

الامتياز

فى

الرياضيات



جبر و هندسة

الصف

الثالث

الاعدادى

2019

إعداد

أ.عبدالمقصود حنفى

ت | ٥١٣٦٣٣٦٧٠١

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

الترم
الثانى

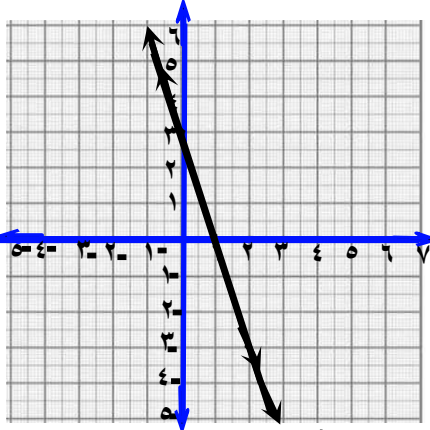
الجبر

حل معادلتين من الدرجة الأولى في متغيرين

أولاً

④ $3 = 3 + ص$ ، $2 = 6 + ص$ ، $6 = 6$

الحل



ص = 3 - 3 = 0

ص	3	1	0
ص	3	0	2

2 = 6 - 6 = 0

ص = 3 - 3 = 0

ص	3	1	0
ص	3	0	2

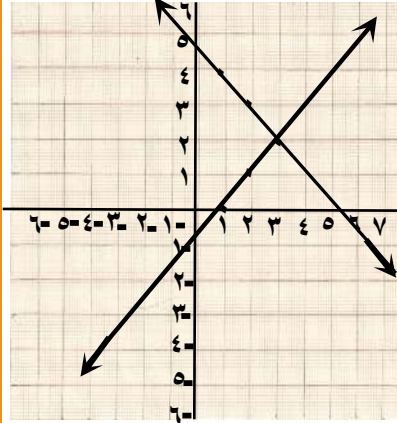
ح.م = $\{(ص، 3) : 3 = ص + 3\}$
 المستقيمات منطبقان
 عدد الحلول = عدد لا نهائى

حل معادلتين من الدرجة الأولى في متغيرين بيانياً

(1) أوجد مجموعة حل المعادلتين بيانياً

① $5 = 5 + ص$ ، $1 = 5 - ص$

الحل



ص = 5 - 5 = 0

ص	5	2	1
ص	5	3	2

ص = 5 - 1 = 4

ص = 5 - 1 = 4

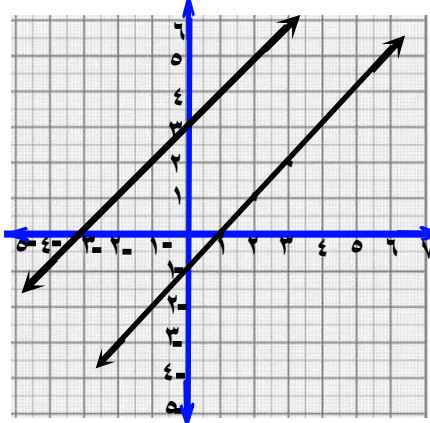
ص	5	2	1
ص	5	1	0

ح.م = $\{(1, 0)\}$

المستقيمات متقاطعان
 عدد الحلول حل وحيد

⑤ $1 = 1 - ص$ ، $3 = 3 - ص$

الحل



ص = 1 - 1 = 0

ص	3	2	1
ص	3	1	0

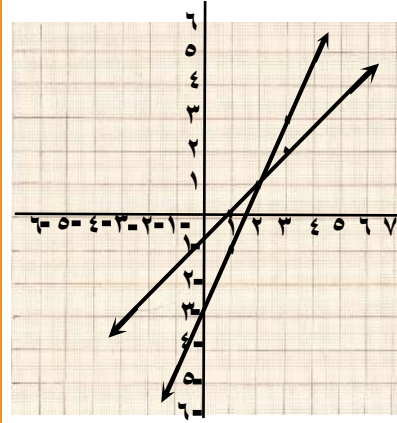
ص = 3 + 3 = 6

ص	3	1	0
ص	3	4	5

المستقيمات متوازيان
 عدد الحلول = صفر

② $2 = 2 - ص$ ، $3 = 3 - ص$

الحل



ص = 2 - 2 = 0

ص	3	2	1
ص	3	1	0

ص = 3 - 1 = 2

ص	3	2	1
ص	3	1	0

ح.م = $\{(1, 0)\}$

③ $2 = 2 - ص$ ، $3 = 3 + ص$ ، $4 = 4 + ص$

الحل

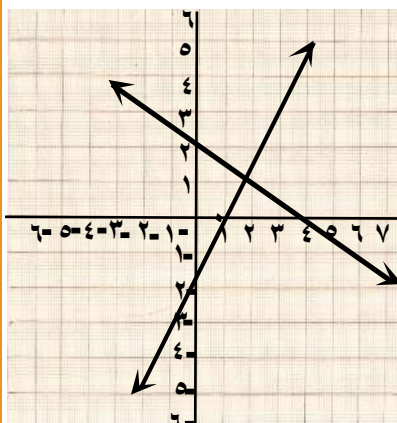
ملاحظات المستقيمات الممثلان للمعادلتين

يكونان

① منطبقان إذا كان $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$

② متوازيان إذا كان $\frac{1}{a} \neq \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$

③ متقاطعان إذا كان $\frac{1}{a} \neq \frac{1}{b} \neq \frac{1}{c}$



ص = 2 - 2 = 0

ص	3	2	1
ص	3	1	0

ص = 4 - 2 = 2

ص	3	2	4
ص	3	1	0

ح.م = $\{(1, 0)\}$

ثانياً

حل معادلتين من الدرجة الأولى في متغيرين جبرياً

توجد طريقتان للحل الجبري

① طريقة التعويض ② طريقة الحذف

(١) أوجد مجموعة حل المعادلتين جبرياً

$$\textcircled{1} \quad 2س + ص = 5, \quad س - ص = 1$$

الحل

طريقة التعويض

$$5 = 2س + ص$$

$$ص = 5 - 2س$$

بالتعويض في

$$س - ص = 1$$

$$س - (5 - 2س) = 1$$

$$س - 5 + 2س = 1$$

$$3س + 1 = 5$$

$$3س = 5 - 1$$

$$3س = 4$$

$$س = \frac{4}{3}$$

$$ص = 5 - 2 \times \frac{4}{3}$$

$$ص = 5 - \frac{8}{3}$$

$$\therefore \text{ح.م} = \left\{ \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3} \right) \right\}$$

طريقة الحذف

$$2س + ص = 5$$

$$س - ص = 1$$

$$\frac{3س = 6}{3 \div 3}$$

$$س = 2$$

بالتعويض في الأولى

$$5 = 2(2) + ص$$

$$5 = 4 + ص$$

$$ص = 5 - 4$$

$$ص = 1$$

$$\therefore \text{ح.م} = \left\{ (2, 1) \right\}$$

$$\textcircled{2} \quad 2س + ص = 5, \quad س - ص = 1$$

الحل

$$س - ص = 1$$

$$5 = 2س + ص$$

$$\frac{2س = 4}{2 \div 2}$$

$$س = 2$$

$$ص = 5 - 2(2)$$

$$ص = 5 - 4$$

$$ص = 1$$

$$ص = 3 - 5$$

$$ص = 2$$

$$\therefore \text{ح.م} = \left\{ (2, 3) \right\}$$

$$\textcircled{3} \quad 4س + 3ص = 6, \quad س - 2ص = 7$$

الحل

$$4س + 3ص = 6$$

$$س - 2ص = 7$$

$$\frac{12س + 9ص = 18}{3س - 6ص = 21}$$

$$12س + 9ص = 18$$

$$3س - 6ص = 21$$

$$11س = 33$$

$$س = 3$$

بالتعويض في الأولى

$$6 = 3(3) + 3ص$$

$$6 = 9 + 3ص$$

$$3ص = 6 - 9$$

$$3ص = -3$$

$$ص = -1$$

$$\therefore \text{ح.م} = \left\{ (3, -1) \right\}$$

$$\textcircled{4} \quad 8 = 2س + 3ص, \quad 7 = 2س + ص$$

الحل

$$2س + 3ص = 8$$

$$2س + ص = 7$$

$$\frac{16 = 6ص + 2س}{16 - 7 = 6ص - 2س}$$

$$9 = 6ص - 2س$$

$$9 = 6ص - 2س$$

$$3 \div 9 = 6ص - 2س$$

$$3 = 6ص - 2س$$

$$ص = 3$$

بالتعويض في الأولى

$$8 = 2(3) + 3ص$$

$$8 = 6 + 3ص$$

$$2 = 3ص$$

$$ص = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \text{ح.م} = \left\{ \left(\frac{2}{3}, 3 \right) \right\}$$

$$\textcircled{5} \quad 1 = 2س + 3ص, \quad 0 = 7 - 2س$$

الحل

بالتعويض في الثانية

$$0 = 7 - 1 \times 2س$$

$$0 = 7 - 2س$$

$$2س = 7$$

$$س = \frac{7}{2}$$

$$ص = 0$$

$$\therefore \text{ح.م} = \left\{ \left(\frac{7}{2}, 0 \right) \right\}$$

حل معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد بيانياً

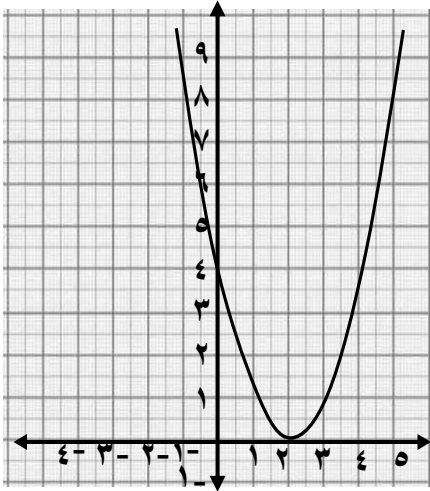
١ مثل بيانياً كلاً من الدوال الآتية ومن الرسم

استنتج إداثي رأس المنحنى و معادلة محور التماثل و القيمة العظمى أو الصغرى للدالة و مجموعة حل المعادلة د(س) = صفر

١ د(س) = (س-٢)² حيث س ∈ [-١، ٥]

الحل

س	٥	٤	٣	٢	١	٠	-١
ص	٩	٤	١	٠	١	٤	٩



رأس المنحنى (٢، ٠)

معادلة محور التماثل س = ٢

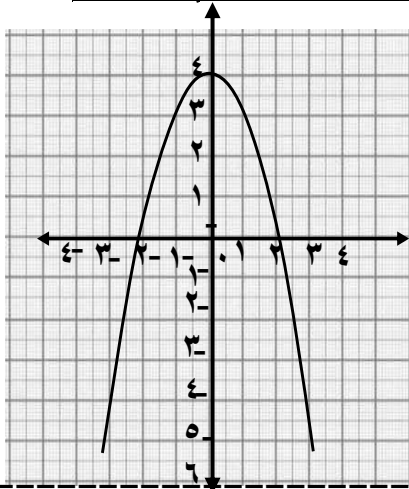
القيمة الصغرى عند ص = ٠

م.ح = { ٢ }

٢ د(س) = -٤ - س حيث س ∈ [-٣، ٣]

الحل

س	٣	٢	١	٠	-١	-٢	-٣
ص	-٥	-٤	-٣	-٢	-١	٠	١



رأس المنحنى (٠، ٤)

معادلة محور التماثل س = ٠

القيمة العظمى عند ص = ٤

م.ح = { -٢، ٢ }

لاحظ أن

مجموعة حل المعادلة هي نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات

و إذا لم يقطع المنحنى محور السينات يكون م.ح = ∅

تمارين ١

١ أكمل كلاً مما يأتي

- المستقيمان س = ٤ ، ص = ٣ - ٠ يتقاطعان في النقطة
- نقطة تقاطع المستقيمين س = -١ ، ص = ١ + ٠ تقع في الربع ..
- مجموعة حل المعادلتين س + ٣ = ص ، ٤ = ٣ + ص هي ١ هي ..
- مجموعة حل المعادلتين س + ٦ = ص ، ٨ = ٢ + ص هي ٢ هي ..
- إذا كان المستقيمان: س + ٣ = ص ، ٤ = ٢ + ص متوازيين فإن ٢ =
- المستقيمان: س + ٥ = ص ، ١ = ٥ + ص - ٨ = ٠ يكونان ..
- المستقيمان: س + ٣ = ٤ + ص ، ١ = ٦ + ص + ٨ = ٢ يكونان ..
- عدد حلول المعادلتين س + ٢ = ص ، ٢ = ٣ - ص + ٠ هو ..
- إذا كان للمعادلتين س + ٤ = ص ، ٧ = ٣ + ص + ٢ = ١ عدد لا نهائي من الحلول فإن ٢ =
- إذا كان للمعادلتين: س + ٢ = ص ، ١ = ٢ + ص + ٢ = ٢ حل وحيد فإن ٢ لا يمكن أن تساوى
- مجموعة حل المعادلتين ص = ٤ + س ، ٤ = ص + ٤ هي ..
- مجموعة حل المعادلتين س + ٠ = ص ، ٠ = ٥ - ص هي ..

٢ أوجد مجموعة حل المعادلتين بيانياً

١ س + ص = ٤ ، ٢ - س = ص - ١

٢ س + ٣ = ص ، ٣ = س - ١

٣ س + ٥ = ص ، ١ = ص - س

٤ س + ٤ = ص ، ٤ + س = ص

٥ ٣ + ص = ٤ ، ٢ + ص = ٦ - س

٦ ٣ + ص = ٢ ، ٣ = ٦ + ص - ٩

٣ أوجد مجموعة حل المعادلتين جبرياً

١ س + ص = ٧ ، ١ = ص - س

٢ س - ص = ٤ ، ٣ + س = ٢ + ص - ٧

٣ ٢ - س = ٣ ، ٤ = ٢ + ص - ٤

٤ ٣ - س = ٩ + ص ، ٠ = ٧ - س - ٠

٥ س + ١ = ص ، ٥ = ص + س

٦ ٣ + س = ٤ ، ٥ = ٣ - س - ٥

٧ س + ٧ = ص ، ١ - س = ٣ - ص - ١

٨ أوجد قيمتي f ، b علماً بأن (٣، ١) حل للمعادلتين

f + س + ب = ٥ ، ٠ = ٣ + س + ب - ١٧

حل معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد جبرياً باستخدام القانون العام

الصورة العامة لمعادلة الدرجة الثانية

$$٠ = ٢س + ب٢ + ج$$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤٠ج}}{٢٢}$$

القانون العام

١) أوجد مجموعة حل المعادلة باستخدام القانون العام

$$٠ = ٢س + ٤س - ٢$$

الحل

$$\begin{aligned} ١ &= ٢ \\ ٤ &= ب \\ ٢ &= ج \end{aligned}$$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤٠ج}}{٢٢}$$

$$س = \frac{-٤ \pm \sqrt{٤^2 - ٤ \times ٢ \times ٢}}{٢ \times ٢}$$

$$س = \frac{\sqrt{٨} \pm ٤}{٢} = \frac{\sqrt{٢} \pm ٤}{٢}$$

$$س = ٢ \pm \sqrt{٢}$$

$$س = ٢ + \sqrt{٢} ، س = ٢ - \sqrt{٢}$$

$$ح.م = \{٢ + \sqrt{٢} ، ٢ - \sqrt{٢}\}$$

$$٢) ٠ = ٢س + ٢س - ٣ حيث ٣ = ٧$$

الحل

$$\begin{aligned} ١ &= ٢ \\ ٢ &= ب \\ ٢ &= ج \end{aligned}$$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤٠ج}}{٢٢}$$

$$س = \frac{-٢ \pm \sqrt{٢^2 - ٤ \times ٢ \times ٢}}{٢ \times ٢}$$

$$س = \frac{\sqrt{١٢} \pm ٢}{٢} = \frac{\sqrt{٣} \pm ٢}{٢}$$

$$س = \frac{٢ + \sqrt{٣}}{٢} ، س = \frac{٢ - \sqrt{٣}}{٢}$$

$$س = ٢ + \sqrt{٣} ، س = ٢ - \sqrt{٣}$$

$$ح.م = \{٢ + \sqrt{٣} ، ٢ - \sqrt{٣}\}$$

$$٣) ٠ = ٥ + (٥ + س)$$

مقرباً الناتج لأقرب ثلاثة أرقام عشرية

الحل

$$٠ = ٥ + ٥س + ٢س$$

$$\begin{aligned} ١ &= ٢ \\ ٥ &= ب \\ ٥ &= ج \end{aligned}$$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤٠ج}}{٢٢}$$

$$س = \frac{-٥ \pm \sqrt{٥^2 - ٤ \times ٥ \times ٥}}{٢ \times ٢}$$

$$س = \frac{-٥ + \sqrt{٥}}{٢} ، س = \frac{-٥ - \sqrt{٥}}{٢}$$

$$ح.م = \{-١.٦١٨ ، ٠.٦١٨\}$$

$$٤) ٠ = ٣س + ١س$$

بالضرب × س

الحل

$$\begin{aligned} ١ &= ٢ \\ ١ &= ب \\ ٣ &= ج \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ٠ &= ٣س + ٢س \\ ٠ &= ٥س + ٣س \end{aligned}$$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤٠ج}}{٢٢}$$

$$س = \frac{-١ \pm \sqrt{١^2 - ٤ \times ٣ \times ٣}}{٢}$$

$$س = \frac{١ \pm \sqrt{١١}}{٢} \neq ١١$$

$$ح.م = \emptyset$$

$$٦) ٠ = ١ - ٥س - ٣س$$

الحل

$$\begin{aligned} ٢ &= ٢ \\ ٥ &= ب \\ ١ &= ج \end{aligned}$$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤٠ج}}{٢٢}$$

$$س = \frac{-٥ \pm \sqrt{٥^2 - ٤ \times ٣ \times ١}}{٢ \times ٢}$$

$$س = \frac{٥ \pm \sqrt{١٧}}{٤}$$

$$س = \frac{٥ + \sqrt{١٧}}{٤} ، س = \frac{٥ - \sqrt{١٧}}{٤}$$

$$ح.م = \{\frac{٥ + \sqrt{١٧}}{٤} ، \frac{٥ - \sqrt{١٧}}{٤}\}$$

حل معادلتين في متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى و الأخرى من الدرجة الثانية

١ أوجد في ح^٢ مجموعة حل كل من المعادلات الآتية

١) $س - ص = ١$ ، $س^٢ + ص^٢ = ١٣$

الحل

$$\begin{aligned} س - ص &= ١ \\ س &= ص + ١ \\ ١٣ &= ص^٢ + (ص + ١)^٢ \\ ١٣ &= ص^٢ + ص^٢ + ٢ص + ١ \\ ٠ &= ١٣ - ١ + ص^٢ + ٢ص \\ ١٢ &= ٠ - ٢ص - ص^٢ \\ ٠ &= ٦ - ص - ص^٢ \\ ٠ &= (ص - ٣)(ص + ٢) \\ ص &= ٣ \quad | \quad ص = -٢ \\ ٢ + ١ &= س \quad | \quad ٣ - ١ = س \\ ٣ &= س \quad | \quad ٢ - = س \end{aligned}$$

م.ح = $\{(٢, ٣), (٣, -٢)\}$

س + ١ = ص

بالتعويض في الأولى

٢) $س = ص$ ، $س^٢ + ص^٢ = ٥٠$

الحل

$$\begin{aligned} س &= ص \\ ٥٠ &= ص^٢ + ص^٢ \\ ٥٠ &= ٢ص^٢ \\ ٢٥ &= ص^٢ \\ ٥ &= ص \quad | \quad ٥ = ص \\ ٥ - = ص \quad | \quad ٥ - = ص \end{aligned}$$

م.ح = $\{(٥, ٥), (٥, -٥)\}$

٣) $س = ٣$ ، $س = ٦$

الحل

$$\begin{aligned} س &= ٣ \\ ٣ &= ٦ \\ ٣ &= ٦ \end{aligned}$$

م.ح = $\{(٢, ٣)\}$

تمارين

١ مثل بيانياً كلاً من الدوال الآتية في الفترة المعطاة ومن الرسم أوجد رأس المنحنى

ومعادلة محور التماثل

وأوجد جذرى المعادلة د (س) = ٠ :

١) د (س) = $س^٢ - ٣س + ٣$ ، $س \in]٣, ٣[$

٢) د (س) = $س^٢ - ٢س - ٣$ ، $س \in]٢, ٤[$

٣) د (س) = $س^٢ - ٤س + ٣$ على الفترة $[٠, ٤]$

٤) د (س) = $٢س^٢ - ٣(٢ - س)$ في الفترة $[-٣, ٢]$

٥) د (س) = $س^٢ + ١$ في الفترة $[-٣, ٣]$

٢ أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية

١) $٢س^٢ - ٤س + ١ = ٠$

٢) $س^٢ - ٦س + ٧ = ٠$

٣) $س(س - ١) = ٤$ لأقرب ثلاثة أرقام عشرية

٤) $٠ = (س - ٣)٥ - ٥س$

٥) $\frac{١}{س} = \frac{١}{٣ - س}$

٦) $س^٢ - ٢س - ٤ = ٠$ علمياً بأن $\sqrt{٢٤} \approx ٤,٢٤$

٧) $س^٢ - ٢(س + ٣) = ٠$ علمياً بأن $\sqrt{٢٨} \approx ٧,٢٨$

تطبيقات على حل معادلتين في متغيرين

ملاحظات

إذوا كان العروس فإن

١ ضعفه ٢ سن وثلاثة أمثاله ٣ سن

٢ سريعه سن

٣ إذوا كان عمر أعمر (الابن هو سن

فعمره بعمر ٣ سنوات هو: سن + ٣

وعمره قبل ٥ سنوات هو: سن - ٥

٤ محيط المستطيل = (الطول + العرض) × ٢

٥ مساحة المستطيل = الطول × العرض

٦ مساحة العين = نصف حاصل ضرب قطريه

١ عددان نسبيان مجموعهما ٦٣ ، الفرق بينهما ١٣ أوجد العددين؟

الحل

نفرض ان العددان هما س ، ص

$$س + ص = ٦٣ \quad ٦ - س = ص = ١٣$$

$$س + ٦ = ١٣$$

$$س = ١٣ - ٦$$

$$س = ٧$$

$$س = ٣٨ \leftarrow ٣٨ + ص = ٦٣$$

$$ص = ٦٣ - ٣٨ = ٢٥$$

العددان هما ٣٨ ، ٢٥

٢ أوجد عددان صحيحان مجموعهما ٩

وثلاثة امثال اصغرهما يزيد عن ضعف اكبرهما بمقدار ٢

الحل

نفرض ان الاصغر = س والاكبر = ص

$$س + ص = ٩ \quad ٢ \times ٣$$

$$٢ - س = ٢ \times ٣$$

$$٢ - س = ٦$$

$$٢ - س = ٦$$

$$س = ٦ - ٢ = ٤$$

$$٤ + ص = ٩ \leftarrow ص = ٩ - ٤ = ٥$$

$$ص = ٥$$

العددان هما ٤ ، ٥

$$٤ \text{ ص} - س = ١ \quad ١ - س = ٢ \text{ ص} - ٥$$

الحل

$$١ - س = ٢ \text{ ص} - ٥$$

$$١ - س = ٢ \text{ ص} - ٥$$

$$١ - س = ٢ \text{ ص} - ٥$$

$$١ - س = ٢ \text{ ص} - ٥$$

$$١ - س = ٢ \text{ ص} - ٥$$

$$٢ - س = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥$$

$$٦ \text{ س} + ص = ٧ \quad ١٢ = ص$$

الحل

$$١٢ = ص$$

$$١٢ = (س - ٧)$$

$$٠ = ١٢ - ٧$$

$$٠ = ١٢ - ٧$$

$$٠ = (٤ - س) (٣ - س)$$

$$٤ = س$$

$$٤ - ٧ = ص$$

$$٣ = ص$$

$$٣ = ص$$

$$٣ = ص$$

$$٣ = ص$$

$$٣ = ص$$

$$٣ = ص$$

$$٣ = ص$$

$$٣ = ص$$

$$٣ = ص$$

$$\{ (٣, ٤), (٤, ٣) \} = \text{ح.م}$$

٦) عددان الفرق بينهما ٢ ومجموع مربعيهما = ٣٤ أوجد هذان العددان

الحل نفرض أن العددان س ، ص

$$\begin{aligned} 34 &= s^2 + v^2 \\ 34 &= (s+2)^2 + v^2 \\ 0 &= 34 - s^2 + s^2 + v^2 + 4s + 4 \\ 2 &= 34 - s^2 + s^2 + 4s + 4 \\ 0 &= 30 - 4s \\ 0 &= 15 - 2s \\ 0 &= (3-s)(5+v) \\ 3 &= s, 5 = v \\ 0 &= s, 3 = v \end{aligned}$$

العددان هما ٣-٥ ، ٣ ، ٥

٧) مثلث قائم الزاوية طول أحد ضلعي القائمة يزيد عن

الضلع الاخر بمقدار ٢ وطول وتره = ١٠ اسم أوجد محيطه

الحل

نفرض أن ضلعي القائمة س ، ص

$$\begin{aligned} 100 &= s^2 + v^2 \\ 100 &= (s-2)^2 + v^2 \\ 0 &= 100 - s^2 + s^2 + v^2 - 4s + 4 \\ 2 &= 100 - s^2 + s^2 - 4s + 4 \\ 0 &= 96 - 4s \\ 0 &= 24 - s \\ 0 &= (6+s)(8-s) \\ 6 &= s, 8 = s \\ \text{مرفوض} & \quad \text{ص} = 8 - 2 \\ & \quad \text{ص} = 6 \end{aligned}$$

أضلاع المثلث = ٦ ، ٨ ، ١٠
محيطه = ٦ + ٨ + ١٠ = ٢٤ سم

٣) مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٤ سم ، فإذا كان محيط المستطيل ٢٨ سم . أوجد مساحة المستطيل

الحل

$$\begin{aligned} \text{نفرض أن طول المستطيل} &= s \text{ وعرضه} = v \\ s - v &= 4 \\ 28 &= 2(s+v) \\ 14 &= s+v \\ s - v &= 4 \\ s + v &= 14 \end{aligned}$$

$$2s = 18 \Rightarrow s = 9 \text{ سم}$$

$$v = 9 - 4 = 5 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{مساحة المستطيل} = 5 \times 9 = 45 \text{ سم}^2$$

٤) مستطيل محيطه = ٢٠ سم ومساحته = ٢٤ أوجد بعديه

الحل

نفرض أن طول المستطيل = س وعرضه = ص

$$\begin{aligned} 20 &= \text{محيطه} \\ 20 &= 2(s+v) \\ 10 &= s+v \\ 24 &= \text{مساحة المستطيل} \\ 24 &= s \times v \\ 24 &= (s-10) \times s \\ 0 &= 24 - 10s + s^2 \\ 0 &= s^2 - 10s + 24 \\ 0 &= (s-6)(s-4) \\ 6 &= s, 4 = s \\ 6 &= s, 6 = v \end{aligned}$$

أبعاد المستطيل ٤ ، ٦

٥) عددان مجموععهما = ٦ ومجموع مربعيهما = ٢٠ أوجد هذان العددان

الحل

نفرض أن العددان هما س ، ص

$$\begin{aligned} 20 &= s^2 + v^2 \\ 20 &= (s-6)^2 + v^2 \\ 0 &= 20 - s^2 + s^2 + v^2 - 12s + 36 \\ 2 &= 20 - s^2 + s^2 - 12s + 36 \\ 0 &= 16 - 12s \\ 0 &= 8 - 6s \\ 0 &= (2-s)(4-s) \\ 2 &= s, 4 = s \\ 4 &= s, 2 = v \end{aligned}$$

∴ العددان هما ٢ ، ٤

تمارين ٣

١ اكمل مكان النقط :

٣ اجب عما يلي

- ١ $6 = ص - ص = ٩$ هي
 - ٢ عددان موجبان مجموعهما ٧ وحاصل ضربيهما ٢ فما هما العددين
 - ٣ المعادلة: $ص = ٣$ من الدرجة
 - ٤ مجموعة الحل للمعادلتين: $ص = ١$ و $ص + ٢ = ١٠$ هي
 - ٥ إذا كان: $ص = ٣$ و $ص - ٢ = ٦$ فإن $ص + ٢ =$
 - ٦ عددان موجبان مجموعهما ٣ و مجموع مربعيهما ٥ فإن العددين هما
 - ٧ مجموعة الحل للمعادلتين $ص = ٦$ و $ص = ١$ هي
 - ٨ إذا كان $ص = ٦١$ ($ص - ص$) + $٣ = ص$ فإن $ص =$..
 - ٩ إذا كان $أب = ٣$ و $أب = ١٢$ فإن $ب =$
 - ١٠ عددان موجبان الفرق بينهما ٦ مربع مجموعهما ٢ فإن العددين هما ..
 - ١١ مستطيل طوله ٣ سم وطول قطره ٤ سم فإن عرضه = ٠.٠ سم
 - ١٢ مجموعة الحل للمعادلتين $ص + ٦ = ٠$ و $ص + ٢ = ٢$ هي
- ٣ اجب عما يلي
- ١ ٤ ٤ ٥ و ٥ هما ٢٠ فما هما العددان؟
 - ٢ ٤ ٥ ٧ مجموعهما ٧ و مجموع طولها ١١ فما هما العددان؟
 - ٣ عددان مجموعهما = ٥ و مجموع مربعيهما = ١٣ أوجد هذان العددان
 - ٤ عددان حقيقيان الفرق بين مربعيهما = ٧ ، مجموعهما = ٧ فما هما العددان؟
 - ٥ أوجد عددين نسبيين حاصل ضربيهما = ٢ ، مجموع احدهما وضعف الآخر = ٤
 - ٦ مستطيل محيطه = ٤١ سم ومساحته = ١٢ سم^٢ أوجد بعديه
 - ٧ مستطيل يزيد طوله عن عرضه بمقدار ٣ سم ومساحته ٢٨ سم^٢ أوجد محيطه
 - ٨ مثلث قائم الزاوية مجموع طولى ضلعي القائمة = ٤ سم وطول الوتر = ١ سم
 - ٩ مثلث قائم الزاوية محيطه ٣٠ سم وطول الوتر = ١٣
 - ١٠ زاويتان حادتان في مثلث قائم الزاوية الفرق بين قياسيهما ٥٠° أوجد قياس كل منهما
 - ١١ عددان احدهما معكوس جمعي للآخر و مجموع مربعيهما هو ٢ أوجد العددين
 - ١٢ معين الفرق بين طولى قطريه ٤ سم و محيطه ٤٠ سم
أوجد طول كل من قطريه .

