \frac{AB}{AC} = \underset{CNB}{\sin}(C) = \frac{BN}{BC}$$

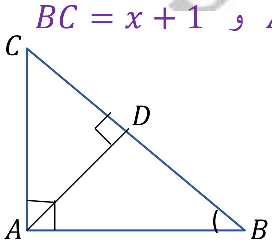
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BN}{BC}$$

$$\frac{5}{13} = \frac{BN}{12} = \frac{5 \times 12}{13} = \frac{60}{13}$$

$$BN = \frac{60}{13}$$

مثال3: ABC مثلث قائم في A وفيه $AD \perp CB$

$AB = 5$ و $AC = x$ و $BC = x + 1$



1) احسب قيمة x .
2) احسب $\cos(B)$ من المثلث ABD
3) احسب $\cos(B)$ من المثلث ABC واستنتج أن $AB^2 = CB \times BD$

الحل: حسب مبرهنة فيثاغورث بالمثلث ABC

1) $BC^2 = AC^2 + AB^2$

$(x+1)^2 = x^2 + 25 \Rightarrow$

$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 25 \Rightarrow 2x = 24$

$x = 12$

2) $\underset{ABD}{\cos(B)} = \frac{BD}{AB}$

3) $\underset{ABC}{\cos(B)} = \frac{AB}{BC}$

نعلم أن الزاوية $\hat{B}$ مشتركة بين المثلثين ABD و ABC

$$\underset{ABD}{\cos(\hat{B})} = \frac{BD}{AB} = \underset{ABC}{\cos(B)} = \frac{AB}{BC}$$

$$\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB^2 = BD \times CB$$

ثالثاً: (علاقتان مهمتان بالنسب المثلثية)

- العلاقة الأولى:

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

- العلاقة الثانية:

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

من العلاقة الأولى نستنتج أن:

$$\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta)$$
$$\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$$

من العلاقة الثانية:

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$
$$\sin(\theta) = \tan(\theta).\cos(\theta)$$
$$\cos(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\tan(\theta)}$$

تستخدم هذه العلاقات لإيجاد قيم sin أو cos أو tan بوجود واحدة منهم.

مثال1:

إذا كان $\cos(\hat{A}) = \frac{3}{5}$ **والمطلوب:**

1) احسب $\sin(A)$, $\tan(\theta)$

2) إذا كان المثلث ABC قائم في B وكان $AC = 10$ احسب كلاً من BC و AB

الحل:

1) $\cos(\hat{A}) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \cos(A) = \frac{9}{25}$

$\sin^2(A) = 1 - \cos^2(A)$

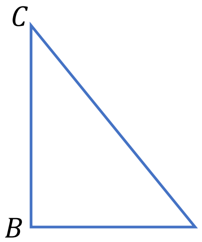
$= 1 - \frac{9}{25} \Rightarrow \frac{25}{25} - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

$$\sin(A) = \frac{4}{5}$$

$$\tan(A) = \frac{\sin(A)}{\cos(A)} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

---

2) $AC = 10$ وتر المثلث القائم



بالنسبة إلى الزاوية A

$$\sin(\hat{A}) = \frac{4}{5}$$

$$\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{BC}{10} = \frac{4}{5}$$

$$BC = \frac{10 \times 4}{5} = 8$$

$$\cos(\hat{A}) = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{AB}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow AB = \frac{3 \times 10}{5} = 6$$

مثال2: مثلث قائم في A و $\tan(\hat{B}) = \frac{3}{4}$ احسب كلاً من $\sin(B)$ و $\cos(B)$

الحل:

$$\tan^2(\hat{B}) = \frac{9}{16} \Leftrightarrow \frac{\sin^2(B)}{\cos^2(B)} = \frac{9}{16}$$

نثبت المقامات ونضيفها إلى البسوط.

$$\frac{\sin^2(B) + \cos^2(B)}{\cos^2(B)} = \frac{9+16}{16}$$

$$\frac{1}{\cos^2(B)} = \frac{25}{16} \Rightarrow \cos^2(B) = \frac{16}{25}$$

$$\cos(B) = \frac{4}{5}$$

$$\sin(B) = \tan(B) + \cos(B)$$

$$\sin(B) = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$$

رابعاً: **النسب المثلثية لزوايا شهيرة.**

θ	$30°$	$45°$	$60°$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$

ملاحظات:

- ☆ الضلع المقابل لزاوية $30°$ يساوي نصف طول الوتر في المثلث القائم.
- ☆ الوتر يساوي ضعفين الضلع المقابل للزاوية $30°$
- ☆ المتوسط المتعلق بالوتر في المثلث القائم يساوي نصف طول الوتر.
- ☆ تفيد الزوايا الشهيرة في حساب أطوال أضلاع بالمثلث القائم.
- ☆ طول الارتفاع بالمثلث المتساوي الاضلاع

$$h=\frac{\sqrt{3}}{2}\times a \rightarrow \text{طول ضلع المثلث}$$

- ☆ طول قطر المربع بوجود طول ضلع

$$\text{طول قطر}=\sqrt{2}\times a \rightarrow \text{طول ضلع}$$

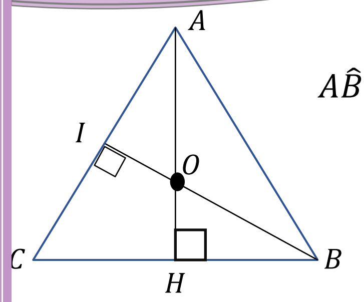
$$\text{طول ضلع المربع}=\frac{\text{طول قطر مربع}}{\sqrt{2}}$$

- ☆ المتوسط هو نفسه الارتفاع ونفسه المنصف ومحدد بالمثلث المتساوي الاضلاع.
- ☆ نقطة تلاقي المحاور بالمثلث هي مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث.
- ☆ للمثلث متساوي الاضلاع ثلاثة محاور تناظرية.
- ☆ لإثبات أن المثلث أنه متساوي الساقين يجب أن نثبت أن زوايا القاعدة متساوية أو ضلعان متساويان.
- ☆ لإثبات أن المثلث متساوي الاضلاع:
  1) نثبت أن زواياه متساوية وتساوي $60°$
  2) أطوال أضلاعه متساوية.
  3) ضلعان متساويان وإحدى زواياه $60°$.
- ☆ المثلث القائم ومتساوي الساقين تكون زوايا القاعدة متساوية وتساوي $45°$.

مثال: AH و BI ارتفاعان في المثلث ABC المتساوي الأضلاع طول ضلعه يساوي 1.

1) ما قياس الزاوية $A\hat{B}H$ احسب طول AH.
2) استنتج مساحة المثلث ABC.
3) ما قياس الزاوية $O\hat{B}H$ واحسب طول OH .

الحل:



1) قياس الزاوية $A\hat{B}H=60°$ لأن المثلث ABC متساوي الاضلاع.
طول AH زاوية $60°$ زاوية شهيرة ولدينا المثلث AHB قائم في H لأن AH ارتفاع

$$\sin(B)=\frac{AH}{AB} \Rightarrow \sin(60°)=\frac{AH}{1}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{AH}{1} \Rightarrow AH=\frac{\sqrt{3}}{2}\ cm$$

2) مساحة المثلث ABC

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=S=\frac{\sqrt{3}}{4}\ cm^2$$

3) قياس الزاوية $O\hat{B}H$ تساوي $30°$ لأن IB منصف للزاوية $A\hat{B}C$.
لحساب OH بالمثلث القائم OBH
$HB=\frac{1}{2}$ لأن AH متوسط

$$\tan(O\hat{B}H)=\frac{OH}{HB}$$

$$\tan(30°)=\frac{OH}{HB}$$

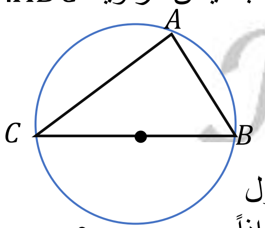
$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{OH}{\frac{1}{2}} \Rightarrow OH=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}}$$

$$OH=\frac{1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{6}\ cm$$

مثال: دائرة أحد أقطارها $[BC]$ طوله 12

1) ما طبيعة المثلث ABC
2) إذا علمت أن BA يساوي 6 أحسب قياس الزاوية $A\hat{B}C$.

الحل:



1) المثلث ABC قائم لأن أحد أضلاعه قطر في الدائرة المارة برؤوس هذا المثلث.
2) الضلع $AB=6$ أي نصف طول الوتر BC أي أن الزاوية $\hat{C}=30$ إذاً حسب مجموع زوايا المثلث $180°$ نجد أن الزاوية $A\hat{B}C=60°$

اختر الإجابة الصحيحة:

1) مربع $ABCD$ طول قطره يساوي $2\sqrt{2}$ فإن طول ضلعه يساوي:

.A	$\sqrt{8}$	.B	2	.C	$\sqrt{2}$

2) قيمة المقدار $\sin^2(70)+\cos^2(70) = ...$

.A	2	.B	6	.C	1

3) إذا كانت $\sqrt{3}\tan(A) = 1$ فإن قياس $\hat{A}$:

.A	$60°$	.B	$30°$	.C	$45°$

4) قيمة x فالتناسب $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{x}{2\sqrt{2}}$ تساوي:

.A	$6\sqrt{2}$	.B	6	.C	$3\sqrt{2}$

5) إذا كان $\cos(40) = \sin(\theta)$ فإن θ قياسها:

.A	$50°$	.B	$60°$	.C	$70°$

6) عدد محاور التناظر للمثلث المتساوي الأضلاع:

.A	3	.B	2	.C	1

7) إذا كان ABC مثلث قائم في B و $\hat{A} \neq \hat{C}$:

.A	$\tan(C) = 1$
.B	$\sin(C) = \cos(B)$
.C	$\sin(C) = \cos(A)$

8) إذا كانت x زاوية حادة $\sin(x) = \frac{1}{2}$ فإن $\cos(x)$

.A	$\sqrt{3}$	.B	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	.C	$\frac{1}{2}$

9) ABC مثلث قائم في A مرسوم في الدائرة نصف قطرها 5 فإن طول الوتر BC يساوي:

.A	10	.B	5	.C	اصغر من 10

10) إذا كانت $\hat{x}$ قياس الزاوية الحادة $\sin(x) = \frac{3}{5}$ فإن:

.A	$\frac{4}{5}$	.B	$\frac{5}{4}$	.C	$\frac{3}{4}$

11) أحد القيم التالية لا تصلح أن تكون قيمة لـ sin زاوية حادة:

.A	$\frac{1}{2}$	.B	$\frac{3}{4}$	.C	$\frac{4}{3}$

ضع كلمة صح أو كلمة غلط أمام العبارات التالية:

1) قياس زاوية حادة في المثلث القائم ومتساوي الساقين $30°$
2) النسب المثلثية $\sin(50°) = \cos(40°)$
3) إذا كانت الزاوية $\hat{A}$ تحقق $0 < \hat{A} < 90$ فإن $0 < \sin(\hat{A}) < 1$
4) $\cos(80°) = \sin(20°)$
5) قيمة x في التناسب $\frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{x}{\sqrt{2}}$ تساوي 2
6) مساحة دائرة نصف قطرها $3cm$ يساوي $6\pi\ cm^2$
7) إن $\sin(\hat{x}) = \frac{1}{2}$ فإن $x = 30°$
8) إذا كان $\cos(x) = \frac{3}{5}$ فإن $\sin(x) = \frac{4}{5}$
9) إذا كان $\tan(x) = \frac{3}{4}$ وكان $\cos(x) = \frac{4}{5}$ فإن $\sin(x) = \frac{3}{5}$
10) النسب المثلثية موجبة دوماً.
11) النسب المثلثية تتراوح قيمها بين الصفر والواحد
12) $\tan(C) = 1$ فإن قياس $\hat{C} = 45°$
13) مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 2 فإن ارتفاعه $h = \sqrt{3}\ cm$
14) مربع طول ضلعه 3 فإن طول قطره يساوي $3\sqrt{2}$
15) العلاقة $\sin(x) = \tan(x) \times \cos(x)$

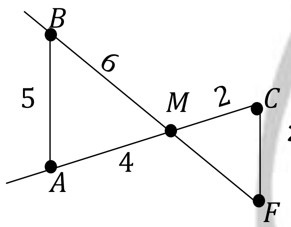
ثانياً: مبرهنة النسب الثلاث

1. مبرهنة النسب الثلاث:

إذا وجد مستقيمان متوازيان ومستقيمان متقاطعان كانت النسب الثلاث.

