ملخص الأشعة

[1] الأشعة في الفراغ : أشعة (1)

الشعاع : هو مستقيم له بداية وليس له نهاية

ونرمز للشعاع بـ $\vec{u}$ أو $\vec{AB}$ ويسمى متجه

$A \xrightarrow{\vec{u}} B$

العبارة التحليلية للشعاع :

لتكن النقطتان $A(x_A, y_A, z_A)$ ، $B(x_B, y_B, z_B)$

فإن الشعاع $\vec{AB}$ يكون بالشكل

$$\vec{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

أو $\vec{AB}(x_B - x_A , y_B - y_A , z_B - z_A)$

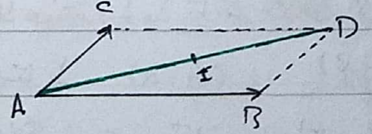
النهاية ناقص البداية

- العمليات على الأشعة :

جمع الأشعة : 1) طريقة شال تستخدم إذا كانت الأشعة متعاقبة أي $\underbrace{\vec{AB}+\vec{BC}} = \vec{AC}$

2) طريقة متوازي الأضلاع : إذا كان للشعاعين المبدأ ذاته :

$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$ أو $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AI}$



طرح الأشعة : نضيف معكوس الشعاع الثاني

$$\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{CA} = \vec{CA} + \vec{AB} = \vec{CB}$$

معكوس الشعاع : $\vec{AB} = -\vec{BA}$

ملاحظة خطيرة : يمكننا استبدال شعاع بشعاع آخر يساويه بالطول والجهة حصراً عند القيام بالعمليات

- مركز ثقل المثلث : G مركز ثقل المثلث ABC

$$\Rightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$$

- الارتباط الخطي : ليكن $\vec{u}(x,y,z)$ ، $\vec{v}(x',y',z')$

نقول عن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ أنهما مرتبطان خطياً إذا

$\boxed{\vec{u} = k\vec{v}} \longleftrightarrow$ المركبات متناسبة

ونستفيد في : 1) إثبات أو نفي توازي مستقيمين

2) إثبات أو نفي وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة

- الارتباط الخطي لثلاثة أشعة :

إذا كانت A و B و C ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة عندئذ المستوي ABC هو مجموعة النقاط M التي تحقق بالعلاقة :

$$\boxed{\vec{AM} = x\vec{AB} + y\vec{AC}}$$

قناة التلغرام

@Lababidi_math

لإثبات ارتباط ثلاثة أشعة:

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ليسا مرتبطين خطياً عندئذ تكون الأشعة $\vec{u}$, $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مرتبطة خطياً إذا وجد عددان a و b يحققان:

$$\boxed{\vec{W} = a\vec{u} + b\vec{V}}$$

نظيم (طويلة) شعاع:

يعطى نظيم الشعاع الذي مركباته $\vec{u}(x,y,z)$ بالعلاقة:

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

المسافة بين نقطتين:

$A(x_A, y_A, z_A)$ $B(x_B, y_B, z_B)$

تعطى المسافة بين A و B بالعلاقة

$$\boxed{\|AB\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}}$$

Note: الجواب رح يكون رقم موجب

- معادلة الكرة:

الكرة S التي مركزها $A(x_0, y_0, z_0)$ ونصف قطرها R هي مجموعة النقاط من الفراغ التي تحقق $AM^2 = R^2$

ومعادلتها

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2}$$

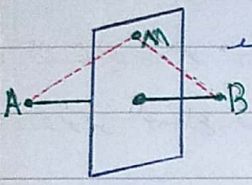
وبحالة خاصة:

معادلة الكرة التي مركزها المبدأ O

$OM^2 = R^2$

$$\boxed{x^2+y^2+z^2 = R^2}$$

المستوي المحوري للقطعة $[AB]$



هو مجموعة النقاط M التي تبعد عن طرفي القطعة نفس المسافة

$MA = MB$

- مركز الأبعاد المتناسبة في الفراغ

إن مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

(A,α), (B,β), (C,γ), (D,δ)

حيث $\alpha+\beta+\gamma+\delta \neq 0$

هو النقطة G الوحيدة التي تحقق:

$$\boxed{\alpha\vec{GA}+\beta\vec{GB}+\gamma\vec{GC}+\delta\vec{GD}=0}$$

ملاحظة: إذا كان لدينا:

$\alpha\vec{AG} = \beta\vec{AB}$

$\Rightarrow \vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{AB}$

إذاً G مركز أبعاد متناسبة للنقطتين

(A,α), (B,β)

ملاحظة: إذا كانت G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) (B,β) (C,γ)

فتكون G مثقلة بـ $(G, \alpha+\beta+\gamma)$

الخاصة التجميعية:

إذا كانت I مركز ابعاد متناسبة للنقطتين

(A,α) , (B,β)

وكانت J مركز ابعاد متناسبة للنقطتين

(C,γ) و (D,δ)

فتكون G مركز ابعاد متناسبة للنقاط

$(I,\alpha+\beta)$ و $(J,\gamma+\delta)$

إذاً هي مركز ابعاد متناسبة للنقاط

$(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma),(D,\delta)$

فتكون $(G,\ \alpha+\beta+\gamma+\delta)$

- معادلة الاسطوانة

معادلة الاسطوانة التي محورها $O\vec{z}$

$$\underbrace{x^2+y^2=R^2}_{\text{معادلة الدائرة}} \ , \ \underbrace{a\le z\le b}_{\text{الارتفاع}}$$

- معادلة المخروط:

معادلة المخروط الذي محوره $O\vec{z}$

$$x^2+y^2=\frac{a^2}{b^2}z^2 \qquad 0\le z\le b$$

حيث أن: a هو نصف قطر الدائرة

b الارتفاع

ملاحظة: يمكن التبديل بين الاحداثيات حسب المنحنى المعطى

[2] الجداء السلمي في الفراغ: (حصة 2)

- العبارات المختلفة للجداء السلمي في (المستوي)

1) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2)$

2) $\vec{u}\cdot\vec{v}=x.x'+yy'$

3) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\theta$

4) المسقط العامودي: $\vec{CD}\cdot\vec{AB}=\vec{C'D'}\cdot\vec{AB}$

- الجداء السلمي في حالة شعاعين مرتبطين خطياً

بالاتجاه نفسه $(\theta=0)$: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$

اتجاهين مختلفين $(\theta=\pi)$: $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$

وبالحالة العامة:

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}|=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$$

قيمة مطلقة

- التعامد والمسامتة

$\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow$ $\vec{u}$ يعامد $\vec{v}$

$\vec{AB}\cdot\vec{CD}=0 \Rightarrow$ $\vec{AB}$ عمودي على $\vec{CD}$

Note الزاوية الهندسية بين شعاع وذاته تساوي الصفر:

$\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{u}\|\cdot\cos 0=\|\vec{u}\|^2$

مصطلح: الشعاع الصفري $\vec{0}$ عمودي على أي شعاع آخر

قناة التلغرام

@Lababidi_math

بعد نقطة عن مستقيم:

إن بعد النقطة $A(\alpha,\beta)$ عن المستقيم الذي معادلته $d: ax+by+c=0$ تعطى بالعلاقة:

$$\boxed{dist(A,d)=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

- العبارات المختلفة للجداء السلمي في الفراغ:

1) $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$

2) $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$

3) $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\theta$

4) $\vec{u}.\vec{v}=\vec{AB}.\vec{AC}=\vec{AB}.\vec{AH}$

حيث AH المسقط القائم لـ $\vec{AC}$ على $\vec{AB}$

- خواص الجداء السلمي في (الفراغ والمستوي):

1) $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$

2) $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$

3) $(a.\vec{u}).(b.\vec{v})=a.b(\vec{u}.\vec{v})$

4) $(\vec{u}+\vec{v})\vec{w}=\vec{u}\vec{w}+\vec{v}\vec{w}$

ولا يحقق الجداء السلمي خواص الضرب كلها حيث لا يمكن الاختصار

$\vec{u}.\vec{v}=\vec{u}.\vec{w}$

هذا **لا** يعني أن $\vec{v}=\vec{w}$ وإنما

$\vec{u}.\vec{v}-\vec{u}.\vec{w}=0$

$\Rightarrow u.(\vec{v}-\vec{w})=0$

أي $\vec{u}$ يعامد $(\vec{v}-\vec{w})$

- التعامد في الفراغ:

- يتعامد شعاعان في الفراغ إذا كان $\vec{u}.\vec{v}=0$
- يكون الشعاع $\vec{n}=\vec{AB}$ ناظماً على المستوي P إذا كان AB عمودي على المستوي P
- يتعامد مستقيم مع مستوي إذا تعامد المستقيم مع شعاعين من المستوي غير مرتبطين خطياً

- الوضع النسبي لمستويين:

ليكن n_P ناظم لـ P و n_Q ناظم لـ Q

$\boxed{n_P, n_Q \text{ مرتبطين خطياً}}$ ⟵ ⟶ $\boxed{n_P, n_Q \text{ غير مرتبطين خطياً}}$

$\Downarrow$ P و Q متوازيان

$\Downarrow$ P و Q متقاطعان

وبحالة خاصة إذا كان $n_P.n_Q=0$ فالمستويان P و Q متعامدان

المعادلة الديكارتية للمستوي:

لكل مستوي معادلة ديكارتية من الشكل

$ax+by+cz+d=0$

حيث $n(a,b,c)$ ناظم المستوي

ملاحظة خطيرة: لإيجاد معادلة المستوي نبحث عن $\boxed{\text{نقطة وناظم}}$

- حالات إيجاد معادلة المستوي

الحالة الأولى: معادلة مستوي مار بنقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ وناظمه $\vec{n}(a,b,c)$

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

الحالة الثانية: معادلة مستوي مار من نقطة ويوازي مستوي Q عندها $\vec{n_P} = \vec{n_Q}$

الحالة الثالثة: معادلة مستوي مار من ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة

$\Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{n_P} = 0$

$\vec{AC} \cdot \vec{n_P} = 0$

الحالة الرابعة: معادلة مستوي مار بنقطتين معلومتين ويعامد مستوي:

$\Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{n_P} = 0$

$\vec{n_Q} \cdot \vec{n_P} = 0$

الحالة الخامسة: مستوي محدد بشعاعين ومار بنقطة

$\Rightarrow \vec{n_P} \cdot \vec{u} = 0$

$\vec{n_P} \cdot \vec{v} = 0$

الحالة السادسة: مستوي مار من نقطة ويعامد مستويين

$\vec{n_P} \cdot \vec{n_Q} = 0$

$\vec{n_P} \cdot \vec{n_R} = 0$

الحالة السابعة: المستوي المحوري لقطعة مستقيمة $[AB]$ $\vec{n_P} = \vec{AB}$

والنقطة تكون I منتصف $\vec{AB}$

- بعد نقطة عن مستوي $A(\alpha, \beta, \gamma)$

$P: ax + by + cz + d = 0$

$$\boxed{dist(A, P) = \frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

[3] المستقيمات والمستويات في الفراغ

حل جملة المعادلات الخطية:

1) طريقة الحذف بالتعويض: طريقة الحل: نختار معادلتين وبالحل المشترك نعزل مجهولين بدلالة المجهول الآخر ونعوضهم بالمعادلة الثالثة فنجد قيم المجاهيل.

2) طريقة الحذف بالجمع: نبحث عن معادلات لا تحوي أمثال بجانب المجاهيل ونختار معادلتين ونجمع بهدف إخفاء أحد المجاهيل ثم نكرر مع معادلتين مختلفتين وبالحل المشترك نجد قيم المجاهيل

3) طريقة غاوص: 1) نكتب المعادلات الخطية بالشكل النظامي

2) يفضل أن تكون أول معادلة ذات أمثال لـ x إما (1) أو (-1)

3) المرحلة الأولى: نحذف x من المعادلتين (L_2)، (L_3) فنحصل على (L_1) و (L_2') و (L_3')

4) المرحلة الثانية: نحذف y من المعادلة (L_3')