٢ أوجد مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات الآتية

- ١ $ص + ٦ = ص + ٢$ ، $٢ = ص + ٢$
- ٢ $ص + ٨ = ص + ٢$ ، $١٦ = ص - ٢$
- ٣ $ص - ٣ = ص + ٢$ ، $٢٩ = ص + ٢$
- ٤ $ص - ٣ = ص + ٢$ ، $٣ = ص - ٢$
- ٥ $ص = ص$ ، $٥٠ = ص + ٢$
- ٦ $ص - ٢ = ص$ ، $٠ = ص$
- ٧ $ص - ١ = ص$ ، $٣ = ص + ٢$
- ٨ $ص + ٢ = ٢$ ، $٣ = \frac{١}{ص} + \frac{١}{ص}$
- ٩ $٢ص + ٧ = ٢$ ، $٢ص + ٣ = ١٩$
- ١٠ $ص + ٤ = ص$ ، $ص - ٢ = ص + ٢$

مجال الدالة الكسرية الجبرية

ملاحظات

١) مجال الدالة كثيرة الحدود = ح

٢) مجال الكسر الجبري = ح - مجموعة أصفار المقام

١) أوجد مجال كل من الدوال الآتية

١) د(س) = $\frac{س^2 - 2س - 4}{س}$ ← المجال = ح

٢) د(س) = $\frac{5}{س}$ ← المجال = ح

٣) د(س) = $\frac{س^3 - \frac{4}{3}س^2 - 12}{س}$ ← المجال = ح

٤) د(س) = $\frac{س - 2}{س - 3}$ ← المجال = ح - {3}

٥) د(س) = $\frac{س}{س - 2}$

الحل = $\frac{س}{(س - 2)(س + 2)}$

المجال = ح - {2, -2}

٦) د(س) = $\frac{س^2 - 10س + 21}{س^2 - 25}$

الحل = $\frac{(س - 7)(س - 3)}{(س - 5)(س + 5)}$

المجال = ح - {5, -5}

٧) د(س) = $\frac{س^2 - 6س + 8}{س^2 + 25}$

الحل = المجال = ح

٨) د(س) = $\frac{س + 7}{9}$ ← المجال = ح

٩) د(س) = $\frac{س^2 + 16}{س^3 - 27}$

الحل = $\frac{س^2 + 16}{(س - 3)(س^2 + 3س + 9)}$

المجال = ح - {3}

المجال المشترك لكسرين جبريين أو أكثر

ح = مجموعة أصفار المقامات

٢) أوجد المجال المشترك لكلا من الكسور الجبرية الآتية

١) $\frac{س - 1}{س - 2}$ ، $\frac{س - 3}{س}$

الحل = المجال المشترك = ح - {2, 0}

٢) $\frac{س - 1}{س + 2}$ ، $\frac{س^2 - 2س + 1}{س^2 - 9}$

الحل = $\frac{(س - 1)(س - 1)}{(س + 3)(س - 3)}$ | $\frac{س - 1}{س + 2}$

المجال المشترك = ح - {3, -3, -2}

٣) $\frac{س^2 + 2س - 8}{س^2 + 8س - 12}$ ، $\frac{س^2 + 3س - 10}{س^2 + 5س - 6}$

الحل = $\frac{(س - 2)(س + 4)}{(س - 2)(س - 3)}$ | $\frac{(س + 5)(س - 2)}{(س - 3)(س - 2)}$

المجال المشترك = ح - {6, 3, 2}

٤) $\frac{س}{س^2 + 12س + 12}$ ، $\frac{س - 3}{س^2 - 1}$ ، $\frac{5}{س}$

الحل = $\frac{س}{(س - 4)(س - 3)}$ ، $\frac{س - 3}{(س + 1)(س - 1)}$ ، $\frac{5}{س}$

المجال المشترك = ح - {4, 3, 1, -1, 0}

اختزال الكسر الجبري

إذا كانت هناك عوامل مشتركة بين البسط والمقام فإنه يمكن اختزال (اختصار) الكسر الجبري بالتخلص من هذه العوامل المشتركة

ملاحظة هامة يجب تعيين مجال الكسر الجبري قبل اختزاله

تساوي كسرين جبريين

الدالتين ن₁ ، ن₂ متساويتان إذا تحقق الشرطان الآتيان معاً

١) مجال ن₁ = مجال ن₂

٢) ن₁(س) = ن₂(س) بعد الاختصار

لا يقبل التحليل المقام

دالة ثابتة المقام

القوس الجبري لا يحلل

اختزل كلام من الكسور الجبرية الآتية مبينا مجال كلا منها

① د(س) = $\frac{6 + 5س - 2س^2}{9 - 2س}$

الحل

د(س) = $\frac{(2-س)(3-س)}{(3+س)(3-س)}$

المجال = ح - {3, -3}

د(س) = $\frac{2-س}{3+س}$

② د(س) = $\frac{3+4س-2س^2}{س-2س}$

و أوجد د(2)، د(1) إن أمكن

الحل

د(س) = $\frac{(1-س)(3-س)}{(1-س)س}$

المجال = ح - {0, 1}

د(س) = $\frac{3-س}{س}$

د(1) غير معرفة

لأن 1 ∉ لمجال د(س)

د(2) = $\frac{1-2}{2} = \frac{3-2}{2}$

③ د(س) = $\frac{2-س}{8-3س}$

الحل

د(س) = $\frac{2-س}{(2+2س+2س+2س+2س+2س+2س+2س)}$

المجال = ح - {2}

د(س) = $\frac{1}{4+2س+2س}$

⑤ إثبت أن $1ن = 2ن$

1ن(س) = $\frac{س^2}{س^2-3س}$ ، 2ن(س) = $\frac{س^3+2س^2+س}{س^4-س}$

الحل

1ن(س) = $\frac{س^2}{(1-س)س}$ ، 2ن(س) = $\frac{س(س^2+2س+1)}{س(1-س)(1+س)}$

مجال 1ن = ح - {0, 1}

مجال 2ن = ح - {0, 1}

1ن(س) = $\frac{1}{1-س}$ ، 2ن(س) = $\frac{1}{1-س}$

∴ مجال 1ن = مجال 2ن

، 1ن(س) = 2ن(س) بعد الاختصار

∴ 1ن = 2ن

⑥ هل $1ن = 2ن$ إذا كان

1ن(س) = $\frac{س^2+3س+2}{س^2-4}$ ، 2ن(س) = $\frac{1-س^2}{س^2+3س-2}$

الحل

ثم أوجد المجال المشترك الذي تتساوى فيه الدالتين

1ن(س) = $\frac{س^2+3س+2}{(س+2)(س-2)}$ ، 2ن(س) = $\frac{(1-س)(1+س)}{(س-2)(س+2)}$

مجال 1ن = ح - {2, -2}

مجال 2ن = ح - {2, -2}

1ن(س) = $\frac{1+س}{س-2}$ ، 2ن(س) = $\frac{1+س}{س-2}$

① مجال 1ن ≠ مجال 2ن

② 1ن(س) = 2ن(س) ← $1ن ≠ 2ن$

المجال الذي تتساوى فيه الدالتان هو : ح - {2, 1, -2}

④ إذا كان

1ن(س) = $\frac{س^5}{س^5-10س}$ ، 2ن(س) = $\frac{2س}{4-س^2}$

هل $1ن = 2ن$ مع ذكر السبب؟

الحل

1ن(س) = $\frac{س^5}{س(س^4-10)}$ ، 2ن(س) = $\frac{2س}{(2-س)(2+س)}$

مجال 1ن = ح - {2}

مجال 2ن = ح - {2}

∴ مجال 1ن = مجال 2ن
، 1ن(س) = 2ن(س) بعد الاختصار
∴ 1ن = 2ن

تمارين ٤

٣ أوجد المجال المشترك لكلا من الكسور الجبرية الآتية

- ١ $\frac{5}{س-٢}$ ، $\frac{٣}{س}$
- ٢ $\frac{٣}{س-١}$ ، $\frac{١}{س+٢}$
- ٣ $\frac{س}{س-٣}$ ، $\frac{س}{س-١}$
- ٤ $\frac{س-٣}{س+٢}$ ، $\frac{س-٣}{س}$
- ٥ $\frac{س}{س+٥}$ ، $\frac{س-٢}{س+٢}$
- ٦ $\frac{س-١}{س}$ ، $\frac{س-٢}{س+٥}$
- ٧ $\frac{١}{س+٥}$ ، $\frac{٣}{س-٢}$ ، $\frac{١}{س+٣}$
- ٨ $\frac{س}{س-٣}$ ، $\frac{س-٢}{س+١}$ ، $\frac{س-٢}{س-٤}$
- ٩ $\frac{س}{س-٤}$ ، $\frac{س-٢}{س-١}$ ، $\frac{س-٢}{س-٨}$

٤ أختزل كلا من دوال الآتية مبيناً مجال كلا منها

- ١ د (س) = $\frac{س-٢}{س-١}$
- ٢ د (س) = $\frac{س-٣}{س-٩}$
- ٣ د (س) = $\frac{س-٤}{س+٥}$
- ٤ د (س) = $\frac{س-٢+٧س+١٠}{س-٢+٢٥}$
- ٥ د (س) = $\frac{س-٢+٨س+١٥}{س-٢+٥س+٦}$
- ٦ د (س) = $\frac{س-٣+٥س+٦}{س-٤+٢٧س}$
- ٧ د (س) = $\frac{س-٢}{س-٣}$

١ عين أصفار كلا من الدوال الآتية

- ١ د (س) = $٤ + ٢س$
- ٢ د (س) = ٥
- ٣ د (س) = $٤ + ٢س$
- ٤ د (س) = $٢٥ - ٩س$
- ٥ د (س) = $٤س - ٣س$
- ٦ د (س) = $١ - ٢س$
- ٧ د (س) = $٢ - ٢س$
- ٨ د (س) = $٩ - ٢س$
- ٩ د (س) = ٠
- ١٠ د (س) = $١ + ٢س$
- ١١ د (س) = $١ + ٢س$
- ١٢ د (س) = $١٢٥ - ٣س$
- ١٣ د (س) = $١٢٥ - ٣س$
- ١٤ د (س) = $١٢٥ - ٣س$
- ١٥ د (س) = $\frac{١٦ - ٢س}{٢٥ - ٢س}$
- ١٦ د (س) = $\frac{٢٠ - ٢س}{١٢٥ - ٣س}$
- ١٧ د (س) = $\frac{٢ + ٣س}{٢ + ٣س}$
- ١٨ د (س) = $\frac{١ - ٢س}{٨ - ٣س}$
- ١٩ د (س) = $\frac{(٨ + ٣س)(١ - ٢س)}{٣ + ٤س}$
- ٢٠ د (س) = $\frac{٤ + ٢س}{س}$

٢ عين مجال كلا من الدوال الآتية

- ١ د (س) = $\frac{س-٥}{س+٢}$
- ٢ د (س) = $\frac{س-٥+٦س}{س-٩+٣س}$
- ٣ د (س) = $\frac{س-٢+٣س+٢}{س-٤+٤س}$
- ٤ د (س) = $\frac{س-٢+٣س+٢}{س-٢+١٢س}$
- ٥ د (س) = $\frac{س-٢+٢٠س}{س-٢+٢٠س}$
- ٦ د (س) = $\frac{س-٢+٣س+١٠}{س-٢+١٦س}$
- ٧ د (س) = $\frac{س-٢+٢٠س}{س-٢+١٢٥س}$

العمليات على الكسور الجبرية

$$\textcircled{4} \text{ ن (س)} = \frac{س + ٢ - ٦}{س + ٢ + ٤ + ٣} + \frac{٣ - س - ٦}{٢ - س - ٢}$$

الحل

$$\text{ن (س)} = \frac{(س + ٢ - ٦)(س + ٢ + ٤ + ٣)}{(س + ٢ + ٤ + ٣)(س + ٢ + ٤ + ٣)} + \frac{(٣ - س - ٦)(س + ٢ + ٤ + ٣)}{(س + ٢ + ٤ + ٣)(س + ٢ + ٤ + ٣)}$$

مجال ن (س) = ح - {٣، ٤، ١}

$$\text{ن (س)} = \frac{س + ٢ - ٦}{س + ٢ + ٤ + ٣} + \frac{٣ - س - ٦}{س + ٢ + ٤ + ٣}$$

$$١ = \frac{س + ٢ - ٦ + ٣ - س - ٦}{س + ٢ + ٤ + ٣} = \frac{٣ - ٦ - ٦}{س + ٢ + ٤ + ٣} = \frac{-٩}{س + ٢ + ٤ + ٣}$$

$$\textcircled{5} \text{ ن (س)} = \frac{٢}{٥ + س - ٢} + \frac{س}{١ - ٢}$$

الحل

$$\text{ن (س)} = \frac{٢}{(٥ - س)(١ - س)} + \frac{س}{(١ + س)(١ - س)}$$

المجال = ح - {٥، ١، ١}

$$= \frac{٢(١ + س) + س(٥ - س)}{(٥ - س)(١ + س)(١ - س)}$$

$$= \frac{٢ + ٢س + ٥س - ٢س^٢}{(٥ - س)(١ + س)(١ - س)}$$

$$= \frac{٢ - ٢س^٢ + ٥س + ٢س}{(٥ - س)(١ + س)(١ - س)}$$

$$= \frac{(٢ - س)(١ - س)}{(٥ - س)(١ + س)(١ - س)}$$

$$= \frac{٢ - س}{(٥ - س)(١ + س)}$$

ملاحظة: مجال الكسر الجبري = مجال معكوسه الجمعي

$$\frac{١ - ٢}{س} = \frac{١}{٢ - س} \text{ المعكوس الجمعي للكسر}$$

$$\frac{١}{س - ٢} = \frac{١}{٢ + س - ٢}$$

$$١ - = \frac{(٤ - س)}{٤ - س} = \frac{س - ٤}{٤ - س} \text{ أبسط صورة للكسر}$$

١ جمع الكسور الجبرية

١ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبيناً مجال ن

$$\textcircled{1} \text{ ن (س)} = \frac{٤}{٢ + س} + \frac{٢س}{٢ + س}$$

الحل

$$\text{ن (س)} = \frac{٤ + ٢س}{٢ + س} \text{ مجال ن = ح - } \{٢\}$$

$$٢ = \frac{(٢ + س)٢}{س}$$

$$\textcircled{2} \text{ ن (س)} = \frac{٥ - س - ٤ - س}{١٠ + س - ٢} + \frac{١٢ + س - ٢س}{٤ + س - ٢}$$

الحل

$$\text{ن (س)} = \frac{(٥ - س)(١ + س)}{(٥ - س)(٢ - س)} + \frac{(٦ - س)(٢ - س)}{(٢ - س)(٢ - س)}$$

مجال ن = ح - {٥، ٢}

$$= \frac{١ + س}{٢ - س} + \frac{٦ - س}{٢ - س}$$

$$= \frac{٥ - س + ٦ - س}{٢ - س} = \frac{١١ - ٢س}{٢ - س}$$

$$\textcircled{3} \text{ ن (س)} = \frac{٢ - س}{٦ + س - ٢} + \frac{٣ - س}{٣ + س - ٢}$$

الحل

$$\text{ن (س)} = \frac{٢ - س}{(٣ - س)(٢ - س)} + \frac{٣ - س}{(١ - س)(٣ - س)}$$

مجال ن = ح - {٢، ١، ٣}

$$= \frac{١}{٣ - س} + \frac{١}{١ - س} =$$

$$= \frac{١ - س + ٣ - س}{(٣ - س)(١ - س)}$$

$$= \frac{٤ - ٢س}{(٣ - س)(١ - س)}$$

$$= \frac{(٢ - س)٢}{(٣ - س)(١ - س)}$$

٢ الكسور الجبرية

١ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبيناً مجال ن

$$\textcircled{1} \text{ ن (س) } = \frac{2}{1-s} - \frac{3}{1-s} =$$

الحل

$$\text{مجال ن} = \{1\}$$

$$\frac{2-3}{1-s} = \frac{-1}{1-s} =$$

$$\textcircled{2} \text{ ن (س) } = \frac{10-s-3-s}{10+s-2-s} - \frac{10+s-2-s}{10+s-2-s} =$$

الحل

$$\text{ن (س) } = \frac{(5-s)(2+s)}{(5-s)(3-s)} - \frac{(5-s)(2-s)}{(5-s)(3-s)} =$$

مجال ن = ح - {٥، ٢، ٣}

$$\frac{2+s}{3-s} - \frac{5-s}{3-s} =$$

$$\frac{7-s-5-s}{3-s} = \frac{2-2s}{3-s} =$$

$$\textcircled{3} \text{ ن (س) } = \frac{2+s-9}{2-s+2-s} - \frac{4-s-2+s}{8-3-s} =$$

الحل

$$\text{ن (س) } = \frac{9-s-2+s}{6-s+2-s} + \frac{4+s-2+s}{8-3-s} =$$

$$\frac{(3+s)(3-s)}{(3+s)(2-s)} + \frac{4+s-2+s}{(4+s-2+s)(2-s)} =$$

مجال ن = ح - {٣، ٢}

$$1 = \frac{2-s}{2-s} = \frac{3-s}{2-s} + \frac{1}{2-s} =$$

$$\textcircled{4} \text{ ن (س) } = \frac{2}{2-s-1} + \frac{4}{5-s-4} =$$

الحل

$$\text{ن (س) } = \frac{2}{1-s} - \frac{4}{5-s-4} =$$

$$\frac{2}{1-s} - \frac{4}{1-s} =$$

$$\frac{(1+s)(1-s)}{(1+s)(1-s)} - \frac{(1+s)(5-s)}{(1+s)(1-s)} =$$

المجال = ح - {٥، ١، -١}

$$\frac{4}{(5-s)2 - (1-s)} = \frac{4}{(1-s)(1+s)(5-s)}$$

$$\frac{4-s-4-s}{10+s-2-s} =$$

$$\frac{(1-s)(1+s)(5-s)}{6+s-2} =$$

$$\frac{(1-s)(1+s)(5-s)}{(1-s)(1+s)(5-s)}$$

$$\textcircled{5} \text{ ن (س) } = \frac{s}{s-2} + \frac{s}{1-s} =$$

الحل

$$\text{ن (س) } = \frac{s}{2-s} - \frac{s}{1-s} =$$

مجال ن = ح - {٢، ١}

$$\frac{s(s-2) - (2-s)s}{(2-s)(1-s)} =$$

$$\frac{s^2-2s-2s+2s}{(2-s)(1-s)} =$$

$$\frac{s-s}{(2-s)(1-s)} =$$

$$\textcircled{6} \text{ ن (س) } = \frac{2s-4}{2-s+2-s} - \frac{2s-2s}{2+s-2+s} =$$

و أوجد ن (٢)، ن (٣)، ن (٠) إن أمكن

الحل

$$\text{ن (س) } = \frac{4-2s}{2-s+2-s} + \frac{2s-2s}{2+s-2+s} =$$

$$\frac{(2-s)(2+s)}{(2+s)(1-s)} + \frac{(2-s)s}{(1-s)(2-s)} =$$

المجال = ح - {٢، ١، -٢}

$$\frac{2-s+s}{1-s} = \frac{2-s}{1-s} + \frac{s}{1-s} =$$

$$2 = \frac{(1-s)2}{1-s} = \frac{2-s}{1-s} =$$

ن (٢) غير معرفة لأن ٢ ∉ لمجال ن (س)

$$\text{ن (٣) } = 2 \quad \text{ن (٠) } = 2$$

٤) قسمة الكسور الجبرية

١) أوجد ن(س) في أبسط صورة مبيناً مجال ن

$$\textcircled{1} \text{ ن(س)} = \frac{10 - س^2}{9 + س^2 - 2س} \div \frac{15 - س^2 - 2س}{9 - 2س}$$

الحل

$$\text{ن(س)} = \frac{(5 - س)^2}{(3 - س)(3 + س)} \div \frac{(5 - س)(3 + س)}{(3 + س)(3 - س)}$$

مجال ن = ح - { 3 ، 3 - ، 5 }

$$\frac{(3 - س)(3 - س)}{(5 - س)^2} \times \frac{(5 - س)(3 + س)}{(3 + س)(3 - س)} =$$

$$\text{ن(س)} = \frac{3 - س}{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ ن(س)} = \frac{1 + س}{س} \div \frac{1 - 2س}{1 - 3س}$$

الحل

$$\text{ن(س)} = \frac{س}{1 + س} \times \frac{1 - 3س}{1 - 3س}$$

$$\frac{س}{1 + س} \times \frac{(1 + س)(1 - 3س)}{(1 + س + 2س)(1 - 3س)} =$$

المجال = ح - { 1 ، 0 ، 1 }

$$\frac{س}{1 + س + 2س} =$$

$$\textcircled{3} \text{ إذا كان ن(س)} = \frac{س^2 - 2س}{(4 - 2س)}$$

أوجد

١) ن⁻¹(س) وعين مجاله ٢) ن⁻¹(1) ، ن⁻¹(2) إن أمكن

٣) قيمة س التي تحقق أن ن⁻¹(س) = 1/4

$$\text{الحل} \textcircled{1} \text{ ن(س)} = \frac{س(2 - س)}{(2 + س)(2 - س)} = \frac{س}{2 + س}$$

مجال ن⁻¹ = ح - { 2 ، 2 - ، 0 }

$$\text{ن(س)} = \frac{2 + س}{س}$$

٢) ن⁻¹(1) = 1/3 = 2/1 + 3 ، ن⁻¹(2) غير معرفة لأن 2 ∉ لمجال ن(س)

$$\textcircled{3} \text{ ن(س)} = \frac{2 + س}{س} = \frac{1}{4} \Rightarrow 2 + س = \frac{س}{4} \Rightarrow 8 + 4س = س \Rightarrow 3س = -8 \Rightarrow س = -8/3$$

$$\begin{aligned} 2 + س &= 4 + س \leftarrow \\ 2س &= س - 4 \leftarrow \\ 4س &= س - 4 \leftarrow \end{aligned}$$

٣) ضرب الكسور الجبرية

١) أوجد ن(س) في أبسط صورة مبيناً مجال ن

$$\textcircled{1} \text{ ن(س)} = \frac{2 + س}{20 - س + 2س} \times \frac{15 - س^2 + 2س}{18 - س^3 + 2س}$$

الحل

$$\text{ن(س)} = \frac{(2 + س)}{(5 + س)(4 - س)} \times \frac{(5 + س)(3 - س)}{(6 + س)(3 - س)}$$

مجال ن = ح - { 3 ، 6 ، 4 ، 5 }

$$\frac{2 + س}{(4 - س)(6 + س)} =$$

$$\textcircled{2} \text{ ن(س)} = \frac{24 + س^4}{2س^2 - 36} \times \frac{36 + 12س - 2س^2}{س^2 - 6س}$$

الحل

$$\text{ن(س)} = \frac{24 + س^4}{(36 - 2س)} \times \frac{36 + 12س - 2س^2}{س^2 - 6س}$$

$$\frac{(6 + س)^4}{(6 + س)(6 - س)} \times \frac{(6 - س)(6 - س)}{س(6 - س)}$$

المجال = ح - { 6 ، 6 ، 0 }

$$\text{ن(س)} = \frac{4}{س}$$

$$\textcircled{3} \text{ ن(س)} = \frac{9 + 3س + 2س^2}{2 + س^2} \times \frac{3 - 2س - 2س^2}{27 - 3س}$$

و أوجد ن(3) ، ن(0) إن أمكن

الحل

$$\text{ن(س)} = \frac{9 + 3س + 2س^2}{(1 + س)^2} \times \frac{(1 + س)(3 - س)}{(9 + 3س + 2س^2)(3 - س)}$$

المجال = ح - { 3 ، 1 }

$$\text{ن(س)} = \frac{1}{4}$$

ن(3) غير معرفة لأن 3 ∉ لمجال ن(س)

$$\text{ن(0)} = \frac{1}{4}$$

ملاحظة المعكوس الضربي للكسر ن(س) = (س)⁻¹ = (س)¹ / (س)^س

$$\text{هون}^{-1} (س) = \frac{(س)^{س}}{(س)^{س}}$$

مجال ن⁻¹(س) = ح - مجموعة أصفار البسط والمقام

تمارين ٥

$$١٩) \text{ ن (س) } = \frac{\text{س} - ٣}{٥ - \text{س}} \div \frac{\text{س}}{٥ - \text{س}}$$

$$٢٠) \text{ ن (س) } = \frac{\text{س}}{٤ - ٢\text{س}} \div \frac{\text{س}}{٢ + \text{س}}$$

$$٢١) \text{ ن (س) } = \frac{١}{٦ + ٣\text{س}} \div \frac{١ - \text{س}}{٢ - \text{س} + ٢\text{س}}$$

$$٢٢) \text{ ن (س) } = \frac{٢ + \text{س} - ٢\text{س}}{٢٧ - ٣\text{س}} \div \frac{١ - ٢\text{س}}{٩ + ٣\text{س} + ٢\text{س}}$$

$$٢٣) \text{ ن (س) } = \frac{١}{٢\text{س} - ١} \div \frac{٥}{٣ - ٢\text{س} - ٢\text{س}}$$

$$٢٤) \text{ ن (س) } = \frac{٦ + \text{س} + ٢\text{س}}{٦ + ٢\text{س}} \div (٢ + \text{س})$$

٢) أوجد ن (س) في أبسط صورة وعين مجاله

$$١) \text{ ن (س) } = \frac{\text{س}}{٥} \quad ٣) \text{ ن (س) } = \frac{\text{س} - ٢\text{س}}{١ + ٢\text{س} - ٢\text{س}}$$

$$٢) \text{ ن (س) } = \frac{٢ - \text{س}}{\text{س}} \quad ٤) \text{ ن (س) } = \frac{٦ + \text{س} - ٢\text{س}}{١٠ - \text{س} + ٣\text{س}}$$

$$٣) \text{ إذا كانت ن (س) } = \frac{٩ - ٢\text{س}}{٦ + ٥\text{س} - ٢\text{س}}$$

١) أوجد ن (س) في أبسط صورة وعين مجاله

٢) ثم أوجد ن (١) ، ن (٢) إن أمكن ذلك

٣) قيمة س التي تحقق أن ن (س) = ٥

٤) أكمل ما يأتي :

$$١) \text{ إذا كان د (س) } = \frac{٣ - \text{س}}{٢ + \text{س}} \text{ فإن د}^{-١} (٣) = \dots\dots\dots$$

$$٢) \text{ المعكوس الجمعي للكسر } \frac{٦ + \text{س}}{١ - \text{س}} \text{ هو } \dots\dots\dots$$

$$٣) \text{ ن (س) } = \frac{٣ - \text{س}}{٢} \text{ له معكوس ضربي في المجال } \dots\dots\dots$$

$$٤) \text{ إذا كان للدالة ه (س) } = \frac{٣ - \text{س}}{٤ + \text{س}} \text{ معكوس ضربي}$$

$$\text{ فإن مجالها } = \dots\dots\dots ، \text{ ه}^{-١}(٢) = \dots\dots\dots ، \text{ ه}^{-١}(٣) = \dots\dots\dots$$

$$٥) \text{ إذا كان ه (س) } = \frac{٥ - \text{س} - ٣}{٢\text{س}} \text{ فإن ه}^{-١}(٠) = \dots\dots\dots$$

$$٦) \text{ الكسر } \frac{٤ - ٢\text{س}}{١ - ٢\text{س}} \text{ يكون له معكوساً ضربياً في المجال } \dots\dots\dots$$

$$٧) \text{ إذا كانت س } \neq ٣ \text{ فإن أبسط صورة للمقدار } \frac{٣ - \text{س}}{٣ - \text{س}} \text{ هي } \dots\dots\dots$$

$$٨) \text{ أبسط صورة للدالة و (س) } = \frac{١}{١ - \text{س}} + \frac{١}{١ - \text{س}} = \dots\dots\dots$$

$$٩) \frac{٢ - \text{س}}{\text{س}} + \frac{٣ + \text{س}}{٢\text{س}} \text{ في أبسط صورة هي } \dots\dots\dots$$

$$١٠) \text{ مجال الدالة د : د (س) } = \frac{١ - \text{س}}{٢} \div \frac{١ + \text{س}}{٢} \text{ هو } \dots\dots\dots$$

$$١١) \text{ إذا كان ه (س) } = \frac{١}{٥ - \text{س}} ، \text{ ه}^{-١}(٣) = ٣ \text{ فإن س} = \dots\dots\dots$$

١) أوجد ن (س) في أبسط صورة مبيناً مجال ن

$$١) \text{ ن (س) } = \frac{١٠}{٢ + \text{س}} + \frac{٥\text{س}}{٢ + \text{س}}$$

$$٢) \text{ ن (س) } = \frac{١}{٢ - \text{س}} + \frac{٩ - ٣\text{س}}{٢ - \text{س}}$$

$$٣) \text{ ن (س) } = \frac{١ + \text{س}}{١ - ٢\text{س}} + \frac{\text{س}}{\text{س} - ٢\text{س}}$$

$$٤) \text{ ن (س) } = \frac{١}{٣ + \text{س}} + \frac{٦ - \text{س} + ٢\text{س}}{٩ - ٢\text{س}}$$

$$٥) \text{ ن (س) } = \frac{١ - ٢\text{س}}{٢ - \text{س} + ٢\text{س}} + \frac{٤ + \text{س} - ٢\text{س}}{٨ + ٣\text{س}}$$

$$٦) \text{ ن (س) } = \frac{١٢ - \text{س} - ٦}{٦ - \text{س} + ٢\text{س}} + \frac{١٨ + \text{س} - ٦}{٢٧ + ٣\text{س}}$$

$$٧) \text{ ن (س) } = \frac{٢ - \text{س} - ٣}{٤ - ٢\text{س}} + \frac{١٥ + \text{س} - ٣}{١٠ + \text{س} + ٧\text{س}}$$

$$٨) \text{ ن (س) } = \frac{٥}{٥ - \text{س}} - \frac{\text{س}}{٥ - \text{س}}$$

$$٩) \text{ ن (س) } = \frac{١ + \text{س}}{٢ - \text{س}} - \frac{٣}{٢ - \text{س}}$$

$$١٠) \text{ ن (س) } = \frac{١ - \text{س}}{٢ - \text{س} - ٢\text{س}} + \frac{١٠ + \text{س} - ٢}{١٠ + \text{س} + ٧\text{س}}$$

$$١١) \text{ ن (س) } = \frac{١ - \text{س}}{١ - ٢\text{س}} - \frac{\text{س} + ٢\text{س} + ٣\text{س}}{١ - ٣\text{س}}$$

$$١٢) \text{ ن (س) } = \frac{\text{س}}{٢\text{س} - ١} + \frac{٢\text{س}}{١ - ٢\text{س}}$$

$$١٣) \text{ ن (س) } = \frac{١٠ - \text{س} - ٣}{٥ - \text{س} - ٢\text{س}} - \frac{٩ - ٢\text{س}}{٦ - \text{س} - ٢\text{س}}$$

$$١٤) \text{ ن (س) } = \frac{١ - \text{س}}{١ - ٢\text{س}} \times \frac{٣ - ٢\text{س}}{٤ - \text{س}}$$

$$١٥) \text{ ن (س) } = \frac{٣ - \text{س}}{٢ + \text{س}} \times \frac{٢ + \text{س} + ٣\text{س}}{٩ - ٢\text{س}}$$

$$١٦) \text{ ن (س) } = \frac{٩ + \text{س} + ٣\text{س} + ٢\text{س}}{٢٧ - ٣\text{س}} \times \frac{٦ + \text{س} - ٢\text{س}}{٢ - \text{س}}$$

$$١٧) \text{ ن (س) } = \frac{١ + \text{س} - ٢\text{س}}{٢\text{س}} \times \frac{٢\text{س} + ٣\text{س}}{١ + ٣\text{س}}$$

$$١٨) \text{ ن (س) } = \frac{٢ - \text{س}}{٦ + ٣\text{س}} \times \frac{٦ + \text{س} - ٢\text{س}}{٤ - ٢\text{س}}$$

الإحتمال

٣) سلة بها ٣٠ بطاقة مرقمة من ١ الى ٣٠. سحبت بطاقة واحدة عشوائيا أوجد احتمال أن تحمل البطاقة المسحوبة عددا

١) يقبل القسمة على ٥

$$A = \{٥, ١٠, ١٥, ٢٠, ٢٥, ٣٠\} \leftarrow L(A) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

٢) يقبل القسمة على ٤

$$B = \{٤, ٨, ١٢, ١٦, ٢٠, ٢٤, ٢٨\} \leftarrow L(B) = \frac{7}{30}$$

٣) يقبل القسمة على ٤ ، ٥

$$C = \{٢٠\} \leftarrow L(C) = \frac{1}{30}$$

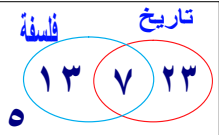
٤) يقبل القسمة على ٤ أو ٥

$$D = \{٤, ٨, ١٢, ١٦, ٢٠, ٢٤, ٢٨, ٣٠\} \leftarrow L(D) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

٤) فصل دراسي به ٤٨ طالب نجح منهم

٣٠ طالب في التاريخ ، ٢٠ طالب في الفلسفة
 ٧ طلاب في المادتين معا فإذا أختير طالب واحد عشوائيا

أوجد احتمال ان يكون الطالب المختار



(١) ناجحا في التاريخ $\frac{30}{48} = \frac{5}{8}$

(٢) ناجحا في الفلسفة $\frac{20}{48} = \frac{5}{12}$

(٣) ناجحا في المادتين معا $\frac{7}{48}$

(٤) ناجحا في أحد المادتين على الأقل $\frac{33}{48}$

(٥) ناجحا في التاريخ فقط $\frac{23}{48}$

(٦) ناجحا في الفلسفة فقط $\frac{13}{48}$

(٧) ناجحا في أحد المادتين فقط $\frac{36}{48} = \frac{3}{4}$

(٨) ناجحا في أحد المادتين على الأكثر $\frac{41}{48}$

(٩) راسبا في التاريخ $\frac{3}{8} = \frac{18}{48}$

(١٠) راسبا في الفلسفة $\frac{7}{48} = \frac{28}{48}$

(١١) راسبا في المادتين معا $\frac{5}{48}$

إحتمال وقوع الحدث P = $\frac{\text{عدد عناصر الحدث P}}{\text{عدد عناصر ف}}$

$$L(P) = \frac{n(P)}{n(F)}$$

ملاحظات

١) صفر $\geq L(P) \geq 1 \leftarrow L(P) \in [0, 1]$

٢) احتمال وقوع الحدث المستحيل = صفر $\leftarrow L(\emptyset) = \text{صفر}$

٣) احتمال وقوع الحدث المؤكد = ١ $\leftarrow L(F) = 1$

٤) مجموع جميع النواتج الممكنة للتجربة العشوائية = ١

١) في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة فقط و

ملاحظة الوجه العلوي إحسب الإحتمالات الآتية :

(١) ظهور عدد زوجي

$$P = \{٢, ٤, ٦\} \leftarrow L(P) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(٢) ظهور عدد فردي

$$B = \{١, ٣, ٥\} \leftarrow L(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(٣) ظهور عدد أولى

$$C = \{٢, ٣, ٥\} \leftarrow L(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(٤) ظهور عدد أقل من ٥

$$D = \{١, ٢, ٣, ٤\} \leftarrow L(D) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