⇦ تفيد مبرهنة النسب لإيجاد أطوال أضلاع في المثلثات

أمثلة: في الشكل المرسوم جانباً $(CF) \parallel (AB)$ و $BM = 6$ والمطلوب اكتب النسب الثلاث في المثلثين AMB و CMF احسب طول كل من MF و FC



الحل:

1) MAB
MCF

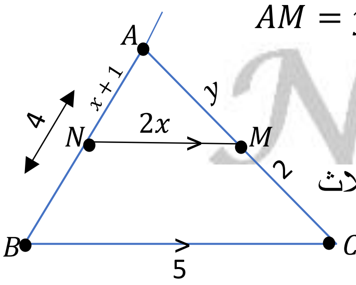
نأخذ النسب الثلاث حسب مبرهنة النسب الثلاث.

$$\frac{MC}{MA} = \frac{MF}{MB} = \frac{CF}{AB}$$

2) $\frac{2}{4} = \frac{MF}{6} = \frac{CF}{5} \Rightarrow MF = \frac{6\times2}{4}$

$$MF = 3 \Leftrightarrow CF = \frac{5\times 2}{4} = 2{,}5$$

في الشكل المجاور ABC مثلث فيه النقطة N من AB والنقطة M من AC إذا علمت أن BC و MN في حالة التوازي $AN = x+1$, $BC = 5$, $NM = 2x$
$AM = y$, $MC = 2$, $AB = 4$



1) اكتب النسب الثلاث
2) احسب قيمة x و y.

الحل:

1) حسب مبرهنة النسب الثلاث بالمثلثين ANM / ABC

$$\Rightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC} = \frac{NM}{BC}$$

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y}{y+2} = \frac{2x}{5}$$

2) نعوض النسب:

$$\frac{(x+1)}{4}=\frac{2x}{5}=\frac{y}{y+2}$$

$$5(x+1)=4\times 2x \Rightarrow 5x+5=8x$$

$$3x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{3}$$

$$\frac{2\times\left(\frac{5}{3}\right)}{5}=\frac{y}{y+2}\Rightarrow \frac{\frac{10}{3}}{5}=\frac{y}{y+2}$$

$$\frac{10}{15}=\frac{y}{y+2}\Rightarrow 15y=10y+20$$

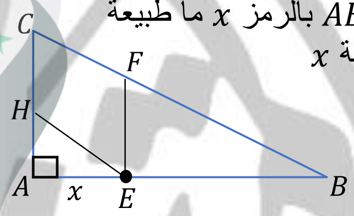
$$15y-10y=20 \Rightarrow 5y=20$$

$$y=4$$

ABC مثلث قائم في A طول ضلعيه القائمتان هما $AC=3,\ AB=4$

1) احسب وتر هذا المثلث.

2) E نقطة على AB و EF يوازي (AC)و(EH) يوازي BC نرمز إلى طول AE بالرمز x ما طبيعة الرباعي $EFCH$ احسب بدلالة x أطوال هذا الرباعي.



الحل:

1) حسب مبرهنة فيثاغورث بالمثلث ABC

$$AC^2+AB^2+BC^2$$

$$(3)^2+(4)^2=BC^2$$

$$25=BC^2$$

$$BC=5$$

2) طبعة الرباعي $EFCH$ متوازي أضلاع كل ضلعين متقابلين متوازيات ومتساويين

حسب مبرهنة النسب الثلاث بالمثلثين

$$\left.\begin{matrix}BEF\\BAC\end{matrix}\right]\quad \frac{BF}{BA}=\frac{EF}{AC}=\frac{BF}{BC}$$

$$\frac{4-x}{4}=\frac{EF}{3}$$

$$EF=\frac{3(4-x)}{4}=\frac{12-3x}{4}$$

$$EF=\frac{12-3x}{4}=HC$$

$$\frac{4-x}{4}=\frac{BF}{5}$$

$$BF=5\,\frac{4-x}{4}$$

$$CF=5-\frac{5(4-x)}{4}$$

$$CF=\frac{20-20+5x}{4}=\frac{5x}{4}$$

$$CF=\frac{5x}{4}=HE$$

---

2. عكس مبرهنة النسب الثلاث:

نص المبرهنة: إذا كان لدينا مستقيمان متقاطعان والنسب الثلاث متساوية كان المستقيمان متوازيان.

⇦ تفيد عكس مبرهنة النسب الثلاث في أثبات أن المستقيان متوازيان

⇦ لدينا مبرهنات أيضاً تفيد في أثبات أن المستقيان متوازيان

1) العامودان على مستقيم واحد متوازيان.

2) القطعة الواصلة بين منتصفين ضلعين توازي الثالثة وتساوي نصفها.

3) إذا تساوى الزاويتان بالتبادل الداخلي أو الخارجي أو بالتناظر كان المستقيمان متوازيان.

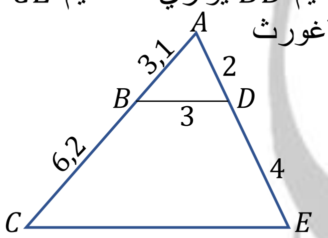
مثال1: في الشكل المجاور المثلث ACE فيه

$AD=2$ و $CB=6{,}2$ و $AB=3{,}1$

و $BD=3$ و $DE=4$ **المطلوب:**

1) احسب نسبتين $\frac{AD}{AF}$ و $\frac{AB}{AC}$ اكتب النسب بشكل كسرين مختزلين واستنتج أن المستقيم BD يوازي المستقيم CE

الحل: حسب مبرهنة عكس فيثاغورث



$$\frac{AB}{AC}=\frac{3{,}1}{9{,}3}\Rightarrow\frac{31}{93}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{AD}{AE}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

نجد أن $\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}$

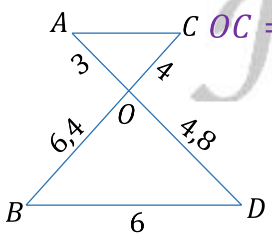
حسب عكس مبرهنة النسب الثلاث المستقيمان

$$CE \parallel BD$$

مثال2:

في الشكل المجاور $BD=6$ و $OD=6{,}4$

$OC=4$ و $OB=4{,}8$ و $AO=3$



1) أثبت أن $DB \parallel AC$

2) احسبAC

الحل:

1) حسب عكس مبرهنة النسب الثلاث

$$\frac{OC}{OD}\overset{?}{=}\frac{OA}{OB}\Rightarrow\frac{4}{6{,}4}=\frac{3}{4{,}8}$$

نضرب الطرفين بالوسطين إذا كانت محققة يكون المستقيمان متوازيان

$$4 \times 4,8 \stackrel{?}{=} 3 \times 6,4$$

$$19,2 = 19,2 \Leftrightarrow$$ محققة

إذاً المستقيمان AC و DB متوازيان

2) حسب مبرهنة النسب الثلاث

$$\frac{AC}{DB} = \frac{OA}{OB} \quad , \quad \frac{AC}{6} = \frac{3}{4,8}$$

$$AC = 3,75$$

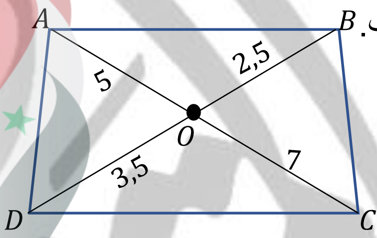
ملاحظة: لإثبات أن الرباعي شبه منحرف يجب أن نثبت قاعدتاه متوازيتان على عكس مبرهنة النسب الثلاث.

لدينا الشكل الرباعي $ABCD$

وأطوال أضلاعه $OB = 2,5$ و $OD = 3,5$

$OA = 5$ و $OC = 7$

أثبت أن $ABCD$ شبه منحرف.



الحل: حسب عكس مبرهنة النسب الثلاث.

$$\frac{OB}{OD} \stackrel{?}{=} \frac{OA}{OC}$$

$$\frac{2,5}{3,5} \stackrel{?}{=} \frac{5}{7}$$

النسبتان متكافئتان إذاً المستقيمان متوازيان $AB \parallel DC$

فالرباعي $ABCD$ شبه منحرف.

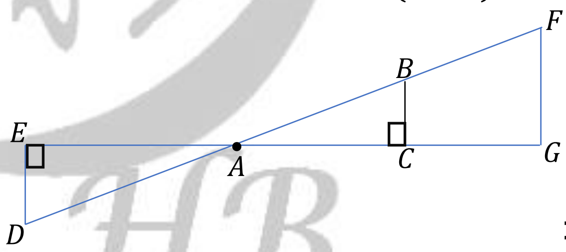
مثال3: في الشكل المرافق $AB = 12$ و $AC = 9,6$

$AD = 6,5$ و $BC = 7,2$ و $BF = 10,5$ و $AG = 18$

1) احسب AE

2) أثبت أن المستقيمان FG , BC متوازيان

3) احسب $\sin(A\hat{B}C)$



الحل:

1) حسب مبرهنة النسب الثلاث:

لدينا المستقيمان EG و DF متقاطعان

ولدينا المستقيمان BC و DE متوازيان

لأن العامودان على مستقيم واحد متوازيان

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{AE}{9,6} = \frac{6,5}{12}$$

$$AE = \frac{9,6 \times 6,5}{12} = 5,2$$

2) حسب عكس مبرهنة النسب الثلاث في المثلثين

AGF و ACB

$$\frac{AC}{AG} \stackrel{?}{=} \frac{AB}{AF} \xRightarrow{\text{بالتعويض}} \frac{9,6}{18} \stackrel{?}{=} \frac{12}{22,5}$$

نجد أن النسبتين متكافئتين لأن $12 \times 18 = 9,6 \times 22,5$

---

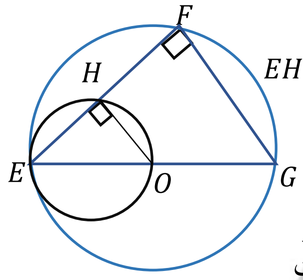
3) $$\sin(A\hat{B}C) = \frac{AC}{AB} = \frac{9,6}{12}$$

مثال4: دائرة مركزها O , EG قطر فيها ℓ_2 هي الدائرة الت قطرها OE.

1) هل المستقيمان OH و GF متوازيان علل اجابتك

2) إذا علمت أن $OH = 3\ cm$ احسب FG

الحل:



1) نعم متوازيان لأن المثلث EHO قائم في H لأن أحد أضلاعه قطر في الدائرة التي قطرها EO والمثلث EFG قائم في F لأن المثلث EG قطر في الدائرة المارة برؤوس المثلث

العامودان على مستقيم واحد متوازيان

$$\left.\begin{matrix} OH \perp EF \\ GF \perp EF \end{matrix}\right\} OH // GF$$

2) $OH = 3$: حسب مبرهنة النسب الثلاث في المثلثين FHO و EFG

$$\frac{EO}{EG} = \frac{HO}{FG} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{FG}$$

$$FG = \frac{3 \times 2}{1} = 6cm$$

ثالثاً:

التشابه: إذا تناسب أطوال أضلاع مثلث مع أطوال أضلاع المثلث ثاني كان المثلثان متشابهان ويكون إحداهما أكبر أو أصغر أو مطابقة للثاني.

نسبة التشابه K

$K > 1$	$K < 1$	$K = 1$
نسبة تكبير	نسبة تصغير	نسبة تطابق

يفيد التشابه: في حساب أطوال أضلاع ومحيطات ومساحات وحجوم اشكال متشابهة.

