حلول الاختبارات العامة في نهاية كتاب الرياضيات / الجزء الثاني /

اختبار (1)

أولاً:

السؤال الأول:

① $\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

عندما x تؤول الى $+\infty$ نجد حالة عدم تعيين من الشكل $(0\cdot+\infty)$ لإزالتها نكتب:

بفرض $X=\frac{1}{x}$ نجد:

$$\lim_{x\to+\infty}X=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{X\to0}\frac{\ln(1+X)}{X}=1$$

② $$\int_0^{\ln 2}e^x\cdot(1-e^x)^3\,dx=-\int_0^{\ln 2}\underbrace{(-e^x)}_{h'}\cdot\underbrace{(1-e^x)^3}_{h^r}\,dx$$

$$=-\left[\frac{(1-e^x)^4}{4}\right]_0^{\ln 2}$$

$$=-\left[\frac{(1-e^{\ln 2})^4}{4}-\frac{(1-e^0)^4}{4}\right]$$

$$=-\left[\frac{(-1)^4}{4}-0\right]=-\frac{1}{4}$$

أو:

$$e^x(1-e^x)^3=e^x(1-3e^x+3e^{2x}-e^{3x})$$

$$=e^x-3e^{2x}+3e^{3x}-e^{4x} \Rightarrow$$

$$\int_0^{\ln 2}e^x(1-e^x)^3\,dx=\int_0^{\ln 2}(e^x-3e^{2x}+3e^{3x}-e^{4x})\,dx$$

$$=\left[e^x-\frac{3}{2}e^{2x}+e^{3x}-\frac{1}{4}e^{4x}\right]_0^{\ln 2}$$

$$=\left(e^{\ln 2}-\frac{3}{2}e^{2\ln 2}+e^{3\ln 2}-\frac{1}{4}e^{4\ln 2}\right)-\left(1-\frac{3}{2}+1-\frac{1}{4}\right)$$

$$=2-\frac{3}{2}(4)+8-\frac{1}{4}(16)-2+\frac{3}{2}+\frac{1}{4}$$

$$=-2+\frac{3}{2}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$$

السؤال الثاني:

$$9^x-3^{x+1}+2=0 \quad ; D=\mathbb{R}$$

$$(3^2)^x-3\cdot3^x+2=0$$

$$(3^x)^2-3\cdot3^x+2=0$$

وبفرض $X=3^x>0$ نجد: $X^2-3X+2=0$

$(X-2)(X-1)=0 \Rightarrow$ إما: $X-2=0$

$$\Rightarrow X=2>0 \Rightarrow 3^x=2$$

$$\Rightarrow e^{x\cdot\ln 3}=e^{\ln 2}$$

$$\Rightarrow x\cdot\ln 3=\ln 2 \Rightarrow x=\frac{\ln 2}{\ln 3}\in D$$

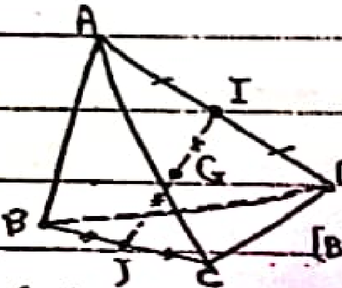
أو: $X-1=0$

$$\Rightarrow X=1>0 \Rightarrow 3^x=1$$

$$\Rightarrow x=0\in D$$

$$\Rightarrow S=\left\{0,\frac{\ln 2}{\ln 3}\right\}$$

السؤال الثالث:



بما أن I منتصف [AD] فإن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين: (A,1)، (D,1) وبما أن J منتصف [BC] فإن J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين (B,1)، (C,1)

ولدينا فرضاً G مركز ثقل رباعي الوجوه ABCD فهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة: (A,1)، (B,1)، (C,1)، (D,1)

وبحسب الخاصة التجميعية يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين: (I,2)، (J,2)

⇐ I، J، G تقع على استقامة واحدة

السؤال الرابع:

بما أنّ مركز الكرة هو A وتمس المستوي P فإنّ نصف قطرها:

$$R = dist(A,P) = \frac{|a\alpha+b\beta+c\gamma+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{|2(2)+1(-1)-2(0)+9|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-2)^2}}$$

$$R = \frac{|4-1+0+9|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{12}{3} = 4$$

ومنه نجد مجموعة النقط $M(x,y,z)$ تنتمي إلى الكرة المطلوبة فإنّه:

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=R^2$$

$$(x-2)^2+(y+1)^2+z^2=16$$

ثانياً: التمرين الأول:

لدينا من أجل كل $x>0$: $\ln x \leq x-1 \Leftarrow$

وبفرض: $x-1-\ln x \geq 0$

$f(x) = x-1-\ln x$; $D_f =]0,+\infty[$

f قابلة للاشتقاق على D_f ومنه: $f'(x) = 1-\frac{1}{x}$

$= \frac{x-1}{x}$

$f'(x)=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \in D_f \Rightarrow f(1)=0$

ومنه نجد جدول الاطراد:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	0	↗	

وبملاحظة الجدول أنّه من أجل كل $x>0$ فإنّه:

$f(x) \geq 0 \Rightarrow x-1-\ln x \geq 0 \Rightarrow x-1 \geq \ln x$

فالمتراجحة صحيحة من أجل كل $x>0$.

وبفرض نعوض في المتراجحة $x = e^{\frac{1}{3}}$ فنجد:

$\ln e^{\frac{1}{3}} \leq e^{\frac{1}{3}}-1 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \sqrt[3]{e}-1 \Rightarrow$

$\frac{1}{3}+1 \leq \sqrt[3]{e} \Rightarrow \frac{4}{3} \leq \sqrt[3]{e} \Rightarrow \frac{64}{27} \leq e$

وبفرض نعوض في المتراجحة $x = e^{-\frac{1}{3}}$ فنجد:

$\ln e^{-\frac{1}{3}} \leq e^{-\frac{1}{3}}-1 \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq \frac{1}{e^{\frac{1}{3}}}-1 \Rightarrow$

$-\frac{1}{3}+1 \leq \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \Rightarrow \frac{2}{3} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \Rightarrow \frac{8}{27} \leq \frac{1}{e}$

$\Rightarrow \frac{27}{8} \geq e$

ومنه نجد: $\frac{27}{8} \geq e \geq \frac{64}{27}$

التمرين الثاني:

سنثبت بالتراجع صحة القضية $E(n)$ التالية:

[من أجل كل $n \geq 0$ فإنّ: $u_{n+1} > u_n$]

1. نثبت صحة القضية لأجل $n=0$:

نعوض $n=0$ نجد: $u_1 = \sqrt{1+u_0^2} = 1$ ، $u_0 = 0$ $\Rightarrow u_1 > u_0$

فالقضية صحيحة لأجل $n=0$.

2. نفرض صحة القضية $E(p)$:

[من أجل كل $p \geq 0$ فإنّ: $u_{p+1} > u_p$] (*)

ونثبت صحة القضية $E(p+1)$:

[من أجل كل $p \geq 0$ فإنّ: $u_{p+2} > u_{p+1}$]

لدينا من (*) من أجل كل $p \geq 0$: $u_{p+1} > u_p$ ⇐ بما أنّ الطرفين موجبان

$u_{p+1}^2 > u_p^2 \Rightarrow 1+u_{p+1}^2 > 1+u_p^2$

وبما أنّ تابع الجذر التربيعي متزايد تماماً نجد: $\sqrt{1+u_{p+1}^2} > \sqrt{1+u_p^2}$

ومن العلاقة التدريجية نجد: $u_{p+2} > u_{p+1}$ فالقضية $E(p+1)$ صحيحة ومنه نجد أنّ $E(n)$ صحيحة بالتراجع من أجل كل $n \geq 0$.

التمرين الثالث: لدينا:

$0 \leq r \leq 4$ ، $0 \leq r \leq 5$ ، $0 \leq r \leq 6$ $\Rightarrow 0 \leq r \leq 4$

ولدينا:

$$\frac{1}{\frac{4!}{r!(4-r)!}} = \frac{1}{\frac{5!}{r!(5-r)!}} + \frac{1}{\frac{6!}{r!(6-r)!}} \Rightarrow$$

$$\frac{r!(4-r)!}{4!} = \frac{r!(5-r)!}{5!} + \frac{r!(6-r)!}{6!}$$

بالقسمة على $r! \neq 0$ نجد:

$$\frac{(4-r)!}{4!} = \frac{(5-r)(4-r)!}{5\times 4!} + \frac{(6-r)(5-r)(4-r)!}{6\times 5\times 4!}$$

بالقسمة على $(4-r)! \neq 0$ نجد:

$$1 = \frac{5-r}{5} + \frac{(6-r)(5-r)}{30} \Rightarrow$$

$$30 = 6(5-r) + (6-r)(5-r)$$

$$30 = 30 - 6r + 30 - 11r + r^2 \Rightarrow$$

$$r^2 - 17r + 30 = 0 \Rightarrow (r-15)(r-2) = 0$$

إما: $r-15=0 \Rightarrow r=15$ مرفوض $0 \le r \le 4$

أو: $r-2=0 \Rightarrow r=2$ مقبول

$$\Rightarrow S = \{2\}$$

التمرين الرابع:

$$z^2 - (1+2i)z + 3 + 3i = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = [-(1+2i)]^2 - 4(1)(3+3i)$$

$$= 1 + 4i - 4 - 12 - 12i = -15 - 8i$$

ونفرض $w = x+iy$ الجذر التربيعي للعدد Δ نجد:

$x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{225+64} = \sqrt{289} \Rightarrow x^2+y^2 = 17$ ①

$x^2-y^2 = a \Rightarrow x^2-y^2 = -15$ ②

$x.y = \frac{b}{2} \Rightarrow x.y = -4$ ③

نجمع ① و ② نجد: $2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1$

إما: $x=1$ أو: $x=-1$

نعوض في ① نجد: $1+y^2 = 17 \Rightarrow y^2 = 16$

إما: $y=4$ أو: $y=-4$

ونستنتج من ③: $x.y = -4 < 0$ فالعددان x و y إشارتاهما مختلفتان ومنه نجد الجذرين التربيعيين للعدد Δ:

$$w_1 = 1-4i \ , \ w_2 = -1+4i$$

ومنه يأتي للمعادلة جذران عقديان مختلفان:

$$z_1 = \frac{-b+w_1}{2a} = \frac{1+2i+1-4i}{2} = \frac{2-2i}{2} = 1-i$$

$$z_2 = \frac{-b+w_2}{2a} = \frac{1+2i-1+4i}{2} = \frac{6i}{2} = 3i$$

$$\Rightarrow S = \{1-i, 3i\}$$

ثالثاً: المسألة الأولى:

