ورقة عمل الحادي عشر المتقدم

9-7 نظرية ذات الحدّين

The Binomial Theorem

مشاهدة الدرس YouTube 1

في هذا الدرس سوف أتعلم:

1- استخدام مثلث باسكال لكتابة التعابير ذات الحدّين.

2- استخدام نظرية ذات الحدّين لكتابة و إيجاد معاملات حدود معينة في التعابير ذات الحدّين.

ذات الحدين هو تعبير جبري يتضمن مجموع حدَّين غير متشابهين. يتم إنتاج متسلسلة من خلال تفكيك ذي حدَّين تم رفعه لقوة أسية من عدد صحيح. افحص السلسلة الناتجة عن تفكيك $(a+b)^n$ للعديد من القيم الصحيحة غير السالبة لـ n.

$$(a+b)^0 = 1a^0b^0$$

$$(a+b)^1 = 1a^1b^0 + 1a^0b^1$$

$$(a+b)^2 = 1a^2b^0 + 2a^1b^1 + 1a^0b^2$$

$$(a+b)^3 = 1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3$$

$$(a+b)^4 = 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4$$

$$(a+b)^5 = 1a^5b^0 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + 1a^0b^5$$

لاحظ الأنماط التالية في تفكيكات $(a+b)^n$ أعلاه:

- **في كل تفكيك $n+1$ حدّ.**
- **الحد الأول هو a^n، والحد الأخير هو b^n.**
- **في الحدود المتتابعة، يتناقص أس a بمقدار 1، ويتزايد أس b بمقدار 1.**
- **مجموع الأسين في كل حد هو n.**
- **المعاملات - الموضحة أعلاه باللون الأحمر - تتزايد ثم تتناقص وفق نمط متماثل.**

إذا استُخرجت معاملات عمليات التفكيك هذه - والتي تعرف باسم معاملات ذات الحدّين، وتم ترتيبها وفق مصفوفة مثلثية الشكل، فستُشكّل نموذجًا يدعى مثلث باسكال، والذي سمي هكذا على اسم عالم الرياضيات الفرنسي بليز باسكال.

من خلال تفكيك مثلث باسكال واستخدام الأنماط التي لوحظت فيه يمكنك تفكيك ذات حدّين مرفوعة إلى أي قوة أسية قوامها عدد كلي.

الصف الصفري			1				
الصف الأول		1		1			
الصف الثاني		1	2	1			
الصف الثالث	1	3	3	1			
	1	4	6	4	1		
	1	5	10	10	5	1	
	1	6	15	20	15	6	1

Use Pascal's triangle to expand each binomial. استخدم مثلث باسكال لتفكيك كل ذات حدّين.

1A. $(c+d)^9$

1 9 36 84 126 126 84 36 (9) 1 تاسع

من الصف التاسع في مثلث باسكال في آخر صفحة في هذا الدرس :-

$= 1c^9d^0 + 9c^8d^1 + 36c^7d^2 + 84c^6d^3 + 126c^5d^4 + 126c^4d^5 + 84c^3d^6 + 36c^2d^7 + 9c^1d^8 + 1c^0d^9$

$= c^9 + 9c^8d + 36c^7d^2 + 84c^6d^3 + 126c^5d^4 + 126c^4d^5 + 84c^3d^6 + 36c^2d^7 + 9cd^8 + d^9$

مثال 1. جد احتمال ترقية 6 من كبار الموظفين و 2 من صغار الموظفين من خلال توسيع $(m+f)^8$

نفترض m ← كبار الموظفين ، n ← صغار الموظفين.

1 8 28 56 70 56 28 (8) 1 ثامن

من الصف الثامن من مثلث باسكال في آخر صفحة في الدرس..

$(m+f)^8 = 1m^8f^0 + 8m^7f^1 + 28m^6f^2 + 56m^5f^3 + 70m^4f^4 + 56m^3f^5 + 28m^2f^6 + 8m^1f^7 + 1m^0f^8$

مجموع المعاملات :- $1+8+28+56+70+56+28+8+1 = \boxed{256}$ ← 256 توفيقاً من كبار الموظفين وصغار الموظفين.