(٥) ظهور عدد أولى زوجي

$$E = \{٢\} \leftarrow L(E) = \frac{1}{6}$$

(٦) ظهور عدد يقبل القسمة على ٣

$$F = \{٣, ٦\} \leftarrow L(F) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(٧) ظهور عدد أكبر من ٦

$$G = \emptyset \leftarrow L(G) = \text{صفر}$$

٢) صندوق يحتوي ٦ كرات حمراء ، ٥ كرات صفراء ، ٤ كرات خضراء
 أوجد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة :

(١) حمراء $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ (٤) حمراء أو صفراء $\frac{6+5}{15} = \frac{11}{15}$

(٢) زرقاء = صفر (٥) ليست حمراء $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

(٣) خضراء $\frac{4}{15}$

العمليات على الأحداث

① الاتحاد $P \cup B = (P) \cup (B) \cup (P \cap B)$

② التقاطع $P \cap B = (P) \cap (B) \cap (P \cup B)$

③ الفرق بين حدثين
 $P - B = (P) - (P \cap B)$
 $B - P = (B) - (P \cap B)$

④ الحدث المعمل $\bar{P} = 1 - (P)$

ملاحظات

① حدث وقوع P أو B أو كلاهما $\leftarrow P \cup B$

② حدث وقوع P و B معاً $\leftarrow P \cap B$

③ حدث وقوع P وعدم وقوع B أو حدث وقوع P فقط $\leftarrow P - B$

④ عدم وقوع الحدث $P \leftarrow \bar{P}$

⑤ إذا كان P, B حدثان متنافيان $\leftarrow P \cap B = \emptyset$

⑥ إذا كان $P \supset B$ $\leftarrow P \cup B = P$

⑦ $\bar{(P \cap B)} = \bar{P} \cup \bar{B}$
 $\bar{(P \cup B)} = \bar{P} \cap \bar{B}$

⑧ $\bar{P} \cup P = F$ ، $\bar{P} \cap P = \emptyset$

① إذا كان P, B حدثين من F وكان $P = 0.5$ ،

$B = 0.6$ ، $P \cap B = 0.3$ ،

أوجد $P \cup B$ ، $P \cap B$ ، $P - B$

الحل

$P \cup B = (P) \cup (B) \cup (P \cap B) = 0.5 + 0.6 - 0.3 = 0.8$

$P \cap B = (P) \cap (B) \cap (P \cup B) = 0.3$

$P - B = (P) - (P \cap B) = 0.5 - 0.3 = 0.2$

$B - P = (B) - (P \cap B) = 0.6 - 0.3 = 0.3$

$\bar{(P \cap B)} = \bar{P} \cup \bar{B} = 1 - 0.3 = 0.7$

$\bar{(P \cup B)} = \bar{P} \cap \bar{B} = 1 - 0.8 = 0.2$

② إذا كان P, B حدثين من F وكان $P = \frac{5}{12}$ ،

$B = \frac{1}{4}$ ، $P \cup B = \frac{3}{4}$ ،

أوجد $P \cap B$ ، $P - B$ ، $B - P$

الحل

$P \cup B = (P) \cup (B) \cup (P \cap B) = \frac{5}{12} + \frac{1}{4} - (P \cap B) = \frac{3}{4}$

$\frac{3}{4} = \frac{5}{12} + \frac{3}{12} - (P \cap B)$

$\frac{3}{4} = \frac{8}{12} - (P \cap B) \Rightarrow (P \cap B) = \frac{8}{12} - \frac{3}{4} = \frac{1}{6}$

$P - B = (P) - (P \cap B) = \frac{5}{12} - \frac{1}{6} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

$B - P = (B) - (P \cap B) = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

③ إذا كان P, B حدثان متنافيان ، $P = 0.5$ ،

$B = 0.3$ ، أوجد

① احتمال عدم وقوع B ، احتمال وقوع P فقط

② احتمال وقوع أحدهما على الأقل

الحل

① احتمال عدم وقوع $B = \bar{B} = 1 - (B) = 1 - 0.3 = 0.7$

② احتمال وقوع أحدهما على الأقل $P \cup B = (P) \cup (B) \cup (P \cap B) = 0.5 + 0.3 - 0 = 0.8$

③ احتمال وقوع P فقط $P - B = (P) - (P \cap B) = 0.5 - 0 = 0.5$

$B - P = (B) - (P \cap B) = 0.3 - 0 = 0.3$

④ احتمال وقوع P فقط $P - B = 0.5$

$P \cup B = (P) \cup (B) \cup (P \cap B) = 0.5 + 0.3 - 0 = 0.8$

$P - B = (P) - (P \cap B) = 0.5 - 0 = 0.5$

⑤ احتمال وقوع أحدهما على الأقل $P \cup B = 0.8$

$B - P = (B) - (P \cap B) = 0.3 - 0 = 0.3$

$\bar{B} = 1 - (B) = 1 - 0.3 = 0.7$

تمارين ٦

١ صندوق به ١٥ كرة ٨ كرات حمراء ، ٣ كرات بيضاء
وباقى الكرات خضراء سحبت كرة واحدة عشوائياً

أوجد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة :

- ١ حمراء ٢ بيضاء أو خضراء
٣ ليست بيضاء ٤ حمراء وبيضاء معاً

٢ سحبت بطاقة عشوائياً من ٢٠ بطاقة مرقمة من ١ إلى ٢٠
احسب احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عدداً :

- ١ يقبل القسمة على ٣ ٢ يقبل القسمة على ٣ أو ٥
٣ يقبل القسمة على ٣ ٤ يقبل القسمة على ٣ أو ٥

٣ فصل دراسي به ٤٠ تلميذا منهم ١٨ تلميذاً
يقرأون جريدة الأخبار ، ١٥ تلميذاً يقرأون جريدة الأهرام ،
٨ تلاميذ يقرأون الجريدتين معاً فإذا اختير تلميذ عشوائياً

من هذا الفصل احسب احتمال أن يكون التلميذ :

- ١ يقرأ جريدة الأخبار ٢ لا يقرأ جريدة الأخبار
٣ يقرأ الجريدتين معاً ٤ يقرأ جريدة الأخبار فقط
٥ يقرأ جريدة الأهرام فقط ٦ يقرأ جريدة الأخبار أو الأهرام

٤ إذا كان F ، B حدثين من فضاء العينة وكان :
 $P(F) = \frac{1}{4}$ ، $P(B) = \frac{2}{3}$ ، $P(F \cap B) = \frac{1}{6}$ فأوجد $P(B \cup F)$

٥ إذا كان F ، B حدثين من فضاء العينة وكان :

$$P(F) = \frac{3}{8} ، P(B) = \frac{1}{4} ، P(B \cup F) = \frac{5}{8}$$

فأوجد ١ $P(F \cap B)$ ٢ $P(F)$ ٣ $P(B - F)$

٦ إذا كان F ، B حدثين من فضاء العينة وكان :
 $P(F) = \frac{1}{7}$ ، $P(B) = \frac{6}{7}$ ، $P(B \cup F) = \frac{8}{7}$
فأوجد : ١ $P(F)$ ٢ $P(F \cap B)$ ٣ $P(B - F)$

٧ إذا كان F ، B حدثين من فضاء العينة وكان :

$P(F) = \frac{1}{4}$ ، $P(B) = \frac{1}{3}$ فأوجد $P(B \cup F)$ في الحالات الآتية :
١ $P(F \cap B) = \frac{1}{8}$ ، B ، F حدثان متنافيان ٢ $B \supset F$

٨ كيس به ١٢ كرة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ١٢ سحبت
منه كرة عشوائياً فإذا كان F هو "الحصول على عدد فردي"
والحدث B هو "الحصول على عدد أولي" فأوجد :
 $P(F)$ ، $P(B)$ ، $P(F \cap B)$ ، $P(B \cup F)$ ، $P(B - F)$

٩ إذا كان F ، B حدثين متنافيين وكان

$$P(F) = \frac{1}{8} ، P(B) = \frac{3}{8}$$

- فأوجد ١ $P(B \cup F)$ ٢ $P(B - F)$
٣ $P(F)$ ٤ $P(F \cap B)$

٤ إذا كان M ، B حدثين من F حيث $M \supset B$

$P(M) = 0,5$ ، واحتمال وقوع B فقط $= 0,3$ ،
أوجد احتمال عدم وقوع B

الحل

$$P(B \supset M) \leftarrow P(B \cap M) = P(M) = 0,5$$

احتمال وقوع B فقط $= 0,3 \leftarrow P(B) - P(B \cap M) = 0,3$

$$P(B) - P(B \cap M) = 0,3$$

$$P(B) - 0,5 = 0,3$$

$$P(B) = 0,5 + 0,3 = 0,8$$

احتمال عدم وقوع B

$$P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0,8 = 0,2$$

٥ إذا كان S ، V حدثين من F بحيث $P(S) = 0,5$ ،
 $P(S \cup V) = 0,8$ ، أوجد $P(V)$ إذا كان

- ١ S ، V متنافيان ٢ $S \supset V$

الحل

١ S ، V متنافيان ٢ $S \supset V$

$$P(S \cap V) = 0 \text{ صفر} \quad P(S \cup V) = P(S) + P(V)$$

$$0,8 = 0,5 + P(V)$$

$$P(V) = 0,8 - 0,5 = 0,3$$

$$P(S \cap V) = 0,5 - 0,8 = -0,3$$

٦ إذا كان M ، B حدثين من F وكان $P(B) = \frac{1}{12}$ ،
 $P(B \cup M) = \frac{1}{3}$ ، $P(M) = \frac{1}{3}$ ،
أوجد $P(S)$ إذا كان ١ M ، B متنافيان ٢ $P(B \cap M) = \frac{1}{4}$

الحل

$$P(B \cup M) = \frac{1}{3}$$

$$P(M) + P(B) - P(B \cap M) = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} - P(B \cap M)$$

١ M ، B حدثان متنافيان $\leftarrow P(B \cap M) = 0$ صفر

$$S = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

$$P(B \cap M) = \frac{1}{4}$$

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

١٠ إذا كان A ، B حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ما وكان
 $P(A \cup B) = 0.8$ ، $P(A) = 0.4$ ، $P(B) = 0.3$ ، فأوجد:
 ① $P(A)$ ② $P(A \cap B)$ ③ $P(B - A)$

١١ إذا كان A ، B حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية وكان
 $P(A) = \frac{3}{8}$ ، $P(B) = \frac{3}{8}$ ، $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$ فأوجد:
 ① احتمال وقوع B وعدم وقوع A ② احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل
 ③ احتمال وقوع الحدث A فقط ④ احتمال عدم وقوع الحدث A

١٢ إذا كان A ، B حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية وكان
 $P(A) = 0.3$ ، $P(A \cup B) = \frac{1}{8}$ ، $P(A \cap B) = \frac{3}{4}$ ، فأوجد: $P(B)$ ، $P(B - A)$

١٣ اكمل مكان النقط

- ① احتمال الحدث المستحيل =
- ② احتمال الحدث المؤكد =
- ③ إذا القى حجر نرد منتظم مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد أقل من أو يساوي ٤ هو
- ④ القى حجر نرد منتظم مرة واحدة فإذا كان A هو حدث ظهور عدد أولي ،
 B هو حدث ظهور عدد فردي فإن $P(A \cap B) = \dots\dots\dots$
- ⑤ إذا كان A ، B حدثين متنافيين فإن $P(A \cap B) = \dots\dots\dots$
- ⑥ إذا كان $A \supset B$ فإن $P(A \cup B) = \dots\dots\dots$
- ⑦ إذا كان A ، B حدثين من F حيث $B \supset A$ فإن $P(A \cup B) = \dots\dots\dots$
- ⑧ إذا ألقيت قطعة نقود منتظمة مرة واحدة فإن احتمال ظهور صورة =
- ⑨ $P(A) = \frac{1}{3}$ ، $P(B) = \frac{2}{3}$ ، $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ فإن $P(A \cup B) = \dots\dots\dots$
- ⑩ إذا كان احتمال وقوع الحدث A هو ٦٥٪ فإن احتمال عدم وقوعه =
- ⑪ إذا كان $P(A) = \frac{1}{2}$ فإن $P(A) = \dots\dots\dots$
- ⑫ إذا القى حجر نرد منتظم مرة واحدة ، فإن احتمال ظهور عدد زوجي أولي علي الوجه العلوي =
- ⑬ إذا القى حجر نرد مرة واحدة ، فإن احتمال ظهور عدد زوجي وعدد فردي معا =
- ⑭ $P(A) + P(A') = \dots\dots\dots$
- ⑮ إذا كان $A \supset B$ فإن $P(A - B) = \dots\dots\dots$
- ⑯ إذا كان A ، B حدثين متنافيين $P(A) = \frac{1}{4}$ ، $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ فإن $P(B) = \dots\dots\dots$
- ⑰ إذا كان $P(A) = \frac{1}{4}$ فإن $P(A') = \dots\dots\dots$
- ⑱ في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة ، فإن احتمال ظهور عدد أكبر من ٦ = ...
- ⑲ إذا كان $P(A) = 0.2$ ، $P(A \cup B) = 0.5$ ، $P(A \cap B) = 0.3$ فإن $P(B) = \dots\dots\dots$
- ⑳ لأي حدثين H ، S في تجربة عشوائية يكون $(H - S) \cup (S \cap H) = \dots\dots\dots$

الامتياز

فى

الرياضيات



جبر و هندسة

الصف

الثالث

الاعدادى

2019

إعداد

أحمد المقصود حنفى

ت | ٠٦٧٣٣٦٣١٥

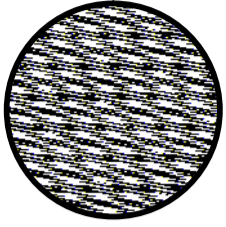
www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

الترم
الثانى

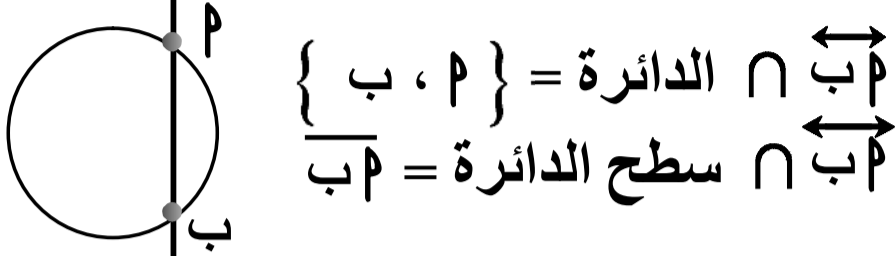
تعريف و مفاهيم أساسية

(١) الدائرة

سطح الدائرة

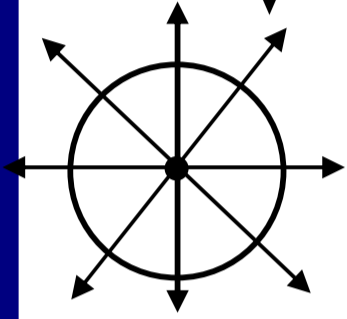


هو مجموعة نقط الدائرة \cup مجموعة النقط داخل الدائرة



$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{مب} \cap \text{الدائرة} &= \{ م , ب \} \\ \overleftrightarrow{مب} \cap \text{سطح الدائرة} &= \overline{مب} \end{aligned}$$

التمائل في الدائرة



أى مستقيم يمر بمركز الدائرة هو محور تماثل لها

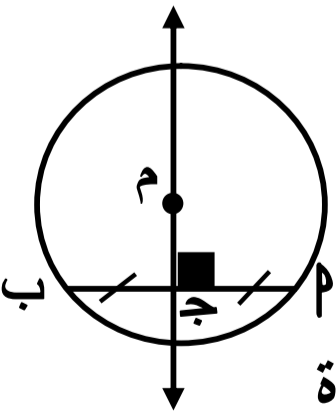
أى أن الدائرة لها عدد لانهاى من محاور التماثل

نتائج هامة

نتيجة ١ : المستقيم المار بمركز الدائرة و بمنتصف أى وتر فيها يكون عمودياً على هذا الوتر

نتيجة ٢ : المستقيم المار بمركز الدائرة عمودياً على أى وتر فيها ينصف هذا الوتر

نتيجة ٣ : المستقيم العمودى على أى وتر فى الدائرة من منتصفه يمر بمركز الدائرة



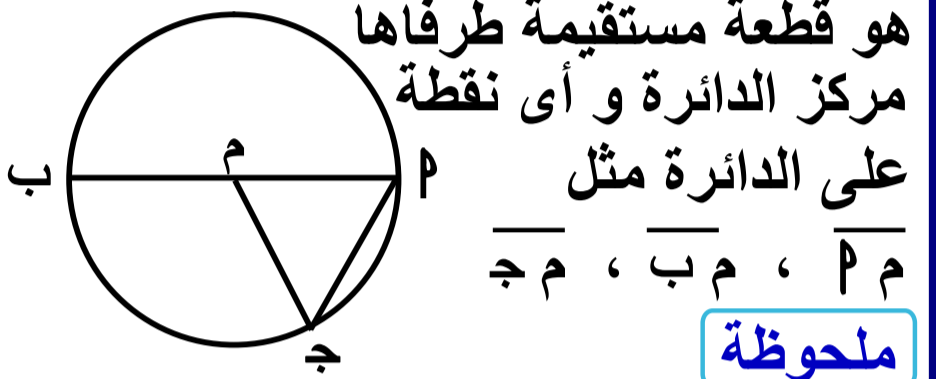
$$\overline{مب} \perp \overline{ج}$$

$$\overline{مب} \text{ ينصف } \overline{ج}$$

$$\overline{مب} \text{ يمر بمركز الدائرة}$$

هى مجموعة نقط المستوى التى تبعد بُعداً ثابتاً عن نقطة ثابتة فى المستوى و هذه النقطة تسمى مركز الدائرة و يسمى البعد الثابت (طول نصف قطر الدائرة)

(٢) نصف القطر



هو قطعة مستقيمة طرفاها مركز الدائرة و أى نقطة على الدائرة مثل

$$\overline{مب} , \overline{مب} , \overline{مب}$$

ملحوظة

أنصاف أقطار الدائرة الواحدة متساوية فى الطول

(٣) الوتر

هو قطعة مستقيمة تصل بين أى نقطتين على الدائرة مثل $\overline{مب}$

(٤) القطر

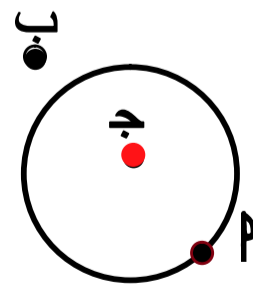
هو قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين على الدائرة و تمر بمركز الدائرة

- هو وتر يمر بمركز الدائرة

- هو أكبر أوتار الدائرة طولاً مثل $\overline{مب}$

تجزئة المستوى

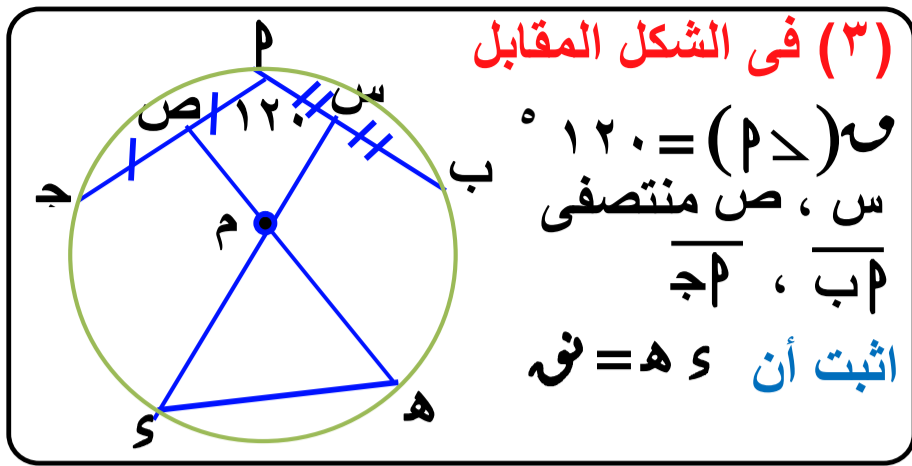
الدائرة تقسم المستوى إلى ثلاث مجموعات من النقط



نقط داخل الدائرة مثل ج

نقط خارج الدائرة مثل ب

نقط على الدائرة مثل م



(3) في الشكل المقابل

و $(\angle P) = 120^\circ$
س، ص منتصفى
 \overline{PH} ، \overline{MJ}
اثبت أن $MS \perp PH$

البرهان

∴ س منتصف \overline{PH} ∴ $MS \perp PH$

و $(\angle S) = 90^\circ$

∴ ص منتصف \overline{MJ} ∴ $MS \perp MJ$

و $(\angle M) = 90^\circ$

∴ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعي = 360°

في الشكل الرباعي $MSMJ$

و $(\angle S + \angle M) = 360^\circ - (120^\circ + 90^\circ + 90^\circ) = 60^\circ$

و $(\angle S + \angle M) = 60^\circ$

بالتقابل بالرأس

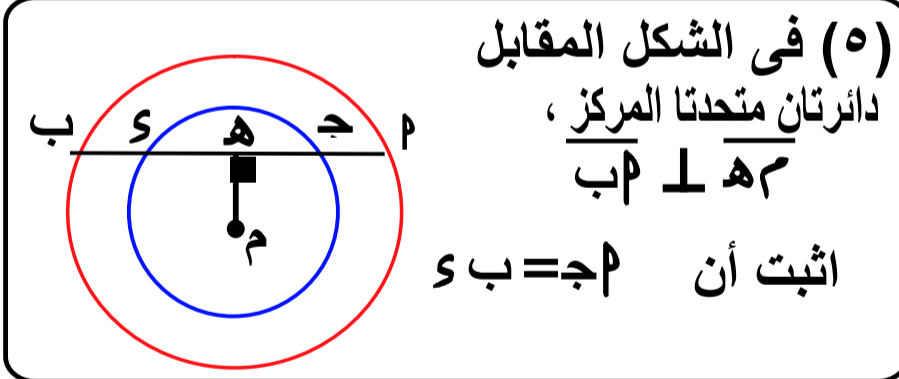
في $\triangle SMH$

∴ $\angle M = \angle S = \angle H$

و $(\angle S) = (\angle H) = \frac{60^\circ - 180^\circ}{2} = 60^\circ$

∴ $\triangle SMH$ متساوى الأضلاع

∴ $\angle M = \angle S = \angle H = 60^\circ$



(5) في الشكل المقابل

دائرتان متحدتا المركز،

$MS \perp PH$

اثبت أن $MS = MJ$

البرهان

في الدائرة الكبرى

∴ $MS \perp PH$ ∴ ه منتصف \overline{PH}

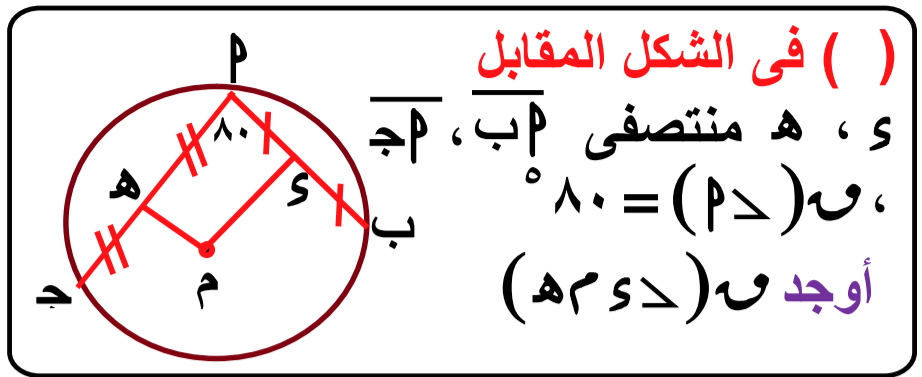
∴ $MS = MH$ (1)

في الدائرة الصغرى

∴ $MS \perp HJ$ ∴ ه منتصف \overline{HJ}

∴ $MS = HS$ (2)

بطرح 2 من 1 $\leftarrow MS = MJ$



(1) في الشكل المقابل

س، ه منتصفى \overline{PH} ، \overline{MJ}
و $(\angle P) = 80^\circ$
أوجد $(\angle S)$

البرهان

∴ س منتصف \overline{PH} ∴ $MS \perp PH$

و $(\angle S) = 90^\circ$

∴ ه منتصف \overline{MJ} ∴ $MS \perp MJ$

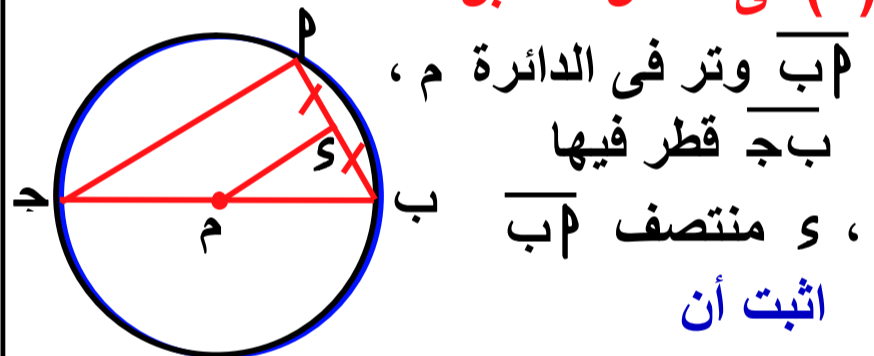
و $(\angle M) = 90^\circ$

∴ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعي = 360°

في الشكل الرباعي $MSMJ$

و $(\angle S + \angle M) = 360^\circ - (80^\circ + 90^\circ + 90^\circ) = 100^\circ$

(2) في الشكل المقابل



\overline{PH} وتر في الدائرة م،

\overline{HJ} قطر فيها

س منتصف \overline{PH}

اثبت أن

$MS \parallel PH$ ثم احسب $(\angle P)$

البرهان

∴ م مركز الدائرة

∴ م منتصف القطر \overline{HJ}

س منتصف \overline{PH}

∴ $MS \parallel PH$

∴ س منتصف \overline{PH}

∴ $MS \perp PH$

و $(\angle S) = 90^\circ$

∴ $(\angle P) = (\angle S) = 90^\circ$ بالتناظر

تمارين ١

(١) في الأشكال التالية اختر الإجابة الصحيحة

١ إذا كان $\angle P = 40^\circ$ ،
 $\angle C = 90^\circ$ ،
 فإن $\angle M = ?$ $(\angle P M C)$
 [٤٠ ؛ ٤٥ ؛ ٥٠ ؛ ٩٠]

٢ إذا كان $\angle P = 60^\circ$ ،
 $\angle C = 90^\circ$ ،
 فإن $\angle M = ?$ $(\angle P M C)$
 [٤٠ ؛ ٦٠ ؛ ٩٠]

٣ إذا كان $\angle P = 110^\circ$ ،
 $\angle C = 90^\circ$ ،
 فإن $\angle M = ?$ $(\angle P M C)$
 [٩٠ ؛ ٧٠ ؛ ٥٥ ؛ ١١٠]

(٢) في الشكل المقابل: وتر في الدائرة م

، $\overline{MS} \perp \overline{PB}$ ،
 فإذا كان طول نصف قطر الدائرة = ٥ سم ،
 $CS = ٢$ سم
 أوجد طول \overline{PB}

(٣) في الشكل المقابل

، ه منتصف \overline{PB} ؛ $\angle P = 45^\circ$ ،
 فإذا كان $\overline{PM} \cap \overline{BE} = \{O\}$
 أثبت أن المثلث م ه و متساوي الساقين

(٤) في الشكل المقابل:

دائرتان متحدتا المركز م ،
 طول نصف قطريهما ٣ سم ، ٢ سم
 $ME = ١٢$ سم
 ، $\overline{ME} \perp \overline{PB}$ أوجد طول \overline{BE}

(٥) في الشكل المقابل

\overline{PB} وتر في الدائرة م ،
 \overline{MD} ينصف $(\angle P M B)$ ،
 $\angle M = 150^\circ$ ،
 أثبت أن $\overline{MD} \perp \overline{PB}$

(٦) في الشكل المقابل

\overline{PB} مثلث مرسوم داخل دائرة م ،
 $\angle C = 90^\circ$ ،
 $\overline{MS} \perp \overline{PB}$
 $\angle P = 60^\circ$ ،
 $\angle B = 70^\circ$ ،
 أوجد $\angle M$ $(\angle P M B)$

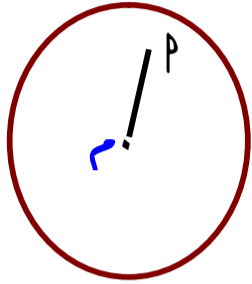
(٧) في الشكل المقابل

دائرتان متحدتا المركز ،
 $\overline{MH} \perp \overline{AB}$
 أثبت أن $\overline{MB} = \overline{MA}$

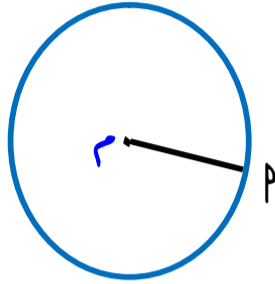
وضع نقطة و مستقيم و دائرة بالنسبة لدائرة

أولاً موضع نقطة بالنسبة للدائرة

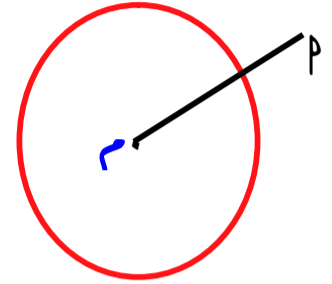
إذا كانت دائرة \mathcal{C} ، طول نصف قطرها r ، P نقطة في مستوى الدائرة فإن :



P تقع داخل الدائرة \mathcal{C}
إذا كان : $r > r_P$



P تقع على الدائرة \mathcal{C}
إذا كان : $r = r_P$



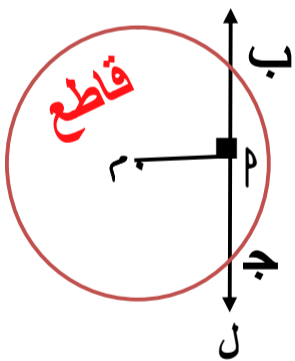
P تقع خارج الدائرة \mathcal{C}
إذا كان : $r < r_P$

١ م دائرة طول قطرها $2r$ سم ، P نقطة في مستوى الدائرة ، حدد موضع نقطة P بالنسبة للدائرة إذا كان :

- | | | | |
|-------------------|------------------|-------------------|------------------|
| ١ م $2r = r_P$ سم | P خارج الدائرة | ٣ م $2r = r_P$ سم | P داخل الدائرة |
| ٢ م $3r = r_P$ سم | P على الدائرة | ٤ م $0 = r_P$ سم | P داخل الدائرة |

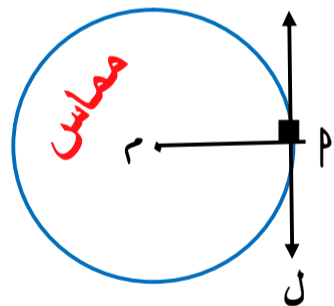
ثانياً موضع مستقيم بالنسبة للدائرة

إذا كان L مستقيم في مستوى الدائرة \mathcal{C} ، P $L \perp P$ فإن أوضاع المستقيم L هي :



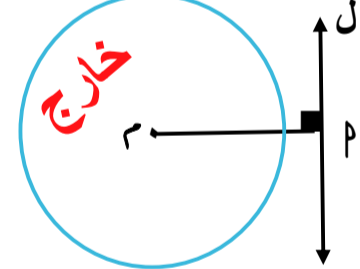
L يقطع الدائرة \mathcal{C}
 $r > r_P$

المستقيم $L \cap$ الدائرة $\mathcal{C} = \{B, C\}$
المستقيم $L \cap$ سطح الدائرة $\mathcal{C} = \overline{BC}$



المستقيم L مماس للدائرة \mathcal{C}
 $r = r_P$

المستقيم $L \cap$ الدائرة $\mathcal{C} = \{P\}$
المستقيم $L \cap$ سطح الدائرة $\mathcal{C} = \{P\}$



L يقع خارج الدائرة \mathcal{C}
 $r < r_P$

المستقيم $L \cap$ الدائرة $\mathcal{C} = \emptyset$
المستقيم $L \cap$ سطح الدائرة $\mathcal{C} = \emptyset$

٢ م دائرة طول نصف قطرها $2r$ سم ، L مستقيم في مستوى الدائرة \mathcal{C} ، P $L \perp P$ ، حدد موضع المستقيم L بالنسبة للدائرة إذا كان :

- | | | | |
|-------------------|------------------|-------------------|------------------|
| ١ م $2r = r_P$ سم | L قاطع الدائرة | ٣ م $5r = r_P$ سم | L خارج الدائرة |
| ٢ م $4r = r_P$ سم | L مماس الدائرة | ٤ م $0 = r_P$ سم | L قاطع الدائرة |

ثالثاً موضع دائرة بالنسبة لدائرة أخرى

١ م ، ن دائرتان طولاً نصفى قطريهما r سم ، R سم
حدد وضع الدائرتين في كل حالة مما يأتي :