5) نحل جملة المعادلات الأخيرة ونوجد المجاهيل بدءاً من الأدنى وباتجاه الأعلى

ملاحظة: إذا أخذت المعادلة أحد الشكلين

$\boxed{0 . z = 0}$ عدد لا نهائي من الحلول

$\boxed{0 . z = a \in R}$ الجملة مستحيلة الحل

التمثيل الوسيطي لمستقيم:

d مستقيم معرف بالنقطة $A(x_0, y_0, z_0)$

وشعاع موجه $\vec{u}(a, b, c)$

فيكون التمثيل الوسيطي للمستقيم:

$$d: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

$[AB]$ قطعة مستقيمة $t \in [0, 1]$

$[AB)$ نصف مستقيم $t \in [0, +\infty[$

لدراسة تقاطع مستقيمين معرفين وسيطياً

نحل جملة المعادلات الوسيطية للمستقيمين

$$x_0 + at = x_1 + a s$$
$$y_0 + bt = y_1 + b s$$
$$z_0 + ct = z_1 + c s$$

إذا تحققت جملة المعادلات فيكونا متقاطعين

وإلا فيكونا متخالفين

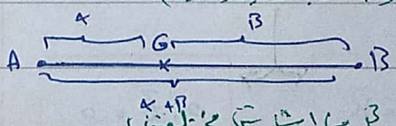
- لمعرفة وضع مستقيمين معرفين وسيطياً

يكفي دراسة الارتباط الخطي للأشعة الموجهة $\vec{u}$ و $\vec{v}$

- موضع مركز الأبعاد المتناسبة:

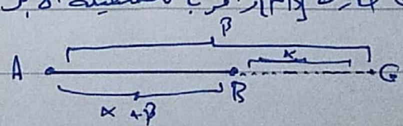
الحالة الأولى: α و β من إشارة واحدة

G داخل $[AB]$



الحالة الثانية: α و β من إشارتين مختلفتين

تكون النقطة G خارج $[AB]$ أقرب للنقطة ذات الثقل الأكبر



تقاطع مستويين:

$P_1: a_1x + b_1y + c_1z + d = 0$

$P_2: a_2x + b_2y + c_2z + d = 0$

n_1 و n_2 مرتبطين خطياً: P_1 و P_2 متوازيان

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} \Rightarrow P_1, P_2$ منطبقان

n_1 و n_2 غير مرتبطين خطياً: P_1 و P_2 متقاطعان

متعامدان $n_1 . n_2 = 0$

• **المستويان منطبقان:** اي كل حل لمعادلة P_1 يكون حلاً لمعادلة P_2

• **المستويان متوازيان:** اي لا يوجد لمعادلتيهما حلاً مشتركاً P_1 و P_2

• **المستويان متقاطعان:** متقاطعان بفصل مشترك اي لمعادلتيهما عدد لا نهائي من الحلول جميعها تقع على الفصل المشترك لهما D ونحصل على هذه الحلول بإعطاء قيمة اختيارية لأحد المجاهيل ونعوضها في P_1 و P_2 فنحصل على معادلتين بمجهولين وبالحل المشترك نوجد قيمتي المجهولين ومنه نحصل على شعاع موجه لمعرفة نقطتين منه ثم نكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم D

قناة التلغرام

@Lababidi_math

تقاطع مستقيم ومستوي :

$P: ax + by + cz + d = 0 \Rightarrow \vec{n}_p\,(a,b,c)$

المستقيم D موجه بالشعاع $\vec{u}\,(\alpha,\beta,\gamma)$

ويمر بالنقطة $A\,(x_0,y_0,z_0)$

$\boxed{\vec{n}\cdot\vec{u}=0}$: المستقيم D موازي المستوي

$\boxed{\vec{n}\cdot\vec{u}\neq 0}$: المستقيم D يقطع المستوي بنقطة واحدة

لإيجاد نقطة التقاطع :

نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم D في معادلة المستوي P ونوجد قيمة t

تقاطع ثلاث مستويات :

1) $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \emptyset$

لا توجد نقاط مشتركة فالمستويات متوازية

2) $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = I$

فالمستويات تتقاطع في نقطة واحدة I

3) $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = d$

فالمستويات تتقاطع بمستقيم d (الفصل المشترك)

وذلك عن طريق حل جملة معادلات المستويات

- الجملة مستحيلة الحل $\Leftarrow$ المستويات متوازية
- الجملة لها حل وحيد $\Leftarrow$ تتقاطع بنقطة واحدة
- الجملة لها عدد لا نهائي من الحلول $\Leftarrow$ تتقاطع بمستقيم الفصل المشترك