⇦ **لحساب طول ضلع:**

طول ضلع صغير $\times K_{\text{تكبير}} =$ طول ضلع كبير

طول ضلع كبير $\times K_{\text{تصغير}} =$ طول ضلع صغير

K ⇐ تحسب من نسبة ضلعين من شكلين متشابهين

$$K_{\text{تصغير}} = \frac{\text{ضلع صغير}}{\text{ضلع كبير}}$$

$$K_{\text{تكبير}} = \frac{\text{ضلع كبير}}{\text{ضلع صغير}}$$

⇦ لحساب محيط شكل متشابه:

$$P_{\text{صغير}} = K_{\text{تصغير}} \times P_{\text{محيط كبير}} \Rightarrow cm$$

$$P_{\text{تكبير}} = K_{\text{تصغير}} \times P_{\text{محيط صغير}} \Rightarrow cm$$

⇦ لحساب مساحة شكل مشابه:

$$S_{\text{صغير}} = K^2_{\text{تصغير}} \times S_{\text{كبير}}$$

$$S_{\text{كبير}} = K^2_{\text{تكبير}} \times S_{\text{صغير}}$$

⇦لحساب حجوم اشكال متشابهة:

$$V_{\text{كبير}} = K^3_{\text{تكبير}} \times V_{\text{صغير}}$$

$$V_{\text{صغير}} = K^3_{\text{تصغير}} \times V_{\text{كبير}}$$

⇦ لحساب K بوجود مساحتين أو محيطين أو حجمين

بوجود محيطين $\Rightarrow K = \frac{\acute{P}}{P}$

بوجود مساحتين $\Rightarrow K^2 = \frac{\acute{S}}{S}$

نجذر الطرفين جذر تربيعي

نجذر الطرفين جذر تكعيبي $K^3 = \frac{\acute{V}}{V}$

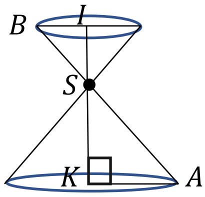
ملاحظة: حجم هرم أو مخروط يعطى بالعلاقة

$$V = \frac{1}{3}.\underbrace{S}_{\text{مساحة القاعدة}}.\underbrace{h}_{\text{الارتفاع}}$$

مثال: مخروطيان دورانيان متقابلان بالرأس S مركز قاعدتهما K, I ونصف قطريهما IB و KA والمستقيمان IB و KI متوازيان نعلم أن

$$SI = 4cm\ , KS = 6cm, KA = 4{,}5\ cm$$

1) احسب طول IB ثم طول SA
2) المخروط الذي مركز قاعدته I تصغير للمخروط الذي مركز قاعدته K وحجمهما على التوالي V_I و V_k
1) ما معامل التصغير
2) احسب V_k ثم استنتج V_I



الحل:

1) المستقيمان KA و BI متوازيان و IK و BA متقاطعان في S حسب مبرهنة النسب الثلاث في المثلثين

$$\left.\begin{matrix} SIB \\ SKA \end{matrix}\right] \Rightarrow \frac{SI}{SK} = \frac{SB}{SA} = \frac{IB}{KA}$$

$$\frac{4}{6} = \frac{IB}{4{,}5} = IB = \frac{4{,}5 \times 4}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

لحساب SA حسب مبرهنة فيثاغورث بالمثلث SKA القائم في K

$$SK^2 + KA^2 = SA^2$$
$$36 + 20{,}25 = 56{,}25$$
$$SA = 7{,}5$$

2) معامل التصغير:

$$K_{\text{تصغير}} = \frac{SI}{SK} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$V_K = \frac{1}{3}.S.h$$

$$V_K = \frac{1}{3}.\pi.r^2 \times SK$$

$$V_K = \frac{1}{3}.\pi(4{,}5)^2 \times 6 = 40{,}5\pi\ cm^3$$

$$V_I = K^3_{\text{تصغير}} \times V_{K\,\text{كبير}}$$

$$V_I = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 40{,}5\pi$$

$$V_I = \frac{8}{27} \times 40{,}5\pi = 12\pi\ cm^3$$

في الشكل المجاور $[AH]$ ارتفاع في المثلث ABC والنقطة E منتصف $[AB]$ والنقطة F منتصف BC وإذا كان $BC = 6$ و $AB = 2\sqrt{3}$ وقياس الزاوية $A\hat{B}C = 60°$ **والمطلوب**:

1) أثبت أن $EF//AC$
2) إذا كان المثلث BFE تصغير للمثلث BCA استنتج معامل التصغير.
3) إذا علمت أن مساحة المثلث ABC تعطى بالعلاقة :

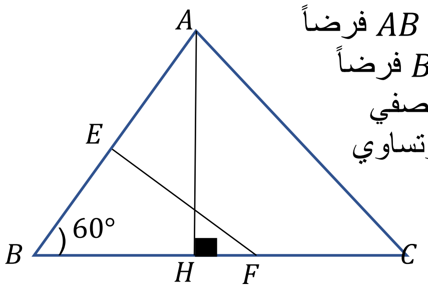
$$S = \frac{1}{2}[AB] \times [BC].\sin(\hat{B})$$

احسب S مساحة المثلث ABC واستنتج طول ارتفاع AH واحسب مساحة المثلث BEF

الحل:

1) النقطة E منتصف AB فرضاً والنقطة F منتصف BC فرضاً النقطة الواصلة بين منتصفي ضلعين توازي الثالثة وتساوي نصفها.

$(EF) \parallel (AC)$



2) معامل التصغير:

$$K_{\text{تصغير}} = \frac{BE}{BA} = \frac{1}{2}$$

لأن E منتصف AB

3) $S = \frac{1}{2}(2\sqrt{3}) \times (6) \times \sin(60°)$

$$S = 6\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\ cm^2$$

نعلم أن $S = 9 \Rightarrow 9 = \frac{(\text{ارتفاع} \times \text{القاعدة})}{2}$

$$9 = \frac{6}{2} \times h \Rightarrow h = 3cm$$

$$K_{\text{تصغير}} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{BEF} = K^2 \times S_{ABC}$$

$$S_{BEF} = \frac{1}{4} \times 9 = \frac{9}{4} cm^2$$

تمرين:

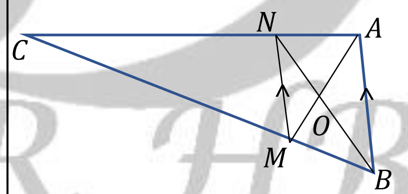
AN و BM متقاطعان في C و $AB \parallel MN$

بحيث $AB = 3 , MB = 2,1 , BC = 7$

1) احسب MN واستنتج نوع المثلث MNB

2) بفرض أن O نقطة تقاطع AM و NB أثبت أن المثلث OMN تصغير للمثلث OAB واوجد معامل التصغير.

الحل: حسب مبرهنة النسب الثلاث بالمثلثين



CMN ، $CBA \Rightarrow \frac{CM}{CB} = \frac{MN}{AB}$

$$\frac{4,9}{7} = \frac{MN}{3} \Rightarrow MN = \frac{(3 \times 4,9)}{7}$$

نوع المثلث $MN = 2,1 \Rightarrow$

MNB متساوي الساقين

2) المستقيمان AM و NB متقاطعين في O والمستقيمان $MN \parallel AB$ متوازيان حسب مبرهنة تالس في المثلثين في حالة تناسب إذا المثلثين متشابهين OMN , OAB

$$\frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OB} = \frac{MN}{AB}$$

بنسبة تصغير

$$K = \frac{2,1}{3} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10} = 0,7$$

$$K_{\text{تصغير}} = 0,7$$

اختر الإجابة الصحيحة:

1) أسطوانة بحجم $1000m^3$ حجم نموذج مصغر لها حجم $8m^3$ فيكون معامل التصغير يساوي

.A	$\frac{1}{125}$	.B	$\frac{1}{2}$	.C	$\frac{2}{100}$

2) المثلث EFD تصغير للمثلث ABC فنسبة تصغير K تكون:

.A	$K = 1$	.B	$K > 1$	.C	$K < 1$

3) مثلثان متشابهان مساحة الأول 25 ومساحة الثاني 100 فنسبة التكبير هي:

.A	4	.B	75	.C	2

4) المثلث ABC تكبير للمثلث $\acute{A}\acute{B}\acute{C}$ فنسبة التكبير هي نفسها حل المعادلة:

.A	$2x + 3 = 4$	.B	$2x + 3 = 5$	.C	$2x + 3 = 6$

5) مربع مساحته 9 حجم نموذجاً مكبراً له مساحته 36 فإن معامل التكبير يساوي:

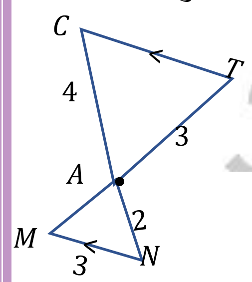
.A	4	.B	3	.C	2

6) مكعب حجمه $27m^3$ حجم نموذجاً مكبر له حجمه $125m^3$ فإن معامل التكبير يساوي:

.A	$\frac{3}{5}$	.B	$\frac{5}{3}$	.C	$\frac{125}{27}$

ضع كلمة صح أو خطأ:

في الشكل المجاور MI و NC مستقيمان متقاطعان في A والمستقيمان NM و CT متوازيان $AC = 4$ و $AN = 2$ يكون $MN = TA = 3$:



1. $AM = \frac{3}{2}$ صح
2. $CT = 4$ خطأ
3. $\frac{MN}{TC} = \frac{1}{2}$ صح
4. $\frac{\text{مساحة}\, NAM}{\text{مساحة}\, TCA} = \frac{2}{3}$ خطأ
5. إذا كانت $0 < K < 1$ تؤول نسبة K إلى نسبة تكبير. خطأ
6. قياسات الزوايا بالتشابه تتغير.
7. إذا تساوت النسب يكون المستقيمان متوازيان

ثالثاً: زوايا والمضلعات في الدائرة

1. زوايا المحيطية ومماسية في الدائرة:

قواعد: الدائرة هي مجموعة نقاط من المستوي لها مركز ونصف قطر.

$C\,(O, r)$

اسم الدائرة — مركز الدائرة — نصف قطر الدائرة

- أضلاع أساسية في الدائرة: قطر الدائرة هو مستقيم يقطع محيط الدائرة من منطقتين مختلفتين ويمر من المركز الدائرة ويرمز له $\mathcal{R}$
- مماس في الدائرة: هو مستقيم يشترك مع الدائرة بنقطة واحد وعامودي على نفس قطر الدائرة
- وتر الدائرة: مستقيم يقطع محيط الدائرة من نقطتين مختلفتين دون المرور بالمركز.

مبرهنات:

- الوتران المتساويان يحصران قوسان متساويان والقوسان المتساويان يحصران وتران متساويان.
- المستقيم الذي يمر من المركز يعامد وتر يكون يعامده في منتصف الوتر
- المستقيم الذي يمر من مركز ويمر من منتصف وتر يكون مستقيم والوتر في حالة تعامد
- زاوية المحيطية: زاوية يقع رأسها على محيط الدائرة وقياسها يساوي نصف القوس التي تحصره.
- الزاوية المركزية: زاوية يقع رأسها على مركز الدائرة وقياسها يساوي قياس القوس الذي تحصره.
- الزاوية المماسية: لها حالتين:

1) إذا أضلاعها ⇦ 1 مماس 2 وتر دائرة تعامل معاملة المحيطية.
2) إذا أضلاعها⇦ 1 مماس 2 نصف قطر تكون زاوية قياسها $90°$ درجة.