1. نكتب تابع الفرق بين C و Δ والمعرف على $]0,+\infty[$ ونجد:

$$f(x) - y_\Delta = 2x - 1 + \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) - (2x-1) = \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$$

ونفرض $X = \frac{x}{1+x}$ نجد لما x تؤول $(+\infty)$:

$$\lim_{x\to+\infty} X = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}(1) = 1 \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta) = \lim_{X\to 1}\ln X = 0 \Rightarrow$$

Δ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ ولدراسة الوضع النسبي للخط C مع Δ ندرس إشارة تابع الفرق ونجد:

$$f(x) - y_\Delta = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{x+1} = 1 \Rightarrow$$

$$x = x+1 \Rightarrow 0 = 1 \quad \text{(مستحيل)}$$

ومنه نجد جدول الوضع النسبي:

x	0	$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$	‖	−
الوضع النسبي	‖	Δ تحت C

[نلاحظ أنه مهما كانت $x \in]0,+\infty[$ فإن: $x < x+1$

$$\frac{x}{x+1} < 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) < \ln(1) \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) < 0$$

2. f معرف ومستمر على المجال $]0,+\infty[$ ولدينا:

عندما x تقترب صفراً من العدد (0) نجد:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[2x-1+\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)\right] = -\infty \ , \ \lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$$

$\Leftarrow$ $x=0$ مقارب شاقولي للخط C من الأسفل عند $(-)$

وعندما x في جوار $(+\infty)$ نجد حالة عدم تعيين من الشكل $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$

نكتب: $f(x) = 2x-1+\ln\left(\frac{x}{x(1+\frac{1}{x})}\right) = 2x-1+\ln\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

f اشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$ ونجد:

$$f'(x) = 2 + \frac{\frac{1+x-x}{(1+x)^2}}{\frac{x}{1+x}} = 2 + \frac{1}{x(1+x)}$$

$f'(x) = \frac{2x(x+1)+1}{x(x+1)} = \frac{2x^2+2x+1}{x(x+1)}$

$f'(x)=0 \Rightarrow 2x^2+2x+1=0$

$\Delta = 4-8 = -4 < 0$ مستحيلة في $\mathbb{R}$

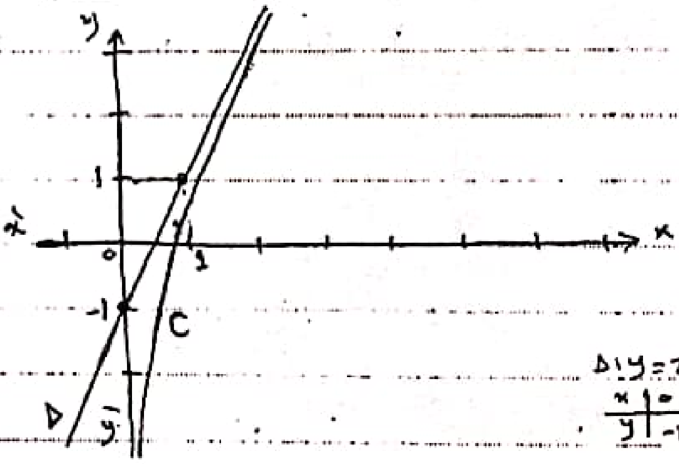
ومنه نجد جدول التغيرات :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

نقاط مساعدة للرسم :

$C \cap yy'$: $x=0 \notin]0,+\infty[\Rightarrow$ لا يوجد تقاطع مع المحور yy'

$C \cap x'x$: $f(x)=0$ (سنبرهن وجود حل وحيد)



$D: y=2x-1$

x	0	1
y	-1	1

3. نلاحظ من جدول التغيرات أن f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0,+\infty[$ وأن $f(]0,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$ وبما أن $0 \in]-\infty,+\infty[$ فالمعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α.

و f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[\frac{1}{2},1]$ ولدينا:

$f(\frac{1}{2}) = -\ln 3 < 0$
$f(1) = 1-\ln 2 > 0$ $\Rightarrow f(\frac{1}{2}) \cdot f(1) < 0$

فإن α تنتمي للمجال $[\frac{1}{2},1]$

المسألة الثانية:

1. فضاء العينة :

$\Omega = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),$
$(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),$
$(3,2),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),$
$(4,3),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),$
$(5,4),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),$
$(6,5)\}$

ومنه نلاحظ مجموعة قيم المتغير X :

$I = \{1,2,3,4,5\}$

والقانون الاحتمالي للمتغير X :

$P(X=1) = \frac{10}{30} = \frac{5}{15}$, $P(X=2) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$

$P(X=3) = \frac{6}{30} = \frac{3}{15}$, $P(X=4) = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$

$P(X=5) = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

ومنه نجد جدول القانون الاحتمالي للمتغير X :

x_i	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

2. التوقع الرياضي للمتغير X :

$E(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i \cdot p_i$
$= \frac{5+8+9+8+5}{15}$
$= \frac{35}{15} = \frac{7}{3}$

والتباين للمتغير X :

$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$

حيث : $E^2(X) = (\frac{7}{3})^2 = \frac{49}{9}$

$E(X^2) = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 \cdot p_i = \frac{5+16+27+32+25}{15}$
$= \frac{105}{15} = \frac{21}{3} = 7 \Rightarrow$

$V(X) = 7 - \frac{49}{9} = \frac{63-49}{9}$
$= \frac{14}{9}$

- اختبار (2) -

أولاً: أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول:

① عندما x قريبة جداً من العدد (0) نجد حالة عدم تعيين من الشكل $\left(\frac{0}{0}\right)$ لإزالتها نكتب:

$$f(x) = \frac{x^3+4-4\cos x}{x^2}$$

$$= x + \frac{4(1-\cos x)}{x^2} \quad ; \quad 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

$$= x + \frac{8\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = x + 8\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2$$

$$= x + 8\cdot\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)\right]^2$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left[x + 8\cdot\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)\right]^2\right]$$

$$= 0 + 8\left(\frac{1}{2}(1)\right)^2 = 8\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= 2 \quad ; \quad \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

② نكتب تابع الفرق بين C و Δ والمعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x) - y_\Delta = \frac{x^3+4-4\cos x}{x^2} - x$$

$$= x + \frac{4-4\cos x}{x^2} - x$$

$$= \frac{4-4\cos x}{x^2}$$

ومهما كانت $x\in]0,+\infty[$ ثابتاً:

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 4 \geq -4\cos x \geq -4$$

$$\Rightarrow 8 \geq 4-4\cos x \geq 0$$

وعندما x في جوار $(+\infty)$ نجد $x^2>0$ ⇐

$$\frac{8}{x^2} \geq \frac{4-4\cos x}{x^2} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{8}{x^2} \geq f(x) - y_\Delta \geq 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{8}{x^2}\right) = 0 \\ \lim_{x\to+\infty}(0) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-y_\Delta\right) = 0$$

بحسب مبرهنات المقارنة.

ومنه نجد أنّ Δ مقارب مائل للخط C في جوار $(+\infty)$.

السؤال الثاني:

① سنثبت بالتدريج صحة القضية $E(n)$ التالية:

[مهما كان $n\geq0$ ثابتاً: $0 \leq u_n \leq 4$]

1. نثبت صحة القضية لأجل $(n=0)$:

لدينا: $0 \leq u_0 = 1 \leq 4$ (محققة)

2. نفرض صحة القضية $E(p)$: [مهما كان $p\geq0$ ثابتاً: $0\leq u_p\leq4$] ⊛

ونثبت صحة القضية $E(p+1)$: [مهما كان $p\geq0$ ثابتاً: $0\leq u_{p+1}\leq4$]

لدينا من ⊛ مهما كان $p\geq0$ ثابتاً: $0 \leq u_p \leq 4$ ⇐

$$12 \leq 12+u_p \leq 16 \Rightarrow 2\sqrt{3} \leq \sqrt{12+u_p} \leq 4$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{12+u_p} \leq 4$$

ومن العلاقة التدريجية نجد: $0 \leq u_{p+1} \leq 4$ فالقضية $E(p+1)$ صحيحة ومنه نجد أنّ $E(n)$ صحيحة بالتدريج مهما كان $n\geq0$.

② سنثبت بالتدريج صحة القضية $E(n)$ التالية:

[مهما كان $n\geq0$ ثابتاً: $u_{n+1} \geq u_n$]

1. نثبت صحة القضية لأجل $(n=0)$:

نعوض $n=0$ نجد: $u_0 = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ u_1 = \sqrt{12+u_0} = \sqrt{13}\end{array}\right\} \Rightarrow u_1 \geq u_0$$

فالقضية صحيحة لأجل $(n=0)$

2. نفرض صحة القضية $E(p)$:

[مهما كان $p\geq0$ ثابتاً: $u_{p+1} \geq u_p$] ⊛

نثبت صحة القضية $E(p+1)$:

[مهما كانت $p\geq0$ ثابتاً: $u_{p+2} \geq u_{p+1}$]

بفرض $u_{n+1} = f(u_n)$ نجد التابع:

$$f(x) = \sqrt{12+x} \quad ; \quad D_f = [-12,+\infty[$$

f اشتقاقي على المجال $]-12,+\infty[$ ومنه:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{12+x}} > 0 \Rightarrow$$

f متزايد تماماً على D_f ولدينا من ⊛ مهما كان $p\geq0$ ثابتاً

$u_{p+1} \geq u_p$ وبما أنّ f متزايد تماماً على D_f نجد:

$f(U_{p+1}) \geq f(U_p) \Rightarrow U_{p+2} \geq U_{p+1}$

فالقضية $E(p+1)$ صحيحة ومنه نجد أن $E(n)$ صحيحة بالتدرج

من أجل $n\geq 0$، فالمتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متزايدة من أجل $n\geq 0$.

