

وما أن الجسم ساكن:

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{W} + \vec{F}_{S_0} = \vec{0}$$

بالإسقاط على محور شاقوليٍّ موجه نحو الأسفل:

$$W - F_{S_0} = 0$$

$$\textcircled{1} \quad W = F_{S_0}$$

تؤثر في النابض قوة شد \vec{F}'_{S_0} التي تسبب له الاستطالة x_0

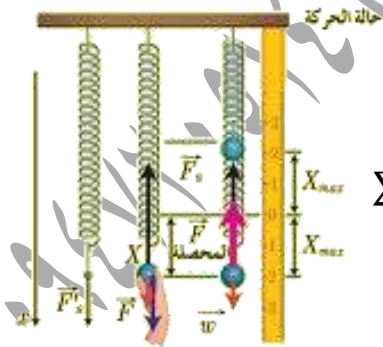
$$F'_{S_0} = kx_0$$

لكن $F_{S_0} = F'_{S_0}$ (لأنهما قوتى داخليتين)بالتعويض بـ $\textcircled{1}$ نجد أن: $W = kx_0$ حيث x_0 الاستطالة السكونية للنابض.**(2) حالة الحركة:** القوى الخارجة المؤثرة في مركز عطالةالجسم: قوة الثقل \vec{W} وقوة توتر النابض \vec{F}_S

بتطبيق قانون نيوتن الثاني:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\sum \vec{F} = \vec{W} + \vec{F}_S = m\vec{a}$$



بالإسقاط على محور شاقوليٍّ موجه نحو الأسفل:

$$\textcircled{2} \quad \sum F = W - F_S = ma$$

النواس المرن

تعريفه: نابض مرزب شاقوليٍّ مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت

صلابته K يتصل به جسم صلب كتلته m يقوم بحركة اهتزازية على

جانبي نقطة ثابتة تدعى **مركز الاهتزاز**.

• عند وصل النهاية السفلية للنابض بجسم صلب نلاحظ أن

النابض يستطيل بمقدار x_0 ومن ثم يصبح مركز العطالة C ساكناًفي **مركز الاهتزاز (التوازن) O**.• x_0 **استطالة سكونية:** وهي بعد مركز عطالة الجسمالصلب عن مركز الاهتزاز (التوازن) عند **سكون** مركز

العطالة.

• نوتر على النهاية السفلية للنابض بقوة شد وضمن حدود مرونة

النابض بحيث يستطيل النابض مسافة x (المطال) ثم نترك النابض يهتز

فنلاحظ أن النابض يهتز على جانبي مركز التوازن

لهذا نقول أن حركة الجسم الصلب **حركة اهتزازية**.• **المطال x :** هو البعد الجبري لمركز عطالة الجسم الصلب

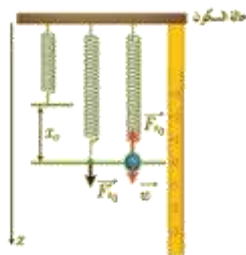
عن مركز التوازن.

دراسة تحريكية: برهن أن محصلة القوى المؤثرة

في مركز عطالة الجسم الصلب في النواس المرزب هي قوة

إرجاع تعطى بالعلاقة $F = -KX$.**(1) حالة السكون:** يستطيل النابض مسافة x_0 بعد تعليق الجسمفيه ثم **يتوازن الجسم** بتأثير

قوتين:

قوة ثقله \vec{W} وقوة توتر النابض \vec{F}_{S_0} ,

$(\omega_0 t + \bar{\varphi})$ طور الحركة في اللحظة t .

$\bar{\varphi}$ الطور الابتدائي في اللحظة $t=0$ ويقدر بال rad وهو مقدار ثابت

للتحقق من صحة الحل نشتق تابع المطال مرتين بالنسبة للزمن

$$(x)_t' = \bar{v} = -\omega_0 X_{\max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(x)_t'' = \bar{a} = -\omega_0^2 X_{\max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{x})_t'' = -\omega_0^2 \bar{x} \quad \dots \dots \dots \textcircled{3}$$

بالمقارنة بين (1) و (3) نجد أن:

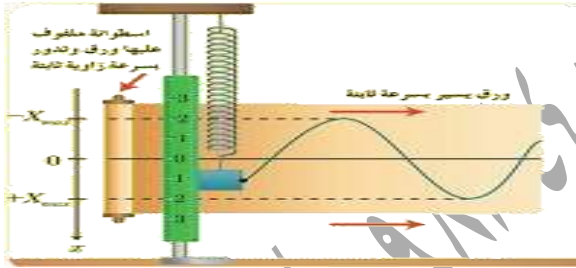
$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$$

وهذا محقق لأن k, m موجبان.