✓ إذا اشتركتا زاويتان محيطية ومركزية بنفس القوس يكون محقق عندئذٍ

المركزية = ضعفين محيطيه

محيطة = تساوي نصف مركزية

✓ زاويتان محيطيتان مشتركتان بنفس القوس متساويتان
✓ قياس زاوية دورة كاملة $360°$
✓ قياس زاوية نصف دورة $180°$
✓ قياس زاوية ربع دورة $90°$
✓ زاوية المستقيم دوماً $180°$
✓ الدائرتين متماستان خارجياً يكون

$OO` = R + R`$

بعد بين المركزين — نصف قطر الدائرة الأولى — نصف قطر الدائرة الثانية

✓ الدائرتان متماستين داخلياً

$OO` = R - R`$

✓ الدائرتين المتباعدتين خارجياً

$OO` > R + R`$

✓ الدائرتين المتباعدتين داخلياً

$OO` < R - R`$

✓ الدائرتين المتقاطعتين

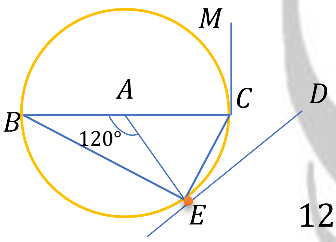
$R - R` < OO` < R + R`$

- بعد مركز الدائرة عن المماس يساوي نصف طول الوتر
- في نقطة M خارج الدائرة يمكن رسم مماس وتكون المسافتين بين M وكل من نقطتين التماس متساويتين
- الزاوية الداخلية قياسها يساوي مجموع قياس زاويتين مركزيتين متقابلتين محصورتين بين أضلاع زاوية داخلية

مثال1:

BC قطر من الدائرة R مركزها A , E نقطة من هذه الدائرة تحقق $B\hat{A}E = 120°$ و ED , CM مماسات للدائرة R

1. احسب قياسات زوايا الآتية $C\hat{B}E$, $E\hat{C}B$, $C\hat{A}E$
2. احسب قياس الزاوية المماسية $C\hat{E}D$ وقياس $B\hat{C}M$



الحل:

$C\hat{B}E_{\text{محيطة}} = \frac{1}{2}\widehat{EC}$

أولاً الزاوية $E\hat{A}B$ تساوي $120°$

إذاً الزاوية $C\hat{A}E$ تساوي $60°$ لأن

زاوية المستقيم CAB إذاً الزاوية $C\hat{A}E = 60°$

$C\hat{B}E = 30°$ و $E\hat{C}B = 60°$

لأن المثلث CAE متساوي الأضلاع

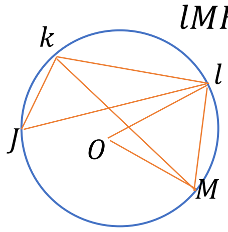
2. $C\hat{E}D = \frac{1}{2}\widehat{CE} = 30°$

$B\hat{C}M = 90°$

مثال2: J و K و l و M نقاط من دائرة مركزها O

$$K\hat{J}l = l\hat{O}M = 52°$$

احسب قياسات زوايا المثلث lMK



الحل:

بما أن قياس الزاوية

$l\hat{O}M = 52°$

إذاً قياس القوس $lM = 52°$ لأنه يقابل زاوية مركزية

وبما أن قياس الزاوية $K\hat{J}l$ يساوي $52°$ وفي محيطه

إذاً $\widehat{Kl} = 104°$ إذاً قياس الزاوية $K\hat{M}l$ يساوي $52°$

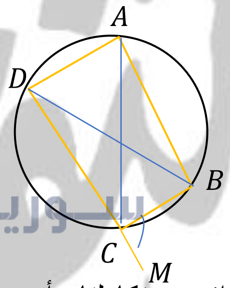
وقياس الزاوية $l\hat{K}M = 26°$ حسب مجموع قياسات زوايا المثلث $180°$ تكون الزاوية $M\hat{I}K$ تساوي

$$M\hat{I}K = 180° - 52° - 26° = 102°$$

---

2. الرباعي الدائري : هو مضلع رباعي وقعت رؤوسه الأربعة على دائرة واحدة

خواص الرباعي الدائري:



- الزاويتان المتقابلتان بالرباعي الدائري متكاملتان أي مجموعها يساوي $180°$
- الزاوية الخارجية في رباعي دائري تساوي المقابلة لمجاورتها $B\hat{C}M = C\hat{A}B$.
- زاويتان محيطيتان باتجاه واحد بالنسبة إلى مستقيم متساويان $B\hat{D}C = C\hat{A}B$

سؤال امتحاني:

أثبت أن الرباعي $ABCD$ رباعي دائري

أثبت أن النقاط A و B و C و D تقع على دائرة واحدة

نثبت بأحد الخواص الآتية:

1. إذا كان مجموع زاويتان في رباعي $180°$ متقابلتان كان الرباعي دائري
2. إذا تساوت زاوية خارجية مع المقابلة لمجاورتها كان الرباعي دائري
3. إذا تساوى زاويتان باتجاه واحد بالنسبة إلى مستقيم في رباعي كان رباعي دائري

- ✓ لتعيين مركز الدائرة المارة برؤوس رباعي دائري تكون في منتصف الوتر المشترك بالمثلثين القائمين
- ✓ نصف قطر الدائرة المارة برؤوس الرباعي

$$r = \frac{\text{وتر مشترك}}{2}$$

مسألة 100 علامة

مسألة رقم 1

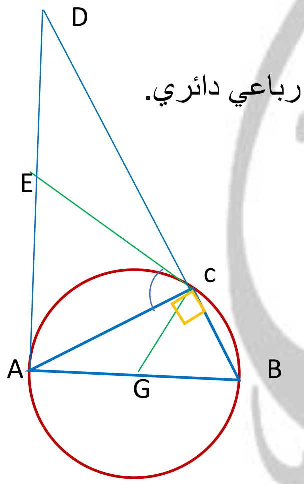
1) ABC مثلث قائم في C ومرسوم في الدائرة ℓ فيه AB =12 و $B\hat{A}C = 30°$ مماس الدائرة ℓ في النقطة A يتقاطع مع المستقيم BC في النقطة D.

1) احسب مساحة المثلث ACD

2) لتكن E منتصف القطعة AD و G مركز الدائرة ℓ أثبت أن المستقيم CE مماس للدائرة ℓ

3) أثبت أن الرباعي AGCE رباعي دائري.

الحل:



المثلث ACD قائم لأن المثلث ABC قائم في $\hat{C}$

$$S_{ACD} = \frac{AC \times DC}{2}$$

نحسب طول الضلع AC أولاً ومن ثم DC. AC ضلع في المثلث ABC القائم بحيث الزاوية $B\hat{A}C = 30°$ بحساب AC نستخدم تعريف النسبة المثلثية $\cos(30°) = \frac{AC}{AB}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{Ac}{12} \Rightarrow AC = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\ cm$$

نعلم أن قياس الزاوية $D\hat{A}B$ تساوي $90°$ لأن AD مماس الدائرة في النقطة A ونعلم أيضاً $C\hat{A}B = 30°$ إذاً الزاوية

$D\hat{A}C = 60°$ نستعمل تعريف tan في المثلث ACD

$$\tan(D\hat{A}C) = \frac{DC}{AC}$$

$$\tan(60°) = \frac{DC}{6\sqrt{3}} \Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{DC}{6\sqrt{3}}$$

DC=18 cm

إذاً

$$S_{ACD} = \frac{6\sqrt{3}\ \times 18}{2} = 54\sqrt{3}cm^2$$

2) لإثبات أن CB مماس في الدائرة يجب أن يكون $CE \perp CG$ النقطة تأتي في منتصف AD والمتوسط المتعلق في الوتر يساوي نصف طول الوتر إذاً $EC = AE$ ولدينا الزاوية $E\hat{A}C = 60°$ إذاً المثلث ACE متساوي الأضلاع إذاً الزاوية $E\hat{A}C = 60°$

ولدينا المثلث AGC متساوي الساقين إذاً زوايا القاعدة متساوية $G\hat{C}A = 30°$ إذاً الزاوية $E\hat{C}G = 90°$ إذاً CE مماس للدائرة ℓ في النقطة C

3) الزاوية $E\hat{A}G = 90°$ و زاوية $G\hat{C}E = 90°$ الرباعي AGCE فيه كل زاويتان متقابلتان متكاملتان إذاً الرباعي AGCE رباعي دائري.

مسألة 2

في الشكل المرسوم جانباً C دائرة مركزها M ، AB قطراً فيها ونصف قطرها يساوي 3 =(FB) و FN مماسان لها و BF=4 والمطلوب:

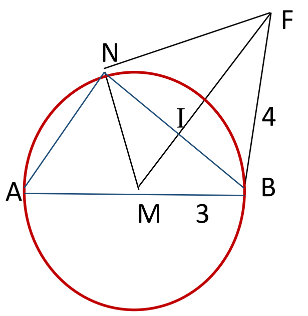
1) أثبت أن المثلثين FBM و ANB قائمين.

2) أثبت أن $F\hat{B}N = N\hat{A}B$

3) أثبت أن الرباعي BFNM رباعي دائري وعين مركز الدائرة المارة برؤوسه واحسب طول نصف قطرها.

4) أثبت أن FM منصف للزاوية $N\hat{F}B$ ثم استنتج أن $AN//FM$

الحل:



المثلث FBM قائم لأن BF مماس للدائرة والمماس عامودي على نصف القطر إذاً FBM مثلث قائم في B

المثلث ANB قائم لأن أحد أضلاعه قطر في الدائرة المارة برؤوسه.

2) الزاويتان $F\hat{B}N = N\hat{A}B$ متساويتان لأن كلا زاويتان يحصران نفس القوس وهو $\widehat{NB}$

3) لدينا $M\hat{B}F$ مثلث قائم في B ولدينا المثلث FNM قائم في N إذاً لدينا في الرباعي $BFNM$ زاويتان متقابلتان متكاملتان إذاً الرباعي BFNM رباعي دائري مركز الدائرة في منتصف MF : نحسب MF ثم نقسمه على 2 نستخرج نصف قطر $r = \frac{MF}{2}$.

لحساب MF حسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث القائم FBM

$BF^2 + MB^2 = MF^2$

$16 + 9 = MF^2 = 25$

$MF = 5 \qquad \frac{MF}{2} = 2.5 \qquad r = 2.5$

4) لدينا المثلثين القائمين MBF , MNF طبوقين لأنهما مشتركان بوتر وهو MF وكلا المثلثين قائمين إذاً

$M\hat{F}N = M\hat{F}B$ ومنه MF منصف الزاوية $B\hat{F}N$

الزاويتان $N\hat{A}M$ و $N\hat{M}B$ اشتركتان بنفس القوس

نعلم أن المحيطية تساوي نصف المركزية

$$N\hat{A}M = \frac{1}{2}N\hat{M}B$$

وبما أن MF منصف $F\hat{M}B = F\hat{M}N$

إذاً نصف الزاوية $\frac{N\hat{M}B}{2} = F\hat{M}B$

إذاً $N\hat{A}M = F\hat{M}B$

إذاً تساوى زاويتان بوضع التناظر كان المستقيمان متوازيان $AN//FM$

مسألة هامة لدورة (2023):

في الشكل المجاور $C(O.r)$ $C'(O'.r)$ دائرتان طبوقتان ومتقاطعتان النقطة I منتصف OO' المطلوب:

1) أثبت أن المثلث AOO' متساوي الأضلاع.

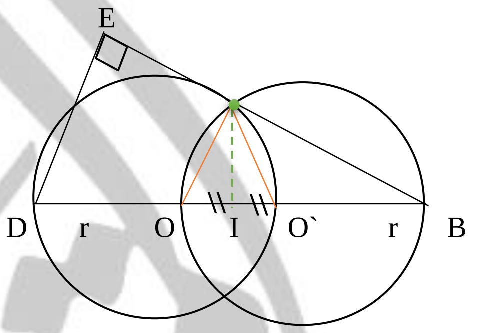
2) أثبت أن AB مماس للدائرة C.

3) أوجد قياس الزاوية $A\hat{B}O$ وقياس القوس $\widehat{AB}$.

4) أثبت أن الرباعي $EDIA$ رباعي دائري.

5) أثبت أن $DE//OA$ ثم اكتب مبرهنة النسب الثلاث للمثلثين EBD . ABO واستنتج أن $BA=\frac{2}{3}EB$

الحل:



1) بما أن الدائرتان طبوقتان لهما نفس نصف القطر

$$OO' = AO' = AO = R$$

فالمثلث AOO' متساوي الأضلاع لتساوي أضلاعه.

2) AB *مماس لدائرة* C لأنه يشترك مع هذه الدائرة بنقطة واحدة ولدينا المثلث OAB قائم في A لأن أحد أضلاعه قطر في الدائرة.

إذاً AB مماس لأنه يشترك مع الدائرة بنقطة واحدة وعامودي على نصف القطر.

3) قياس الزاوية $A\hat{B}O = 30°$ لأن زاوية $A\hat{O}B$ تساوي $60°$ وقياس القوس $AB = 120°$ لأنه يقابل زاوية محيطية تساوي $60°$.

4) لدينا الزاوية $D\hat{E}A = 90°$ فرضاً ولدينا المثلث AOO' متساوي الأضلاع AI متوسط إذاً هو ارتفاع إذاً $A\hat{I}D$ تساوي أيضاً $90°$ إذاً الرباعي فيه كل زاويتان متقابلتان متكاملتان فالرباعي $EDIA$ رباعي دائري.