السؤال الثالث:

يكون الحادثان A ، B مستقلين احتماليًا إذا كان:

$$P(A).P(B) = P(A\cap B) \quad (*)$$

ولدينا:

$$P(A) = \frac{1}{4} \ , \ P(A\cap B) = P(A).P(B|A) = \frac{1}{4}.\frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

$$P(B) = P(A\cap B) + P(\bar{A}\cap B) = \frac{1}{12} + P(\bar{A}).P(B|\bar{A}) = \frac{1}{12} + \frac{3}{4}p$$

ومنه نجد بالتعويض في $(*)$ أن:

$$\frac{1}{4}.\left(\frac{1}{12} + \frac{3}{4}p\right) = \frac{1}{12} \Rightarrow$$

$$3\left(\frac{1}{12} + \frac{3}{4}p\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{4} + \frac{9}{4}p = 1 \Rightarrow \frac{9}{4}p = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\frac{9}{4}p = \frac{3}{4} \Rightarrow p = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

أي أنه عندما يكون $p = \frac{1}{3}$ يكون الحادثان A ، B مستقلين احتماليًا.

السؤال الرابع:

① لدينا: $\vec{AB}(9,-1,-1)$ ، $\vec{AC}(3,-2,1)$

ونلاحظ أن: $\frac{x_1}{x_2} = 3$ ، $\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \frac{x_1}{x_2} \neq \frac{y_1}{y_2}$

فالشعاعان $\vec{AB}$ ، $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطيًا فالنقاط A ، B ، C ليست واقعة على استقامة واحدة.

② بما أن $\vec{AB}$ ، $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطيًا فالنقاط A ، B ، C ليست واقعة على استقامة واحدة فهي تعين مستويًا وليكن (ABC) له $\vec{AB}$ ، $\vec{AC}$ شعاعا توجيه، ونبحث عن عددين حقيقيين x ، y يحققان العلاقة:

$$\vec{AD} = x.\vec{AB} + y.\vec{AC}$$

$$(-1,-1,1) = x.(9,-1,-1) + y.(3,-2,1)$$

$$(-1,-1,1) = (9x+3y, -x-2y, -x+y) \Rightarrow$$

$9x+3y = -1$ ①

$-x-2y = -1$ ②

$-x+y = 1$ ③

من ③ نجد: $x = y-1$ ④ نعوض في ② نجد:

$$-y+1-2y = -1 \Rightarrow -3y = -2 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$$

نعوض في ④ نجد: $x = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$

نعوض $x = -\frac{1}{3}$ ، $y = \frac{2}{3}$ في ① فنجد:

$$9\left(-\frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{2}{3}\right) = -1 \Rightarrow -3+2 = -1$$

$-1 = -1$ (محققة)

$$\Rightarrow \vec{AD} = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC} \Rightarrow D \in (ABC)$$

فالنقاط A ، B ، C ، D تقع في مستو واحد

③ لدينا $\vec{AD} = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$

من الشكل $\vec{AD} = x.\vec{AB} + y.\vec{AC}$

حيث: $x = -\frac{1}{3}$ ، $y = \frac{2}{3}$ تكون D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:

$$(A, 1-x-y), (B, x), (C, y)$$

$$\left(A, 1+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right), \left(B, -\frac{1}{3}\right), \left(C, \frac{2}{3}\right)$$

$$\left(A, \frac{2}{3}\right), \left(B, -\frac{1}{3}\right), \left(C, \frac{2}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{2}{3}, \ \beta = -\frac{1}{3}, \ \gamma = \frac{2}{3}$$

ثانياً: التمرين الأول

عندما x في جوار $(+\infty)$ نجد:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}(3) = 3$$

وعندما ... حيث لدينا $f(x) \in]2.9, 3[$ فنجد:

$$l = \frac{b+a}{2} = \frac{3.1+2.9}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\varepsilon = \frac{b-a}{2} = \frac{3.1-2.9}{2} = \frac{0.2}{2} = 0.1$$

ومنه نجد: $|f(x)-l| < \varepsilon \Rightarrow$

$$\left|\frac{3x+4}{x+1} - 3\right| < 0.1 \Rightarrow \left|\frac{3x+4-3x-3}{x+1}\right| < \frac{1}{10}$$

$$\left|\frac{1}{x+1}\right| < \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{|x+1|} < \frac{1}{10}$$

وعندما x في جوار $(+\infty)$: $x+1>0 \Leftarrow |x+1| = x+1$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{10} \Rightarrow x+1 > 10 \Rightarrow x > 9$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 9}$$

التمرين الثاني

لنبرهن أن: لكل $x \in]-1,+\infty[$ فإن:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(x+1) \Rightarrow \frac{x}{1+x} - \ln(x+1) < 0$$

ولنفرض:

$$f(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(x+1) \; : \; D_f =]-1,+\infty[$$

f اشتقاقية على D_f ولدينا:

$$f'(x) = \frac{1(1+x) - 1(x)}{(1+x)^2} - \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{1-(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -x = 0 \Rightarrow x = 0 \in D_f$$

$$\Rightarrow f(0) = 0$$

ومنه نرسم جدول الاطراد:

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	↗	0	↘	

ونلاحظ من جدول الاطراد أنه لما $x > -1$ فإن $f(x) \leq 0 \Leftarrow$

$$\frac{x}{1+x} - \ln(x+1) \leq 0 \Rightarrow \frac{x}{1+x} \leq \ln(x+1)$$

فالمتراجحة صحيحة لما $x > -1$.

التمرين الثالث:

(1) $$Z^2 - 2(1-\sqrt{3})Z + 8 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = [-2(1-\sqrt{3})]^2 - 4(1)(8)$$

$$= 4(1-\sqrt{3})^2 - 32 = 4(1-2\sqrt{3}+3) - 32$$

$$= 16 - 8\sqrt{3} - 32 = -16 - 8\sqrt{3}$$

$$= -4(4+2\sqrt{3}) \quad ; \quad 4+2\sqrt{3} = (1+\sqrt{3})^2$$

$$= -4(1+\sqrt{3})^2 < 0$$

فالمعادلة حلان عقديان مترافقان:

$$Z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2(1-\sqrt{3}) + i2(1+\sqrt{3})}{2}$$

$$= (1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})$$

$$Z_2 = \overline{Z_1} = (1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})$$

$$S = \{(1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3}), (1-\sqrt{3}) - i(1+\sqrt{3})\}$$

(2) لنبين:

$$\frac{Z_A}{Z_B} = \frac{(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i}{(\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}-1)i} = \frac{[(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i]^2}{[(\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}-1)i]\cdot[(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i]}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+1)^2 + 2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)i - (\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2}$$

$$= \frac{3+2\sqrt{3}+1 + 2(3-1)i - 3 + 2\sqrt{3} - 1}{3+2\sqrt{3}+1+3-2\sqrt{3}+1}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}+4i}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

ونعلم أن:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = 1\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\Rightarrow \frac{Z_A}{Z_B} = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

فالعلاقة صحيحة، ومنه نجد:

$$\arg(Z_A) - \arg(Z_B) = \frac{\pi}{6}$$

وبما أن $Z_B = \overline{Z_A}$ نجد: $\arg(Z_B) = -\arg(Z_A) \Leftarrow$

$\arg(Z_A)+\arg(Z_A)=\frac{\pi}{6} \Rightarrow$

$2\arg(Z_A)=\frac{\pi}{6} \Rightarrow \arg(Z_A)=\frac{\pi}{12}\ (2\pi)$

ولدينا:

$|Z_A|=\sqrt{(\sqrt3+1)^2+(\sqrt3-1)^2}$

$=\sqrt{3+2\sqrt3+1+3-2\sqrt3+1}=\sqrt8=2\sqrt2$

ومنه نجد: $\cos\theta=\frac{a}{r} \Rightarrow$

$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt3+1}{2\sqrt2}=\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$

$\sin\theta=\frac{b}{r} \Rightarrow$

$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt3-1}{2\sqrt2}=\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$

التمرين الرابع:

يمكن اختيار أعضاء اللجنة من بين الأشخاص الثلاثة غير المتخاصمين وهذا يتم بـ P_3^3 (أو $3!$) طريقة مختلفة

أو يمكن اختيار أعضاء اللجنة بحيث يكون أحدهم من بين المتخاصمين والاثنان الآخران من بين الأشخاص الثلاثة غير المتخاصمين وهذا يتم بـ $P_2^1 \cdot P_3^2 \cdot 3$ طريقة مختلفة

ومنه نجد أن عدد الطرق المطلوبة يساوي:

$P_3^3+P_2^1\cdot P_3^2\cdot 3=3\times2\times1+2\times3\times2\times3$

$=6+36=42$ (طريقة)

ثالثا: المسألة الأولى:

① f معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$.

عندما x في جوار $(-\infty)$ نجد:

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[(x+1)^2\cdot e^{-x}\right]=+\infty \ ; \ \lim_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$

وعندما x في جوار $(+\infty)$ نجد حالة عدم تعيين الشكل $(0\cdot\infty)$

لإزالتها نكتب: $f(x)=(x+1)^2\cdot e^{-x}=\frac{x^2+2x+1}{e^x}$

$=\frac{x^2}{e^x}+2\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x} \Rightarrow$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{e^x}+2\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right]=0$

حيث $\lim e^x$ ...

$\Leftarrow y=0$ مقارب أفقي للمنحنى C عندما x في جوار $(+\infty)$ ولدراسة الوضع النسبي للمنحنى C والمقارب $d: y=0$ ندرس إشارة الفرق بينهما والمعرف على $D=\mathbb{R}$ ونجد:

$f(x)-y_d=(x+1)^2\cdot e^{-x}-0=(x+1)^2\cdot e^{-x}$

$f(x)-y_d=0 \Rightarrow (x+1)^2\cdot e^{-x}=0 \ ; \ e^{-x}>0 \Rightarrow$

$(x+1)^2=0 \Rightarrow x+1=0$

$x=-1\in\mathbb{R}$.