(١) م $r = R = ٤$ سم الدائرتان **متماستان من الداخل**

(٢) م $r = R = ١٠$ سم الدائرتان **متماستان من الخارج**

(٣) م $r = R = ١٢$ سم الدائرتان **متباعدتان**

(٤) م $r = R = ٨$ سم الدائرتان **متقاطعتان**

(٥) م $r = R = ٢$ سم الدائرتان **متداخلتان**

(٦) م $r = R = ٠$ سم الدائرتان **متحدتا المركز**

(٧) سطح الدائرة م \cap سطح الدائرة ن = \emptyset

الدائرتان **متباعدتان**

(٨) سطح الدائرة م \cap سطح الدائرة ن = $\{ P \}$

الدائرتان **متماستان من الخارج**

(٩) الدائرة م \cap الدائرة ن = $\{ P \}$

الدائرتان **متماستان من الخارج او متماستان من الداخل**

(١٠) الدائرة م \cap الدائرة ن = \emptyset

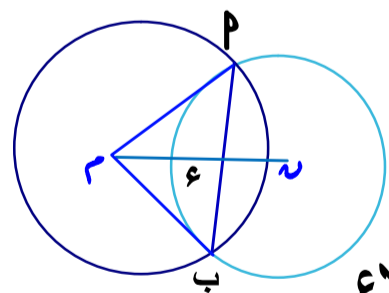
الدائرتان **متباعدتان او متداخلتان**

(١١) سطح الدائرة م \cap سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن

الدائرتان **متداخلتان او متماستان من الداخل**

(١٢) الدائرة م \cap الدائرة ن = $\{ P , B \}$

الدائرتان **متقاطعتان**



٢ في الشكل المقابل :

م ، ن دائرتان متقاطعتان في م ، ب

و $\angle MPN = 30^\circ$

أثبت أن ΔMBP متساوي الأضلاع

البرهان

$\therefore \overline{MN}$ خط المركزين ، \overline{MP} وتر مشترك

$\therefore \overline{MN} \perp \overline{MP}$ $\therefore \angle MPN = 90^\circ$

$\therefore \angle MPB = 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ) = 60^\circ$

$\therefore \angle MBP = \angle MPB = 60^\circ$ " أنصاف أقطار "

$\therefore \Delta MBP$ متساوي الأضلاع

١ الدائرتان متباعدتان

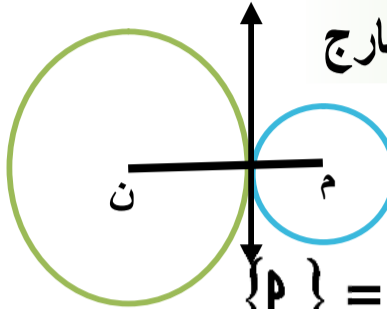


م ن $< r_1 + r_2$

الدائرة م \cap الدائرة ن = \emptyset

سطح الدائرة م \cap سطح الدائرة ن = \emptyset

٢ الدائرتان متماستان من الخارج

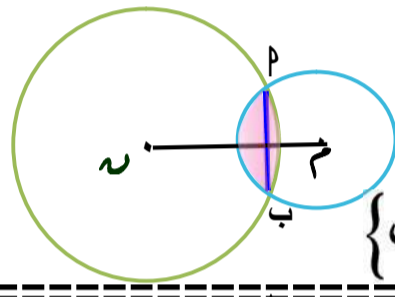


م ن $= r_1 + r_2$

الدائرة م \cap الدائرة ن = $\{ P \}$

سطح الدائرة م \cap سطح الدائرة ن = $\{ P \}$

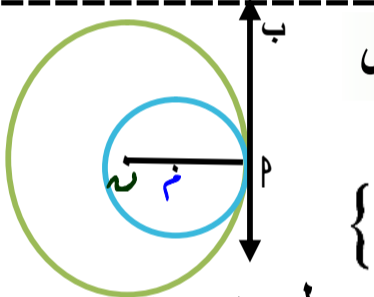
٣ الدائرتان متقاطعتان



م ن $> r_2 - r_1$ و $r_1 + r_2 > م ن$

الدائرة م \cap الدائرة ن = $\{ P , B \}$

٤ الدائرتان متماستان من الداخل

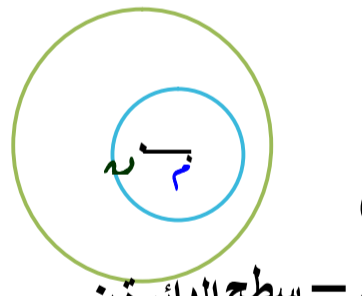


م ن $= r_2 - r_1$

الدائرة م \cap الدائرة ن = $\{ P \}$

سطح الدائرة م \cap سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن

٥ الدائرتان متداخلتان



م ن $> r_2 - r_1$

الدائرة م \cap الدائرة ن = \emptyset

سطح الدائرة م \cap سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن

٦ الدائرتان متحدتا المركز



م ن = صفر

الدائرة م \cap الدائرة ن = \emptyset

سطح الدائرة م \cap سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن

نتائج هامة

١ خط المركزين لدائرتين

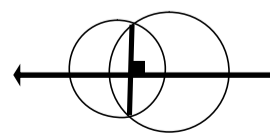
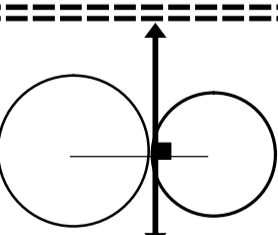
متماستين يمر بنقطة التماس و يكون

عمودياً على المماس المشترك

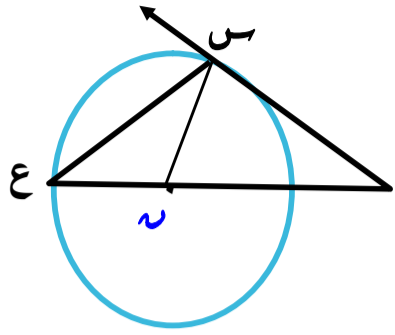
٢ خط المركزين لدائرتين

متقاطعتين يكون عمودياً على الوتر

المشترك و ينصفه



تمارين ٢

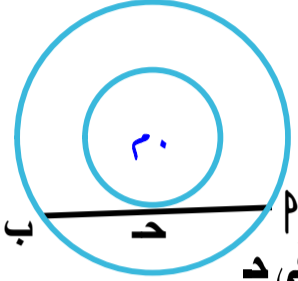


(٥) في الشكل المقابل :

ص \perp مماس للدائرة \mathcal{O} عند \mathcal{P} ،
و $\angle (\text{ع} \rightarrow) = 35^\circ$ ص

أوجد $\angle (\text{ح} \rightarrow \text{ص} \rightarrow \text{ع})$

(٦) في الشكل المقابل :

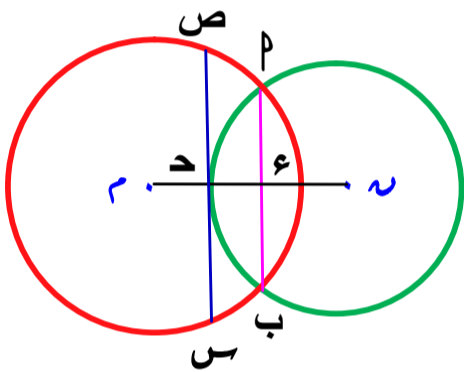


دائرتان متحدتا المركز \mathcal{O}
طولا نصفى قطريهما \mathcal{O} سم ، \mathcal{O}' سم

$\overline{O'P}$ وتر في الدائرة الكبرى يمس الدائرة الصغرى في \mathcal{D}

أوجد طول $\overline{O'P}$

(٧) في الشكل المقابل :



\mathcal{O} ، \mathcal{O}' دائرتان متقاطعتان في

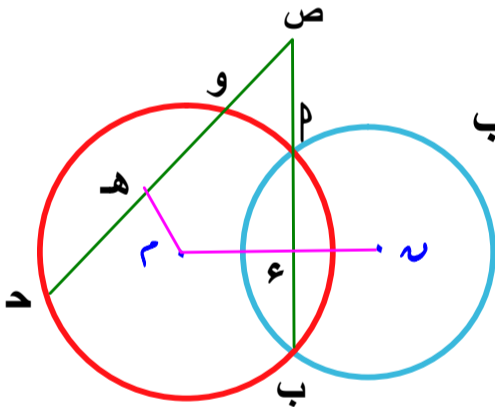
\mathcal{P} ، \mathcal{B} ، $\mathcal{C} \in \text{ص} \rightarrow \text{ص}$

، $\text{ص} \rightarrow \text{ص}$ تماس الدائرة \mathcal{O}

عند \mathcal{C} **أثبت أن**

١ $\overline{O'P} \parallel \text{ص} \rightarrow \text{ص}$ ٢ \mathcal{C} منتصف $\text{ص} \rightarrow \text{ص}$

(٨) في الشكل المقابل :



\mathcal{O} ، \mathcal{O}' دائرتان متقاطعتان في \mathcal{P} ، \mathcal{B}

\mathcal{H} منتصف $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{O}$

و $\angle (\text{ح} \rightarrow \text{ص} \rightarrow \mathcal{H}) = 53^\circ$

أوجد $\angle (\text{ح} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{H})$

(١) دائرة \mathcal{O} طول نصف قطرها \mathcal{O} سم ،

\mathcal{P} نقطة في مستويها فأكمل ما يلي :

١ إذا كان : $\mathcal{O} \mathcal{P} = 6$ سم فإن \mathcal{P} تقع الدائرة

٢ إذا كان : $\mathcal{O} \mathcal{P} = 5$ سم فإن \mathcal{P} تقع الدائرة

٣ إذا كان : $\mathcal{O} \mathcal{P} = 3$ سم فإن \mathcal{P} تقع الدائرة

٤ إذا كان : $\mathcal{O} \mathcal{P} = 0$ صفر فإن \mathcal{P} تقع الدائرة

(٢) دائرة \mathcal{O} طول نصف قطرها \mathcal{O} سم ،

$\mathcal{L} \perp \mathcal{O}$ ، $\mathcal{L} \ni \mathcal{P}$ فأكمل ما يلي :

١ إذا كان : $\mathcal{O} \mathcal{P} = 6$ سم فإن : المستقيم \mathcal{L}

٢ إذا كان : $\mathcal{O} \mathcal{P} = 5$ سم فإن : المستقيم \mathcal{L}

٣ إذا كان : $\mathcal{O} \mathcal{P} = 3$ سم فإن : المستقيم \mathcal{L}

٤ إذا كان : $\mathcal{O} \mathcal{P} = \frac{2}{5}$ نق \mathcal{O} سم فإن \mathcal{L} يقع الدائرة

٥ إذا كان : $\mathcal{O} \mathcal{P} = 0$ نق \mathcal{O} سم فإن \mathcal{L} يسمى للدائرة

٦ إذا كان : $\mathcal{O} \mathcal{P} = \frac{9}{5}$ نق \mathcal{O} سم فإن \mathcal{L} يسمى للدائرة

٧ إذا كان المستقيم $\mathcal{L} \cap$ الدائرة $= \emptyset$ فإن \mathcal{L} يكون الدائرة

٨ إذا كان المستقيم $\mathcal{L} \cap$ الدائرة $= \{ \mathcal{S} \}$ فإن \mathcal{L} يكون الدائرة

(٣) دائرتان \mathcal{O} ، \mathcal{O}' طولا نصفى قطريهما \mathcal{O} سم ، \mathcal{O}' سم

على الترتيب فأكمل ما يلي :

١ إذا كان : $\mathcal{O} \mathcal{O}' = 6$ سم فإن : الدائرتان

٢ إذا كان : $\mathcal{O} \mathcal{O}' = 2$ سم فإن : الدائرتان

٣ إذا كان : $\mathcal{O} \mathcal{O}' = 8$ سم فإن : الدائرتان

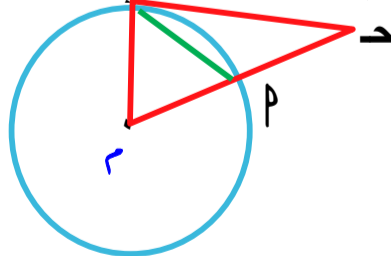
٤ إذا كان : $\mathcal{O} \mathcal{O}' = 1$ سم فإن : الدائرتان

٥ إذا كان : $\mathcal{O} \mathcal{O}' = 9$ سم فإن : الدائرتان

٦ إذا كان : $\mathcal{O} \mathcal{O}' = 0$ صفر فإن : الدائرتان

(٤) في الشكل المقابل :

دائرة مركزها \mathcal{O} ، و $\angle (\text{ح} \rightarrow) = 40^\circ$ ،



، و $\angle (\text{ب} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \text{ب}) = 65^\circ$ ،

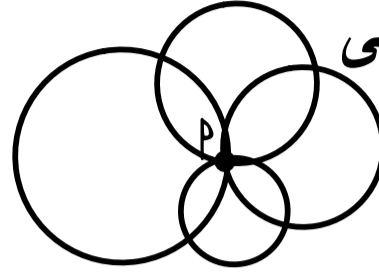
أثبت أن

$\overline{O'P}$ مماس للدائرة \mathcal{O}

ملاحظات هامة

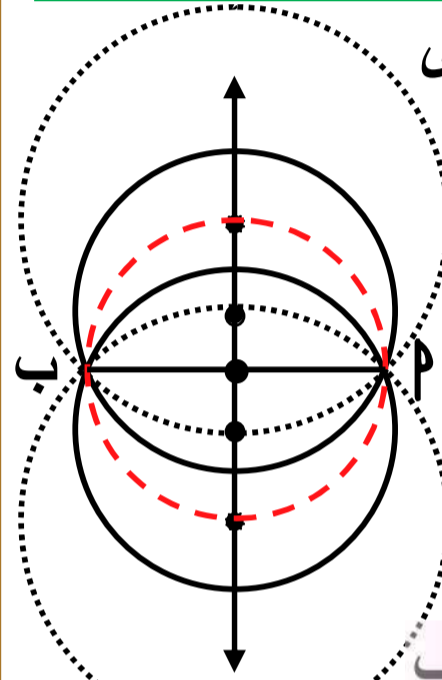
تعيين الدائرة إذا علم مركزها و طول نصف قطرها

أولاً رسم دائرة تمر بنقطة معلومة



يمكن رسم عدد لا نهائي من الدوائر تمر بنقطة معلومة

ثانياً رسم دائرة تمر بنقطتين معلومتين



يمكن رسم عدد لا نهائي من الدوائر تمر بالنقطتين P ، ب

مراكزها جميعاً تقع على محور \overline{PB}

١ إذا كان $\frac{1}{2} PB < r$ فإنه يمكن رسم دائرتين

٢ إذا كان $\frac{1}{2} PB = r$ فإنه يمكن رسم دائرة واحدة

وهي أصغر دائرة يمكن رسمها لتمر بالنقطتين P ، ب تكون \overline{PB} قطراً فيها

٣ إذا كان $\frac{1}{2} PB > r$ فإنه لا يمكن رسم دائرة

١ أي ثلاث نقاط لا تنتمي لمستقيم واحد يمر بها دائرة وحيدة

٢ لا يمكن رسم دائرة تمر بثلاث نقاط تنتمي لمستقيم واحد

٣ الدائرة المارة برؤوس مثلث تسمى دائرة خارجة لهذا المثلث

٤ مركز الدائرة الخارجة للمثلث هي نقطة تقاطع الأعمدة المقامة على أضلاع مثلث من منتصفاتها أو نقطة تقاطع محاور تماثل أضلاعه

وتقع هذه النقطة ١ داخل المثلث الحاد الزوايا

٢ خارج المثلث المنفرج الزاوية

٣ في منتصف وتر المثلث القائم الزاوية

٤ مركز الدائرة الخارجة للمثلث المتساوي الأضلاع هو نقطة تقاطع محاور تماثل أضلاعه - متوسطاته - منصفات زواياه الداخلة - ارتفاعاته

٥ مركز الدائرة الخارجة للمثلث المتساوي الأضلاع هو نقطة تقاطع محاور تماثل أضلاعه - متوسطاته - منصفات زواياه الداخلة - ارتفاعاته

٦ مركز الدائرة الخارجة للمثلث المتساوي الأضلاع هو نقطة تقاطع محاور تماثل أضلاعه - متوسطاته - منصفات زواياه الداخلة - ارتفاعاته

٧ مركز الدائرة الخارجة للمثلث المتساوي الأضلاع هو نقطة تقاطع محاور تماثل أضلاعه - متوسطاته - منصفات زواياه الداخلة - ارتفاعاته

٨ مركز الدائرة الخارجة للمثلث المتساوي الأضلاع هو نقطة تقاطع محاور تماثل أضلاعه - متوسطاته - منصفات زواياه الداخلة - ارتفاعاته

٩ مركز الدائرة الخارجة للمثلث المتساوي الأضلاع هو نقطة تقاطع محاور تماثل أضلاعه - متوسطاته - منصفات زواياه الداخلة - ارتفاعاته

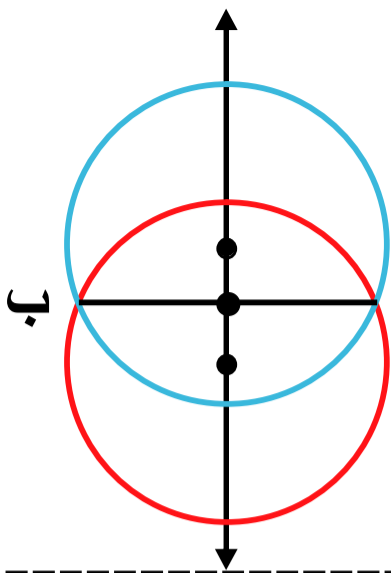
١٠ مركز الدائرة الخارجة للمثلث المتساوي الأضلاع هو نقطة تقاطع محاور تماثل أضلاعه - متوسطاته - منصفات زواياه الداخلة - ارتفاعاته

١١ مركز الدائرة الخارجة للمثلث المتساوي الأضلاع هو نقطة تقاطع محاور تماثل أضلاعه - متوسطاته - منصفات زواياه الداخلة - ارتفاعاته

١٢ مركز الدائرة الخارجة للمثلث المتساوي الأضلاع هو نقطة تقاطع محاور تماثل أضلاعه - متوسطاته - منصفات زواياه الداخلة - ارتفاعاته

تعيين الدائرة

مثال (١) باستخدام الأدوات الهندسية



ارسم \overline{PB} طولها ٦ سم

ثم ارسم دائرة طول نصف قطرها ٤ سم P

(كم عدد الحلول)

عدد الحلول = ٢

تمارين ٣

س١ أكمل ما يلي :

- ١ عدد الدوائر المارة بنقطة معلومة
- ٢ عدد الدوائر المارة بطرفي قطعة مستقيمة
- ٣ عدد الدوائر المارة بثلاث نقاط لا تنتمي لمستقيم واحد
- ٤ عدد الدوائر المارة بثلاث نقاط تنتمي لمستقيم واحد
- ٥ جميع الدوائر المارة بالنقطتين س ، ص تقع جميع مراكزها على
- ٦ إذا كان $\triangle س ص ع$ قائم الزاوية في ص فإن مركز الدائرة المارة برؤوسه هو
- ٧ مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث هو نقطة تقاطع
- ٨ طول نصف قطر أصغر دائرة مارة بطرفي قطعة مستقيمة طولها ٦ سم هو
- ٩ لا يمكن رسم دائرة تمر برؤوس ٦ ٦

١٠ عدد الدوائر التي طول نصف قطرها نق و تمر بطرفي قطعة مستقيمة \overline{PB} طولها ١٠ سم يكون :

إذا كان نق = ٥ سم

إذا كان نق = ٧ سم

إذا كان نق > ٥ سم

س٢ ارسم \overline{PB} طولها ٥ سم

ثم ارسم دائرة طول نصف قطرها ٣ سم

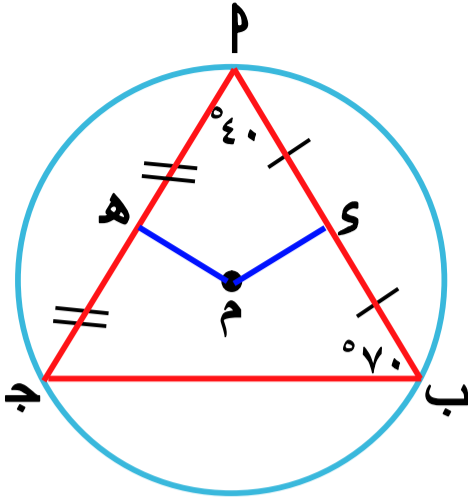
(كم عدد الحلول)

س٣ $\triangle P ب ح$ فيه :

$P ب = ٤$ سم ، $ب ح = ٥$ سم ، $ح = ٣$ سم ،

ارسم الدائرة الخارجة عنه

علاقة أوتار الدائرة بمركزها



(٢) في الشكل المقابل

س، ه منتصفى \overline{AB} ، \overline{MP}

و $(\angle م س ب) = 40^\circ$

و $(\angle ب) = 70^\circ$

اثبت أن $س م = ه م$

البرهان

في $\Delta م ب ج$

و $(\angle ج) = 180 - (40 + 70) = 70^\circ$

و $(\angle ج) = (\angle ب)$

∴ $م ب = م ج$ أوتار متساوية ①

∴ س منتصف \overline{AB} ∴ $س م \perp م ب$ ②

∴ ه منتصف \overline{AB} ∴ $ه م \perp م ج$ ③

من ١، ٢، ٣ ∴ $س م = ه م$ أبعاد متساوية

(٣) في الشكل المقابل

$م ب = م ج$ ، س،

س، ص منتصفى \overline{AB} ، \overline{CD}

اثبت أن

و $(\angle م س ص) = (\angle م ج ص)$

البرهان

∴ س منتصف \overline{AB} ∴ $س م \perp م ب$

و $(\angle م س م) = 90^\circ$

∴ ص منتصف \overline{CD} ∴ $ص م \perp م ج$

و $(\angle م ص ج) = 90^\circ$

∴ $(\angle م س م) = (\angle م ص ج) = 90^\circ$ ①

∴ $م ب = م ج$ أوتار متساوية

∴ $س م = م ص$ أبعاد متساوية

∴ $(\angle م س ص) = (\angle م ج ص)$ ②

ب طرح ٢ من ١

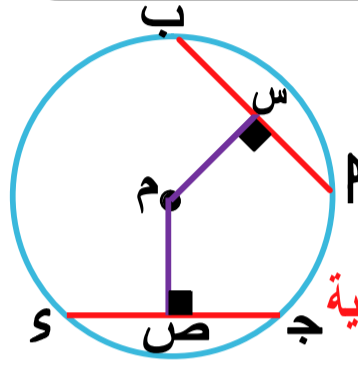
∴ $(\angle م س ص) = (\angle م ج ص)$

ملاحظة

بعد الوتر عن مركز الدائرة هو طول العمود المرسوم عليه من مركز الدائرة

نظرية ١

الأوتار المتساوية فى الطول فى دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة



∴ $س م \perp م ب$

∴ $ص م \perp م ج$

∴ $م ب = م ج$ أوتار متساوية

∴ $س م = م ص$ أبعاد متساوية

عكس نظرية ١

إذا كانت الأوتار على أبعاد متساوية من مركز الدائرة فإنها تكون متساوية فى الطول

نتيجة

فى الدوائر المتطابقة الأوتار المتساوية فى الطول فى دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة

(١) فى الشكل المقابل

$م ب = م ج$

س، ص منتصفى \overline{AB}

م ب، \overline{CD}

اثبت أن

$س م = ه م$

البرهان

∴ س منتصف \overline{AB} ∴ $س م \perp م ب$

∴ ص منتصف \overline{CD} ∴ $ص م \perp م ج$

∴ $م ب = م ج$ أوتار متساوية

∴ $س م = م ص$ أبعاد متساوية ①

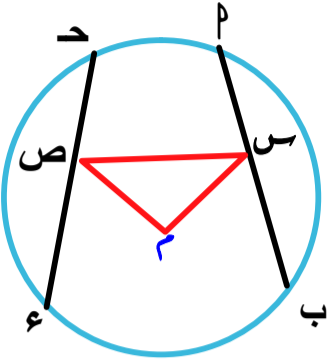
∴ $س م = ه م = م ص$ ②

ب طرح ١ من ٢

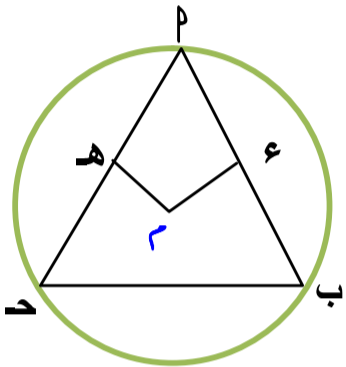
∴ $س م = ه م$

تمارين ٤

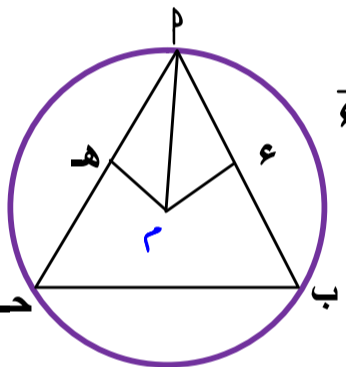
س ١ أكمل ما يلي :



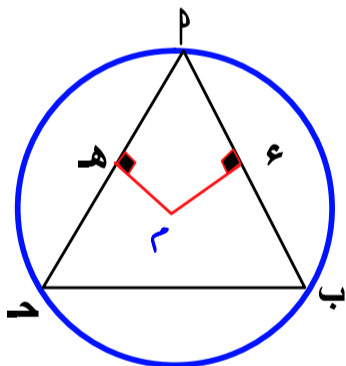
- ١ دائرة م ، س منتصف \overline{AB} ،
ص منتصف \overline{CH} ،
و $(\triangle مسص) = 90^\circ$ ،
فإن $AB = CH$:
و $(\triangle مسص) = \dots$



- ٢ دائرة م ، ع منتصف \overline{AB} ،
هـ منتصف \overline{CH} ،
و $(\triangle م ع هـ) = 90^\circ$ ،
فإن: و $(\triangle م ع هـ) = \dots$

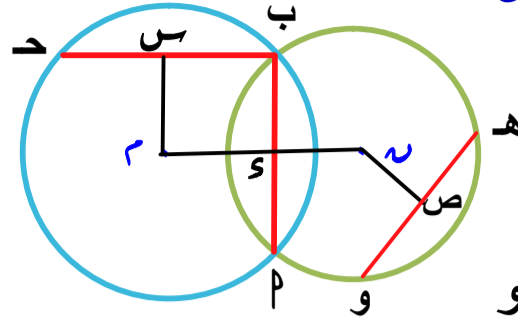


- ٣ دائرة م ، $AB = CH$ ،
ع منتصف \overline{AB} ، هـ منتصف \overline{CH} ،
و $(\triangle م ع هـ) = 90^\circ$ ،
و $(\triangle م ع هـ) = \dots$



- ٤ دائرة م ، $AB = CH$ ،
 $AM = 2 + SM$ ،
 $AM = 2 + SM$ ،
فإن $SM = \dots$

- ٥ الأوتار المتساوية في الطول في دائرة على مركز الدائرة
٦ إذا كانت الأوتار على أبعاد متساوية من مركز الدائرة فإنها تكون



(٤) في الشكل المقابل

$AM = CN$ ،
 $AN = CN$ ،
 $AN \perp OH$ ،
س منتصف \overline{AB} ،
اثبت أن $AB = CD$ هو

البرهان

خط المركزين ، \overline{AB} وتر مشترك

$AM \perp AB$:

$AN \perp AB$ ، $AM \perp AB$:

س منتصف \overline{AB} : $AM \perp AB$:

$AM = CN$: أبعاد متساوية

١ : $AB = CD$: أوتار متساوية

$AN \perp OH$:

$AN = CN$: أبعاد متساوية

٢ : $AB = CD$: أوتار متساوية

من ١ ، ٢ : $AB = CD$ هو

(٥) في الشكل المقابل

دائرتان متحدتا المركز م ،

$AB = CD$

$AM \perp AB$

$AM \perp CD$ ،

اثبت أن

$OH = OS$

البرهان

في الدائرة الكبرى

$AM \perp AB$:

$AM \perp CD$:

$AB = CD$: أوتار متساوية

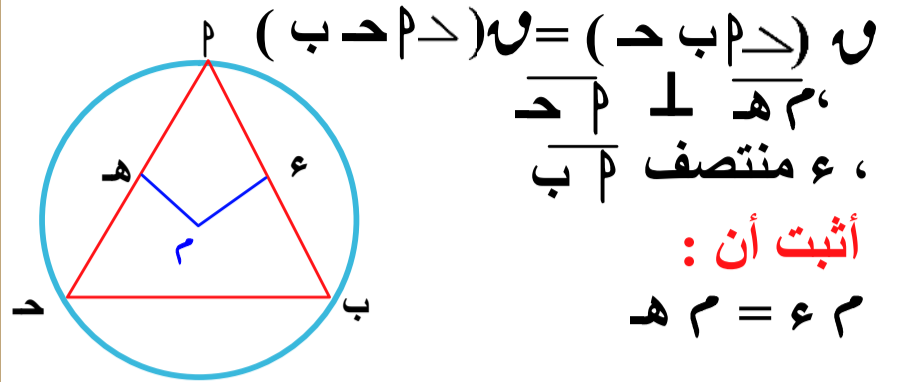
$AM = CM$: أبعاد متساوية

في الدائرة الصغرى

$AM = CM$: أبعاد متساوية

$OH = OS$: أوتار متساوية

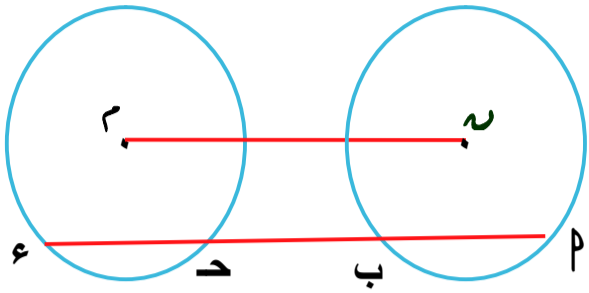
(٢) في الشكل المقابل :



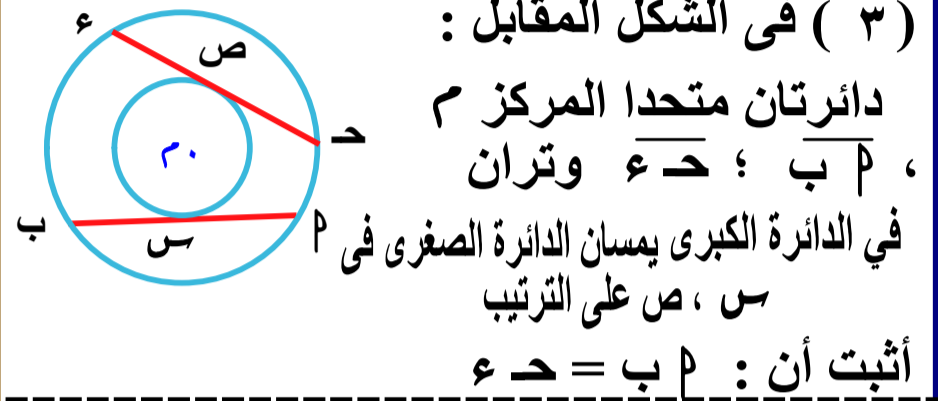
(٧) في الشكل المقابل :

دائرتان م ، ن متطابقتان $MP \parallel n$ $m \parallel n$

أثبت أن :
 $MP = n$



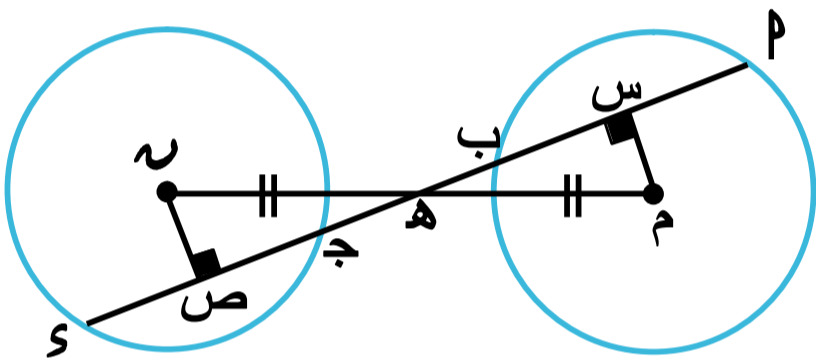
(٣) في الشكل المقابل :