5) لدينا الزاوية $E\hat{D}B = 60°$ لأن المثلث $E\hat{D}B$ قائم و زاوية $B = 30°$ ولدينا الزاوية $A\hat{O}B$ تساوي أيضاً $60°$ تساوى زاويتان بوضع إذاً المستقيمان AO و DE متوازيان.

نطبق مبرهنة النسب الثلاث على المثلثين EBD و ABO.

$$\frac{BA}{BE}=\frac{BO'}{BD}=\frac{AO}{ED}$$

لدينا $r=r'$ ولدينا $IO=IO'$

$$\frac{BA}{BE}=\frac{2\cancel{r}}{3\cancel{r}} \qquad BA=\frac{2}{3}BE$$

في الشكل المجاور نصف دائرة مركزها O طول قطرها 8 وفيها $\widehat{AN}=2\widehat{NB}$ ، $AB=AM=8$ ، AM يعامد AB I منتصف MB والمطلوب:

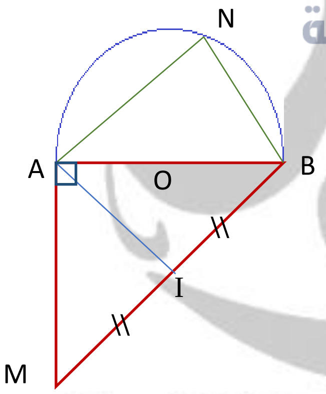
1) احسب قياس القوس $\widehat{NB}$ ثم أثبت أن قياس الزاوية $N\hat{A}B=30°$

2) أحسب طول كل من NB و NA.

3) أثبت أن رباعي $BNAI$ رباعي دائري.

4) احسب مساحة الشكل $BNAM$.

الحل:



1) قياس القوس $\widehat{AN}=2\widehat{NB}$ قياس القوس

$$\widehat{AB}=180°$$

$$\widehat{AN}=2\widehat{NB}$$

$$\widehat{AB}=\widehat{AN}+\widehat{NB}$$

$$180°=2\widehat{NB}+\widehat{NB}$$

$$180°=3\widehat{NB}$$

$$\widehat{NB} = \frac{180°}{3} \Rightarrow \widehat{NB} = 60°$$

الزاوية $N\hat{A}B = 30°$ لأن زاوية $N\hat{A}B$ محيطية وتساوي نصف القوس المقابل لها $N\hat{A}B = \frac{1}{2}\widehat{NB} = 30°$

2) الضلع المقابل لزاوية $30°$ في المثلث القائم يساوي نصف طول الوتر

$$NB = \frac{1}{2}AB \qquad NB = 4cm$$

لحساب $AN \Rightarrow \cos(A) = \frac{AN}{8}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AN}{8}$$

$$AN = 4\sqrt{3}$$

3) لدينا $A\hat{N}B$ تساوي $90°$ لأن المثلث ANB قائم لأن أحد أضلاعه قطر في الدائرة.

ولدينا المثلث AMB قائم ومتساوي الساقين والمتوسط المتعلق بالوتر يساوي نصف طول الوتر وهو أيضاً ارتفاع في المثلث القائم إذاً لدينا الزاوية $A\hat{I}B = 90°$.

فالرباعي $AIBN$ رباعي دائري لوجود زاويتان متقابلتان متكاملتان.

4) مساحة الشكل $BNAM$ هي مؤلفة من مساحتين مثلثين قائمين.

$$S_{BNAM} = S_{ABM} + S_{ABN}$$

$$S_{BNAM} = \frac{AB \times AM}{2} + \frac{AN \times BN}{2}$$

$$S_{BNAM} = \frac{8 \times 8}{2} + \frac{4\sqrt{3} \times 4}{2}$$

$$S_{BNAM} = 32 + 8\sqrt{3}\ cm^2$$

مسألة:

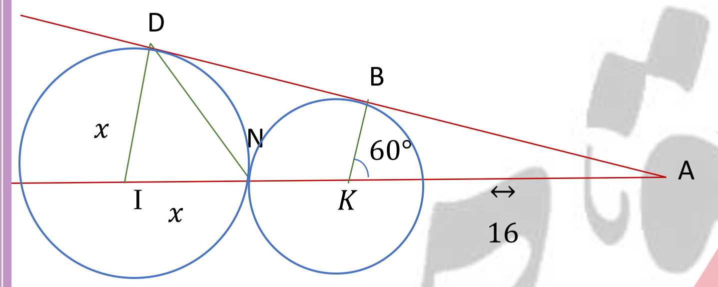
في الشكل المرسوم جانباً C_1 دائرة مركزها I و C_2 دائرة مركزها K وهما متماستان خارجياً في النقطة N ولدينا $AK = 10$ وقياس الزاوية $A\hat{K}B = 60°$ والمستقيم (AB) يمس كلاً من الدائرة C_1 في النقطة D والدائرة C_2 في B ونفرض أن $DI = x$.

1) أحسب قياس كل من الزاويتان $A\hat{D}I$ و $A\hat{B}K$ وبين أن المستقيمان BK و ID متوازيان.

2) احسب قياس كل من الزاويتان $A\hat{D}N$ و $D\hat{I}A$.

3) في المثلث القائم KBA احسب الطول BK.

4) احسب طول AN ثم احسب قيمة x.



الحل:

قياس الزاوية $A\hat{B}K = 90°$ لأن AB مماس على دائرة C_2 في النقطة B إذاً المثلث ABK قائم.

ولدينا الزاوية $A\hat{D}I = 90°$ لأن AB مماس على الدائرة C_1 في النقطة D.

بما أن $AB \perp KB$ و $AB \perp ID$ العامودان على مستقيم واحد متوازيان إذاً المستقيمان BK و ID متوازيان.

2) بما أن المستقيمان BK و ID متوازيان نجد بالتناظر أن الزاوية $B\hat{K}A$ تساوي $60°$ إذاً حسب تناظر $A\hat{I}D$ تساوي $60°$ أيضاً.

قياس الزاوية $A\hat{D}N$ نجد أن الزاوية $I\hat{D}A = 90°$ ولدينا المثلث IDNمتساوي الأضلاع لأن أضلاعه أنصاف أقطار دائرة وأحد زواياه تساوي $60°$ إذاً الزاوية $I\hat{D}N = 60°$ ، إذاً الزاوية $A\hat{D}N = 30°$.

ط$_2$- لحساب قياس الزاوية $A\hat{D}N$ بما أن قياس الزاوية $D\hat{I}A = 60°$ إذاً القوس $\widehat{DN} = 60°$ لأن الزاوية DIA مركزية وتساوي القوس المقابل لها الزاوية ADN مماسية وتساوي نصف القوس المقابل لها $\widehat{DN}$ إذاً الزاوية

$$B\hat{A}K = 30°$$

3) لحساب BK طول وتر AK=10 ولدينا الزاوية

$B\hat{A}K = 30°$ إذاً الزاوية $B\hat{K}A = 60°$

الضلع المقابل للزاوية $30°$ تساوي نصف طول الوتر إذاً $BK = 5$.

4) $AN = Ak + KN$

$AN = 10 + KN = 5$

$AN = 10 + 5 = 15\ cm$

فنجد أن المثلث DIN مثلث متساوي الأضلاع $IN = DN$
ونجد أن المثلث DNA من الساقين لأن زوايا القاعدة متساوية

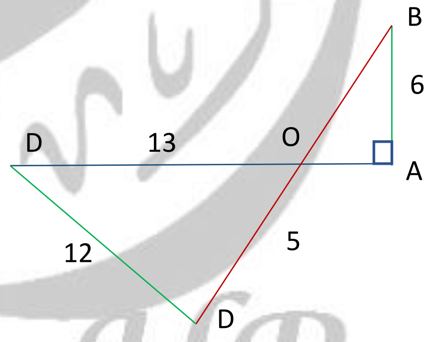
$AN = DN = 15 \quad \Rightarrow \quad DN = 15$

ونجد أن $IN = DN = 15$

إذاً $x = 15$ $\qquad N = x = 15$

تمرينات °60:
تتأمل الشكل المرسوم جانباً OAB مثلث قائم
$OC = 5$ و $DC = 12$ و $DO = 13$ و $AB = 6$
و**المطلوب:**
1) أثبت أن DOC مثلث قائم.
2) أثبت أن النقاط B و A و C و D تنتمي إلى دائرة واحدة عين مركزها.
3) أحسب $\sin(C\hat{O}D)$ واستنتج الطول OB

الحل:



1) حسب مبرهنة عكس فيثاغورث

$$OC^2 + CD^2 \overset{?}{=} DC^2$$

$$25 + 144 \overset{?}{=} 169$$

$$169 = 169$$

محققة إذاً المثلث OCD قائم في C.

2) لدينا الزاويتان باتجاه واحد متساويتان $B\hat{A}O = O\hat{C}D$ إذاً الرباعي $ABCD$ رباعي دائري مركز الدائرة في منتصف [BD]

3) $\sin(C\hat{O}D) = \frac{DC}{OD} = \frac{12}{13}$

$$\sin(C\hat{O}D) = \sin(B\hat{O}A)$$

$$\frac{12}{13} = \frac{AB}{OB}$$

$OB = \frac{13 \times 6}{12} = \frac{13}{2} \qquad OD = 6.5\ cm$

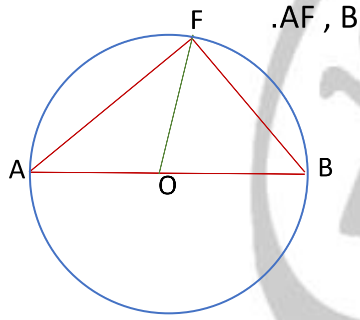
في الشكل المجاور دائرة مركزها O و AB قطر فيها بحيث $AB = 6$ و $\widehat{AF} = 120°$ والمطلوب:

1) احسب قياس الزاوية $F\hat{O}B$.

2) احسب قياس زوايا المثلث ABF.

3) احسب طول كلاً من AF , BF.

الحل:



1) لدينا قياس القوس $\widehat{AF} = 120°$

إذاً نستنتج أن $\widehat{FB} = 60°$ لأن قياس القوس $\widehat{AB} = 180°$

إذاً الزاوية $F\hat{O}B = 60°$ لأنها مركزية تساوي قياس القوس المقابل لها

2) $A\hat{F}B = 90°$ لأن المثلث قائم في F لأن أحد أضلاعه قطر في الدائرة المارة برؤوسه. لدينا الزاوية $F\hat{A}B$ تساوي $30°$ لأنها تساوي نصف القوس المقابل لها ولدينا الزاوية $F\hat{B}A = 60°$ لأنها محيطية وتساوي نصف القوس المقابل لها.

3) BF=3 لأنه ضلع مقابل لزاوية $30°$ في المثبث القائم ABF

ونأخذ أيضاً

$$\cos(\hat{A}) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AF}{AB}$$

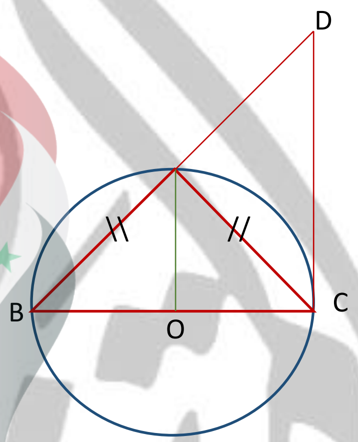
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AF}{6} = 3\sqrt{3} \qquad AF = 3\sqrt{3}\ cm$$

نتأمل في الشكل المجاور ABC مثلث متساوي الساقين مرسوم في دائرة قطرها $BC = 3\sqrt{2}$ و CD مماس للدائرة في C

1) أثبت أن AB=3.

2) احسب قياس القوس $\widehat{AB}$.

3) أثبت أن $CD//AO$ واكتب النسب الثلاث للمثلثين AOB و BCD واستنتج CD.



الحل:

1) بما أن المثلث ABC متساوي الساقين وهو قاطع لأن أحد أضلاعه قطر في الدائرة المارة برؤوسه إذاً زوايا القاعدة متساوية وتساوي 45°

$$\sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AB}{BC}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AB}{3\sqrt{2}} \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}}{2}$$

$$AB = 3$$

2) قياس القوس $\widehat{AB} = 90°$ لأن الزاوية $A\hat{C}B = 45°$ وهي محيطية والقوس المقابل لها يساوي ضعفها بالقياس.