ومنه نجد جدول الوضع النسبي:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)-y_d$	$+$	0	$+$
الوضع النسبي	C فوق d		C فوق d

C و d يتقاطعا في النقطة $x=-1$.

f اشتقاقية على $\mathbb{R}$ ونجد:

$f'(x)=2(x+1)(1)\cdot e^{-x}+(-e^{-x})(x+1)^2$

$=\left[2x+2-(x+1)^2\right]e^{-x}$

$=(2x+2-x^2-2x-1)\,e^{-x}$

$f'(x)=(-x^2+1)\,e^{-x}$

$f'(x)=0 \Rightarrow (-x^2+1)\,e^{-x}=0 \ ; \ e^{-x}>0 \Rightarrow$

$-x^2+1=0 \Rightarrow x^2=1$

إما: $x=1\in\mathbb{R} \Rightarrow f(1)=\frac{4}{e}$

أو: $x=-1\in\mathbb{R} \Rightarrow f(-1)=0$

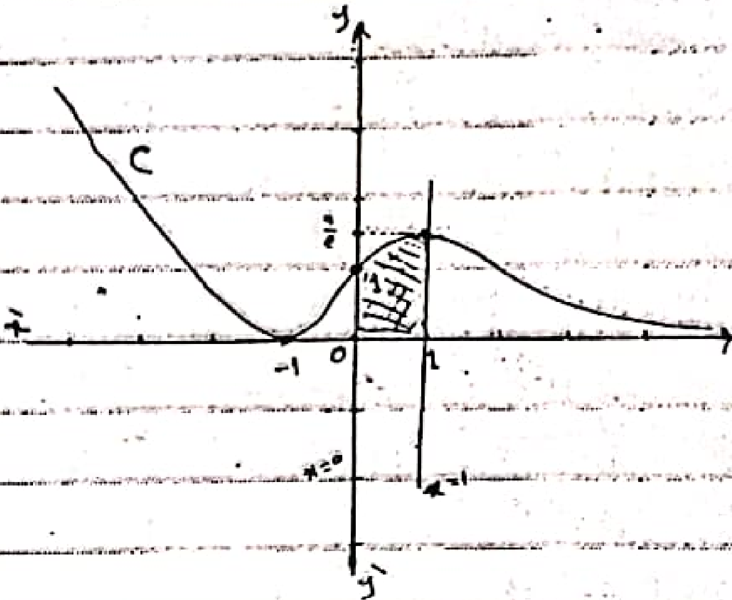
ومنه نجد جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{4}{e}$	↘	0

② نقاط مساعدة للرسم:

$C\cap(yy'): x=0\in\mathbb{R} \Rightarrow f(0)=1 \Rightarrow (0,1)\in C$

$(x+1)^2=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1 \in \mathbb{R} : (-1,0)\in$



③ نلاحظ من جدول التغيرات أنه :

1) عندما $x\in]-\infty,-1]$ فإن f مستمر ومتناقص تماما ولدينا:
$f(]-\infty,-1])=[0,+\infty[$

وبما أن: $f(x)=2\in[0,+\infty[$ فالمعادلة $f(x)=2$ تقبل حل وحيد في المجال $]-\infty,-1]$.

2) عندما $x\in]-1,1]$ فإن f مستمر ومتزايد تماما ولدينا:
$f(]-1,1])=]0,\frac{4}{e}]$

وبما أن: $f(x)=2\notin]0,\frac{4}{e}]$ فإن المعادلة $f(x)=2$ مستحيلة الحل في المجال $]-1,1]$.

3) عندما $x\in]1,+\infty[$ فإن f مستمر ومتناقص تماما ولدينا:
$f(]1,+\infty[)=]0,\frac{4}{e}[$

• بما أن: $f(x)=2\notin]0,\frac{4}{e}[$ فالمعادلة $f(x)=2$ مستحيلة في المجال $]1,+\infty[$.

• فالمعادلة $f(x)=2$ حل وحيد في $\mathbb{R}$ يقع في المجال $]-\infty,-1]$ ولدينا $[-2,-1]\subseteq]-\infty,-1]$

ويكون f مستمر ومتناقص تماما على المجال $[-2,-1]$ ولدينا:

$f(-2)=e^2$, $f(-1)=0$ $\Rightarrow f([-2,-1])=[0,e^2]$

وبما أن: $f(x)=2\in[0,e^2]$ فإن المعادلة $f(x)=2$ تقبل حل يقع في المجال $[-2,-1]$ أي $\alpha\in[-2,-1]$ ولدينا:

$f(\alpha)=2 \Rightarrow (\alpha+1)^2\cdot e^{-\alpha}=2$

$(\alpha+1)^2=2\cdot e^{\alpha}$

إما: $\alpha+1=\sqrt{2}\cdot e^{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \alpha=-1+\sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}\notin[-2,-1]$

أو: $\alpha+1=-\sqrt{2}\cdot e^{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \alpha=-1-\sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}\in[-2,-1]$

$\Rightarrow \alpha=-1-\sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$

④ نلاحظ أنه عندما $x\in[0,1]$ فإن f مستمر و $f(x)>0$

فتكون المساحة المطلوبة:

$A=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1[(x+1)^2\cdot e^{-x}]\,dx$

بفرض:

$u(x)=(x+1)^2 \Rightarrow u'(x)=2(x+1)(1)=2x+2$

$v'(x)=e^{-x} \Rightarrow v(x)=-e^{-x}$ $\Rightarrow$

$A=\left[-e^{-x}(x+1)^2\right]_0^1+2\int_0^1(x+1)\cdot e^{-x}\,dx$

وبفرض:

$u(x)=x+1 \Rightarrow u'(x)=1$

$v'(x)=e^{-x} \Rightarrow v(x)=-e^{-x}$ $\Rightarrow$

$A=\left[-e^{-x}(x+1)^2\right]_0^1+2\left[-e^{-x}(x+1)\right]_0^1+2\int_0^1 e^{-x}\,dx$

$=\left[-e^{-x}(x+1)^2\right]_0^1-2\left[e^{-x}(x+1)\right]_0^1-2\left[e^{-x}\right]_0^1$

$=(-\frac{4}{e}+1)-2(\frac{2}{e}-1)-2(\frac{1}{e}-1)$

$=-\frac{4}{e}+1-\frac{4}{e}+2-\frac{2}{e}+2=\frac{-10}{e}+5$

$=\frac{5e-10}{e}$ (وحدة مساحة)

⑤ لدينا $g(x)=\ln(f(x))$ و g معرف عندما $f(x)>0$ ونلاحظ من جدول التغيرات أن $f(x)>0$ لما $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ أي أن مجموعة تعريف g هي $D_g=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ولدينا:

$g(x)=-x \Rightarrow \ln[(x+1)^2\cdot e^{-x}]=-x=\ln e^{-x}$

وبما أن التابع اللوغاريتمي متزايد تماما:

$(x+1)^2\cdot e^{-x}=e^{-x} \Rightarrow (x^2+2x+1)e^{-x}=e^{-x} \Rightarrow$

$x^2+2x+1=1$

$x^2+2x=0 \Rightarrow x(x+2)=0$

إما $x=0 \in D_g$

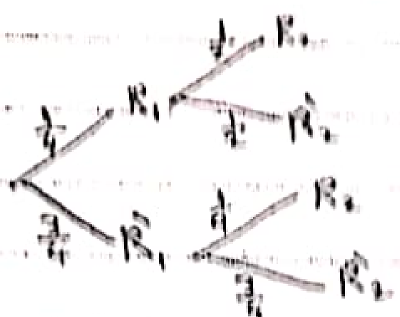
أو $x+2=0 \Rightarrow x=-2 \in D_g$

$\Rightarrow S=\{0,-2\}$

التمرين الثالث:

1. لدينا $P(R_1)=\frac{n(R_1)}{n(\Omega)}=\frac{1}{4}$

2. لنبين أن ... باستعمال الشجرة:



لدينا:

$P(R_2)=P(R_1\cap R_2)+P(\bar{R_1}\cap R_2)$

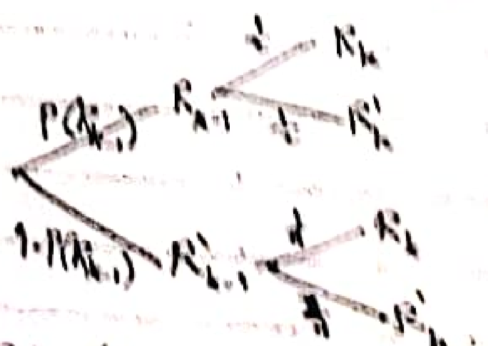
$=P(R_1)\cdot P(R_2|R_1)+P(\bar{R_1})\cdot P(R_2|\bar{R_1})$

$=\frac{1}{2}P(R_1)+\left(1-P(R_1)\right)\cdot\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{2}P(R_1)+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}P(R_1)$

$P(R_2)=\frac{1}{4}P(R_1)+\frac{1}{4}$

3. ... من أجل $k\geq 2$



$P(R_k)=P(R_{k-1}\cap R_k)+P(\bar{R}_{k-1}\cap R_k)$

$=P(R_{k-1})\cdot P(R_k|R_{k-1})$

$+P(\bar{R}_{k-1})\cdot P(R_k|\bar{R}_{k-1})$

$P(R_k)=P(R_{k-1})\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+\left(1-P(R_{k-1})\right)\left(\frac{1}{4}\right)$

$=\frac{1}{2}P(R_{k-1})+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}P(R_{k-1})$

$=\frac{1}{4}P(R_{k-1})+\frac{1}{4}\ ;\ k\geq 2$

4. ① $x_k=P(R_k)-\frac{1}{3}\ ;\ k\geq 1$

$\Rightarrow x_{k+1}=P(R_{k+1})-\frac{1}{3}$

لدينا:

$P(R_k)=\frac{1}{4}P(R_{k-1})+\frac{1}{4}$

$\Rightarrow P(R_{k+1})=\frac{1}{4}P(R_k)+\frac{1}{4}$

ومنه:

$x_{k+1}=\frac{1}{4}P(R_k)+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}$

$=\frac{1}{4}P(R_k)-\frac{1}{12}\ ;\ k\geq 1 \Rightarrow$

$\frac{x_{k+1}}{x_k}=\frac{\frac{1}{4}P(R_k)-\frac{1}{12}}{P(R_k)-\frac{1}{3}}$

$=\frac{\frac{1}{4}\left(P(R_k)-\frac{1}{3}\right)}{P(R_k)-\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$ (ثابت)

ومنه $(x_k)_{k\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{4}$ وحدها

$x_1=P(R_1)-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}$ الأول

② بما أن $(x_k)_{k\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{4}$

$x_k=q^{n-1}\cdot x_1\ ;\ k\geq 1$ و $x_1=-\frac{1}{12}$ فإن

$x_k=\left(\frac{1}{4}\right)^n\cdot\left(-\frac{1}{12}\right)\ ;\ k\geq 1$

$x_k=P(R_k)-\frac{1}{3}\ ;\ k\geq 1$ لدينا

$\Rightarrow P(R_k)=x_k+\frac{1}{3}$

$P(R_k)=\left(\frac{1}{4}\right)^n\cdot\left(-\frac{1}{12}\right)+\frac{1}{3}\ ;\ k\geq 1$

- اختبار (3) -

أولاً: السؤال الأول:

لدينا: $x^3+x+1=0$ نفرض:

$f(x)=x^3+x+1 ; D_f=\mathbb{R}$

f معرّفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ ولدينا:

عندما x في جوار $(+\infty)$: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

وعندما x في جوار $(-\infty)$: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

f اشتقاقية على $\mathbb{R}$ ومنه:

$f'(x)=3x^2+1$

$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-\frac{1}{3}<0$

مستحيلة الحل في $\mathbb{R}$. ومنه نجد جدول التغيرات:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$	+	+ + +	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

ونلاحظ من الجدول أن f مستمرة ومتزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ وأن: $f(]-\infty,+\infty[)=]-\infty,+\infty[$

وبما أن: $f(x)=0\in]-\infty,+\infty[$ فالمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في $\mathbb{R}$ ولدينا f مستمرة ومتزايدة تماماً على المجال $]-1,0[$:

$f(-1)=-1$ ، $f(0)=1$ $\Rightarrow f(-1).f(0)<0$

إذاً α يقع في المجال $]-1,0[$.