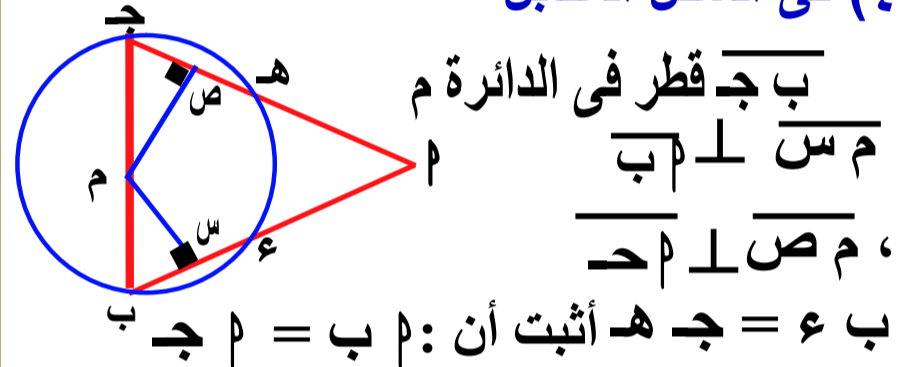
دائرتان متحدتا المركز م ،
 $MA = MB$ ؛ وتران
في الدائرة الكبرى يمسان الدائرة الصغرى في
س ، ص على الترتيب
أثبت أن : $MS = MA - MB$

(٨) في الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متطابقتان و متباعدتان
، ه منتصف م ن ، اثبت أن $MP = n$
، ه منتصف MP



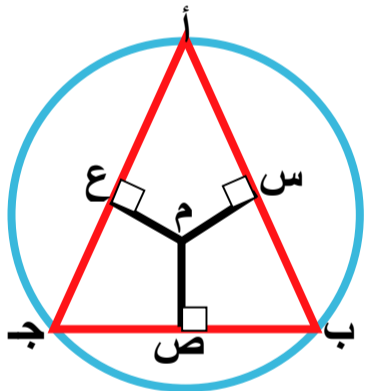
(٤) في الشكل المقابل



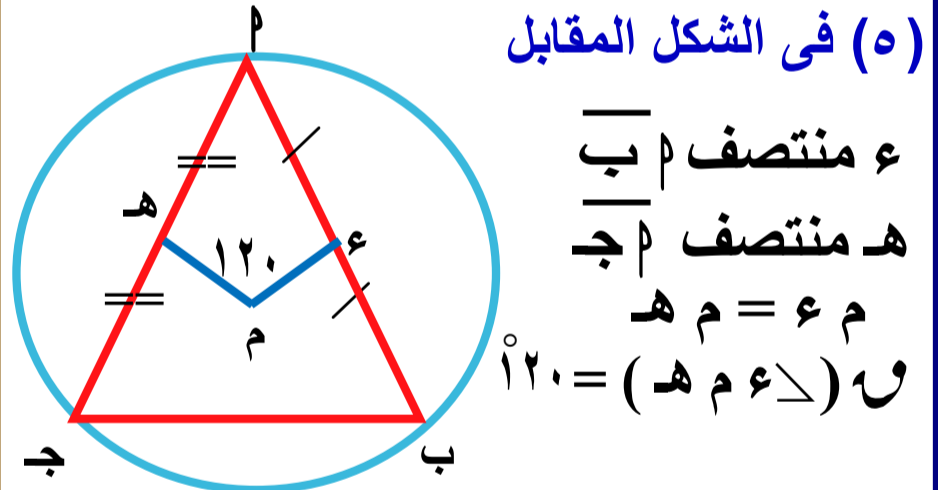
MP قطر في الدائرة م
 $MS \perp AB$
،
 $ME \perp AP$
ب = ع = ج ه أثبت أن : $ME = MA - MB$

(٩) في الشكل المقابل

إذا كان م س = م ص = م ع
أوجد MP و (MA)
وإذا كان $AB = 10$ سم
أوجد محيط $\triangle APB$



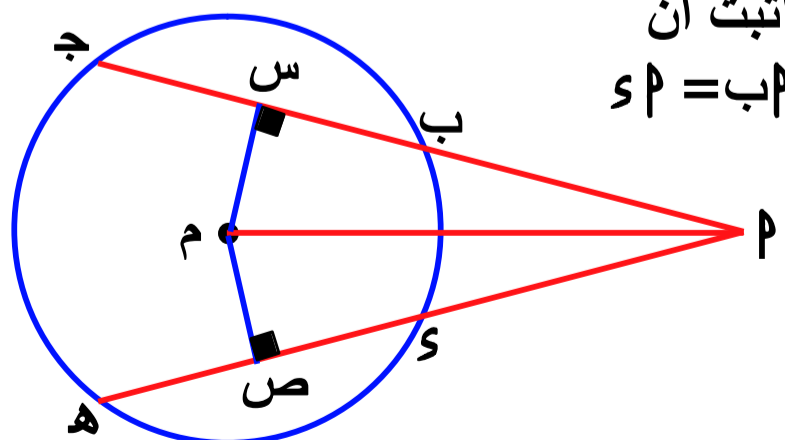
(٥) في الشكل المقابل



ع منتصف MP
ه منتصف MP
م = ع = ه
و $(MA) = 120$

(٦) في الشكل المقابل

$MS = n$ ، $MS \perp AB$
م ص $\perp MS$
اثبت أن
 $MP = n$



الزاوية المركزية و قياس الأقواس

القوس

طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}} \times \text{محيط الدائرة}$

$$= \frac{\text{قياس القوس}}{360} \times 2\pi r$$

ملاحظات هامة

- 1- طول القوس الذي يمثل نصف الدائرة = πr
- 2- طول القوس الذي يمثل ربع الدائرة = $\frac{1}{4} \times 2\pi r$
- 3- طول القوس الذي يمثل ثلث الدائرة = $\frac{1}{3} \times 2\pi r$

مثال

أوجد طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها 120° في دائرة طول نصف قطرها 21 سم

الحل

∴ طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}} \times \text{محيط الدائرة}$

$$\therefore \text{طول القوس} = \frac{120}{360} \times 2\pi r$$

$$= \frac{1}{3} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21 = 44 \text{ سم}$$

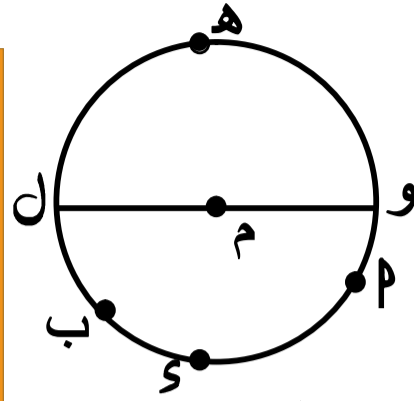
مثال 2 أوجد طول القوس الذي يمثل ربع

الدائرة التي طول نصف قطرها 14 سم

الحل

$$\text{طول القوس} = \frac{1}{4} \times 2\pi r$$

$$= \frac{1}{4} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 14 = 22 \text{ سم}$$



هناك قوسان يعبر عنهما \widehat{Pb}
(1) \widehat{Pb} (الأصغر) أو \widehat{Pb}
(2) \widehat{Pb} (الأكبر) أو \widehat{Pb}

ملاحظات :-

(1) \widehat{Pb} يعبر عن القوس الأصغر إن لم يذكر غير ذلك

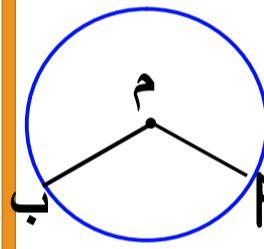
(2) إذا كان \overline{LN} قطر في الدائرة م فإن

$\widehat{HL} = \widehat{LN}$ ويسمى كلا منهما نصف دائرة

الزاوية المركزية

هي الزاوية التي رأسها مركز الدائرة و يحمل كل من ضليعيها نصف قطر في الدائرة

ملاحظات هامة



1) \angle (أ م ب) المركزية يقابلها \widehat{Pb} (الأصغر)

2) \angle (أ م ب) المركزية المنعكسة يقابلها \widehat{Pb} (الأكبر)

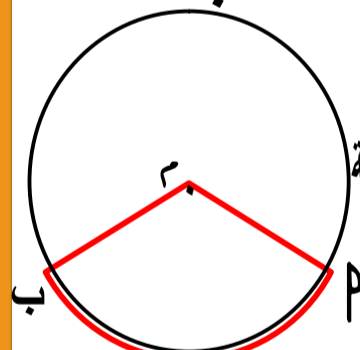
قياس القوس

هو قياس الزاوية المركزية المقابلة له

\angle (أ م ب) = \widehat{Pb}

\angle (أ م ب) المنعكسة = \widehat{Pb}

ملاحظات هامة



1) قياس الدائرة = 360°

2) قياس القوس الذي يمثل نصف الدائرة = 180°

3) قياس القوس الذي يمثل ربع الدائرة = 90°

4) قياس القوس الذي يمثل ثلث الدائرة = 120°

5) قياس القوس الذي يمثل ثلاث أرباع الدائرة = 270°

6) قياس $\frac{1}{6}$ الدائرة = $360^\circ \times \frac{1}{6} = 60^\circ$

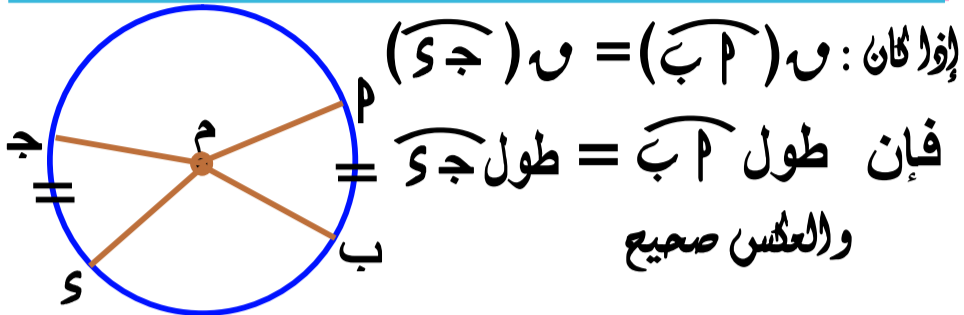
طول القوس

هو جزء من محيط دائرة يتناسب مع قياسه

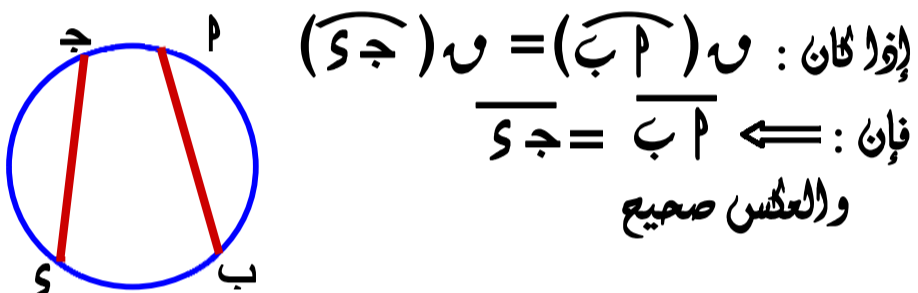
$$\frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}}$$

نتائج هامة

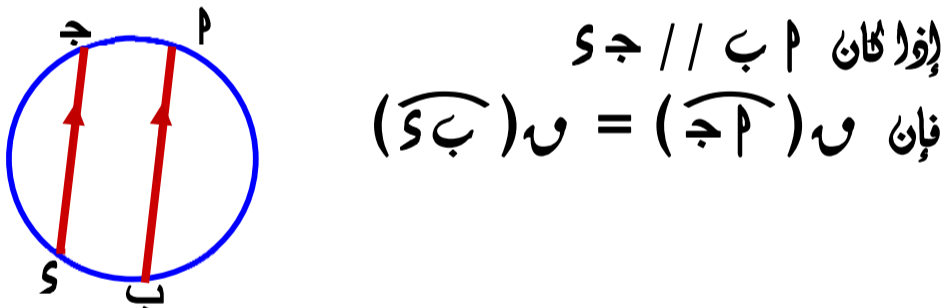
نتيجة ١: في الدائرة الواحدة أو في الدوائر المتطابقة الأقواس المتساوية في القياس متساوية في الطول والعكس صحيح



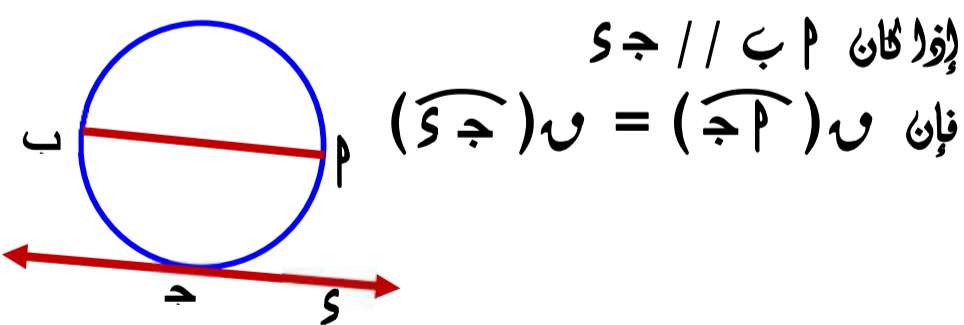
نتيجة ٢: في الدائرة الواحدة أو في الدوائر المتطابقة الأقواس المتساوية في القياس أوتارها متساوية في الطول والعكس صحيح



نتيجة ٣: الوتران المتوازيان في دائرة يحصران قوسين متساويين في القياس



نتيجة ٤: القوسان المحصوران بين وتر ومماس يوازيه متساويان في القياس



مثال ٣: أوجد قياس وطول القوس الذي يمثل $\frac{2}{5}$ من الدائرة حيث طول قطر الدائرة ١٤ سم

الحل
قياس القوس = $\frac{2}{5}$ قياس الدائرة
 $144 = 360 \times \frac{2}{5}$

طول القوس = $17.6 = 7 \times \frac{22}{7} \times 2 \times \frac{144}{360}$ سم

مثال ٤: أوجد قياس القوس الذي طوله ١١ سم في دائرة طول نصف قطرها ٧ سم

الحل
قياس القوس = $\frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}} \times 360$

قياس القوس = $90 = 360 \times \frac{11}{7 \times \frac{22}{7} \times 2}$

مثال ٥: في الدائرة م و(ب) = ٤٥ ،

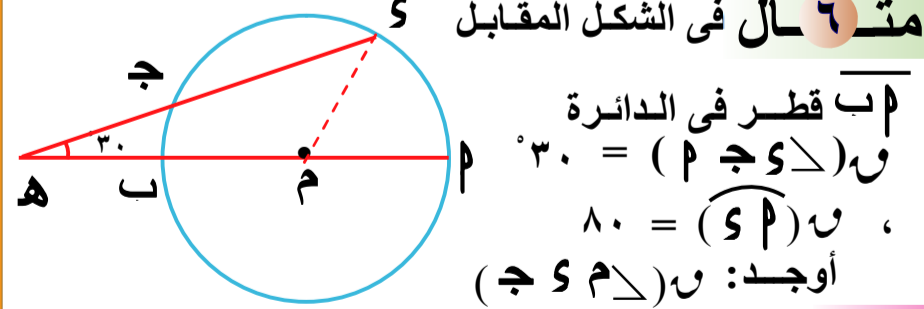
الحل
م = ٧ سم أوجد طول م ب

الحل
م م = م ب = م ن
Δ م ب م متساوي الساقين
و(م ب) = و(م ن) = ٤٥
و(م ن) = ٩٠ = (٤٥ + ٤٥) - ١٨٠ = (م ن)
و(م ب) = ٩٠

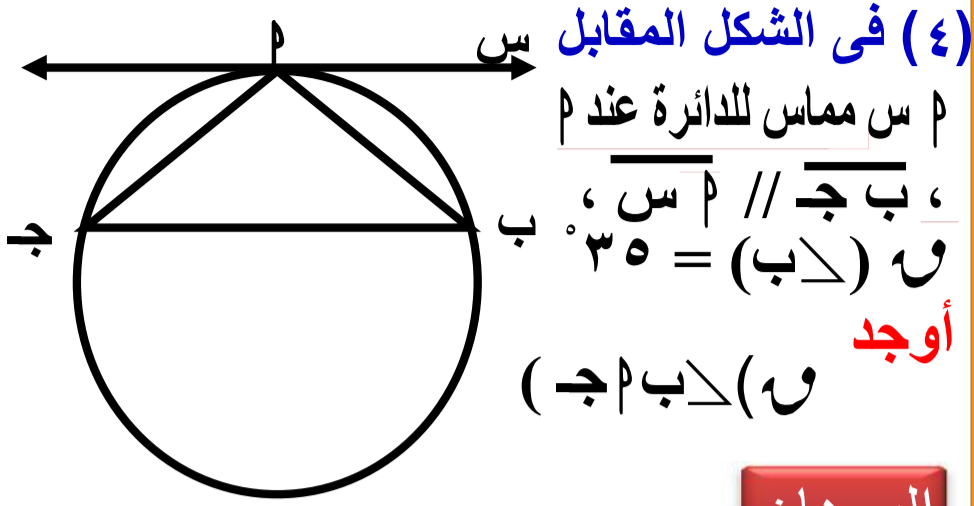
∴ طول م ب = $\frac{\text{قياس القوس}}{360} \times \pi \times 2 \times 7$ سم

= $11 = 7 \times \frac{22}{7} \times 2 \times \frac{90}{360}$ سم

مثال ٦: في الشكل المقابل



الحل
∴ و(م س ج) = و(م س م) = ٨٠
∴ و(م س ج) = ٥٠ = ٣٠ - ٨٠ = (م س ج)



(٤) في الشكل المقابل

م س مماس للدائرة عند م

، $\overline{AB} \parallel \overline{MS}$ ،

و $(\angle B) = 35^\circ$

أوجد

و $(\angle P)$

البرهان

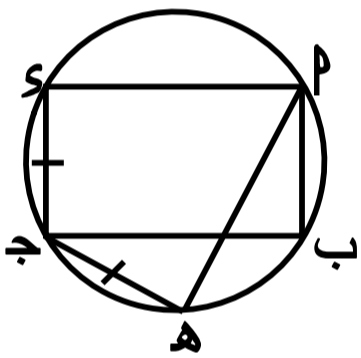
$\because \overline{MS} \parallel \overline{AB} \Rightarrow \widehat{P} = \widehat{B} = 35^\circ$

$\therefore \angle P = 35^\circ$

$\therefore \widehat{B} = \widehat{P} = 35^\circ$

$\therefore \widehat{AB} = 180^\circ - [35^\circ + 35^\circ]$

$= 110^\circ = 70^\circ - 180^\circ$



(٥) في الشكل المقابل

م س مماس للدائرة عند م

، $\overline{AB} \parallel \overline{MS}$ ،

و $(\angle B) = 70^\circ$

أثبت أن $\angle P = 70^\circ$

البرهان

$\because \overline{MS} \parallel \overline{AB}$ مستطيل

$\therefore \angle P = \angle B$

$\therefore \angle P = 70^\circ$

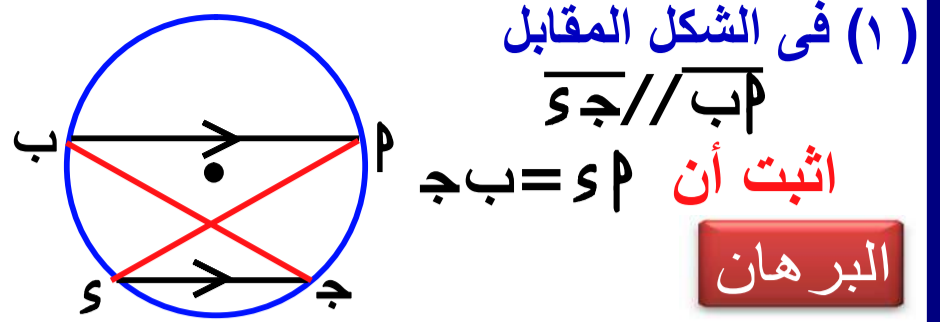
$\therefore \angle P = 70^\circ$

$\therefore \widehat{AB} = \widehat{P} = 70^\circ$

بإضافة \widehat{B} للطرفين

$\therefore \widehat{AB} = \widehat{P} = 70^\circ$

$\therefore \angle P = 70^\circ$



(١) في الشكل المقابل

$\overline{AB} \parallel \overline{MS}$

أثبت أن $\angle P = 35^\circ$

البرهان

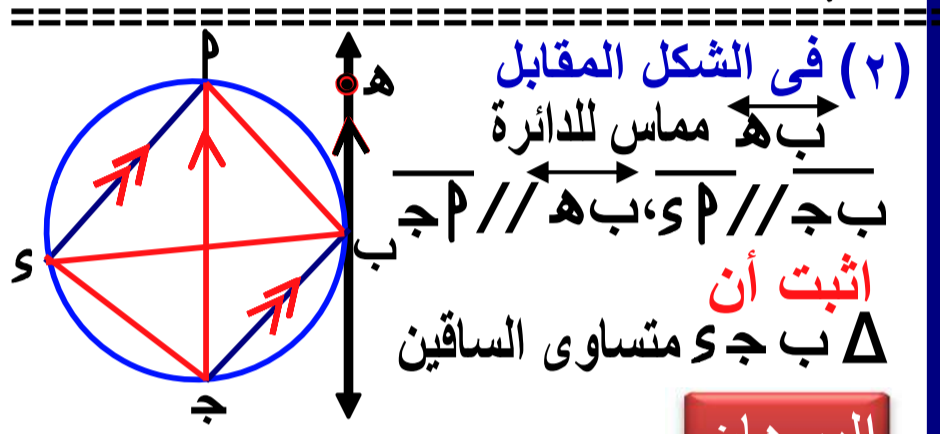
$\because \overline{AB} \parallel \overline{MS}$

$\therefore \widehat{P} = \widehat{B} = 35^\circ$

بإضافة \widehat{B} للطرفين

$\therefore \widehat{AB} = \widehat{P} = 35^\circ$

$\therefore \angle P = 35^\circ$



(٢) في الشكل المقابل

م س مماس للدائرة عند م

، $\overline{AB} \parallel \overline{MS}$ ، $\overline{OP} \parallel \overline{MS}$

و $(\angle B) = 70^\circ$

أثبت أن ΔPMS متساوي الساقين

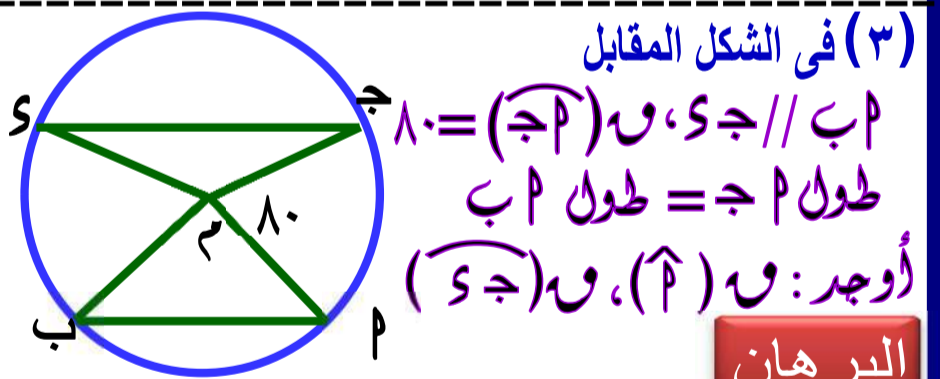
البرهان

١ $\because \overline{OP} \parallel \overline{MS} \Rightarrow \widehat{P} = \widehat{B} = 70^\circ$

٢ $\because \overline{AB} \parallel \overline{MS} \Rightarrow \widehat{P} = \widehat{B} = 70^\circ$

من ١، ٢ $\therefore \widehat{P} = \widehat{B} = 70^\circ$

$\therefore \angle P = \angle S$ $\therefore \Delta PMS$ متساوي الساقين



(٣) في الشكل المقابل

، $\overline{AB} \parallel \overline{MS}$ ، $(\angle P) = 80^\circ$

طول $PM =$ طول AB

أوجد: \widehat{B} ، \widehat{S}

البرهان

\because طول $PM =$ طول AB

$\therefore \widehat{P} = \widehat{B} = 80^\circ$

$\therefore \widehat{B} = \widehat{P} = 80^\circ$ (المركزية) = $\widehat{B} = 80^\circ$

$\therefore \angle P = \angle S = 80^\circ$

$\therefore \widehat{B} = \widehat{P} = 80^\circ$ $\therefore \widehat{B} = 80^\circ$

$\therefore \overline{AB} \parallel \overline{MS}$

$\therefore \widehat{P} = \widehat{B} = 80^\circ$

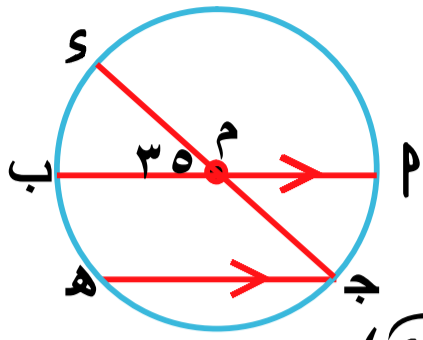
$\therefore \widehat{B} = \widehat{P} = 80^\circ$ $\therefore \widehat{B} = 80^\circ$

$\therefore \angle P = 80^\circ$

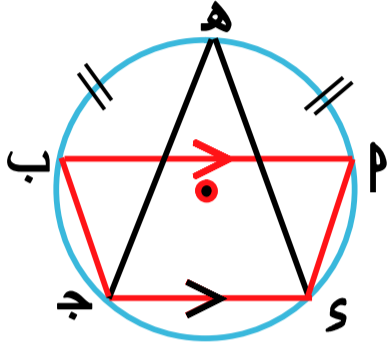
تمارين ٥

س ١ أكمل ما يلي :

- ١ الوتران المتوازيان في الدائرة يحصران قوسين
- ٢ الزاوية المركزية التي قياسها 90° تقابل قوساً طوله = محيط الدائرة .
- ٣ طول القوس الذي يمثل $\frac{1}{4}$ محيط الدائرة = ، قياس القوس الذي يمثل $\frac{1}{3}$ محيط الدائرة =
- ٤ قياس القوس الذي يساوي $0,4$ قياس الدائرة =
- ٥ قياس القوس الذي طوله ٢ سم في دائرة محيطها 2π سم يساوي
- ٦ طول الدائرة = ، قياس الدائرة =
- ٧ الزاوية المركزية في دائرة يقع رأسها عند وكل من ضلعيها يحمل في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة
- ٨ الأقواس المتساوية في القياس تكون قياس القوس =
- ٩ بينما طول القوس هو جزء من قياس نصف الدائرة = بينما طول نصف الدائرة =
- ١١ إذا كان دائرة محيطها = 36 سم فإن قياس قوس فيها طوله 6 سم =
- ١٢ قياس القوس الذي يمثل $\frac{1}{8}$ قياس الدائرة =
- ١٣ قياس القوس الذي طوله 2 سم في دائرة محيطها 2π سم يساوي
- ١٤ الزاوية المركزية التي قياسها 30° تقابل قوساً طوله = محيط الدائرة
- ١٥ إذا كان AB جـ E مربع فإن $(\widehat{AB}) = \dots\dots\dots$

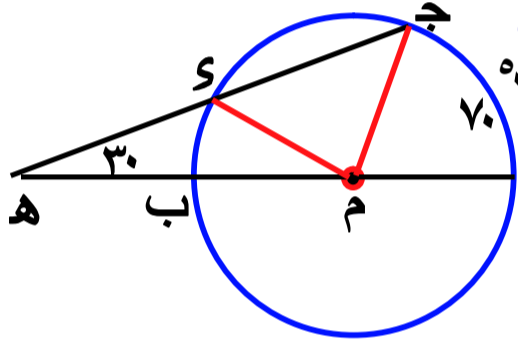


(٤) في الشكل المقابل
 \overline{AB} ، \overline{CD} قطران في الدائرة م
 $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$ ،
 ق $(\angle CMB) = 35^\circ$
 أوجد \widehat{CD} ، \widehat{AB} ، \widehat{SP}

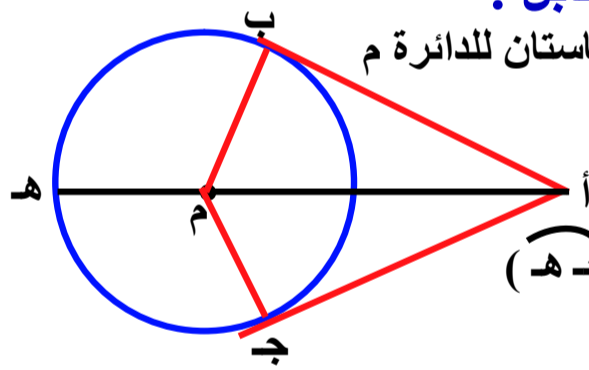


(٥) في الشكل المقابل
 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$
 ه منتصف \overline{AB}

اثبت أن $DE = EH$



(٦) في الشكل المقابل
 \overline{AB} قطر، $\widehat{CD} = 70^\circ$
 و $(\angle ASM) = 30^\circ$
 أوجد \widehat{CD} ، \widehat{AC}



(٧) في الشكل المقابل :

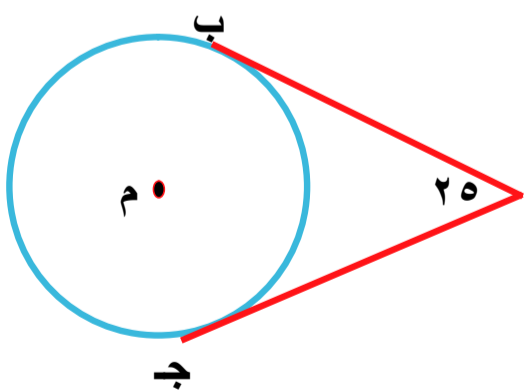
أ ب ، أ ج قطعتان مماستان للدائرة م عند ب ، ج

اثبت أن

$\widehat{AB} = \widehat{CD}$ ، $\widehat{AC} = \widehat{AD}$

(٨) في الشكل المقابل :

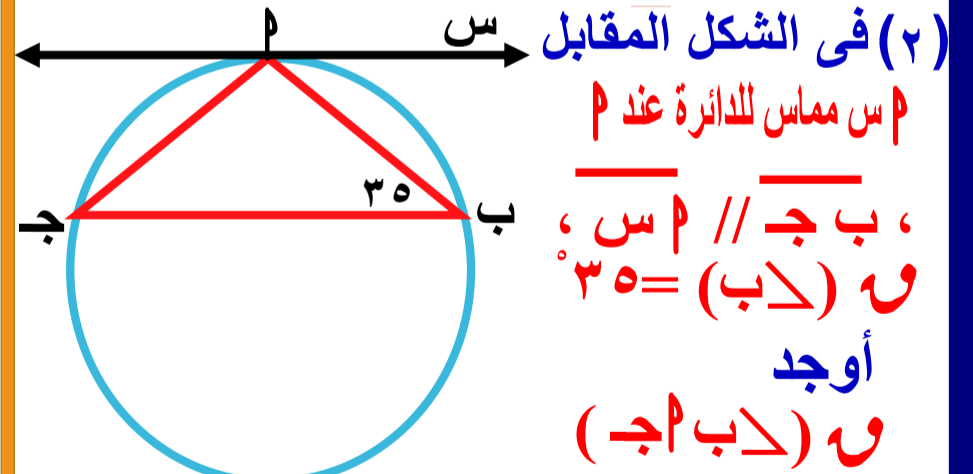
أ ب ، أ ج قطعتان مماستان لدائرة مركزها م عند ب ، ج ،



و $(\angle CAB) = 25^\circ$

أوجد

و (\widehat{BC}) الأكبر



(٢) في الشكل المقابل

م مماس للدائرة عند م

، $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$ ،

و $(\angle CAB) = 35^\circ$

أوجد

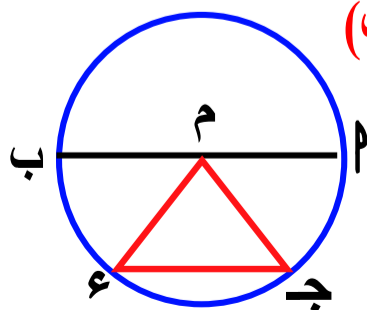
و (\widehat{BC})

(٣) في الشكل المقابل \overline{AB} قطر في الدائرة م

و $(\widehat{AC}) = \widehat{AD} = \widehat{CD} = \widehat{AB}$

اثبت أن

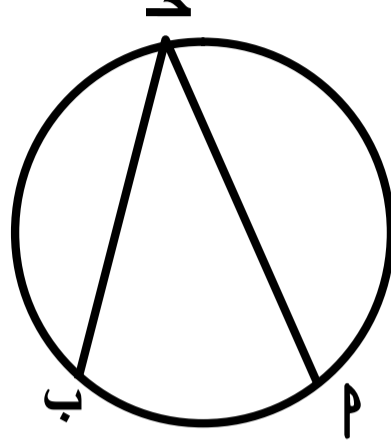
$\triangle MCD$ متساوي الاضلاع



العلاقة بين الزاويتين المحيطية والمركزية المشتركتين في القوس

الزاوية المحيطية:

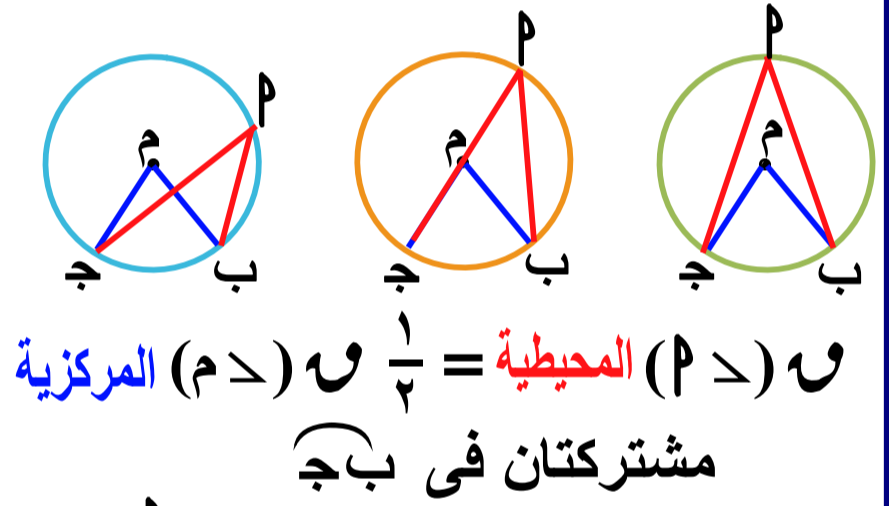
هي الزاوية التي رأسها على الدائرة و يحمل كل ضلع من ضليعيها وترأ في الدائرة



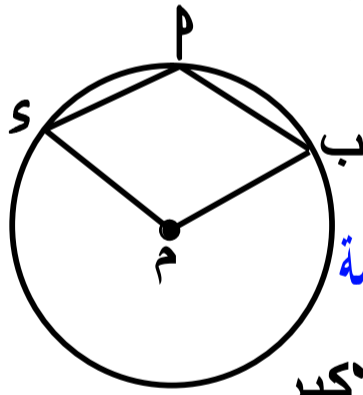
$\angle P$ زاوية محيطية
 \widehat{B} هو القوس المقابل لها

نظرية ١

قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس



$\angle P$ المحيطية = $\frac{1}{2} \angle M$ المركزية
مشتركتان في \widehat{B}

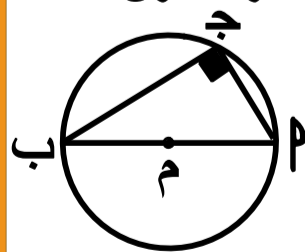


$\angle P$ المحيطية = $\frac{1}{2} \angle M$ المركزية المنعكسة
مشتركتان في \widehat{B} الاكبر

نتائج هامة

١ قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس القوس المقابل لها

٢ الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة تكون قائمة



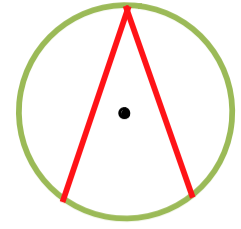
$\angle P$ قطر في الدائرة

$\angle P = 90^\circ$

عكس النتيجة

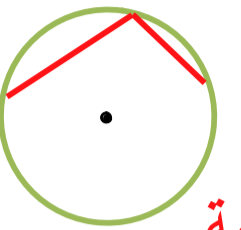
إذا كان $\angle P = 90^\circ$ المحيطية

فإن \overline{AB} قطر في الدائرة



(٣) الزاوية المحيطية تقابل قوساً

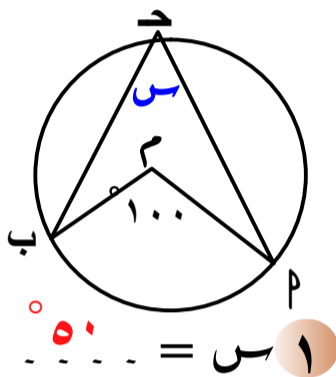
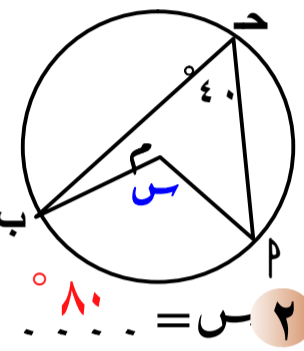
أقل من نصف دائرة تكون حادة



(٤) الزاوية المحيطية تقابل قوساً

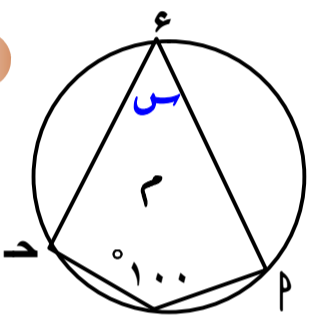
أكبر من نصف دائرة تكون منفرجة

مثال ١: في الأشكال الآتية أوجد $\angle S$ بالدرجات:

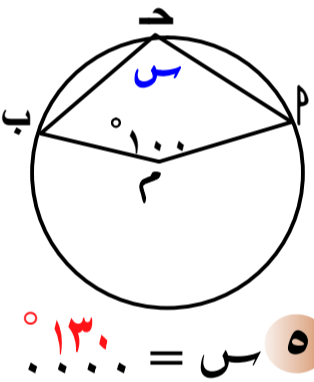


٢ $S = 80^\circ$

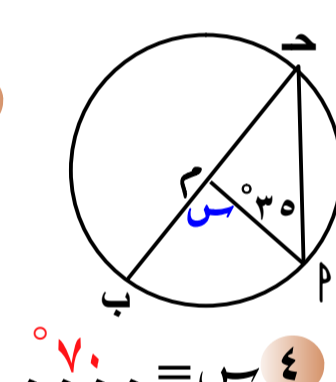
١ $S = 50^\circ$



٣ $S = 80^\circ$

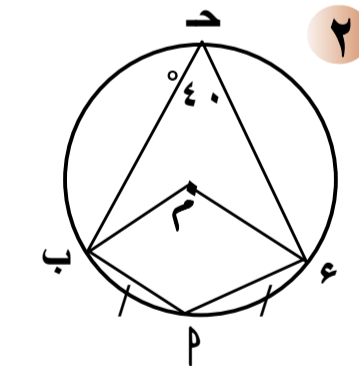


٥ $S = 130^\circ$

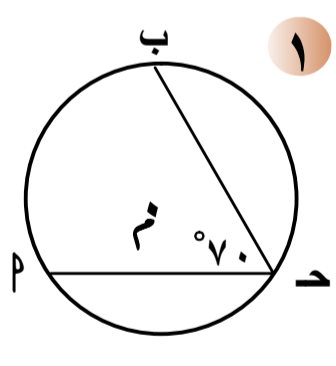


٤ $S = 70^\circ$

مثال ٢: في الأشكال الآتية أكمل:

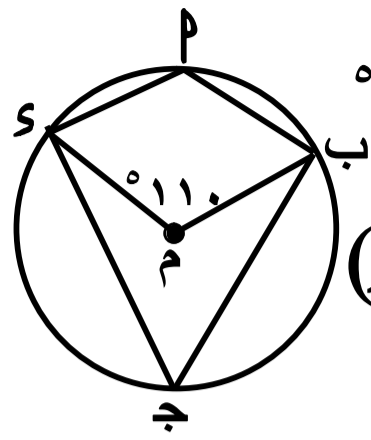


٢ $S = 40^\circ$



١ $S = 140^\circ$

(٣) في الشكل المقابل



$\angle (س ب م) = 110^\circ$

أوجد

$\angle (س ب ج)$ ، $\angle (س ب م)$

البرهان

$\angle (س ب ج) = \frac{1}{2} \angle (س ب م) = \frac{1}{2} \times 110^\circ = 55^\circ$

$\angle (س ب م) = 110^\circ$

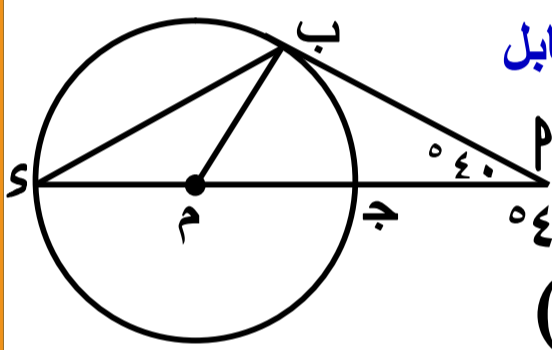
$\angle (س ب م) = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$

$\angle (س ب م) = 110^\circ - 36^\circ = 74^\circ$

$\angle (س ب م) = \frac{1}{2} \angle (س ب م) = \frac{1}{2} \times 110^\circ = 55^\circ$

$\angle (س ب م) = 110^\circ - 55^\circ = 55^\circ$

(٤) في الشكل المقابل



أوجد $\angle (س ب م)$

$\angle (س ب م) = 40^\circ$

أوجد $\angle (س ب م)$

البرهان

$\angle (س ب م) = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$

$\angle (س ب م) = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$

$\angle (س ب م) = 180^\circ - (40^\circ + 90^\circ) = 50^\circ$

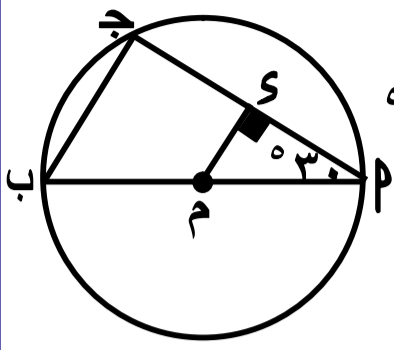
$\angle (س ب م) = \frac{1}{2} \angle (س ب م) = \frac{1}{2} \times 100^\circ = 50^\circ$

$\angle (س ب م) = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$

مشاركتان في $\angle (س ب م)$

$\angle (س ب م) = 50^\circ$

(٥) في الشكل المقابل



أثبت أن $\angle (س ب م) = 30^\circ$

$\angle (س ب م) = 30^\circ$

$\angle (س ب م) = 30^\circ$

$\angle (س ب م) = 30^\circ$

البرهان

$\angle (س ب م) = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

$\angle (س ب م) = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

$\angle (س ب م) = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

وهما في وضع تناظر

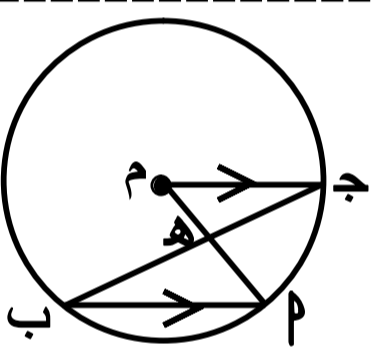
$\angle (س ب م) = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

في $\Delta (س ب م)$ القائم في ج

$\angle (س ب م) = 30^\circ$

$\angle (س ب م) = 30^\circ$

(٦) في الشكل المقابل



$\angle (س ب م) = 40^\circ$

$\angle (س ب م) = 40^\circ$

$\angle (س ب م) = 40^\circ$

البرهان

$\angle (س ب م) = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$

$\angle (س ب م) = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$

$\angle (س ب م) = \frac{1}{2} \angle (س ب م) = \frac{1}{2} \times 100^\circ = 50^\circ$

مشاركتان في $\angle (س ب م)$

من ٢، ١ $\angle (س ب م) = \frac{1}{2} \angle (س ب م) = \frac{1}{2} \times 100^\circ = 50^\circ$

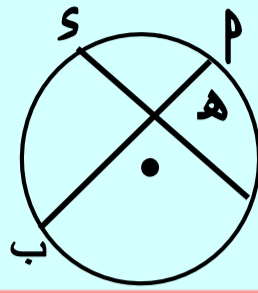
في $\Delta (س ب م)$

$\angle (س ب م) < \angle (س ب م)$

$\angle (س ب م) < \angle (س ب م)$

تمرين مشهور ١

قياس زاوية تقاطع وترين داخل دائرة

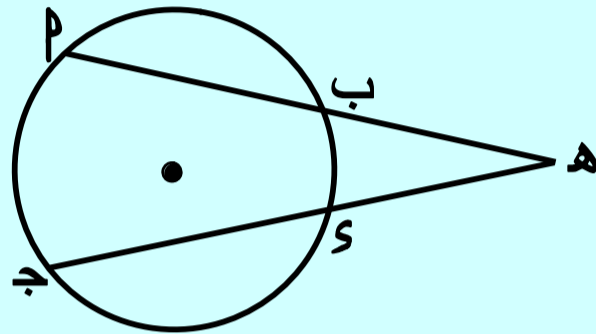


و (\angle هـ) =

$$\frac{1}{2} [\text{و}(\widehat{ب س}) + \text{و}(\widehat{ج ب})] =$$

تمرين مشهور ٢

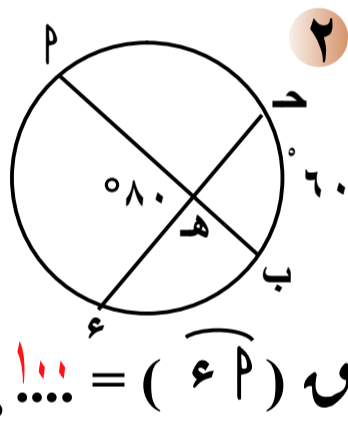
قياس زاوية تقاطع وترين خارج دائرة



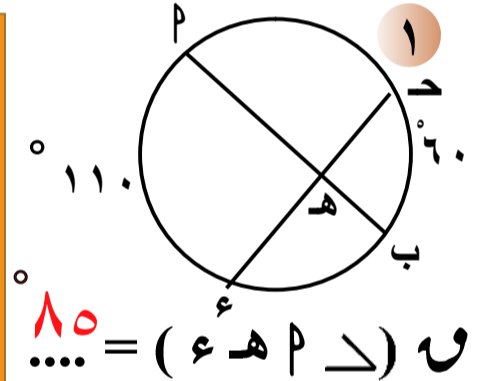
و (\angle هـ) =

$$\frac{1}{2} [\text{و}(\widehat{ب س}) - \text{و}(\widehat{ج ب})] =$$

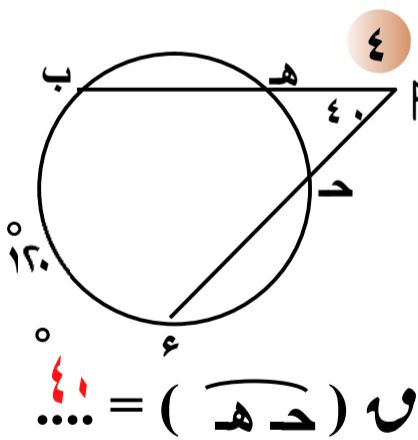
مثال في الأشكال الآتية أكمل :



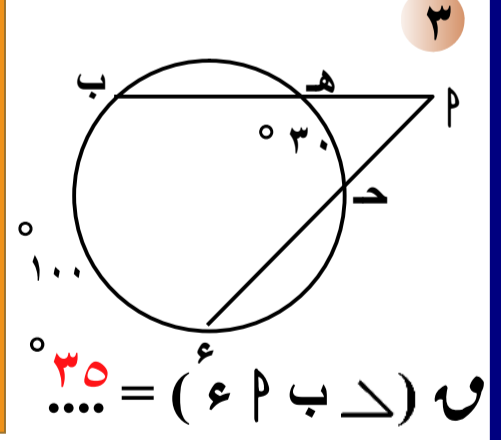
و (\angle هـ) = ...



و (\angle هـ) = ...

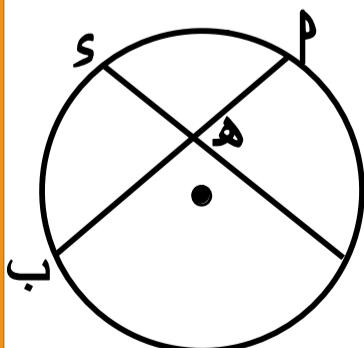


و (\angle هـ) = ...



و (\angle هـ) = ...

(٢) في الشكل المقابل

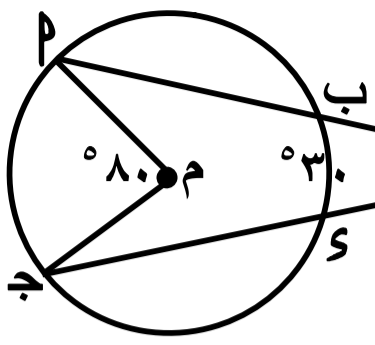


و (\angle هـ) = ٤٠
و (\angle ب س) = ٩٠
أوجد و (\angle هـ ج) =

الحل

$$\text{و}(\widehat{هـ ج}) = \frac{1}{2} [\text{و}(\widehat{ب س}) + \text{و}(\widehat{ج ب})]$$

$$\text{و}(\widehat{هـ ج}) = \frac{1}{2} [٩٠ + ٤٠] = ٦٥$$



(٣) في الشكل المقابل

و (\angle ب س) = ٣٠

و (\angle ج ب) = ٨٠

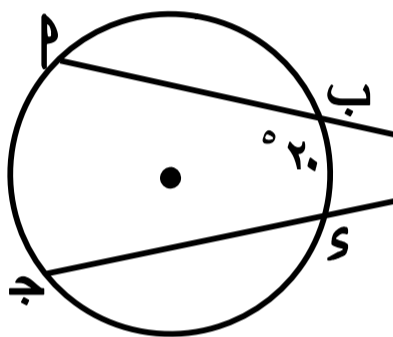
أوجد و (\angle هـ ج) =

الحل

و (\angle ج ب) = و (\angle هـ ج) = و (\angle ب س) = ٨٠

$$\text{و}(\widehat{هـ ج}) = \frac{1}{2} [\text{و}(\widehat{ب س}) - \text{و}(\widehat{ج ب})]$$

$$\text{و}(\widehat{هـ ج}) = \frac{1}{2} [٣٠ - ٨٠] = ٢٥$$



(٤) في الشكل المقابل

و (\angle ب س) = ٢٠

و (\angle هـ ج) = ٥٠

أوجد و (\angle ج ب) =

الحل

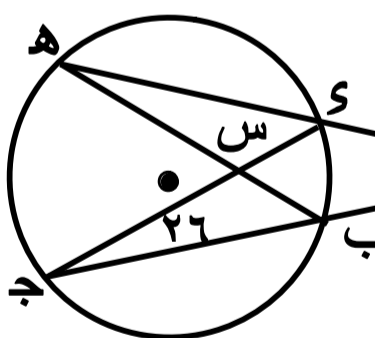
$$\text{و}(\widehat{هـ ج}) = \frac{1}{2} [\text{و}(\widehat{ب س}) - \text{و}(\widehat{ج ب})]$$

$$٢ \times [٢٠ - \text{و}(\widehat{ج ب})] = ٥٠$$

$$٢٠ - \text{و}(\widehat{ج ب}) = ٢٥$$

$$\text{و}(\widehat{ج ب}) = ٢٠ + ٢٥$$

$$\text{و}(\widehat{ج ب}) = ٤٥$$



(٥) في الشكل المقابل

و (\angle ب س) = ٤٠

و (\angle ج ب) = ٢٦

أوجد و (\angle هـ ج) =

الحل

و (\angle ج ب) المحيطية = $\frac{1}{2}$ و (\angle ب س)

$$\text{و}(\widehat{ب س}) = ٢ \times ٢٦ = ٥٢$$

$$\text{و}(\widehat{هـ ج}) = \frac{1}{2} [\text{و}(\widehat{ب س}) - \text{و}(\widehat{ج ب})]$$

$$\text{و}(\widehat{هـ ج}) = \frac{1}{2} [٥٢ - ٢٦] = ١٣$$

$$\text{و}(\widehat{هـ ج}) = ١٣٢$$

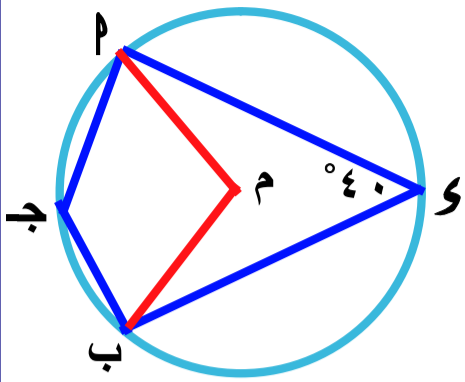
تمارين ٦

س١ أكمل ما يلي :

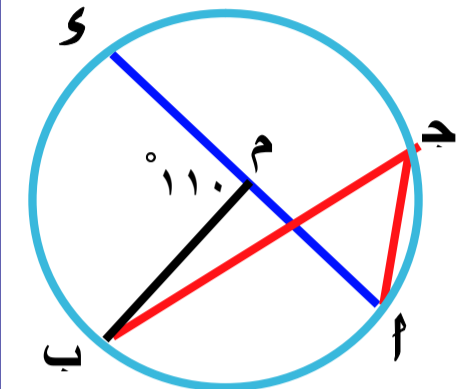
- ١) الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة
- ٢) قياس الزاوية المحيطية يساوي قياس القوس المقابل لها
- ٣) الزاوية المحيطية التي تقابل قوس أصغر في الدائرة
- ٤) قياس الزاوية المركزية قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس
- ٥) قياس الزاوية المحيطية يساوي قياس القوس المقابل لها
- ٦) النسبة بين قياس الزاوية المركزية إلى قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس =

س٢ في كل شكل من الأشكال الآتية أكمل

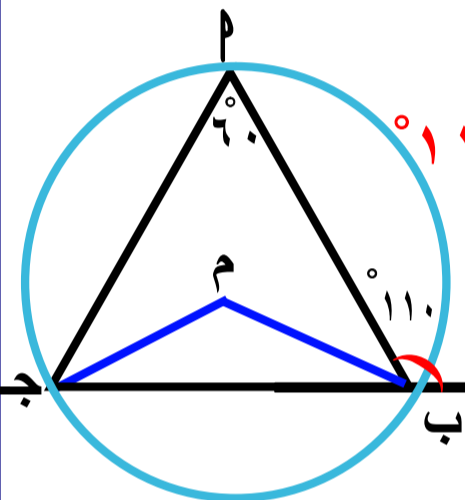
- ١) و $\widehat{PMS} = \dots\dots\dots^\circ$
- ٢) و $\widehat{PMS} = \dots\dots\dots^\circ$
- ٣) و $\widehat{PMS} = \dots\dots\dots^\circ$
- ٤) و $\widehat{PMS} = \dots\dots\dots^\circ$
- ٥) و $\widehat{PMS} = \dots\dots\dots^\circ$
- ٦) و $\widehat{PMS} = \dots\dots\dots^\circ$
- ٧) و $\widehat{PMS} = \dots\dots\dots^\circ$
- ٨) و $\widehat{PMS} = \dots\dots\dots^\circ$
- ٩) و $\widehat{PMS} = \dots\dots\dots^\circ$



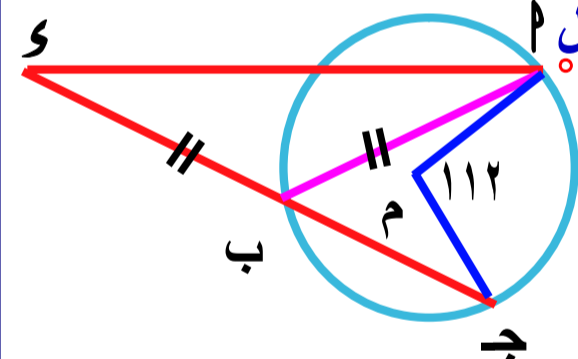
(٣) في الشكل المقابل
و $\widehat{PMS} = 40^\circ$
أوجد
و $\widehat{PMS} = \dots\dots\dots$



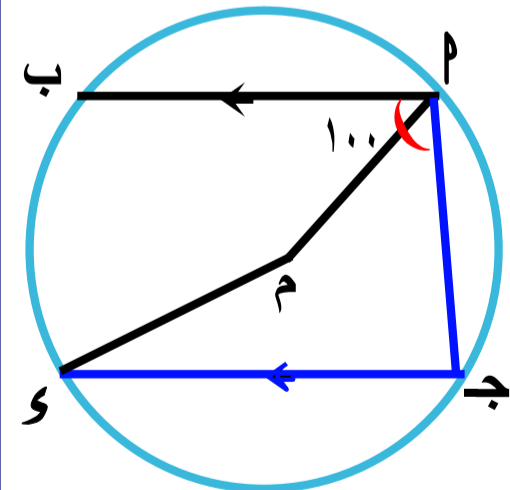
(٤) في الشكل المقابل
و $\widehat{PMS} = 110^\circ$
أوجد
و $\widehat{PMS} = \dots\dots\dots$



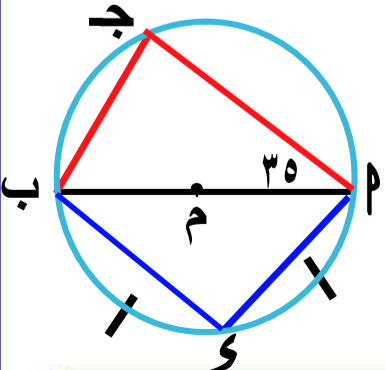
(٥) في الشكل المقابل
و $\widehat{PMS} = 110^\circ$
و $\widehat{PMS} = 60^\circ$
أوجد
و $\widehat{PMS} = \dots\dots\dots$



(٦) في الشكل المقابل
و $\widehat{PMS} = 112^\circ$
و $\widehat{PMS} = \dots\dots\dots$
أوجد
و $\widehat{PMS} = \dots\dots\dots$



(٧) في الشكل المقابل
و $\widehat{PMS} = 100^\circ$
و $\widehat{PMS} = \dots\dots\dots$
أوجد
و $\widehat{PMS} = \dots\dots\dots$

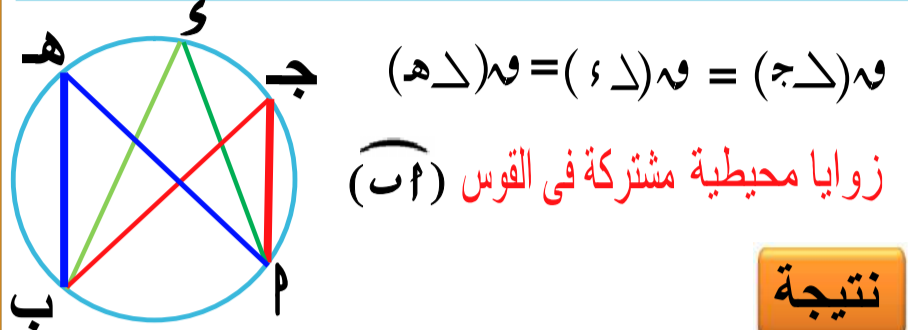


(٨) في الشكل المقابل
و $\widehat{PMS} = 35^\circ$
أوجد
و $\widehat{PMS} = \dots\dots\dots$

الزوايا المحيطية المرسومة على نفس القوس

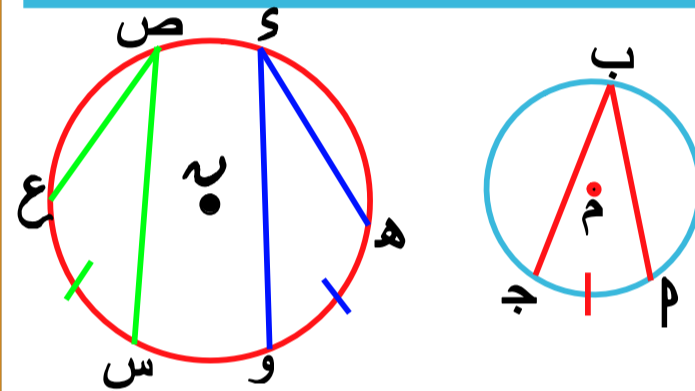
نظرية ٢

الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس في الدائرة الواحدة متساوية في القياس



نتيجة

الزوايا المحيطية التي تحصر أقواساً متساوية في القياس في الدائرة الواحدة أو في عدة دوائر تكون متساوية في القياس والعكس صحيح



إذا كان $\angle (S, H, O) = \angle (H, O, W) = \angle (P, J, M)$ فإن $\angle (S, E, V) = \angle (S, W, E) = \angle (B, J, P)$

(١) في الشكل المقابل

$$\angle S = \angle P$$

اثبت ان

$$\angle H = \angle J$$

البرهان

$$\angle S = \angle P \because$$

$$1 \quad \angle (S, H, J) = \angle (P, H, J)$$

$$2 \quad \angle (P, H, J) = \angle (J, H, S) \text{ المحيطية}$$

مشاركان في (S, P)

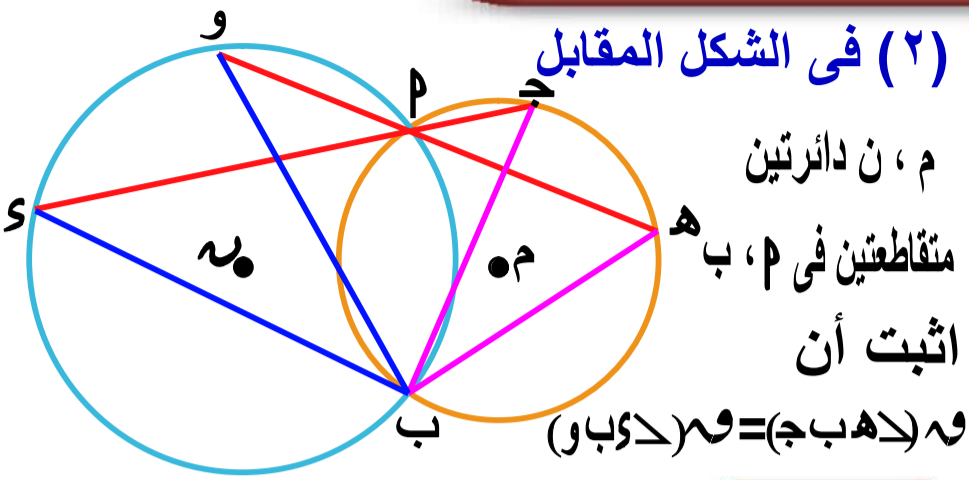
$$3 \quad \angle (S, H, J) = \angle (J, H, S) \text{ المحيطية}$$

مشاركان في (P, J)

من ١، ٢، ٣

$$\angle (S, H, J) = \angle (J, H, S)$$

$$\angle H = \angle J$$



(٢) في الشكل المقابل

M, N دائرتين

مقاطعتين في P, B

اثبت أن

$$\angle (S, G, H) = \angle (S, H, G) = \angle (J, B, G) = \angle (J, G, B)$$

البرهان

في الدائرة M

$$1 \quad \angle (S, G, H) = \angle (S, H, G) \text{ المحيطية}$$

مشاركان في (S, H)

في الدائرة N

$$2 \quad \angle (S, H, G) = \angle (S, P, G) \text{ المحيطية}$$

مشاركان في (S, P)

$$3 \quad \angle (S, P, G) = \angle (H, P, G) \text{ بالتقابل بالرأس}$$

من ١، ٢، ٣

$$\angle (S, H, G) = \angle (H, P, G) = \angle (S, P, G)$$

(٣) في الشكل المقابل

AB, CD وتران متساويان

اثبت أن

$\triangle H, P, J$ متساوي الساقين

البرهان

$$\angle P = \angle S$$

$$\angle (S, H, J) = \angle (P, H, J)$$

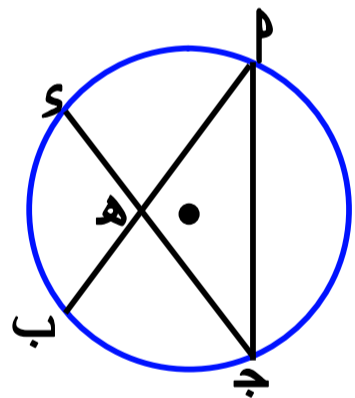
ب طرح $\angle (S, H, J)$ من الطرفين

$$\angle (S, H, J) = \angle (P, H, J)$$

$$\angle (S, H, J) = \angle (P, H, J)$$

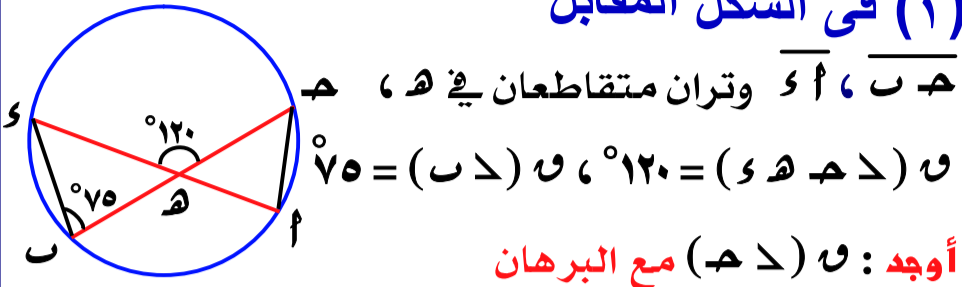
$$\angle H = \angle J$$

$\triangle H, P, J$ متساوي الساقين



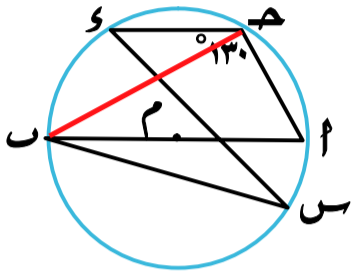
تمارين ٧

(١) في الشكل المقابل



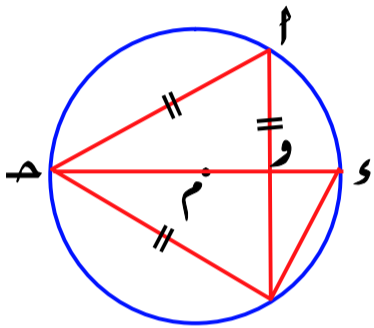
أوجد : \angle و \angle مع البرهان

(٢) في الشكل المقابل



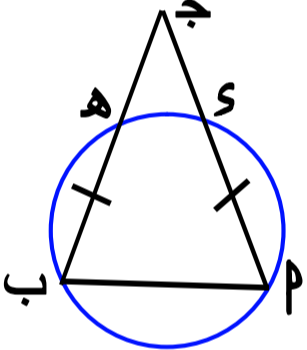
أب قطري في الدائرة م
و \angle و \angle
أوجد و \angle