3) DC مماس للدائرة إذاً هو عامودي على نصف القطر OC ولدينا AO هو ارتفاع للمثلث القائم ومتساوي الساقين لأن

المتوسط المتعلق بالوتر في المثلث القائم ومتساوي الساقين أيضاً هو ارتفاع.

أي أنه أصبح $AO \perp OC$ إذاً AO و DC متوازيان لأن العمودان على مستقيم واحد متوازيان.

حسب مبرهنة النسب الثلاث

$$\frac{BO}{BC} = \frac{BA}{BD} = \frac{AO}{DC}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{DC} \Longrightarrow DC = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2} \times 2}{1}$$

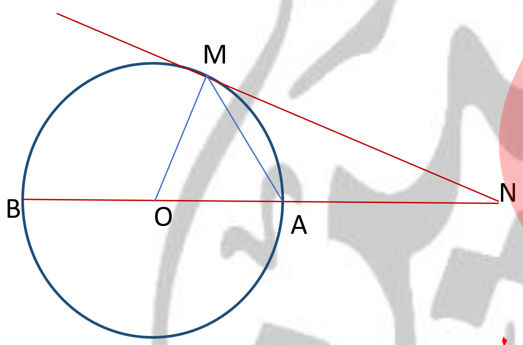
$$DC = 3\sqrt{2}$$

في الشكل المجاور MN مماس للدائرة C التي مركزها O ونصف قطرها OA=4 وقياس القوس $\widehat{AM}$ يحقق

والمطلوب: $\widehat{AM} = \frac{1}{3}\widehat{AB}$

1) أثبت أن $\widehat{AM} = 60°$ ثم احسب قياسات المثلث NOM.

2) أثبت أن A منتصف ON واحسب MN.



الحل:

لدينا أن $\widehat{AM} = \frac{1}{3}\widehat{AB}$

$$\widehat{AB} = \widehat{BM} + \widehat{AM} \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{BM} + \frac{1}{3}\widehat{AB}$$

$$\widehat{AB} - \frac{1}{3}\widehat{AB} = \widehat{BM}$$

$$\widehat{BM} = \frac{2}{3}\widehat{AB}$$

$$\widehat{BM} = \frac{2}{3} \times 180° = 120°$$

القوس $\widehat{AB} = 180°$ لأنه نصف دورة

إذاً:

$$\widehat{AM} = 60°$$

بما أن MN مماس لدائرة $O\widehat{M}N = 90°$ ولدينا الزاوية $M\widehat{O}N = 60°$ لأنها مركزية وتحصر قياس القوس $\widehat{AM}$

وحسب مجموع قياسات زوايا المثلث $180°$ نجد أن الزاوية $O\widehat{N}M = 30°$

---

2) المثلث OMA متساوي الأضلاع لأن أضلاعه أنصاف أقطار الدائرة وإحدى زواياه $60°$ إذاً AM يساوي OA إن الزاوية $O\widehat{M}A = 60°$ إذاً $A\widehat{M}N = 30°$ المثلث AMN متساوي الساقين

$$\mathrm{AM} = \mathrm{AN}$$

$$AM = AO = AN$$

إذاً A في منتصف AN

نستخدم لحساب MN حسب $\tan(M\widehat{O}N)$

$$\tan(60) = \sqrt{3} \iff \frac{MN}{OM} = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

$$MN = \frac{\sqrt{3} \times 4}{1} = 4\sqrt{3} \ \ cm$$

المضلعات المنتظمة:

نقول عن مضلع أنه منتظم إذا تساوت قياس زواياه وقياس أطواله أضلاع.

خواص المضلع المنتظم:

1) يمكن للمضلع المنتظم أن يرسم داخل دائرة مركز الدائرة هو نفسه مركز الضلع المنتظم.

2) لحساب قياس زاوية المركز المضلع المنتظم

$$\text{قياس زاوية مركز مضلع منتظم} = \frac{360°}{\underset{\text{عدد أضلاع المضلع المنتظم}}{n}}$$

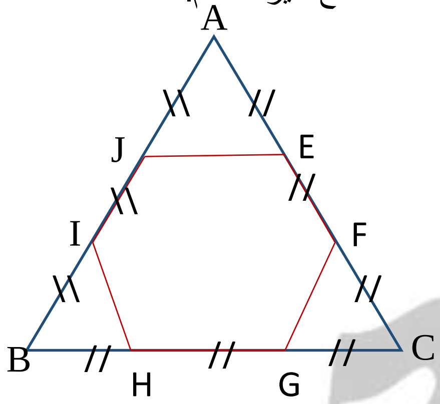
$$\text{زاوية محيطية لمضلع منتظم} = \frac{180°(n-2)}{n}$$

لإثبات أن المضلع مضلع منتظم يجب أن نثبت أن أطوال أضلاع متساوية و زواياه متساوية.

أمثلة: ABC مثلث متساوي الأضلاع و $EFGHIJ$ مسدس مشار إليه في الشكل المرافق هل المسدس $EFGHIJ$ منتظم اشرح.

الحل:

يجب أن نثبت أطوال أضلاعه متساوية وزواياه متساوية وإن لم يتم الإثبات أذاً المضلع غير منتظم.



نجد أن $HG = EF = JI$ فرضاً

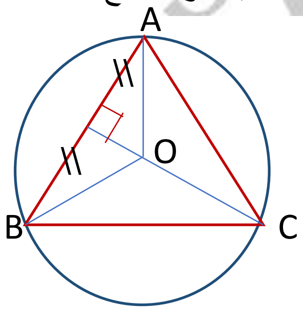
المثلث ABC متساوي الأضلاع وزواياه متساوية وتساوي $60°$ ونجد أن المثلث AJE متساوي الأضلاع لتساوي ضلعين وإحدى زواياه تساوي $60°$ نجد أن $EF = JE$

ومن المثلث EGC و BIH بالمثلث نجد أن GF و HI و JE تساوي الأضلاع IJ و HG و EF إذاً أطوال الأضلاع متساوية.

نجد أن زاوية المستقيم $180°$ الزاوية AEJ تساوي $60°$ إذاً الزاوية JEF تساوي $120°$ وبالمثل باقي الزوايا نجد أن زوايا المضلع متساوية إذاً أطوال أضلاعه متساوية و زواياه متساوية إذاً المضلع منتظم.

كيف نحسب طول مضلع منتظم في المثلث متساوي الأضلاع.

مثال: ABC مثلث متساوي الأضلاع مرسوم في دائرة مركزها O ونصف قطرها 2 أحسب طول ضلع AB



الحل:

نسقط من O على AB ارتفاع ونسميه OH.

نعلم أن CH ارتفاع ومتوسط ومنصف أي AH = BH نعلم أن طول نصف قطر الدائرة يساوي 2 ونعلم أن ABC مضلع منتظم قياس زاوية المركز $120°$ و زاوية المحيطية $60°$

ونعلم أن المتوسط نفسه متوسط ونفسه ارتفاع بالمثلث متساوي الأضلاع لدينا الزاوية HAO تساوي $30°$ نأخذ ال COS.

$$\cos(30) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{AH}{AO} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$AH = \frac{2 \times \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

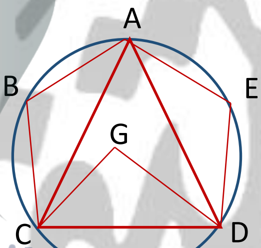
إذاً: $AB = 2AH \Rightarrow AB = 2\sqrt{3}$

مثال هام: في الشكل المجاور ABCDE مخمس منتظم مرسوم في دائرة مركزها G وطول ضلع AE = 3.

1) احسب قياس الزاوية CGD واستنتج قياس الزاوية CDG

2) احسب قياس الزاوية CAD.

3) احسب محيطه.



الحل:

1) قياس زاوية

$$CGD = \frac{360}{5} = 72°$$

المثلث CGD متساوي الساقين رأسه $72°$ إذاً قياس الزاوية $C\hat{D}G = 54°$ لأن زوايا القاعدة متساوية.

2) $C\hat{A}D = \frac{1}{2} C\hat{G}D$

لأنها محيطية تساوي نصف المركزية المشتركة بنفس القوس.

$$C\hat{A}D = \frac{1}{2}(72°) = 36°$$

3) $P = 5 \times 3 = 15\ cm$

أختر الإجابة الصحيحة:

1) **ABCD** رباعي دائري فيه قياس $B\hat{C}D = 115°$ فإن قياس الزاوية المقابلة لها $B\hat{A}D$ يساوي

A) $115°$ B) $25°$ C) $65°$

2) AB ضلع في المخمس المنتظم ABCE والذي مركزه O فإن قياس $A\hat{O}B$ يساوي:

A) $72°$ B) $75°$ C) $60°$

3) المستقيم D يمس الدائرة C الذي مركزها O ونصف قطرها R ويساوي 6 فإن بعد مركز الدائرة عن المستقيم b ، A = 6

A) يساوي 6 B) أقل من 6 C) أكثر من 6

4) في رباعي الدائري مجموع زاويتان متقابلتان يساوي

A) 100 B) 180 C) 90

5) مسدس مرسوم في دائرة مركزها O فإن قياس زاوية المركز $A\hat{o}B$

A) $60°$ B)$90°$ C)$72°$

6) دائرة مركزها O ، $\widehat{BC}$ قوس فيها قياسه $40°$ فإن قياس الزاوية المركزية BOC يساوي.

A) 20 B) 40 C) 80

ضع كلمة صح أو كلمة خطأ:

1) إذا كان ABCDEF مسدس منتظم فإن قياس الزاوية $C\hat{D}E$ يساوي $120°$. صح

2) إذا كان قياس $\hat{A} = 100°$ في رباعي دائري ABCD فإن قياس الزاوية المقابلة لها $\hat{C} = 80$. صح

3) تقاس قياس الزاوية المحيطية في دائرة بمقاس القوس المقابل لها. غلط

4) الزاوية المماسية تقاس بنصف القوس المقابل لها. صح

5) المماس يبعد عن مركز الدائرة بمقدار نصف القطر غلط

المجسمات

أولاً: أنواع مجسمات الفراغية

1) موشور ثلاثي
2) موشور رباعي إما مكعب أو متوازي المستطيلات.
3) الأسطوانة
4) هرم
5) مخروط
6) كرة

تذكرة بالقوانين:

أولاً: مساحات

مساحة المتوازي الأضلاع

$$S = \text{قاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

مساحة المستطيل:

$$S = \text{طول} \times \text{عرض}$$

مساحة معين:

$$S = \frac{\text{جداء قطريه}}{2}$$

مساحة مربع:

$$S = (\text{طول ضلع})^2$$

مساحة الدائرة:

$$S = \pi \cdot r^2$$

مساحة المثلث المتساوي الأضلاع:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$$

المثلث القائم:

$$S = \frac{\text{جداء ضلعين القائمتين}}{2}$$

مساحة المثلث:

$$S = \frac{\text{الارتفاع} \times \text{قاعدة}}{2}$$

مساحة الشبه منحرف:

$$S = \text{قاعدة الوسطى} \times h$$

تذكرة بالقوانين:

ثانياً محيطات

محيط شكل رباعي

$$P = \text{مجموع أطوال أضلاعه}$$

محيط مستطيل

$$P = 2(\text{طول} + \text{عرض})$$

محيط مثلث

$$P = \text{مجموع أطوال أضلاعه}$$

محيط الدائرة:

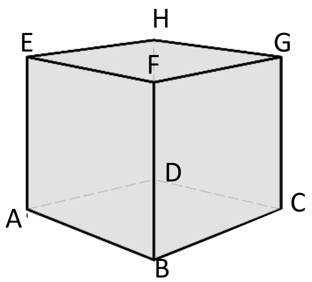
$$P = 2\pi \cdot r$$

أولاً مجسمات الفراغية

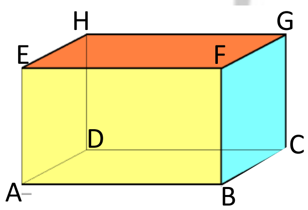
موشور القائم ثلاثي أو رباعي:

هو مجسم قاعدتاه طبوقتان ومتوازيتان وأوجه الجانبية مستطيلات أو مربعات ارتفاع الموشور هو المسافة بين القاعدتين.