السؤال الثاني:

$2y'+y=1 \Rightarrow 2y'=-y+1$

$y'=-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$

من الشكل $y'=ay+b ; a=-\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}$

وحلول هذه المعادلة على $\mathbb{R}$ هي التوابع:

$f_k(x)=k.e^{ax}-\frac{b}{a} ; k\in\mathbb{R}$

$f_k(x)=k.e^{-\frac{1}{2}x}+1 ; k\in\mathbb{R}$

والحل المطلوب يحقق: $f(-1)=2$

$k.e^{\frac{1}{2}}+1=2 \Rightarrow \sqrt{e}k=1 \Rightarrow k=\frac{1}{\sqrt{e}}=e^{-\frac{1}{2}}$

فيكون الحل المطلوب: $f(x)=e^{-\frac{1}{2}}.e^{-\frac{1}{2}x}+1=e^{-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}+1$

السؤال الثالث:

① عندما x في جوار $(+\infty)$: $|x|=x ; x\geq 0$

$\Rightarrow f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}-x$

وعندما x في جوار $(+\infty)$ نجد حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

لإزالتها نكتب:

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x^2+2x+3}-x)(\sqrt{x^2+2x+3}+x)}{\sqrt{x^2+2x+3}+x}$$

$$=\frac{x^2+2x+3-x^2}{\sqrt{x^2+2x+3}+x}$$

$$=\frac{2x+3}{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})}+x}=\frac{2x+3}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+x}$$

$$=\frac{x(2+\frac{3}{x})}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+x} ; |x|=x ; x\geq 0$$

$$=\frac{x(2+\frac{3}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1)}=\frac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}\right)=1$$

② عندما x في جوار $(-\infty)$: $|x|=-x ; x\leq 0$

$\Rightarrow f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}+x$

وعندما x في جوار $(-\infty)$ نجد حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty-\infty)$

لإزالتها نكتب:

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x^2+2x+3}+x)(\sqrt{x^2+2x+3}-x)}{\sqrt{x^2+2x+3}-x}$$

$$=\frac{x^2+2x+3-x^2}{\sqrt{x^2+2x+3}-x}=\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+2x+3}-x}$$

$$f(x)=\frac{2x+3}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}-x}$$

$$=\frac{2x+3}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-x} \quad : |x|=-x : x<0$$

$$=\frac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-x}$$

$$=\frac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-1\right)}=\frac{2+\frac{3}{x}}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-1} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2+\frac{3}{x}}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-1}\right]=-1.$$

السؤال الرابع:

يحصل اللاعب على نقطة واحدة عندما يسحب كرة سوداء وكرة بيضاء ونفرض A حدث حصول اللاعب على نقطة واحدة نجد:

$$P(A)=\frac{P_3^1\cdot P_5^1\cdot 2}{P_8^2}=\frac{3\times5\times2}{8\times7}=\frac{15}{28}.$$

ثانياً: التمرين الأول:

لدينا: $u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n} : n\geq1$

$$\Rightarrow u_{n+1}=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\dots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2} : n\geq1$$

$$\Rightarrow u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}$$

$$=\frac{2n+2-2n-1}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}>0$$

$\Leftarrow (u_n)_{n\geq1}$ متزايدة تماماً لما $n\geq1$.

ولدينا: $v_n=u_n+\frac{1}{4n} : n\geq1$

$$\Rightarrow v_{n+1}=u_{n+1}+\frac{1}{4n+4} : n\geq1 \Rightarrow$$

$$v_{n+1}-v_n=u_{n+1}-u_n+\frac{1}{4n+4}-\frac{1}{4n}$$

$$=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}_{(2n)}+\frac{1}{4n+4}_{n(2n+1)}-\frac{1}{4n}_{(2n+1)(n+1)}$$

$$=\frac{2n+n(2n+1)-(2n+1)(n+1)}{4n(n+1)(2n+1)}$$

$$V_{n+1}-V_n=\frac{2n+2n^2+n-2n^2-3n-1}{4n(n+1)(2n+1)}$$

$$=\frac{-1}{4n(n+1)(2n+1)}<0 \Rightarrow$$

$(V_n)_{n\geq1}$: متناقصة تماماً لما $n\geq1$.

فالشرط الأول محقق (إحداهما متناقصة والأخرى متزايدة)

ولدينا لما $n\geq1$: $V_n=U_n+\frac{1}{4n}$

$$\Rightarrow V_n-U_n=\frac{1}{4n} : n\geq1$$

وعندما n في جوار $(+\infty)$ نجد:

$$\lim_{n\to+\infty}(V_n-U_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4n}=0$$

فالشرط الثاني محقق (متتالية الفرق تتقارب من الصفر)

فالمتتاليتان متجاورتان.

التمرين الثاني:

① مقطع المجسم بمستوٍ عمودي على محور الفواصل ويمر بالنقطة $I(x,0)$ حيث $x\in]0,3[$ هو دائرة مركزها I ونصف قطرها $R=f(x)>0$.

② مساحة الدائرة السابقة: $A(x)=\pi R^2$

$$A(x)=\pi\cdot f^2(x)=\pi x^2(3-x)=(3x^2-x^3)\pi \text{ (وحدة مساحة)}$$

ويكون حجم المقطع: $V=\int_0^3 A(x)\,dx$

$$=\pi\int_0^3(3x^2-x^3)\,dx$$

$$=\pi\left[x^3-\frac{x^4}{4}\right]_0^3$$

$$=\pi\left[\left(27-\frac{81}{4}\right)-(0-0)\right]$$

$$=\pi\left(\frac{108-81}{4}\right)=\frac{27\pi}{4} \text{ (وحدة مكعبة)}$$

التمرين الثالث:

① لدينا:

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{3\sqrt3+i-\sqrt3-i}{\sqrt3-i-\sqrt3-i}=\frac{2\sqrt3}{-2i}$$

$$=\frac{-\sqrt3}{i}=\frac{-\sqrt3\,i}{i^2}$$

$$=\sqrt3\,i$$

وهو الشكل الجبري وبما أن $i=e^{i\frac{\pi}{2}}$ نجد الشكل الأسي:

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\sqrt3\,e^{i\frac{\pi}{2}}$$

وبملاحظة أن: $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{z_{\vec{AC}}}{z_{\vec{AB}}}=\sqrt{3}.e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\frac{AC}{AB}=\left|\frac{z_{\vec{AC}}}{z_{\vec{AB}}}\right|=\left|\sqrt{3}.e^{i\frac{\pi}{2}}\right|=\sqrt{3} \Rightarrow AC\neq AB$

$(\vec{AB},\vec{AC})=\arg\left(\frac{z_{\vec{AC}}}{z_{\vec{AB}}}\right)=\arg\left(\sqrt{3}.e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$

$=\frac{\pi}{2}\,(2\pi) \Rightarrow \vec{AB}\perp\vec{AC}$

فالمثلث ABC قائم في $\hat{A}$ وليس متساوي الساقين.

② لدينا: $z_M\neq z_B$: $\frac{z_M-z_C}{z_M-z_B}=\frac{z_{\vec{CM}}}{z_{\vec{BM}}}$

ويكون العدد السابق تخيلياً بحتاً عندما:

$\arg\left(\frac{z_M-z_C}{z_M-z_B}\right)=\arg\left(\frac{z_{\vec{CM}}}{z_{\vec{BM}}}\right)=\pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{CM}\perp\vec{BM}$

∴ G مجموعة النقاط M هي نقاط الدائرة التي تقبل $[BM]$ قطراً منها باستثناء النقطة B.

③ لدينا: $M\neq B$: $\frac{z_M-z_C}{z_M-z_B}=\frac{z_{\vec{CM}}}{z_{\vec{BM}}}$

ويكون العدد السابق حقيقياً عندما:

$\arg\left(\frac{z_M-z_C}{z_M-z_B}\right)=\arg\left(\frac{z_{\vec{CM}}}{z_{\vec{BM}}}\right)=0$ أو π

أي يكون الشعاعان $\vec{CM}$، $\vec{BM}$ مرتبطين خطياً

ومنه تكون النقاط B، C، M واقعة على استقامة

واحدة أي أن $M\in(BC)$ ومنه نجد أن مجموعة

النقاط F هي نقاط المستقيم (BC) باستثناء

النقطة B.

التمرين الرابع:

(1) لدينا: $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

$=\sqrt{1+4+16}=\sqrt{21}$

$AC=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$

$BC=\sqrt{1+1+25}=\sqrt{27}$

ونلاحظ أن: $BC^2=27$، $AB^2+AC^2=21+6=27$ $\Rightarrow$

$BC^2=AB^2+AC^2$ فالمثلث $A\hat{B}C$ قائم في $\hat{A}$ بحسب عكس

مبرهنة فيثاغورث ومنه نجد:

$S_{ABC}=\frac{1}{2}.[AB].[AC]=\frac{1}{2}.\sqrt{6}.\sqrt{21}$

$=\frac{1}{2}3\sqrt{14}$ (وحدة مساحة)

② لدينا: $\vec{AB}(1,2,4)$، $\vec{AC}(2,1,-1)$

$\left.\begin{array}{l}\frac{x_1}{x_2}=\frac{1}{2}\\ \frac{y_1}{y_2}=2\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x_1}{x_2}\neq\frac{y_1}{y_2} \Rightarrow$

$\vec{AC}$، $\vec{AB}$ غير مرتبطين خطياً فهما يعينان المستوي (ABC) ونلاحظ أنه:

$\vec{n}.\vec{AB}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=2-6+4$

$=0 \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{AB}$

$\vec{n}.\vec{AC}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

$=4-3-1=0 \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{AC}$

فالشعاع $\vec{n}$ ناظم على المستوي (ABC) لأنه يعامد شعاعين غير مرتبطين خطياً فيه.