$28m^6f^2$ يمثل عدد التوفيقات لـ 6 كبار و 2 صغار ← احتمال 6 كبار و 2 صغار $= \frac{28}{256} = \frac{7}{64} \approx$ $\boxed{10.94\ \%}$

---

20. $(3a-4b)^5$

$= 1(3a)^5(-4b)^0 + 5(3a)^4(-4b)^1 + 10(3a)^3(-4b)^2 + 10(3a)^2(-4b)^3 + 5(3a)^1(-4b)^4 + 1(3a)^0(-4b)^5$

$= 243a^5 - 1620a^4b + 4320a^3b^2 - 5760a^2b^3 + 3840ab^4 - 1024b^5$

---

7. علم الوراثة إذا كانت فرصة أن تُرزق امرأة بولد أو ببنت متساوية، فاستخدم مفكوك ذات الحدين لتحديد احتمال أن تُرزق بخمس بنات من إجمالي أطفالها الستة. ولا تضع التوائم المتماثلة في الاعتبار.

$(b+g)^6 = 1b^6g^0 + 6b^5g^1 + 15b^4g^2 + 20b^3g^3 + 15b^2g^4 + \boxed{6b^1g^5} + 1b^0g^6$

مجموع المعاملات ← $\frac{6}{64} = \frac{3}{32} \approx$ $\boxed{9.375\ \%}$

المفهوم الأساسي نظرية ذات الحدين

تذكر أن $_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

إذا كان n عددًا طبيعيًا، فإن $(a+b)^n =$

$$_nC_0\, a^n b^0 + {}_nC_1\, a^{n-1}b^1 + {}_nC_2\, a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_n\, a^0 b^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k}b^k$$

Use the Binomial Theorem to expand each binomial. **استخدم نظرية ذات الحدّين لتفكيك كل ذات حدّين.**

16. $(c-d)^7$

$= {}_7C_0\, c^7(-d)^0 + {}_7C_1\, c^6(-d)^1 + {}_7C_2\, c^5(-d)^2 + {}_7C_3\, c^4(-d)^3 + {}_7C_4\, c^3(-d)^4$

$+ {}_7C_5\, c^2(-d)^5 + {}_7C_6\, c^1(-d)^6 + {}_7C_7\, c^0(-d)^7$

$= c^7 - 7c^6d + 21c^5d^2 - 35c^4d^3 + 35c^3d^4 - 21c^2d^5 + 7cd^6 - d^7$

19. $(2a+4b)^4$

$= {}_4C_0(2a)^4(4b)^0 + {}_4C_1(2a)^3(4b)^1 + {}_4C_2(2a)^2(4b)^2 + {}_4C_3(2a)^1(4b)^3 + {}_4C_4(2a)^0(4b)^4$

$= 16a^4 + 128a^3b + 384a^2b^2 + 512ab^3 + 256b^4$

Find the indicated term of each expression. **جد الحد المشار إليه لكل تعبير.**

23. third term of $(x+2z)^7$

$= {}_7C_2\,(x)^5(2z)^2$

$= 84x^5z^2$

26. sixth term of $(4x+5y)^6$

$= {}_6C_5\,(4x)^1(5y)^5$

$= 75000xy^5$

ملخص المفهوم نظرية ذات الحدين

في مفكوك ذات الحدين لـ $(a+b)^n$.

- يوجد $n+1$ من الحدود
- n هو أس a في الحد الأول وأس b في الحد الأخير.
- في الحدود المتتابعة، يتناقص أس a بمقدار 1، ويتزايد أس b بمقدار 1.
- مجموع الأسس في كل حد يساوي n.
- المعاملات متماثلة.

الصف الصفري					1					
الصف الأول				1		1				
الصف الثاني			1		2		1			
الصف الثالث		1		3		3		1		
رابع	1		4		6		4		1	
خامس	1		5		10		10		5	1
سادس	1		6		15		20		15	6	1
سابع	1		7		21		35		35	21	7	1
ثامن	1		8		28		56		70	56	28	8	1
تاسع	1		9		36		84		126	126	84	36	9	1
عاشر	1		10		45		120		210	252	210	120	45	10	1

050-2509447