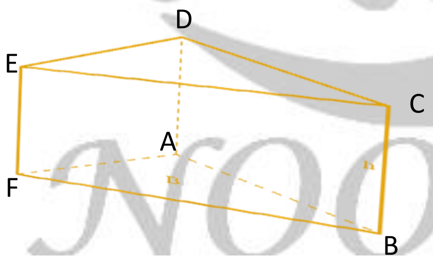
المكعب:



متوازي المستطيلات:



الموشور الثلاثي:



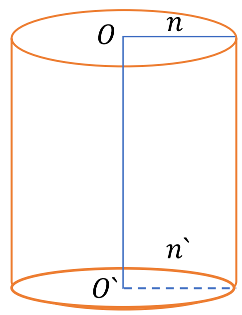
الأسطوانة الدورانية القائمة:

هو مجسم ناتج عن دوران مستطيل حول أحد أضلاعه دورة كاملة.

ارتفاع الأسطوانة هو مسافة بين مركزي قاعدتين

القاعدتين هما دائرتان طبوقتان ومتوازيتان.

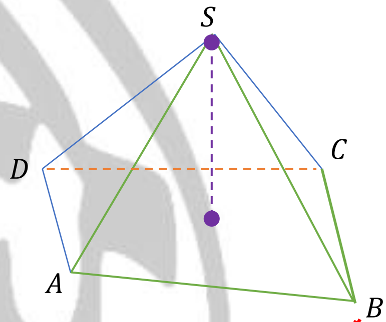
الأسطوانة الدورانية:



هرم: هو جسم مؤلف من مضلع يدعى القاعدة القاعدة ونقطة لا تنتمي إلى هذه القاعدة تدعى رأس الهرم

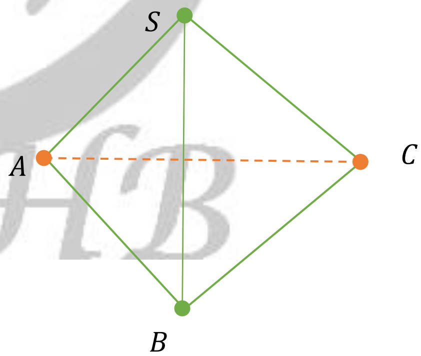
أوجه جانبية عبارة عن مثلثات بعدد أضلاع القاعدة

ارتفاع الهرم هو العامود النازل من الرأس على مستوي القاعدة



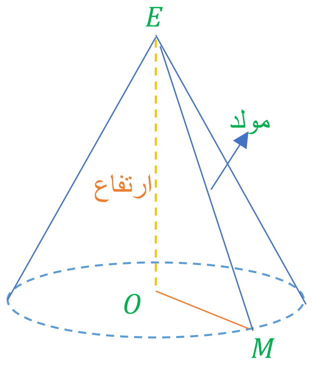
حالات خاصة :

1. الهرم المنتظم: هو هرم قاعدته مضلع منتظم ارتفاعه هو القطعة المستقيمة الواصلة بين رأسه ومركز قاعدته
2. رباعي الوجوه المنتظم هو هرم قاعدته مثلث متساوي الأضلاع ويصح أن يكون قاعدة له



مخروط دوراني :

هو المخروط الذي يتولد من دوران مثلث قائم حول نفسه دورة كاملة القرص المتولد عن الدورات هو قاعدة مخروط ارتفاع المخروط هو المسافة بين رأس ومركز القاعدة



الكرة المجوف

السطح الكروي: هو مجموعة نقاط من الفراغ ذو مركزه O ونصف قطره R

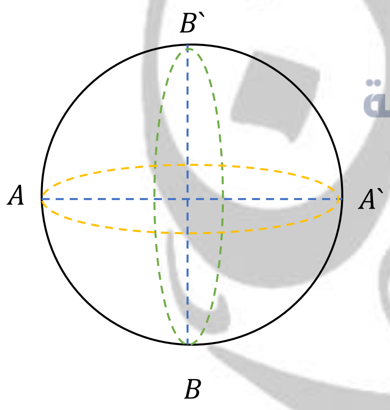
$$OM = R$$

كرة مليئ

مجسم كروي هو مجموع نقاط الفراغ مركزه O ونصف قطره R والذي يحقق $OM \leq R$

قطر الكرة : هو قطعة مستقيمة منتصفها مركز الكرة O وطرفاها نقطتان من الكرة

الدائرة الكبرى: قطرها يساوي قطر الكرة ومركزها هو مركز الكرة

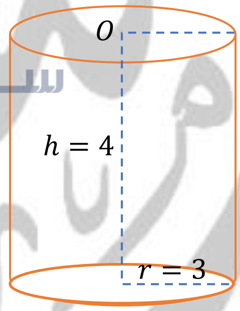


شكل الهندسي الفراغي	مساحة جانبية S_ℓ	مساحة الكلية أو مساحة السطح	حجم
الموشور القائم	$S_\ell = P \times h$	$S_T = S_\ell + 2s_b$	$V = S_b \times h$
متوازي مستطيلات	$S_\ell = P \times h$	$S_T = S_\ell + 2s_b$	$V = x.g.z$ جداء أبعاده الثلاث
مكعب	$S_\ell = 4x^2$	$S_T = 6x^2$	$V = x^3$
الأسطوانة	$S_\ell = 2\pi R \times h$	$S_T = S_\ell + 2\pi R^2$	$V = \pi R^2 \times h$
الهرم	---------	-----------	$V = \frac{1}{3} S_b \times h$
مخروط	-------	--------	$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \times h$
الكرة	-----	$S = 4\pi R^2$	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

أمثلة شاملة

في الشكل المجاور أسطوانه دورانية نصف قطرها $r = 3$ وارتفاعها $h = 4$ **ومطلوب**:

1. احسب محيط قاعدته الأسطوانة ومساحتها جانبية
2. احسب مساحة قاعدة الأسطوانة ثم احسب حجمها
3. احسب $\tan\theta$



الحل:

1. $P = 2\pi r$

$$P = 2\pi \times 3$$
$$P = 6\pi \ cm$$
$$S_\ell = P \times h = 6\pi \times 4$$
$$S_\ell = 24\pi \ \ cm$$

2. $S_b = \pi . r^2 \Rightarrow \pi(3)^2 = 9\pi \ \ cm^2$

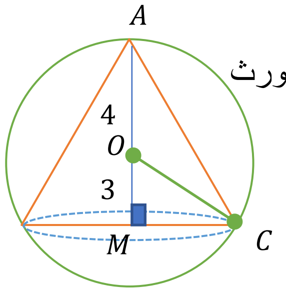
$$V = S_b \times h = 9\pi \ cm^2$$

3. $\tan(\theta) = \frac{3}{4}$

مثال2: في الشكل المجاور كرة مركزها O ونصف قطرها $OA = 4$ بداخلها مخروط دوراني رأسه A وقاعدته دائرة مركزها M تبعد عن مركز الكرة مسافة $OM = 2$ والمطلوب:

1. احسب كلاً من MC و AC
2. احسب $\sin(O\hat{C}M)$ واستنتج قياس الزاوية $O\hat{C}M$
3. احسب إذا علمت أن حجم المخروط يعطى بالعلاقة $V = \frac{3}{4}R^2 h$ احسب V

الحل:



1. لحساب MC نطبق فيثاغورث

في المثلث OMC

$$OM^2 + MC^2 = OC^2$$
$$4 + MC^2 = 16$$
$$MC^2 = 16 - 4$$
$$MC^2 = 12 \implies MC = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

لحساب حسب مبرهنة فيثاغورث بالمثلث AMC

$$AM^2 + MC^2 = AC^2$$
$$AC^2 = 36 + 12 = AC^2 = 48$$
$$AC = 4\sqrt{3}$$

2. $\sin(O\hat{C}M) = \frac{OM}{OC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$\sin(O\hat{C}M) = \frac{1}{2}$$

نستنتج أن

$$O\hat{C}M = 30°$$

3. $V = \frac{\pi}{3}.R^2.h = \frac{\pi}{3} \times (2\sqrt{3})^2 \times 6$

$$V = \frac{\pi}{3} \times 12 \times 6 = 24\pi \ cm^3$$

4. طلب إضافي احسب حجم الكرة واحسب مساحة السطح للكرة

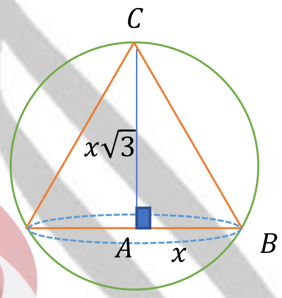
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi}{3} \times 64$$
$$V = \frac{256}{3}\pi \ cm^3$$
$$S = 4\pi R^2 = 4\pi \times 16 = 64\pi \ cm^2$$

مثال3: في الشكل المجاور مخروط دوراني ارتفاعه

المطلوب: $AC = x.\sqrt{3}$

1. أوجد $\tan(A\hat{C}B)$ واستنتج قياس الزاوية ACB
2. احسب طول CB بدلالة x
3. إذا علمت مساحة المثلث ABC تساوي $18\sqrt{3}$ أثبت أن $x = 6$
4. احسب حجم المخروط عندما $x = 6$

الحل: 1.



$$\tan(A\hat{C}B) = \frac{x}{x\sqrt{3}}$$

$$\tan(A\hat{C}B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

إذاً قياس الزاوية $A\hat{C}B = 30°$

2. حسب مبرهنة الفيثاغورث بالمثلث ACB

$$AC^2 + AB^2 = BC^2$$

$$BC^2 = 3x^2 + x^2 = BC^2 = 4x^2$$

$$BC = 2x$$

$$S_{ABC} = \frac{\text{جداء الضلعين القائمين}}{2} = \frac{AC \times AB}{2}$$

$$\frac{18\sqrt{3}}{1} = \frac{x\sqrt{3} \times x}{2}$$

طرفين بالوسطين

$$x^2\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$$

$$x^2 = 36 \qquad x = 6$$

.4

$$V = \frac{1}{3}.S.h$$

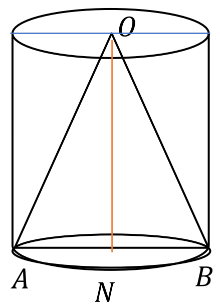
$$V = \frac{1}{3}\pi.12^2 \times h = \frac{1}{3} \times \pi.(6)^2 \times 6\sqrt{3}$$

$$V = 72\pi\sqrt{3}cm^2$$

مثال 4:

في الشكل المجاور أسطوانة دورانية ارتفاعها $h = ON$ ونصف قطر قاعدتها $r = NB = 2\sqrt{3}$ ومخروط دوراني رأسه O يشترك معهما في القاعدة وحجمه $V = 40\pi$ فإذا علمت أن حجم مخروط يعطى بالعلاقة $V = \frac{\pi}{3}r^2.h$ والمطلوب

1. أثبت أن ارتفاع الأسطوانة $h = 10$ واحسب حجمها $V`$
2. احسب حجم جزء المحصور في الأسطوانة والمخروط



الحل: 1.

$$V = \frac{\pi}{3}r^2.h$$

$$40\pi = \frac{\pi}{3}.12 \times h$$

$$40\pi = 4\pi \times h$$

$$h = 10$$

$$V`_{\text{حجم الاسطوانة}} = S_b \times h = \pi.r^2 \times h$$

$$V` = 12\pi \times 10 = 120\pi\ cm^2$$

2. $V_{\text{الجزء المحصور}} = V`_{\text{اسطوانة}} - V_{\text{مخروط}}$

$$V_{\text{الجزء محصور}} = 120\pi - 40\pi = 80\pi\ cm^3$$

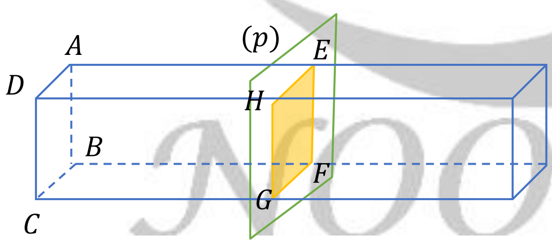
ثانياً: مقاطع المجسمات

1. المكعب: عند قطع مكعب بمستوي يوازي وجه فينتج الشكل مربع طبوق على وجه
   - عند قطع مكعب بمستوي يوازي أحد أحرفه فينتج مستطيل