وبما أن النقطة $M(x,y,z)\in(ABC)$ فإنه:

$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

$2(x-1)-3(y-0)+1(z+1)=0$

$2x-3y+z-1=0$: (ABC)

③ لدينا: $dist(D,ABC)=\frac{|a\alpha+b\beta+c\gamma+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$=\frac{|2(-4)-3(2)+1(1)-1|}{\sqrt{4+9+1}}=\frac{14}{\sqrt{14}}$

$=\sqrt{14}$

ومنه نجد: $h=dist(D,ABC)$: $V_{DABC}=\frac{1}{3}.S_{ABC}.h$

$=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}3\sqrt{14}.\sqrt{14}=7$ (وحدة حجم)

ثالثاً: المسألة الأولى:

(1) f معرّف ومستمر على $D_f=]0,e[\cup]e,+\infty[$

ولدينا عندما x قريبة جداً من العدد (0) نجد حالة عدم تعيين من

الشكل $(0.+\infty)$ وإزالتها نكتب:

$$f(x)=\frac{1}{x(1-\ln x)}=\frac{1}{x-x\ln x}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x-x\ln x}=+\infty\ ;\ \lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty\ ,\ \lim_{x\to0^+}x\ln x=0$$

$\Leftarrow x=0$ مقارب شاقولي للخط C هو $y'y$ عند $(+\infty)$ و C على يمين المقارب

وعندما x في جوار $(+\infty)$ نجد:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x(1-\ln x)}=0\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$$

$\Leftarrow y=0$ مقارب أفقي للخط C هو $x'x$ في جوار $(+\infty)$

وعندما x قريبة جداً من العدد (e) نجد:

$$\lim_{x\to e^-}f(x)=\lim_{x\to e^-}\frac{1}{x(1-\ln x)}=+\infty\Rightarrow$$

$x=e$ مقارب شاقولي للخط C // $y'y$ عند $(+\infty)$ و C على يسار المقارب

$$\lim_{x\to e^+}f(x)=\lim_{x\to e^+}\frac{1}{x(1-\ln x)}=-\infty\Rightarrow$$

$x=e$ مقارب شاقولي للخط C // $y'y$ عند $(-\infty)$ و C على يمين المقارب

f اشتقاقي على D_f ونجد:

$$f'(x)=\frac{-[x(1-\ln x)]'}{[x(1-\ln x)]^2}=\frac{-[1(1-\ln x)+\frac{-1}{x}\cdot x]}{x^2(1-\ln x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-1+\ln x+1}{x^2(1-\ln x)^2}=\frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\ln x=0\Rightarrow x=1\in D_f$$

$$\Rightarrow f(1)=1$$

ومنه نجد جدول التغيرات:

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

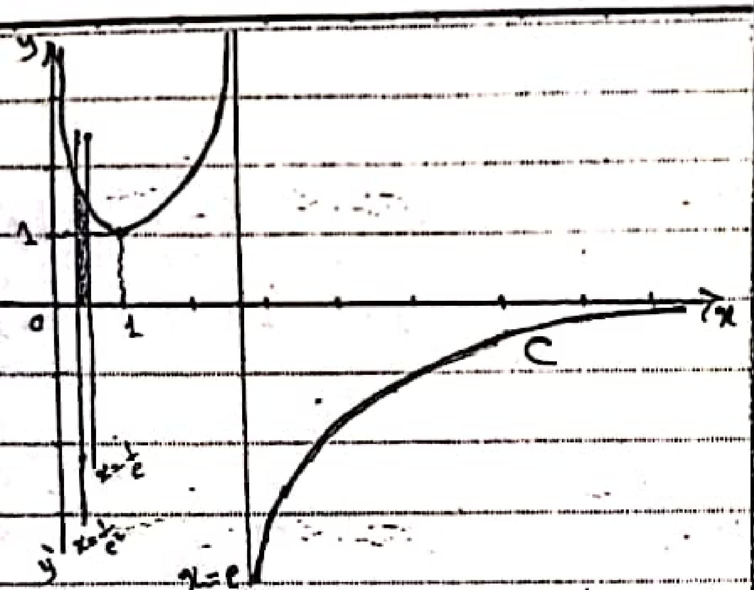
ونلاحظ من الجدول أن $f(1)=1$ قيمة صغرى محلية

(2) نقاط مساعدة للرسم:

$C\cap y'y$: $x=0\notin D_f\Rightarrow$ لا يوجد تقاطع مع المحور $y'y$

$C\cap x'x$: $f(x)=0\Rightarrow 1=0$ (مستحيلة)

لا يوجد تقاطع مع المحور $x'x$



(3) نلاحظ أنه عندما $x\in[\frac{1}{e^2},\frac{1}{e}]$ فإن f مستمرة و $f(x)>0$

ومنه نجد المساحة المطلوبة:

$$S=\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}f(x)\,dx=\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}\frac{1}{x(1-\ln x)}\,dx$$

$$=\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}\frac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}\,dx=-\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}\frac{\frac{-1}{x}}{1-\ln x}\,dx\quad\left(\frac{u'}{u}\right)$$

وبما أنه $x\in[\frac{1}{e^2},\frac{1}{e}]$ فإن $1-\ln x>0$ ومنه نجد:

$$S=-\left[\ln(1-\ln x)\right]_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}$$

$$=-\left[\ln(1-\ln\tfrac{1}{e})-\ln(1-\ln\tfrac{1}{e^2})\right]$$

$$=-\left[\ln(1+1)-\ln(1+2)\right]$$

$$=-\left[\ln2-\ln3\right]=\ln3-\ln2$$

$$=\ln\frac{3}{2}\ \text{(وحدة مساحة)}$$

المسألة الثانية:

(1) A_1 حدث صد الحارس ضربة الجزاء الأولى و A_2 حدث صد الحارس ضربة الجزاء الثانية فيكون:

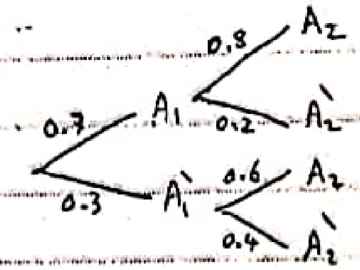
$P(A_2|A_1)=0.8$

A_1' حدث عدم صد الحارس ضربة الجزاء الأولى فيكون:

$P(A_2|A_1')=0.6$

(2) لدينا التمثيل الشجري التالي لضربتي الجزاء الأولى والثانية

$P(A_1)=0.7$ ...



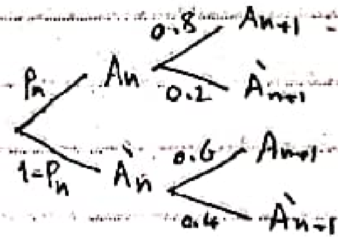
ومنه نجد: $P(A_2)=P(A_1\cap A_2)+P(\bar{A}_1\cap A_2)$

$=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)+P(\bar{A}_1)\cdot P(A_2|\bar{A}_1)$

$=(0.7)(0.8)+(0.3)(0.6)$

$P(A_2)=0.56+0.18=0.74$

③ 1. لدينا التمثيل الشجري التالي للتجربة $n\geq 1, n$



ومنه نجد من أجل $n\geq 1$:

$P_{n+1}=P(A_{n+1})=P(A_n\cap A_{n+1})+P(\bar{A}_n\cap A_{n+1})$

$=P(A_n)\cdot P(A_{n+1}|A_n)+P(\bar{A}_n)\cdot P(A_{n+1}|\bar{A}_n)$

$=P_n(0.8)+(1-P_n)(0.6)$

$=0.8P_n+0.6-0.6P_n$

$P_{n+1}=0.2P_n+0.6 \;;\; n\geq 1$

2. لدينا: $U_n=P_n-0.75 \;;\; n\geq 1$

$\Rightarrow U_{n+1}=P_{n+1}-0.75=0.2P_n+0.6-0.75$

$=0.2P_n-0.15 \;;\; n\geq 1 \Rightarrow$

$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{0.2P_n-0.15}{P_n-0.75}=\frac{0.2(P_n-0.75)}{P_n-0.75}$

$=0.2$ (ثابت)

$\Leftarrow$ $(U_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها $q=0.2$.

وحدها الأول: $U_1=P_1-0.75$

$=0.7-0.75=-0.05$

ومنه عبارة $(U_n)_{n\geq 1}$ بدلالة n:

$U_n=q^{n-1}\cdot U_1 \;:\; n\geq 1$

$U_n=(0.2)^{n-1}\cdot(-0.05) \;;\; n\geq 1$

ولدينا: $U_n=P_n-0.75 \;;\; n\geq 1$

$\Rightarrow P_n=U_n+0.75$

$P_n=(0.2)^{n-1}\cdot(-0.05)-0.75 \;;\; n\geq 1$

وهي عبارة $(P_n)_{n\geq 1}$ بدلالة n وبما أنّ: $-1<q=0.2<1$

فمن عندما n في جوار $(+\infty)$: $\lim_{n\to+\infty}(0.2)^{n-1}=0$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}P_n=-0.75$

— اختبار (4) —

أولاً: السؤال الأول:

① نلاحظ أنّه عندما x في جوار $(+\infty)$: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-1$

$\Leftarrow$ $y=-1$ مقارب أفقي للمنحنى C في جوار $(+\infty)$ كما نلاحظ أنّ:

عندما $x\in]-\infty,-1[$ $\Leftarrow$ C تحت المقارب

وعندما $x=-1$ فإنّ C والمقارب يتقاطعان

وعندما $x\in]-1,+\infty[$ $\Leftarrow$ C فوق المقارب

② للمنحنى C قيمة حدّية واحدة: $f(0)=0$ قيمة كبرى محلية

③ برسم المستقيم $d:y=k$ نلاحظ أنّ:

عندما $k\in]-\infty,-1]$ فإنّ C، d يتقاطعان بنقطة واحدة فللمعادلة $f(x)=k$ حلّ وحيد في D_f

عندما $k\in]-1,0[$ فإنّ C، d يتقاطعان بنقطتين مختلفتين فللمعادلة $f(x)=k$ حلّان في D_f

عندما $k=0$ فإنّ C، d يتقاطعان بنقطة واحدة فللمعادلة $f(x)=k$ حلّ وحيد في D_f

عندما $k\in]0,+\infty[$ فإنّ C، d لا يتقاطعان بأية نقطة فالمعادلة $f(x)=k$ مستحيلة الحلّ في D_f