(٣) في الشكل المقابل



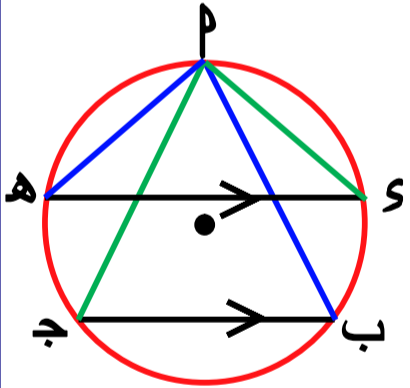
\triangle متساوي الأضلاع
مرسوم داخل دائرة م
① أوجد و \angle
② أثبت أن $AB \perp CD$

(٤) في الشكل المقابل



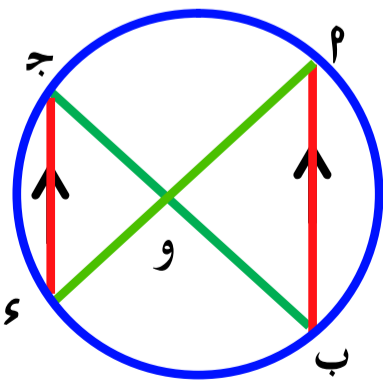
$AB = CD$
اثبت ان
 $CH = DH$

(٥) في الشكل المقابل



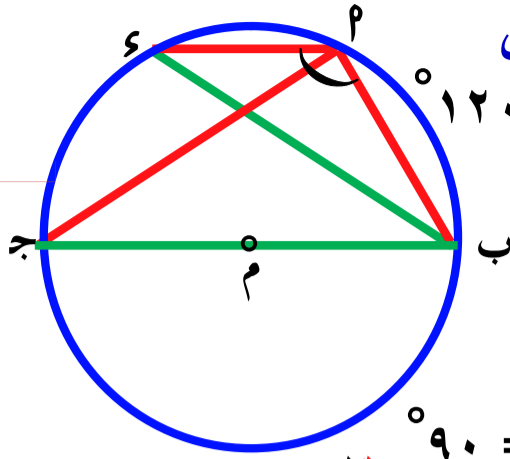
مثلث مرسوم داخل دائرة
و \angle و \angle
اثبت أن
و \angle و \angle

(٦) في الشكل المقابل



أب ، ج وتران متوازيان في الدائرة
أثبت أن:
 $OB = OD$

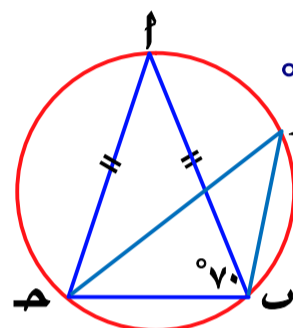
(٤) في الشكل المقابل



إذا كان \angle و \angle
أوجد \angle
البرهان
∴ AB قطر
∴ \angle و \angle
محيطية في نصف دائرة

∴ \angle و \angle
∴ \angle و \angle
∴ \angle و \angle
محيطيتان مشتركتان في القوس ج

(٥) في الشكل المقابل

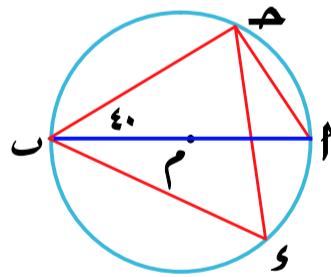


$AB = AC$ و \angle و \angle
أوجد قيمة \angle

البرهان

∴ $AB = AC$
و \angle و \angle
و \angle و \angle
∴ \angle و \angle
∴ \angle و \angle
∴ \angle و \angle
∴ \angle و \angle
∴ \angle و \angle

(٦) في الشكل المقابل

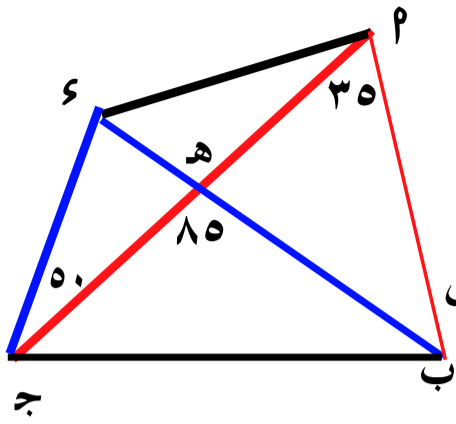


أب قطري في الدائرة م
و \angle و \angle
أوجد : و \angle

البرهان

∴ AB قطر
∴ \angle و \angle
∴ \angle و \angle
∴ \angle و \angle
∴ \angle و \angle
محيطيتان مشتركتان في القوس ب
∴ \angle و \angle

الشكل الرباعي الدائري



(٢) في الشكل المقابل

إثبت أن

الشكل $ABCD$ رباعي دائري

البرهان

$\therefore \angle BHD = \angle A + \angle C$ خارجة عن $\triangle AHD$

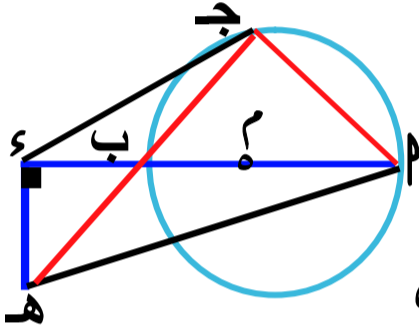
$$\therefore 85 = 50 + 35 = (\angle A + \angle C)$$

$$\therefore 85 = (\angle A + \angle C) = (\angle B + \angle D)$$

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة BD وفي جهة واحدة منها

\therefore الشكل $ABCD$ رباعي دائري

(٣) في الشكل المقابل



$PM \perp AC$ قطر في الدائرة M ، $PM \perp AC$

إثبت أن

$ABCD$ رباعي دائري

البرهان

$\therefore PM$ قطر في الدائرة M $\leftarrow \angle A = 90^\circ = (\angle C)$ محيطية في نصف دائرة

$$\therefore \angle A = 90^\circ = (\angle C) \leftarrow PM \perp AC$$

$$\therefore \angle A = 90^\circ = (\angle C) = (\angle B + \angle D)$$

وهما مرسومتان على PM

الشكل $ABCD$ رباعي دائري

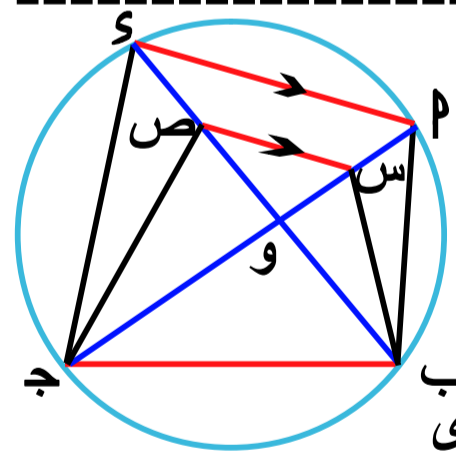
(٤) في الشكل المقابل

$$SP \parallel SV$$

اثبت أن

$ABCD$ رباعي دائري

البرهان



$\therefore ABCD$ رباعي دائري

$$\therefore (\angle A + \angle C) = (\angle B + \angle D) \quad 1$$

مرسومتان على AB

$$\therefore SV \parallel SP$$

$$\therefore (\angle A + \angle C) = (\angle B + \angle D) \quad 2$$

من ١، ٢

$$\therefore (\angle A + \angle C) = (\angle B + \angle D)$$

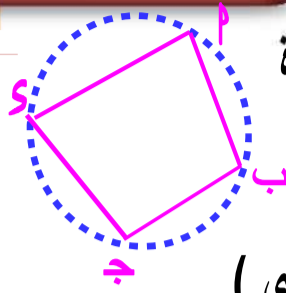
وهما مرسومتان على SV وفي جهة واحدة منها

$\therefore ABCD$ رباعي دائري

هو شكل رباعي

تتلمس رؤوسه الأربعة إلى دائرة واحدة

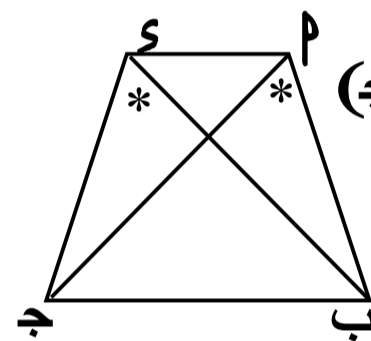
أو يمكن رسم دائرة تمر برؤوسه الأربعة



الشكل الرباعي $ABCD$ (رباعي دائري)

عكس نظرية (٢)

إذا تساوى قياسا زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها فإنه يمر برأسيهما دائرة واحدة تكون هذه القاعدة وتراً فيها



في الشكل المقابل

إذا كان $\angle A = \angle C = 90^\circ$

المرسومتان على القاعدة BD

$\therefore ABCD$ رباعي دائري

ملاحظة

إذا كان $\angle A = \angle C = 90^\circ$ كان BD قطر في الدائرة

ملاحظات

١ المستطيل والمربع وشبه المنحرف المتساوي الساقين أشكال رباعية دائرية

٢ متوازي الاضلاع والمعين وشبه المنحرف

الغير متساوي الساقين أشكال رباعية غير دائرية

(١) في الشكل المقابل

$$\angle A = 50^\circ, \angle C = 80^\circ$$

$$\angle A = 50^\circ = (\angle C)$$

$$\angle C = 80^\circ = (\angle A)$$

$$\angle A + \angle C = 130^\circ = \angle B + \angle D$$

$$\angle A + \angle C = 130^\circ = \angle B + \angle D$$

$$\angle A + \angle C = 130^\circ = \angle B + \angle D$$

$$\angle A + \angle C = 130^\circ = \angle B + \angle D$$

$$\angle A + \angle C = 130^\circ = \angle B + \angle D$$

$$\angle A + \angle C = 130^\circ = \angle B + \angle D$$

$$\angle A + \angle C = 130^\circ = \angle B + \angle D$$

$$\angle A + \angle C = 130^\circ = \angle B + \angle D$$

$$\angle A + \angle C = 130^\circ = \angle B + \angle D$$

$$\angle A + \angle C = 130^\circ = \angle B + \angle D$$

$$\angle A + \angle C = 130^\circ = \angle B + \angle D$$

$$\angle A + \angle C = 130^\circ = \angle B + \angle D$$

$$\angle A + \angle C = 130^\circ = \angle B + \angle D$$

البرهان

$$SP = BP$$

$$\therefore \angle A = 50^\circ = (\angle C) = (\angle B + \angle D)$$

$$\therefore \angle A = 50^\circ = (\angle C) = (\angle B + \angle D)$$

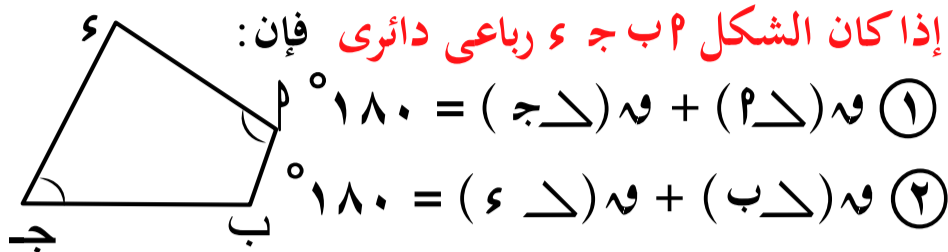
وهما مرسومتان على AB

$\therefore ABCD$ رباعي دائري

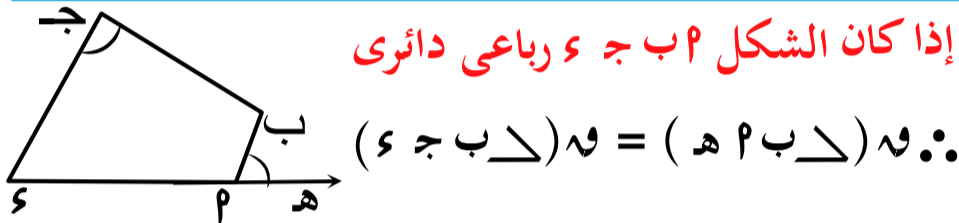
$\therefore ABCD$ رباعي دائري

خواص الشكل الرباعي الدائري

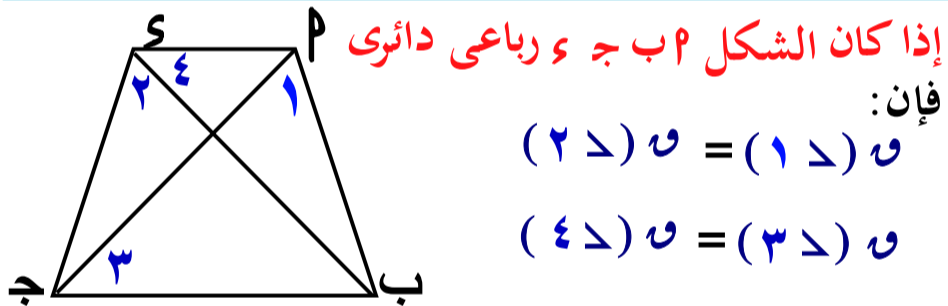
١ كل زاويتين متقابلتين متكاملتان (مجموعهما = ١٨٠°)



٢ قياس الزاوية الخارجة عند أى رأس من رؤوس الشكل الرباعي الدائري يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة



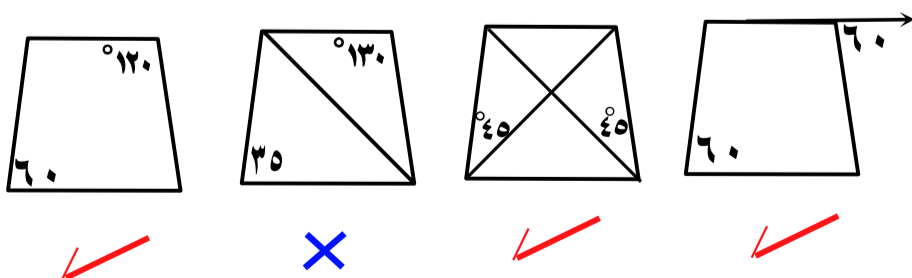
٣ كل زاويتين مرسومتان على ضلع من أضلاعه كقاعدة وفى جهة واحدة من هذا الضلع متساويتان فى القياس



يكون الشكل الرباعي دائريا إذا تحققت إحدى الشروط الآتية

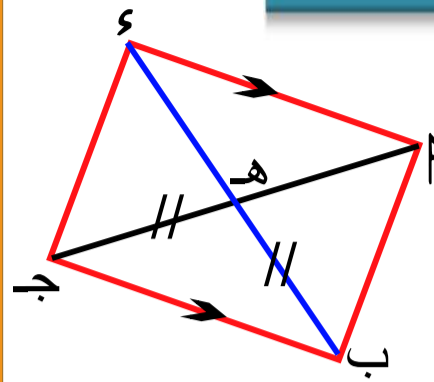
- ١ إذا وجدت نقطة فى مستوى الشكل تكون على أبعاد متساوية من رؤوسه
- ٢ إذا وجدت زاويتان متساويتان فى القياس ومرسومتان على ضلع من أضلاعه كقاعدة وفى جهة واحدة من هذا الضلع
- ٣ إذا وجدت زاويتان متقابلتان فيه متكاملتان (مجموع قياسهم = ١٨٠°)
- ٤ إذا وجدت زاوية خارجة عند أى رأس من رؤوسه قياسها يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها

مثال اي من الأشكال الآتية رباعي دائري



تمارين ٨

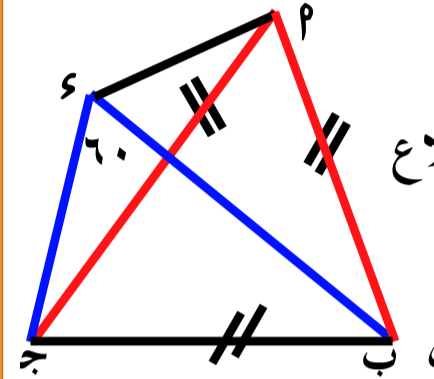
(١) فى الشكل المقابل



$\overline{PB} \parallel \overline{EG}$
 $\overline{BG} \parallel \overline{PE}$

إثبت أن P ب ج ϵ رباعي دائري

(٢) فى الشكل المقابل

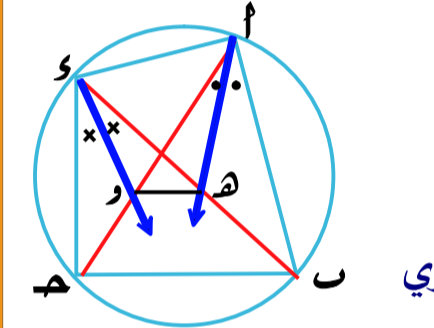


P ب ج مثلث متساوى الأضلاع
 $60^\circ = (\angle ب \epsilon ج)$

إثبت أن

الشكل P ب ج ϵ رباعي دائري

(٣) فى الشكل المقابل

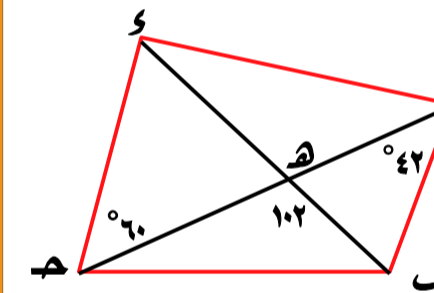


\overline{AH} ينصف $\angle ب$ و $\angle \epsilon$
 \overline{DH} ينصف $\angle ج$ و $\angle \delta$

إثبت أن:

الشكل A ه و δ رباعي دائري

(٤) فى الشكل المقابل

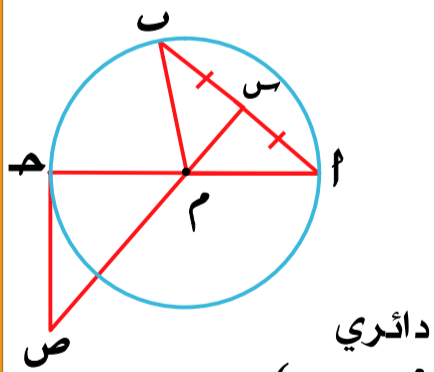


$\angle (١) = \angle (٢) = 42^\circ$
 $\angle (٣) = \angle (٤) = 60^\circ$
 $\angle (٥) = \angle (٦) = 102^\circ$

إثبت أن:

A ب ج δ رباعي دائري

(٥) فى الشكل المقابل



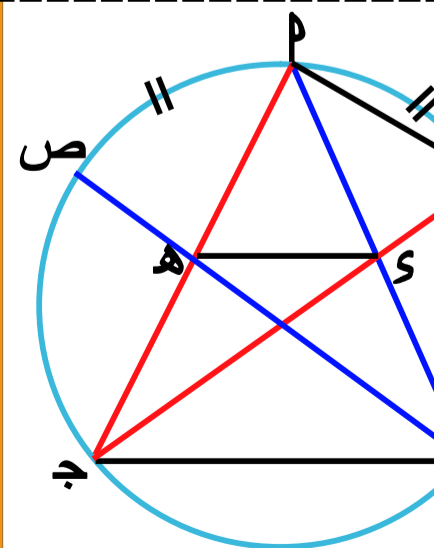
\overline{SM} قطر فى الدائرة M
 \overline{CS} منتصف \overline{AB}
 \overline{CM} مماس للدائرة

إثبت أن

① الشكل A س ه ص رباعي دائري

② $\angle (١) = \angle (٢) = (\angle م ص ه)$

(٦) فى الشكل المقابل

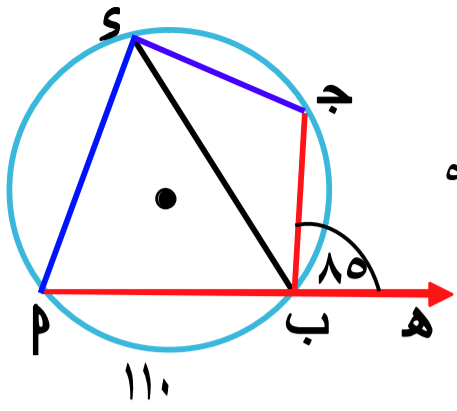


$\angle (١) = \angle (٢) = (\angle أ ص ه)$

إثبت أن

① الشكل $ب ه و$ رباعي دائري

② $\angle (١) = \angle (٢) = (\angle ب ه و)$



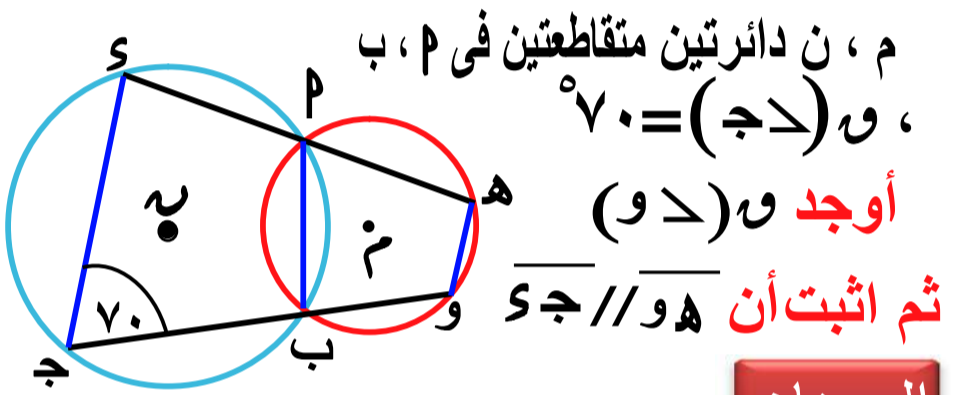
(٤) في الشكل المقابل

$\cup (سب) = 110^\circ$
 $\cup (سج) = 85^\circ$
 أوجد $\cup (سبج)$

البرهان

$\cup (سبج) = \frac{1}{2} \cup (سب) = 55^\circ$
 $\cup (سبج) + \cup (سج) = 85^\circ$
 (الخارجة = المقابلة للمجاورة)
 $\cup (سبج) = 85^\circ - 55^\circ = 30^\circ$

(٥) في الشكل المقابل



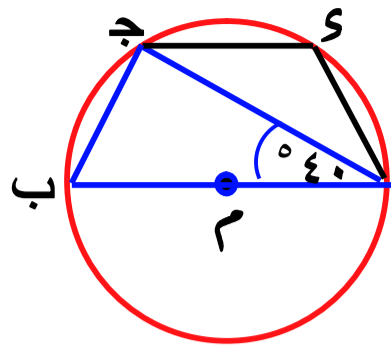
م، ن دائرتين متقاطعتين في م، ب
 $\cup (سج) = 70^\circ$

أوجد $\cup (سبج)$
 ثم اثبت أن $\overline{سج} \parallel \overline{سب}$

البرهان

$\cup (سبج) + \cup (سب) = 180^\circ$
 $\cup (سبج) = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$
 $\cup (سبج) + \cup (سب) = 110^\circ + 70^\circ = 180^\circ$
 وهما داخلتان في جهة واحدة من القاطع
 $\therefore \overline{سج} \parallel \overline{سب}$

(١) في الشكل المقابل

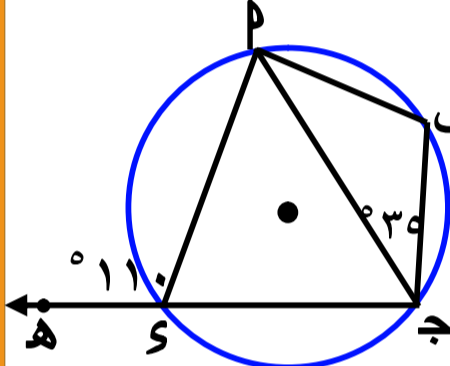


$\overline{سب}$ قطر في الدائرة
 $\cup (سبج) = 40^\circ$
 أوجد $\cup (سبج)$

البرهان

$\overline{سب}$ قطر في الدائرة $\leftarrow \cup (سبج) = 90^\circ$
 محيطية في نصف دائرة
 في $\Delta سبج$
 $\cup (سبج) = 180^\circ - (40^\circ + 90^\circ) = 50^\circ$
 $\cup (سبج) + \cup (سب) = 180^\circ$
 $\cup (سبج) = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$

(٢) في الشكل المقابل

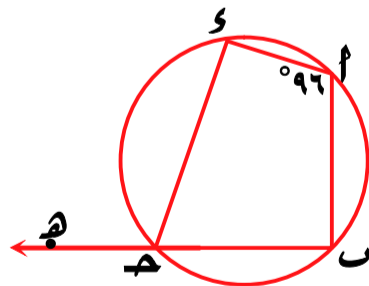


$\Delta سبج$ شكل رباعي مرسوم داخل دائرة
 $\cup (سبج) = 110^\circ$
 $\cup (سبج) = 35^\circ$

اثبت أن $\Delta سبج$ متساوي الساقين
 البرهان

$\cup (سبج) + \cup (سب) = 110^\circ$
 $\cup (سبج) = 110^\circ - 35^\circ = 75^\circ$
 في $\Delta سبج$
 $\cup (سبج) = 180^\circ - (35^\circ + 75^\circ) = 70^\circ$
 $\cup (سبج) = \cup (سبج) = 70^\circ$
 $\Delta سبج$ متساوي الساقين

(٣) في الشكل المقابل



$\cup (سبج) = 24^\circ$
 أوجد: ص

البرهان

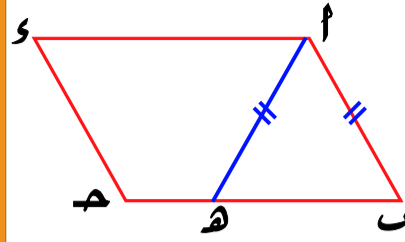
$\Delta سبج$ رباعي دائري
 $\cup (سبج) = 24^\circ$
 (الخارجة = المقابلة للمجاورة)
 $\cup (سبج) = 24^\circ - 96^\circ = -72^\circ$
 $\cup (سبج) + 96^\circ = 24^\circ$
 $\cup (سبج) = 24^\circ - 96^\circ = -72^\circ$

(٦) في الشكل المقابل

أ ب ح د متوازي أضلاع ،

هـ ب ح هـ بحيث أ ب = هـ د

أثبت أن :



الشكل أ ب ح د مربعي دائري

البرهان

∴ ب ج د متوازي أضلاع

∴ ∠(ب) = ∠(د) = ∠(د) = ∠(ب) ١

∴ ∠(ب) = ∠(د)

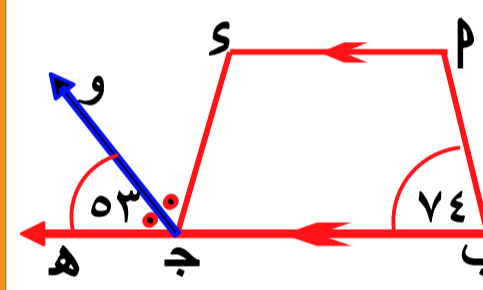
∴ ∠(ب) = ∠(د) = ∠(د) = ∠(ب) ٢

من ١ ، ٢ ∴ ∠(ب) = ∠(د) = ∠(د) = ∠(ب)

(الخارجة = المقابلة للمجاورة)

∴ هـ ج د مربعي دائري

(٧) في الشكل المقابل



$\overline{AC} \parallel \overline{BD}$

∴ ∠(ب) = ٧٤°

∴ ∠(د) = ٥٣°

جـ و ينصف (د ج هـ)

أثبت أن ب ج د مربعي دائري

البرهان

∴ جـ و ينصف (د ج هـ) من ١ ، ٢

∴ ∠(د) = ١٠٦° = ٢ × ٥٣°

$\overline{AC} \parallel \overline{BD}$

∴ ∠(د) = ∠(ب) = ١٠٦° بالتبادل

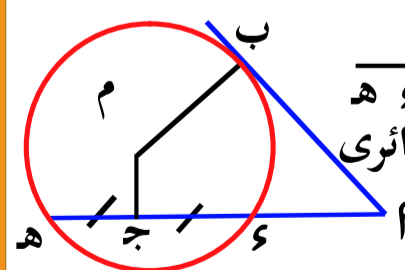
∴ ∠(د) + ∠(ب) = ١٨٠°

∴ ∠(د) = ١٨٠° - ٧٤° = ١٠٦°

متقابلتان متكاملتان

∴ ب ج د مربعي دائري

(٨) في الشكل المقابل



م مماس للدائرة م ، جـ منتصف هـ

أثبت أن ب ج م ربعي دائري

البرهان

∴ م مماس للدائرة م ∴ ∠(م ب م) = ٩٠°

∴ جـ منتصف هـ ∴ ∠(م ج م) = ٩٠°

∴ ∠(م ب م) + ∠(م ج م) = ١٨٠° ∴ الشكل ب ج م ربعي دائري

(٩) في الشكل المقابل

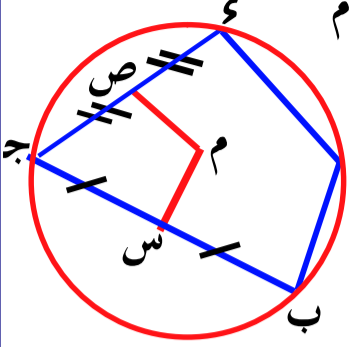
أ ب ج د ربعي مرسوم داخل دائرة م

س منتصف ب ج ، ص منتصف ج د

أثبت أن :

١) الشكل م س ج د ربعي دائري

٢) ∠(د ب م) = ∠(د س م) = ∠(د ب م)



البرهان

∴ س منتصف ب ج ∴ ∠(د ب م) = ∠(د س م) = ٩٠°

∴ ص منتصف ج د ∴ ∠(د س م) = ∠(د ص م) = ٩٠°

∴ ∠(د ب م) + ∠(د س م) + ∠(د ص م) = ١٨٠°

∴ الشكل م س ج د ربعي دائري

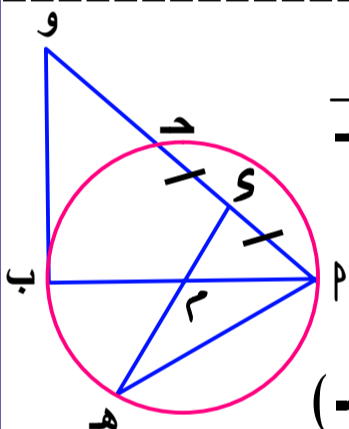
١) ∴ ∠(د ب م) + ∠(د س م) = ١٨٠°

∴ الشكل ب ج د ربعي دائري

٢) ∴ ∠(د ب م) + ∠(د ب م) = ١٨٠°

من ١ ، ٢ ∴ ∠(د ب م) = ∠(د س م) = ∠(د ب م)

(١٠) في الشكل المقابل



م ب قطر في الدائرة م ، س منتصف م د

ب و مماس للدائرة عند ب

أثبت أن

١) الشكل م د و ب ربعي دائري

٢) ∠(د و م) = ∠(د ب م) = ∠(د ب م)

البرهان

∴ س منتصف م د ∴ ∠(د م و) = ٩٠°

∴ م ب قطر في الدائرة ، ب و مماس للدائرة

∴ ∠(د م ب) = ٩٠°

∴ ∠(د م ب) + ∠(د م و) = ١٨٠°

متقابلتان متكاملتان

∴ الشكل م د و ب ربعي دائري

∴ ∠(د ب م) = ∠(د و م) = ∠(د ب م)

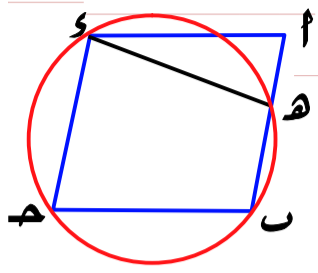
(الخارجة = المقابلة للمجاورة)

∴ ∠(د ب م) = ∠(د و م) = ∠(د ب م) المحيطة

∴ ∠(د و م) = ∠(د و م) = ∠(د ب م)

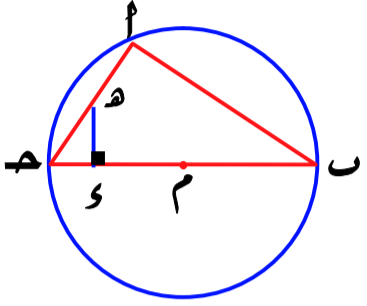
تمارين ٩

أختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :



(٧) في الشكل المقابل

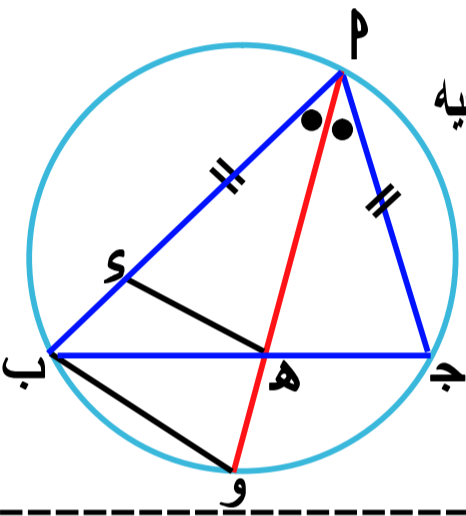
أ ب ح د متوازي أضلاع ، الدائرة المارة ه بالانقط ب ، ح ، د تقطع أ ب في ه
أثبت أن : $\angle ه = \angle د$



(٨) في الشكل المقابل

ب ح قطر في الدائرة م ،
ه د \perp ب ح
أثبت أن :

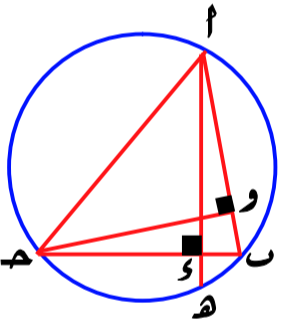
$$\angle م = \frac{1}{2} \angle ا$$



(٩) في الشكل المقابل

م ب ج مثلث مرسوم داخل دائرة فيه
ه ب $<$ م ج ، م ج = م د ،
ه د ينصف (م ج)
أثبت أن

ب د هو رباعي دائري

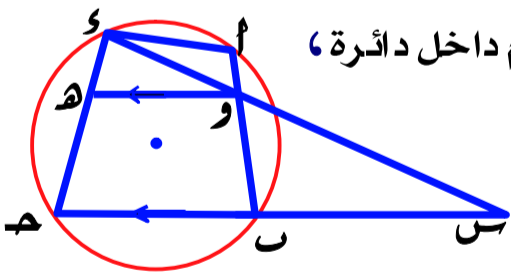


(١٠) في الشكل المقابل

أ د \perp ب ح يقطعها في ه
ويقطع الدائرة في ه ، و
أثبت أن :

① الشكل أ و د رباعي دائري

$$\angle ا = \angle ب = \angle ج = \angle د$$



(١١) في الشكل المقابل

أ ب ح د شكل رباعي مرسوم داخل دائرة ،
ه د \parallel ب ح
و د \cap ه ب = {س}
أثبت أن :

① الشكل أ و ه د رباعي دائري

$$\angle ا = \angle ب = \angle ج = \angle د$$

(١٢) أ ب ح د شكل رباعي مرسوم داخل دائرة

تقاطع قطرها أ ه ، ب د في و ،
س \in أ و ، ص \in ب د بحيث س ص \parallel أ د
أثبت أن

الشكل س ب ح د رباعي دائري

(١) في الشكل الرباعي الدائري كل زاويتين متقابلتين

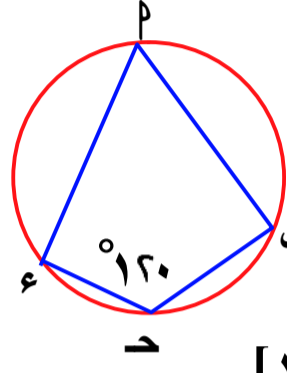
[متكاملتان ؛ متتامتان ؛ متساويتان في القياس ؛ متبادلتان]

(٢) في الشكل الرباعي الدائري كل زاويتين مرسومين على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها

[متكاملتان ؛ متتامتان ؛ متساويتان في القياس ؛ متبادلتان]

(٣) شكل رباعي دائري [شبه المنحرف ؛ المعين ؛ متوازي الأضلاع ؛ المستطيل]

(٤) في الشكل المقابل :

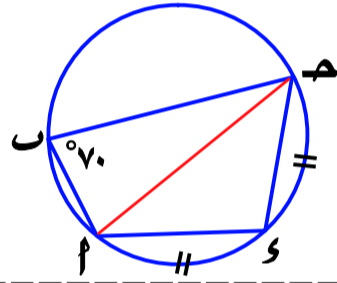


$$\angle ا = \angle ب = 120^\circ$$

$$\angle ج = \angle د = 60^\circ$$

$$\angle ا = \angle ب = 120^\circ$$

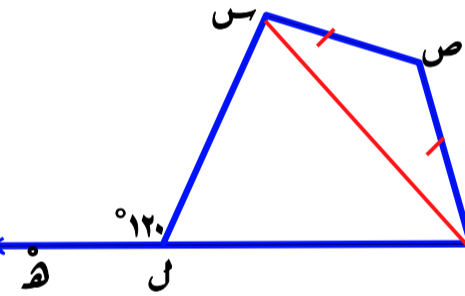
(٢) في الشكل المقابل



$$\angle ا = \angle ب = 70^\circ$$

طول (أ د) = طول (ب ح)
أوجد : $\angle ا = \angle ب = \angle ج = \angle د$

(٣) في الشكل المقابل

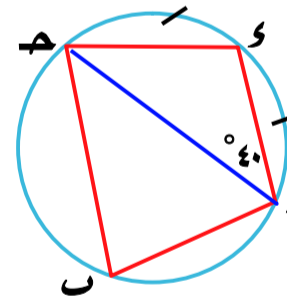


س ص ع ل رباعي دائري

$$\angle ا = \angle ب = 120^\circ$$

أوجد : $\angle ا = \angle ب = \angle ج = \angle د$

(٤) في الشكل المقابل

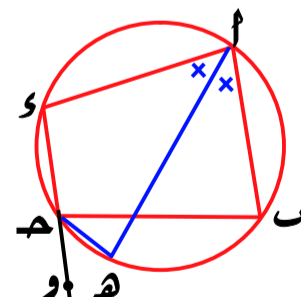


$$\angle ا = \angle ب = 40^\circ$$

$$\angle ج = \angle د = 40^\circ$$

أوجد : $\angle ا = \angle ب = \angle ج = \angle د$

(٥) في الشكل المقابل



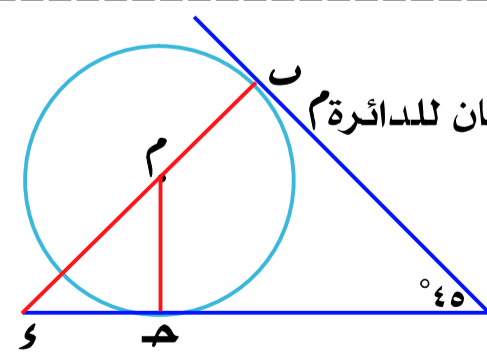
الشكل أ ب ح د رباعي دائري

$$\angle ا = \angle ب = 40^\circ$$

أثبت أن :

ه د ينصف ب ح

(٦) في الشكل المقابل



$$\angle ا = \angle ب = 45^\circ$$

أثبت أن :

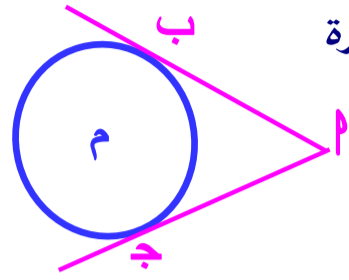
① أ ب م ح رباعي دائري

② $\triangle م ح د$ متساوي الساقين

العلاقة بين مماسات الدائرة

نظرية ٤

القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة متساويتان في الطول



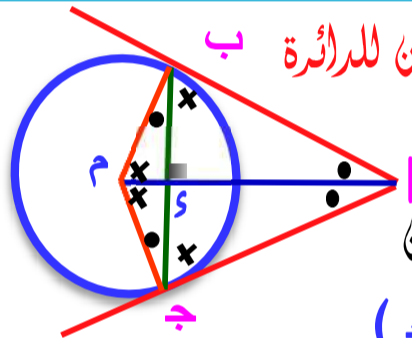
$\therefore PA = PB$ مماسان للدائرة

$\therefore PA = PB$

نتائج هامة

المستقيم المار بمركز الدائرة و نقطة تقاطع مماسين

- ١ ينصف الزاوية بين هذين المماسين
- ٢ ينصف الزاوية بين نصفي القطرين المارين بنقطتي التماس
- ٣ ينصف وتر التماس لهذين المماسين ويكون عمودياً عليه (أي يكون محور تماثل لوتر التماس)



١ م ينصف الزاوية بين المماسين للدائرة ب

ق (ب م) ق = ق (ج م) ق

٢ م ينصف الزاوية بين نصفي القطرين

ق (م ب) ق = ق (م ج) ق

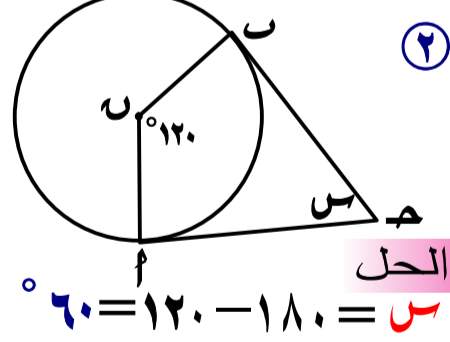
٣ م ينصف وتر التماس ب ج ويكون عمودياً عليه

ب ج = ج د ، م م \perp ب ج

٤ الشكل م ب ج د يكون رباعي وائري

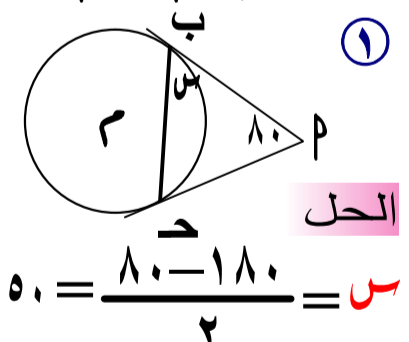
مثال أوجد قيمة س بالدرجات في كل شكل من الأشكال الآتية:

حيث م ب ، م ح قطعتان مماستان للدائرة م



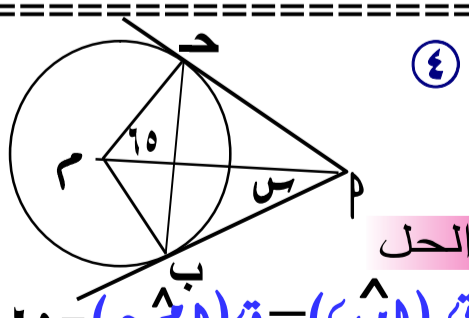
٢

الحل
س = $\frac{120 - 180}{2} = 30$



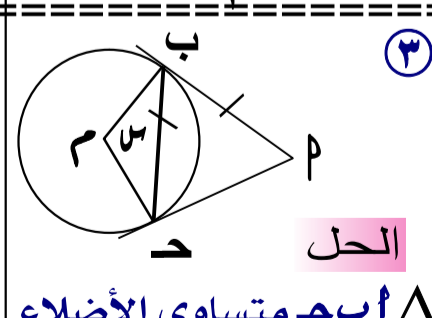
١

الحل
س = $\frac{80 - 180}{2} = 50$



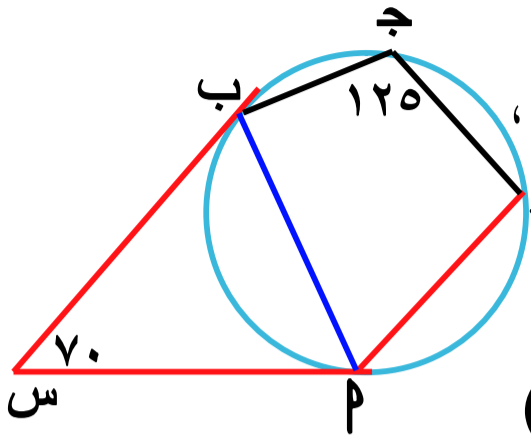
٤

الحل
ق (م ب) ق = ق (م ج) ق
ق (م ب) ق = ٩٠
س = ٢٥



٣

الحل
 Δ م ب ج متساوي الأضلاع
ق (ب م) ق = ق (ج م) ق
ق (ب م) ق = ٦٠
س = ١٢٠



(١) في الشكل المقابل

س م ، س ب مماستان للدائرة ،

ق (س م) ق = ٧٠°

ق (ج م) ق = ١٢٥° ،

اثبت أن

م ب ينصف (س م ج)

س م // س ب ،

البرهان

\therefore س م ، س ب مماستان للدائرة

\therefore س م = س ب

\therefore ق (س م ب) ق = ق (س ب م) ق = $\frac{70 - 180}{2} = 55$

\therefore م ب ج د رباعي دائري

\therefore ق (س م ب) ق + ق (ب م ج) ق = ١٨٠°

\therefore ق (س م ب) ق = ١٨٠° - ٥٥° = ١٢٥°

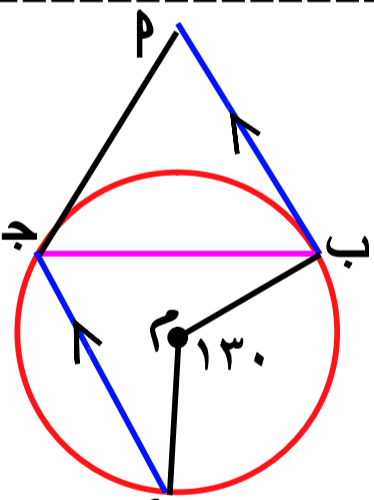
\therefore ق (س م ب) ق = ق (س ب م) ق = ٥٥°

\therefore م ب ينصف (س م ج)

\therefore ق (س م ب) ق = ق (س ب م) ق = ٥٥°

و هما في وضع تبادل

\therefore س م // س ب



(٢) في الشكل المقابل

م ب ، م ج مماستان للدائرة

م ب // م ج ،

ق (ب م ج) ق = ١٣٠°

١ اثبت أن ج ب ينصف (م ج د)

٢ أوجد ق (م ب ج)

البرهان

\therefore ق (ب م ج) ق = ق (ب ج م) ق = $\frac{130}{2} = 65$

ق (ب م ج) ق = ٦٥°

\therefore م ب // م ج

\therefore ق (ب م ج) ق = ق (ب ج م) ق = ٦٥° بالتبادل

\therefore م ب ، م ج مماستان للدائرة

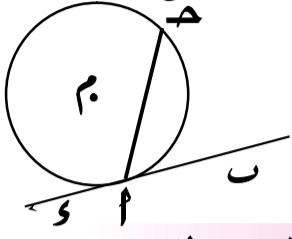
\therefore م ب = م ج \leftarrow ق (ب م ج) ق = ق (ب ج م) ق = ٦٥°

\therefore ق (ب م ج) ق = ق (ب ج م) ق \leftarrow م ب ينصف (م ج د)

في Δ م ب ج \therefore ق (ب م ج) ق = ق (ب ج م) ق = ٦٥°

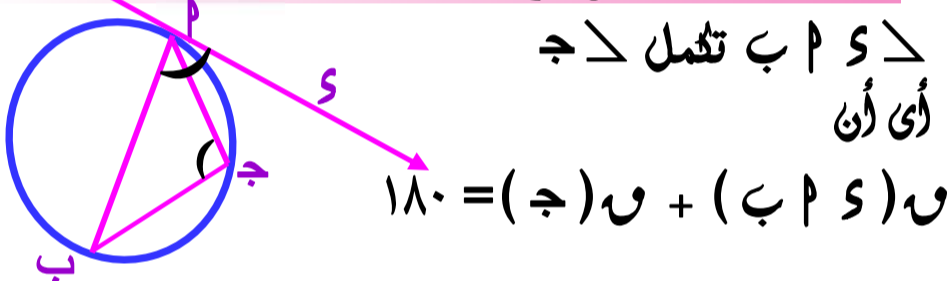
الزاوية المماسية

هي الزاوية المكونة من اتحاد شعاعين أحدهما مماس للدائرة والأخرى يحتوى وترًا في الدائرة يمر بنقطة التماس
 $\angle \alpha$ زاوية مماسية تقابل (\widehat{AB})



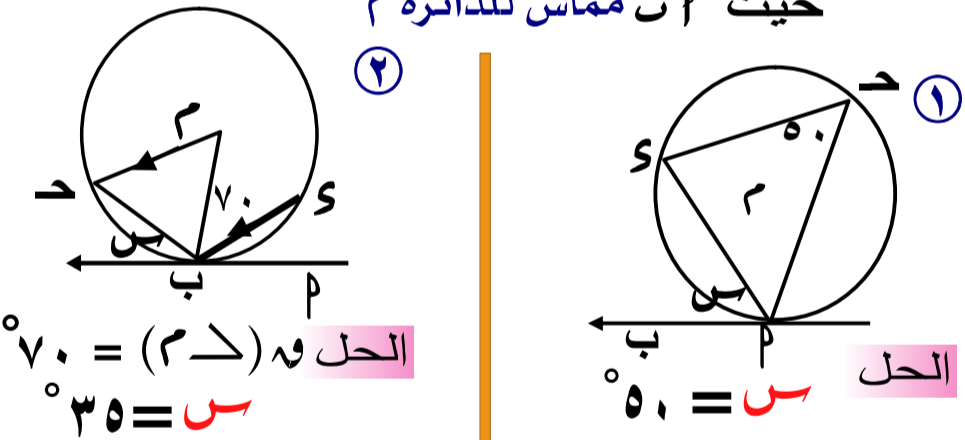
ملاحظات هامة

- قياس الزاوية المماسية يساوى نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها
- قياس الزاوية المماسية يساوى قياس الزاوية المحيطة المرسومة على وتر التماس
- قياس الزاوية المماسية يساوى نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس
- الزاوية المماسية تكمل الزاوية المحيطة (التي تقع فى نفس الجهة التي تقع فيها الزاوية المحيطة)



مثال أوجد قيمة α بالدرجات

حيث \widehat{AB} مماس للدائرة م



عكس نظرية

إذا رسم من إحدى نقطتي النهاية لوتر في دائرة بحيث كان قياس الزاوية المحصورة بين هذا الشعاع والوتر يساوى قياس الزاوية المحيطة المرسومة على نفس الوتر من الجهة الأخرى فإن هذا الشعاع يكون مماساً للدائرة

معنى النظرية

لاشبات ان \widehat{AB} مماس للدائرة المارة برؤوس المثلث $\triangle PAB$

نثبت ان $\angle \alpha = \angle \beta$

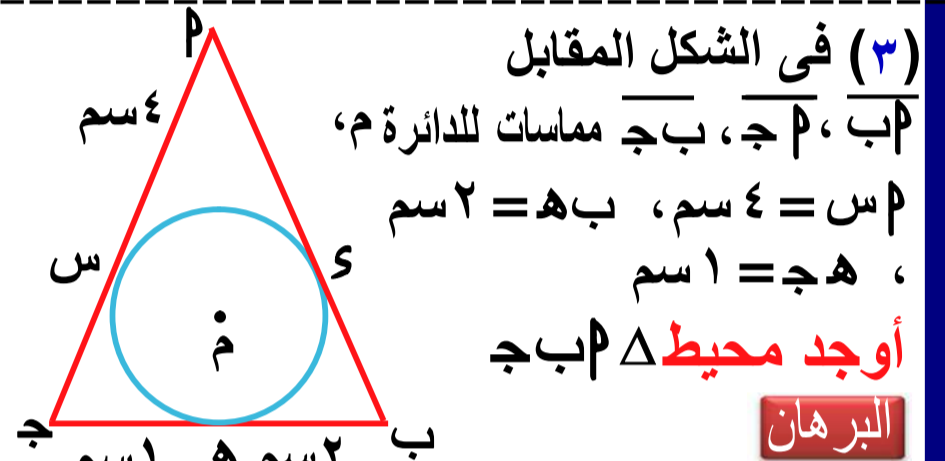
ملاحظات

عدد المماسات المشتركة لدائرتين :

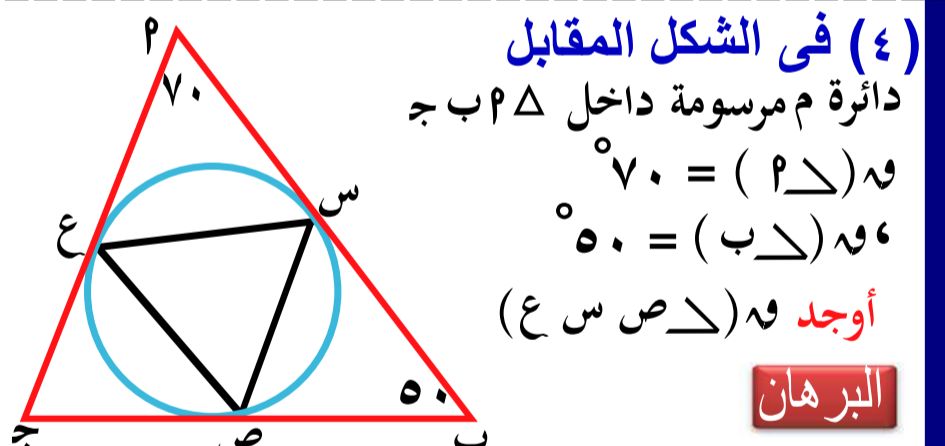
- متباعدتين = 4
- مماسيتين من الخارج = 3
- مماسيتين من الداخل = 1
- متقاطعتين = 2
- متداخلتين = صفر

تعريف الدائرة الداخلة لمضلع هي الدائرة التي تمس أضلاعه من الداخل

مركز الدائرة الداخلة للمثلث هو نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة

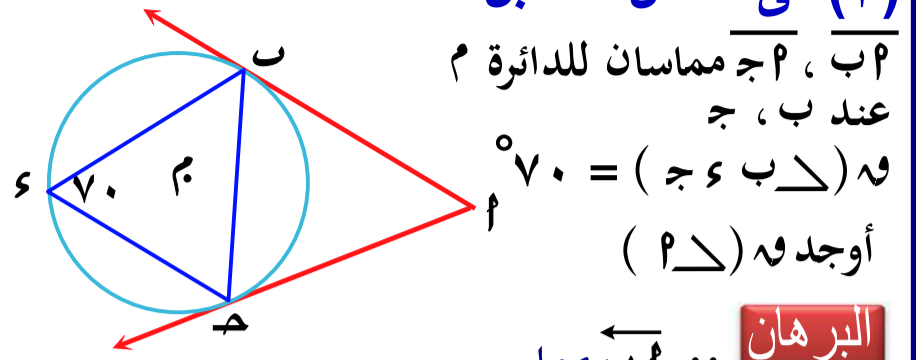


$\widehat{PA} = \widehat{PB} = \widehat{PS} = \widehat{SM} = \widehat{MS} = \widehat{SB} = \widehat{BP} = \widehat{PS} = \widehat{SP} = \widehat{SM} = \widehat{MS} = \widehat{SB} = \widehat{BP} = \widehat{PS} = \widehat{SP} = \widehat{SM} = \widehat{MS} = \widehat{SB} = \widehat{BP}$



$\widehat{PA} = \widehat{PB} = \widehat{PS} = \widehat{SM} = \widehat{MS} = \widehat{SB} = \widehat{BP} = \widehat{PS} = \widehat{SP} = \widehat{SM} = \widehat{MS} = \widehat{SB} = \widehat{BP}$

(١) في الشكل المقابل

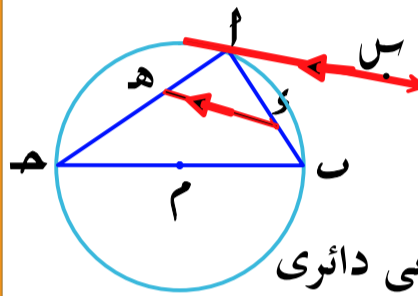


\overline{PM} ، \overline{PB} مماسان للدائرة M
عند B ، $\angle B = 70^\circ$
أوجد $\angle P$

البرهان

$\therefore \angle P = \angle B = 70^\circ$ (المماسية = \angle المحيطية)
 $\therefore \angle P = 70^\circ$
 $\therefore \angle P = 70^\circ$
 $\therefore \angle P = 70^\circ$
 $\therefore \angle P = 70^\circ$

(٢) في الشكل المقابل



\overline{PM} مماس للدائرة عند P
 $\overline{PM} \parallel \overline{CE}$

أثبت أن

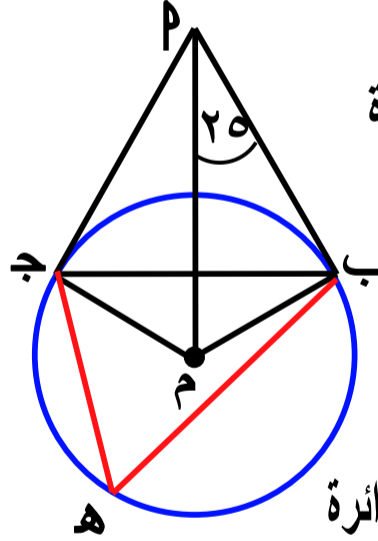
الشكل $ABCE$ رباعي دائري

البرهان

$\therefore \angle P = \angle B = 70^\circ$ (المماسية = \angle المحيطية)
 $\therefore \angle P = 70^\circ$
 $\therefore \angle P = 70^\circ$
 $\therefore \angle P = 70^\circ$

من ١، ٢ $\angle P = \angle B = 70^\circ$
 $\therefore \angle P = 70^\circ$
 $\therefore \angle P = 70^\circ$

(٣) في الشكل المقابل



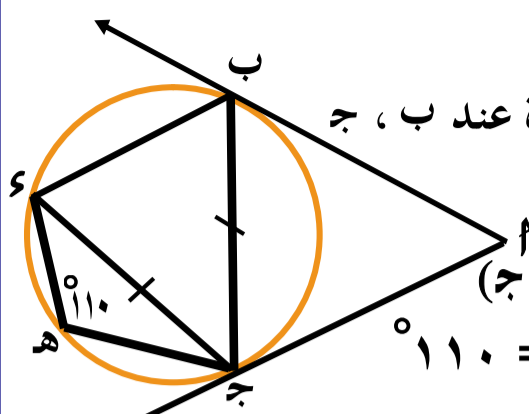
\overline{PM} ، \overline{PB} مماسان للدائرة
 $\angle B = 25^\circ$
أوجد $\angle P$
 $\angle C = 25^\circ$

البرهان

$\therefore \angle P = \angle B = 25^\circ$
 $\therefore \angle P = 25^\circ$
 $\therefore \angle P = 25^\circ$
 $\therefore \angle P = 25^\circ$

$\therefore \angle P = 25^\circ$
 $\therefore \angle P = 25^\circ$
 $\therefore \angle P = 25^\circ$

(٤) في الشكل المقابل

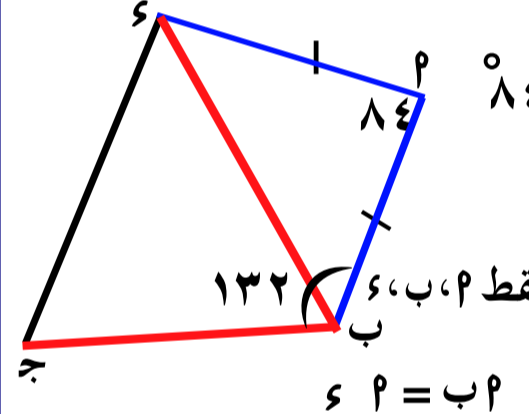


\overline{PM} ، \overline{PB} مماسان للدائرة عند B ، $\angle B = 110^\circ$
أثبت أن $\angle P = 70^\circ$
أوجد $\angle C$

البرهان

$\therefore \angle P = \angle B = 110^\circ$ (المماسية = \angle المحيطية)
 $\therefore \angle P = 110^\circ$
 $\therefore \angle P = 110^\circ$
 $\therefore \angle P = 110^\circ$

(٥) في الشكل المقابل

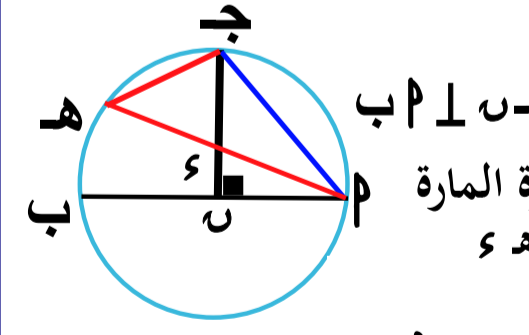


\overline{PM} مماس للدائرة المارة بالنقط P ، B ، $\angle B = 132^\circ$
أثبت أن $\angle P = 48^\circ$
أوجد $\angle C$

البرهان

$\therefore \angle P = \angle B = 132^\circ$ (المماسية = \angle المحيطية)
 $\therefore \angle P = 132^\circ$
 $\therefore \angle P = 132^\circ$
 $\therefore \angle P = 132^\circ$

(٦) في الشكل المقابل



\overline{PM} قطر في الدائرة، $\angle B = 45^\circ$
أثبت أن $\angle P = 90^\circ$
أوجد $\angle C$

البرهان

$\therefore \angle P = \angle B = 45^\circ$ (المماسية = \angle المحيطية)
 $\therefore \angle P = 45^\circ$
 $\therefore \angle P = 45^\circ$
 $\therefore \angle P = 45^\circ$

تمارين ١٠

١ - أكمل ما يأتي :

- ١) الدائرة الداخلة لمضلع هي الدائرة التي
- ٢) قياس الزاوية المماسية = قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس
- ٣) قياس الزاوية المماسية = قياس القوس المحصور بين ضلعيها
- ٤) قياس الزاوية المماسية = نصف قياس الزاوية
- ٥) مركز الدائرة الداخلة لأي مثلث هي نقطة تقاطع
- ٦) عدد المماسات المشتركة لدائرتان متباعدتان هو
- ٧) القطعتان المماستان لدائرة من نقطة خارجها تكونان
- ٨) عدد المماسات المرسومة لدائرة من نقطة خارجها =
- ٩) منصفات الزوايا الداخلة للمثلث تتقاطع في نقطة واحدة هي

١٠) في الشكل المقابل :

و (ب م ا د) =

١١) في الشكل المقابل :

م ب ، م ا مماستان للدائرة م ،

م ب = م ا فإن و (د ه) =

(٢) في الشكل المقابل

م ب ، م ا مماسان للدائرة عند م ،

و (ب د) = ٤٠° ، م ا // م و

١) اثبت أن : م ب = م و

٢) أوجد : و (د ه ب و)

(٣) في الشكل المقابل

م ب ، م ا مماستان للدائرة

و (ب د) = ٥٠°

و (د ه) = ١١٥°

اثبت أن :

م ب ينصف (د ه ا م)

م ا // م و

(٤) في الشكل المقابل

دائرتان متقاطعتان في م ،

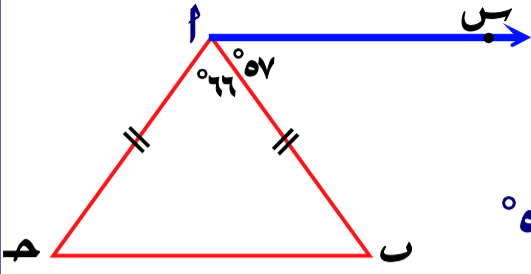
م و مماس للدائرة م

اثبت أن م و // م و

(٥) في الشكل المقابل

م ب ⊥ م ا اثبت أن :

م و مماساً للدائرة المارة برؤوس Δ م ب م



(٦) في الشكل المقابل

م ب م Δ فيه م ا = م ب

و (ب ا م) = ٦٦° ،

و (ب ا م) = ٥٧° ،

اثبت أن : م س مماس للدائرة المارة بالنقط م ، ب ، م

(٧) في الشكل المقابل

الدائرتان م ، ن متماستان

من الخارج في م ،

م مماس مشترك

للدائرتان عند م ، م ،

م مماس مشترك لهما عند م

اثبت أن : ١) م منتصف ب ج

٢) و (ب ا م) = ٩٠°

(٨) في الشكل المقابل

م ب ، م ج مماستان للدائرة م

و (ب م ج) = ٣٠°

اثبت أن

Δ م ب ج متساوي الاضلاع

(٩) في الشكل المقابل

م ب م مثلث مرسوم

خارج دائرة تمس أضلاعه

في م ، م ، م ،

م م = م م = م م ،

م م = م م ، م م = م م

أوجد محيط المثلث م ب م

(١٠) في الشكل المقابل

م ب ، م ج قطعتان مماستان

و (ب ا م) = ٣٠°

م ج = م ب = م ج

١) اثبت أن : م ب // م ج

٢) أوجد و (ب ج م)

٣) اثبت أن : م ج مماس للدائرة المارة بالنقط م ، ب ، ج

(١١) في الشكل المقابل

م ب قطر في الدائرة م

م ج مماس للدائرة عند ج

م ج ⊥ م ب

اثبت أن :

١) الشكل م ج م رباعي وائري

٢) م ه = م و