ثالثاً: مقاطع المجسمات

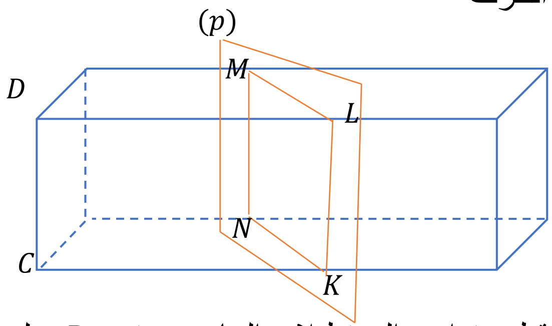
مقطع متوازي مستطيلات

بمستوي يوازي أحد الأوجه المقطع الناتج هو مستطيل يطابق ذلك الوجه



أن مقطع متوازي المستطيلات السابق بمستوي P يوازي الوجه $ABCD$ هو مستطيل $EFGH$ طبوق على المستطيل $ABCD$

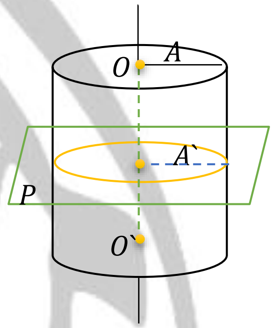
بمستوي يوازي أحد الأحرف هو مستطيل أحد بعديه يساوي ذلك الحرف



إن مقطع متوازي المستطيلات السابق بمستوي P يولزي الحرف CD هو مستطيل $MNKL$ فيه $KL = NM = CD$

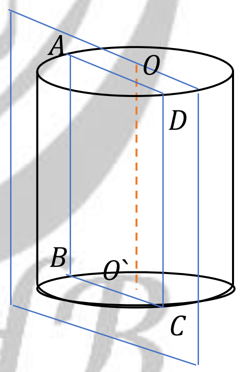
مقطع أسطوانة

مقطع أسطوانة بمستوي يوازي قاعدتها أو يعامد محورها هو دائرة تطابق القاعدة



إن مقطع الإسطوانة المجاور بمستوي يوازي قاعدتها هي دائرة طبوقة على القاعدة

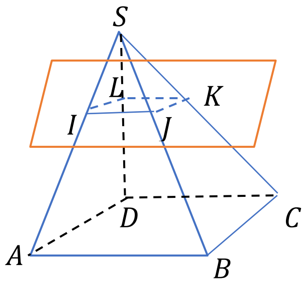
بمستوي يوازي هو محورها مستطيل أحد بعديه يساوي ارتفاع الأسطوانة



إن مقطعالاسطوانة المجاورة بمستوي يوازي المحور هو مستطيل $ABCD$ فيه $AB = CD = OO`$

مقطع هرم

إن مقطع هرم بمستوي يوازي قاعدته هو مضلع مصغر عن القاعدة



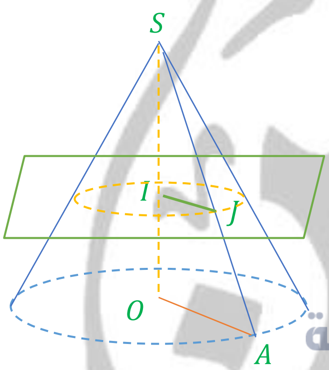
المقاطع $IJKL$ مصغر عن القاعدة $ABCD$ ونسبة التصغير

$$K = \frac{\text{ارتفاع هرم صغير}}{\text{ارتفاع هرم كبير}}$$

الجزء المحصور بين المقطع والقاعدة يدعى جذع الهرم

مقطع مخروط دوراني

إن مقطع مخروط دوراني بمستوي يوازي قاعدته هو دائرة مصغرة عن دائرة القاعدة



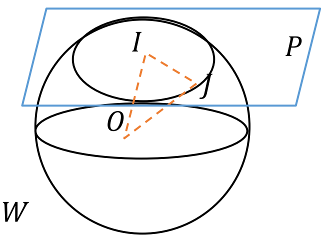
الدائرة التي نصف قطرها IJ هي تصغير عن قاعدة المخروط ونسبة التصغير

$$K = \frac{SI}{SO} = \frac{IG}{OA} = \frac{SG}{SA}$$

الجزء المحصور بين المقطع القاعدة يدعى جذع المخروط
يمكننا استخدام مبرهنة النسب الثلاث لكتابة تناسب

مقطع كرة

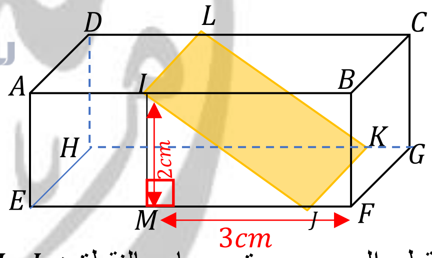
إن مقطع كرة بمستوي هو دائرة إن مقطع مجسم كروي بمستوي هو قرص دائري
عندما يمر المستوي القاطع بمركز الكرة فالمقطع هو دائرة كبرى أما إذا كان مماس الكرة فالمقطع هو نقطة



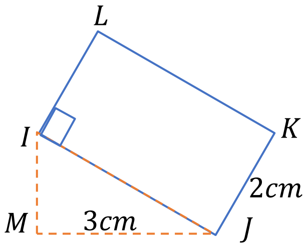
IJ هو نصف قطر دائرة المقطع OJ هو نصف قطر الكرة المثلث IOJ قائم في I مركز الدائرة

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات و
$GC = 2cm, FG = 2.5\ cm\ , EF = 5cm$
و I نقطة تحقق $AI = 1.5\ cm$
و J نقطة تحقق $FI = 0.5\ cm$
قطع هذا المجسم بمستو مار بالنقطتين I و J وموازي للحرف $[BC]$
1. ماطبيعة المقطع ؟
2. ارسم المقطع بأبعاده التامة

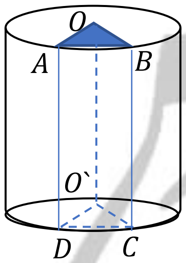
الحل:



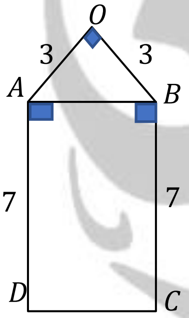
1. مقطع المجسم بمستوي مار بالنقطتين I و J مواز للحرف $[BC]$ هو مستطيل $IJKL$ ويكون:
$IL = BC = FG = 2.5cm$
2. نرمز الى المسقط I على $[EF]$ بالرمز M
فيكون $[IJ]$ وتراً في المثلث IMJ القائم في M
لدينا:
$IA = AE = 2cm$
و
$MJ = EF - (EM + JF)$
$= 5 - (1.5 + 0.5) = 3cm$
*نرسم المثلث IMJ القائم في M ثم نرسم على وتره وخارجه المستطيل $IJKL$ بحيث يكون طول $[JK]$ مساوياً $2.5\ cm$.



الشكل المرافق يمثل أسطوانة دورانية ارتفاعها $3\ cm$ ونصف قطر قاعدتها $3\ cm$
$ABCD$ هو مقطع هذه الأسطوانة بمستو يوازي محورها $OO`$
1. ما طبيعة هذا المقطع؟
2. نعلم أن $A\hat{O}B = 90°$ ارسم هذا المقطع بأبعاده الثمانية
3. احسب طول AB .



1. المقطع $ABCD$ هو مستطيل
2. المثلث AOB قائم في O ومتساوي الساقين نرسمه ثم نرسم على وتره المستطيل $ABCD$ حيث
$AB = OO` = 7$

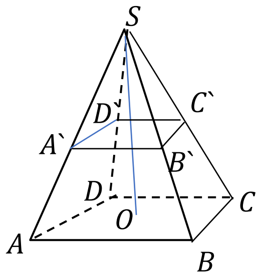


3. حساب AB حسب مبرهنة فيثاغورث من المثلث القائم AOB فيكون
$AB = 3\sqrt{2}cm$

$SABCD$ هرم منتظم رأسه S وقاعدته $ABCD$ مربع طول ضلعه $12cm$ و $SO = 6cm$ و $SG = 9cm$
مقطع الهرم بالمستوي المار بالنقطة G موازياً القاعدة هو المربع $\grave{A}\grave{B}\grave{C}\grave{D}$.

1. احسب V_1 حجم الهرم $SACD$

2. احسب V_2 حجم الهرم $SA`B`C`D`$ ثم استنتج حجم جذع الهرم



الحل:

1. $V_1 = \frac{1}{3} S.h$

$$h = SO = 12$$
$$S = AB^2 = 36$$

ومنه

$$V_1 = \frac{1}{3} \times 36 \times 12$$
$$= 144\ cm^2$$

2. هرم $SA`B`C`D`$ هو تصغير للهرم $SABCD$ بنسبة $K =$

$$\frac{SG}{SO} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

ومنه $V_2 = K^3 \times V_1$

أي

$$V_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times 144$$
$$= 60.75\ cm^3$$

حجم جذع الهرم هو الفرق بين حجمي الهرم $SABCD$ و $SA`B`C`D`$ أي

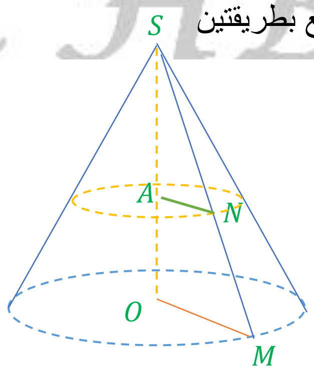
$$V = V_1 - V_2$$
$$144 - 60.75 = 83.25\ cm^3$$

مخروط دوراني رأسه s وقاعدته قرص دائري مركزه O وارتفاعه $10\ cm$ ونصف قطر قاعدته $4\ cm$

A نقطة من SO تحقق $SA = 6\ cm$

إن مقطع مخروط بمستوي يوازي القاعدة في الدائرة التي نصف قطرها AM

1. احسب نصف قطر المقطع
2. احسب مساحة المقطع بطريقتين



الحل:

1.

$$\frac{SA}{SO} = \frac{AN}{OM}$$

$$\frac{6}{10} = \frac{AN}{4} \Longrightarrow AN = \frac{24}{10} = 2.4cm$$

2. المقطع هو تصغير عن قاعدة المخروط ونسبة تصغيره

$$K = \frac{SA}{SO} = \frac{6}{10}$$
$$S = \pi(OM)^2$$
$$= 16\pi\ cm^2$$

ومنه

$$S` = K^2 \times S$$

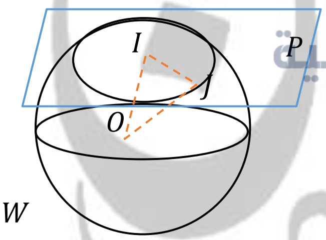
إذا

$$S` = \left(\frac{6}{10}\right)^2 \times 16\pi$$
$$= 5.76\ cm^2$$

لدينا سطح كروي مركزه O ونصف قطره $3\ cm$، I نقطة تحقق $OI = 2\ cm$ وليكن (P) مستوياً يمر بالنقطة I ويعامد المستقيم (OI)

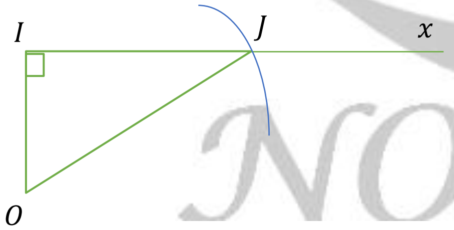
ولتكن J نقطةمشتركة بين المستوي (P) والسطح W

1. ارسم المثلث OIJ بقيم تامة الأطوال
2. ارسم المقطع بأبعاده التامة
3. احسب نصف قطر المقطع



الحل:

نرسم ضلعين قائمين في I ثم نعين $IO = 2cm$ على أحدهما



1. نفتح الفرجار $3\ cm$ ونثبته في O ونرسم قوس يقطع الضلع القائمة الأخرى في J
2. نرسم دائرة نصف قطرها IJ
3. حسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث OIJ القائم في I نجد أن

$$IJ = \sqrt{5}$$