السؤال الثاني:

① عملية اختيار مرتبة الآحاد بـ(6) طرق مختلفة والعشرات بـ(5)

طرق مختلفة والثالث بـ (4) طرق مختلفة وحسب المبدأ الأساسي في العد يكون عدد الأعداد الناتجة: $6\times5\times4=120$ (عدد)

أو: عدد الأعداد الناتجة يساوي:

$$P_6^3 = 6\times5\times4 = 120 \quad \text{(عدد)}$$

[عدد طرق ترتيب جزئية من عناصر المجموعة ... يساوي P_n^r]

② يمكن اختيار مرتبة الآحاد بطريقة واحدة [العدد 5] والثانية بطريقتين مختلفتين [العددان 2 أو 3] ومرتبة العشرات بـ (4) طرق مختلفة فيكون عدد الأعداد الناتجة:

$$1\times2\times4=8 \quad \text{(أعداد)}$$

السؤال الثالث:

① لدينا:

$$AB=\sqrt{9+9+9}=\sqrt{27}=3\sqrt3$$
$$AC=\sqrt{9+0+9}=\sqrt{18}=3\sqrt2$$
$$BC=\sqrt{0+9+36}=\sqrt{45}=3\sqrt5$$

ونلاحظ أن:

$$\left.\begin{aligned} BC^2 &= 45 \\ AC^2+AB^2 &= 18+27=45 \end{aligned}\right\} \Rightarrow BC^2=AC^2+AB^2$$

فالمثلث ABC قائم في $\hat{A}$ بحسب عكس مبرهنة فيثاغورث.
فالعبارة صحيحة.

② (AD) موجه بالشعاع $\vec{AD}(-3,6,-3)$ والشعاعان: $\vec{AB}(3,3,3)$, $\vec{AC}(3,0,-3)$ غير مرتبطين خطياً (متعامدان لأن ABC قائم في $\hat{A}$) لهما يوجهان المستوي (ABC) ومنه نجد:

$$\vec{AD}\cdot\vec{AB}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$
$$=-9+18-9=0 \Rightarrow \vec{AD}\perp\vec{AB}$$
$$\vec{AD}\cdot\vec{AC}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$
$$=-9+0+9=0 \Rightarrow \vec{AD}\perp\vec{AC}$$
$$\Rightarrow (AD)\perp(ABC)$$

لأن شعاع التوجيه $\vec{AD}$ يعامد شعاعين غير مرتبطين خطياً في المستوي (ABC). فالعبارة صحيحة.

③ بما أن $A\hat{B}C$ قائم في $\hat{A}$ نجد:

$$S_{ABC}=\frac12\cdot[AB]\cdot[AC]$$
$$=\frac12\cdot(3\sqrt3)\cdot(3\sqrt2)=\frac{9\sqrt6}{2} \quad \text{(وحدة مساحة)}$$

وبما أن $AD\perp(ABC)$ فإن A هي المسقط القائم للنقطة D على المستوي (ABC) ومنه نجد:

$$h=dist(D,ABC)=AD$$
$$h=\sqrt{9+36+9}=\sqrt{54}=3\sqrt6$$

فيكون الحجم:

$$\Rightarrow V_{DABC}=\frac13\cdot S_{ABC}\cdot h$$
$$=\frac13\cdot\frac{9\sqrt6}{2}\cdot3\sqrt6$$
$$=\frac{9\times6}{2}=27 \quad \text{وحدة حجم}$$

فالعبارة خاطئة.

ثانياً: التمرين الأول:

① f مستمر على المجال $[0,\ln3]$ ولدينا:

$$\int_0^{\ln3} f(x)\,dx=\int_0^{\ln3} x\,e^{-x}\,dx$$

نفرض:

$$u(x)=x \Rightarrow u'(x)=1$$
$$v'(x)=e^{-x} \Rightarrow v(x)=-e^{-x}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\ln3} f(x)\,dx=\left[-x\,e^{-x}\right]_0^{\ln3}+\int_0^{\ln3} e^{-x}\,dx$$
$$=\left[-x\,e^{-x}\right]_0^{\ln3}-\left[e^{-x}\right]_0^{\ln3}$$
$$=\left(-\ln3\,e^{-\ln3}-0\right)-\left(e^{-\ln3}-1\right)$$
$$=\frac{-\ln3}{3}-\frac13+1=\frac{2-\ln3}{3}$$

② لدينا:

$$y=f(x)=x\,e^{-x}$$

f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومنه:

$$y'=f'(x)=e^{-x}-x\,e^{-x}$$

نعوض f, f' في المعادلة التفاضلية نجد:

$$l_1=e^{-x}-x\,e^{-x}+x\,e^{-x}=e^{-x}=l_2$$

فالتابع f هو حل للمعادلة.

التمرين الثاني:

① [illegible]

ومنه L' نجد شعاع التوجيه: $\vec{u'}(-5,-2,2)$ ونلاحظ أنه:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x}{x'}=0\\ \frac{y}{y'}=\frac{1}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{x'} \neq \frac{y}{y'} \Rightarrow$$

$\vec{u'}, \vec{u}$ غير مرتبطين خطيا

فالمستقيمان L, L' غير متوازيين وبحل المشترك للتمثيلين الوسيطيين نجد:

$-1 = 4-5S$ (1)

$1-t = 3-2S$ (2)

$1-2t = -1+2S$ (3)

من (1) نجد: $5S = 5 \Rightarrow S=1$

نعوض في (2) نجد: $1-t = 3-2 \Rightarrow t=0$

نعوض $S=1$ ، $t=0$ في (3) نجد:

تحقق $1-2(0) = -1+2(1) \Rightarrow 1=1$

فالمستقيمان متقاطعان في نقطة واحدة ولتكن I

لإيجادها نعوض $t=0$ في L نجد:

$$I:\begin{cases} x=-1\\ y=1-0=1\\ z=1-2(0)=1\end{cases} \Rightarrow I(-1,1,1)$$

(2) بما أن $\vec{u}, \vec{u'}$ غير مرتبطين خطيا فهما يمثلان شعاعا توجيه للمستوي P المحدد بالمستقيمين L, L'.

و نفرض الناظم على P: $\vec{n}(a,b,c) \neq \vec{0}$ نجد:

$\vec{n} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{u}=0 \Rightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$

$-b-2c=0 \Rightarrow \boxed{b=-2c}$ (1)

$\vec{n} \perp \vec{u'} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{u'}=0 \Rightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$

$\boxed{-5a-2b+2c=0}$ (2)

نعوض (1) في (2) نجد: $-5a+4c+2c=0$

$5a = 6c \Rightarrow a=\frac{6}{5}c$

ومنه نجد: $\vec{n}\left(\frac{6}{5}c,-2c,c\right) : c \neq 0$

ونفرض $c=5$ نجد الناظم: $\vec{n}(6,-10,5)$

ومنه كانت $M(x,y,z)\in P$ فإن:

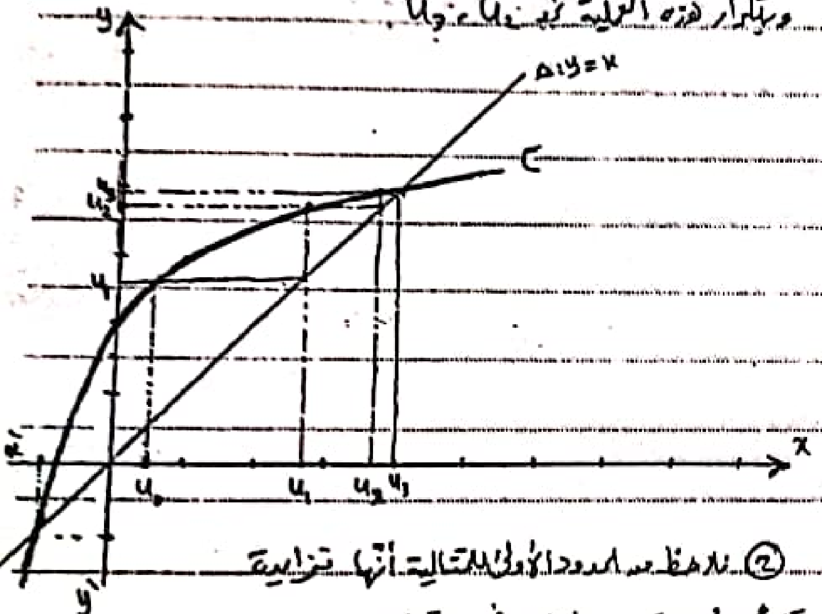
$a(x-x_I)+b(y-y_I)+c(z-z_I)=0$

$6(x+1)-10(y-1)+5(z-1)=0$

$P: 6x-10y+5z+11=0$

التمرين الثالث:

(1) نعين $u_0=\frac{1}{2}$ على محور الفواصل وبإسقاطها على C نجد النقطة (u_0,u_1) لأن $f(u_0)=u_1$ تعني أن ترتيب هذه النقطة هو u_1 ثم بإسقاط u_1 على محور التراتيب Δ نجد النقطة (u_1,u_1) حيث $\Delta: y=x$ وبإسقاط هذه النقطة على محور الفواصل نجد u_1 وبتكرار هذه العملية نجد u_2 ، u_3.



(2) نلاحظ من الحدود الأولى للمتتالية أنها متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

(3) لدينا: $V_n = \frac{u_n-4}{u_n+1}$ ، $n \geq 0 \Rightarrow V_{n+1} = \frac{u_{n+1}-4}{u_{n+1}+1}$

ومن العلاقة التراجعية نجد:

$$V_{n+1} = \frac{\frac{5u_n+4}{u_n+2}-4}{\frac{5u_n+4}{u_n+2}+1} = \frac{\frac{5u_n+4-4u_n-8}{u_n+2}}{\frac{5u_n+4+u_n+2}{u_n+2}}$$

$$V_{n+1} = \frac{u_n-4}{6u_n+6}, \quad n \geq 0$$

ومنه نجد:

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\frac{u_n-4}{6u_n+6}}{\frac{u_n-4}{u_n+1}} = \frac{u_n+1}{6(u_n+1)} = \frac{1}{6} \text{ (ثابت)}$$

فالمتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $\left(q=\frac{1}{6}\right)$ وحدها الأول:

$$V_0=\frac{U_0-4}{U_0+1}=\frac{\frac{1}{2}-4}{\frac{1}{2}+1}=\frac{\frac{-7}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{-7}{3}$$

② بما أن $(V_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q=\frac{1}{6}$ وحدها الأول $V_0=\frac{-7}{3}$ نجد:

$$V_n=q^n\cdot V_0 \ ;\ n\geq 0$$

$$V_n=\left(\frac{1}{6}\right)^n\cdot\frac{-7}{3} \ ;\ n\geq 0$$

وهي عبارة $(V_n)_{n\geq 0}$ بدلالة n. ولدينا:

$$V_n=\frac{U_n-4}{U_n+1} \ ;\ n\geq 0 \Rightarrow$$

$$V_n\cdot U_n+V_n=U_n-4$$

$$V_n\cdot U_n-U_n=-V_n-4$$

$$U_n(V_n-1)=-V_n-4$$

$$\Rightarrow U_n=\frac{-V_n-4}{V_n-1} \ ;\ n\geq 0$$

$$U_n=\frac{\frac{7}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n-4}{-\frac{7}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n-1} \ ;\ n\geq 0$$

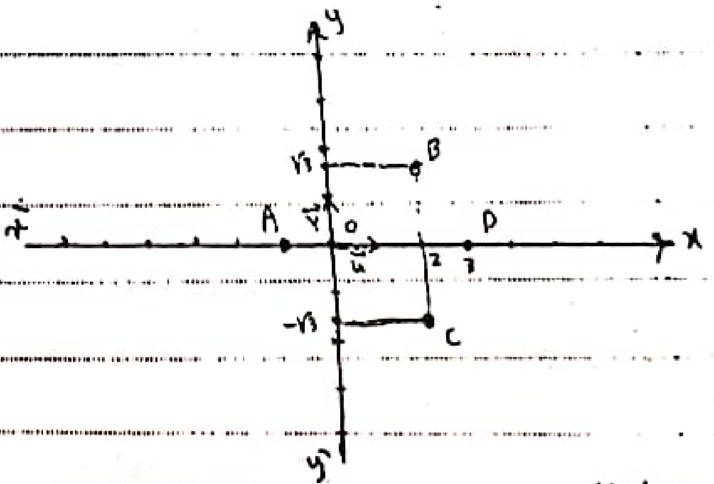
وهي عبارة $(U_n)_{n\geq 0}$ بدلالة n.

وبما أن $-1<q=\frac{1}{6}<1$ نجد عندما n في جوار $(+\infty)$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n=0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}U_n=4$$

التمرين الرابع:

① من الأعداد a, b, c, d نجد $A(-1,0)$، $B(2,\sqrt{3})$، $C(2,-\sqrt{3})$، $D(3,0)$ وفي المعلم المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نجد:



ولدينا:

$$AB=\sqrt{9+3}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

$$AC=\sqrt{9+3}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

$$BC=\sqrt{0+12}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow AB=AC=BC=2\sqrt{3}$$

فالمثلث ABC متساوي الأضلاع

②
$$\frac{a-c}{d-c}=\frac{-1-2+i\sqrt{3}}{3-2+i\sqrt{3}}=\frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(-3+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}=\frac{-3+3\sqrt{3}i+\sqrt{3}i+3}{1+3}$$

$$=\frac{4\sqrt{3}i}{4}=\sqrt{3}i$$

ومنه نجد:
$$\frac{Z_{\overrightarrow{CA}}}{Z_{\overrightarrow{CD}}}=\frac{a-c}{d-c}=\sqrt{3}i \Rightarrow$$

$$\frac{CA}{CD}=\left|\frac{Z_{\overrightarrow{CA}}}{Z_{\overrightarrow{CD}}}\right|=|\sqrt{3}i|=\sqrt{3}\Rightarrow CA\neq CD$$

$$(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA})=\arg\left(\frac{Z_{\overrightarrow{CA}}}{Z_{\overrightarrow{CD}}}\right)=\arg(\sqrt{3}i)=\frac{\pi}{2}(2\pi)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CD}$$

فالمثلث $A\hat{C}D$ قائم في $\hat{C}$ وليس متساوي الساقين

③
$$\frac{\alpha a+\beta b+\gamma c}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{-1(-1)+2(2+\sqrt{3}i)+2(2-\sqrt{3}i)}{-1+2+2}$$

$$=\frac{1+4+2\sqrt{3}i+4-2\sqrt{3}i}{3}$$

$$=\frac{9}{3}=3=d\Rightarrow$$

D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$، $(B,2)$، $(C,2)$

ثالثاً: المسألة الأولى: أولاً:

① لدينا:
$$4(\sqrt{x}\cdot\ln\sqrt{x})^2=4(\sqrt{x})^2\cdot(\ln\sqrt{x})^2$$

$$=4x\cdot\left(\frac{1}{2}\ln x\right)^2$$

$$=4x\cdot\frac{1}{4}\cdot(\ln x)^2$$

$$=x\cdot(\ln x)^2=f(x)$$

فالعلاقة صحيحة.

② f معرّف ومستمرّ على $]0,+\infty[$ ولدينا:

عندما x في جوار $(+\infty)$ نجد:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot(\ln x)^2\right]=+\infty \ ,\ \lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$$

وعندما x تؤول إلى [illegible]

الشكل $(0,+\infty)$ [illegible]

$f(x) = 4(\sqrt{x}.\ln\sqrt{x})^2 \Rightarrow$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}[4(\sqrt{x}.\ln\sqrt{x})^2]$

$= 4(0)^2 = 0 : \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}.\ln\sqrt{x} = 0$

f اشتقاقي على $]0,+\infty[$ ومنه:

$f'(x) = 1.(\ln x)^2 + 2(\ln x)(\frac{1}{x}).x$

$= (\ln x)^2 + 2\ln x$

$f'(x)=0 \Rightarrow (\ln x)^2+2\ln x=0 \Rightarrow \ln x(\ln x+2)=0$

إما: $\ln x=0 \Rightarrow x=1 \in]0,+\infty[\Rightarrow f(1)=0$

أو: $\ln x+2=0 \Rightarrow \ln x=-2$

$\Rightarrow x = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \in]0,+\infty[$

$f(e^{-2}) = e^{-2}(\ln e^{-2})^2$

$= e^{-2}(-2)^2 = \frac{4}{e^2}$

ومنه نجد جدول التغيرات:

x	0		$\frac{1}{e^2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

ثانيا: لدينا من أجل $x>0$:

$l_1 = f(x)-g(x) = x(\ln x)^2+2x\ln x$

$l_2 = x.f'(x) = x[(\ln x)^2+2\ln x] = x(\ln x)^2+2x\ln x \Rightarrow l_1=l_2$

فالعلاقة صحيحة من أجل $x>0$ ومنه نجد:

$f(x)-g(x) = x.f'(x)$

ومنه من أجل $x\in]0,+\infty[$: $x>0$ ثابت موجب

إشارة الفرق موافقة لإشارة $f'(x)$ ونلاحظ

من جدول التغيرات أن:

1) $x\in]0,\frac{1}{e^2}[\cup]1,+\infty[\Rightarrow f'(x)>0$

2) $x=\frac{1}{e^2}, x=1 \Rightarrow f'(x)=0$

3) $x\in]\frac{1}{e^2},1[\Rightarrow f'(x)<0$

ومنه نجد جدول الوضع النسبي:

x	0		$\frac{1}{e^2}$		1		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		C_f فوق C_g		C_f تحت C_g		C_f فوق C_g	

ومنه $x=1$ و $x=\frac{1}{e^2}$ فإن C_f و C_g متقاطعان.

ثالثا: ① معادلة المماس T للمنحني C_f عند النقطة ذات الفاصلة x_0:

$T: y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$y = x.f'(x_0) - x_0.f'(x_0) + f(x_0)$ (*)

ومن أجل $x>0$ ثابت:

$f(x)-g(x) = x.f'(x) \Rightarrow f(x_0)-g(x_0) = x_0.f'(x_0)$

نعوض في (*) نجد:

$y = x.f'(x_0) - (f(x_0)-g(x_0)) + f(x_0)$

$y = x f'(x_0) - f(x_0)+g(x_0)+f(x_0)$

$T: y = x.f'(x_0)+g(x_0)$

② عند تقاطع T مع المحور yy' تكون $x=0$ نعوض في T

نجد: $y=g(x_0)$ أي أن ترتيب نقطة تقاطع T مع yy'

يساوي ترتيب x_0 بالنسبة للتابع g ولذلك لرسم المماس للمنحني C_f

عند نقطة منه فاصلتها x_0 نعين على محور التراتيب النقطة التي

لها الترتيب $g(x_0)$ ونصلها مع نقطة التماس.

المسألة الثانية:

① فضاء العينة:

$\Omega = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5)\}$

② لدينا: $A = \{(1,3),(2,3),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5)\}$

$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$B = \{(1,5), (2,4),(2,5),(3,3),(3,4),(3,5)\}$

$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

/ /

$A \cap B = \{(3,3),(3,4),(3,5)\}$

$\Rightarrow P(A\cap B) = \frac{n(A\cap B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

ونلاحظ أنه:

$P(A).P(B) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(A\cap B) = \frac{1}{4}$ $\Big\} \Rightarrow$

$P(A).P(B) = P(A\cap B)$

فالحدثان B , A مستقلان احتمالياً.

③ مجموعة قيم المتحول X:

$I = \{3,4,5,6,7,8\}$

والقانون الاحتمالي للمتحول X:

$P(X=3) = \frac{1}{12}$, $P(X=4) = \frac{2}{12}$

$P(X=5) = \frac{3}{12}$, $P(X=6) = \frac{3}{12}$

$P(X=7) = \frac{2}{12}$, $P(X=8) = \frac{1}{12}$

وجدول القانون الاحتمالي للمتحول X:

x_i	3	4	5	6	7	8
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

والتوقع الرياضي للمتحول X:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i \cdot p_i$$

$$= \frac{3+8+15+18+14+8}{12} = \frac{66}{12}$$

$$= \frac{11}{2}$$

والتباين للمتحول X:

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

حيث: $E(X^2) = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 \cdot p_i$

$$= \frac{9+32+75+108+98+64}{12}$$

$$= \frac{386}{12} = \frac{193}{6}$$

$$E^2(X) = \left(\frac{11}{2}\right)^2 = \frac{121}{4}$$

ومنه نجد:

$$V(X) = \frac{193}{6} - \frac{121}{4}$$

$$= \frac{386-363}{12} = \frac{23}{12}$$

"The best way to predict the future is to create it"

"Abraham Lincoln"