نتيجة: إن حركة النواس المرن هي هزازة جيبيّة

توافقية انسحابية بسيطة.



استنتاج علاقة الدّور الخاصّ للنّواس المرن:

بما أن: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ و $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

بالمساواة نجد: $\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{k}{m}}$ بالتالي:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

وهي علاقة الدّور الخاصّ للنّواس المرن غير المتخامد.

من العلاقة السّابقة أستنتج أن الدّور الخاصّ:

(1) لا يتعلّق بسعة الاهتزاز X_{\max} .

(2) يتناسب طردياً مع الجذر التربيعي لكتلة الجسم المهتز m .

(3) يتناسب عكساً مع الجذر التربيعي لتأب صلابة النابض k .

تؤثر في النابض قوة شد \vec{F}'_S التي تسبب له الاستطالة

$$F'_S = k(x_0 + \bar{x}) \quad \text{إذا: } x_0 + \bar{x}$$

$$F_S = F'_S \quad \text{لكن (لأنهما قوى داخلية)}$$

بالتعويض بـ (2) نجد: $\sum F = kx_0 - k(x_0 + \bar{x}) = m\bar{a}$

$$\sum F = kx_0 - kx_0 - k\bar{x} = m\bar{a}$$

$$F = -k\bar{x} = m\bar{a}$$

نتيجة: إن محصلة القوى الخارجيّة المؤثرة في مركز عطالة

الجسم في كل لحظة هي **قوة إرجاع** لأنها **تعيد** الجسم إلى

مركز الاهتزاز دوماً، وهي تتناسب **طردياً** مع المطال X

و**تعاكسه** بالإشارة.

استنتاج طبيعة حركة النّواس المرن:

برهن أن حركة الجسم الصلب المعلق بالنابض في النّواس

المرن غير المتخامد حركة جيبيّة انسحابية توافقية بسيطة ثم

استنتج الدور الخاص لهذا النّواس.

البرهان: إن محصلة القوى الخارجيّة التي يخضع لها

مركز عطالة الجسم تعطى بالعلاقة:

$$\bar{F} = m\bar{a} = -K\bar{x}$$

$$\bar{a} = -\frac{k}{m}\bar{x}$$

$$(\bar{x})_t'' = -\frac{k}{m}\bar{x} \quad \dots \dots \dots \textcircled{1} \quad \text{وهي}$$

معادلة تفاضليّة من المرتبة الثانية تقبل **حلاً جيبيّاً** من

$$\bar{x} = X_{\max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi}) \quad \dots \dots \dots \textcircled{2}$$

وهو الشكل العام للتابع الزمني للمطال (الموضع) حيث:

\bar{x} المطال أو موضع الجسم في اللحظة t ويقدر بالمتر m .

X_{\max} سعة الحركة وتقدر بالمتر m مقدار ثابت وموجب.

ω_0 النبض الخاص للحركة ويقدر بال rad.s^{-1} مقدار ثابت وموجب

(2) تابع السرعة:

إنّ تابع السرعة هو المشتقّ الأول لتابع المطال بالنسبة للزمن .

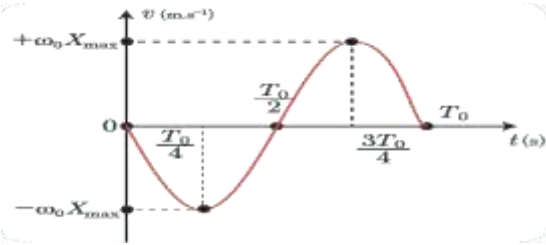
$$\bar{v} = (\bar{x})'_t$$

$$\bar{v} = -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t)$$

• أكمل الجدول الآتي:

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
v	0	$-\omega_0 X_{max}$	0	$+\omega_0 X_{max}$	0

• ارسم المنحني البياني لتغيرات السرعة بدلالة الزمن خلال دور .



• أحدد قيمة سرعة الجسم، ووجهة حركته في اللحظة $t = \frac{5T_0}{4}$.

$$v = -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t) = -\omega_0 X_{max} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{5T_0}{4}\right)$$

$$v = -\omega_0 X_{max} \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = -\omega_0 X_{max}$$

الجسم الصلب يتحرك بعكس الاتجاه الموجب للمحور الشاقولي الموجه نحو الأسفل

أستنتج: السرعة أعظمية (طويلة) $v = |-\omega_0 X_{max}|$ لحظة المرور

في مركز الاهتزاز .

-السرعة معدومة $v = 0$ لحظة المرور في المطالين

الأعظميين (الموضعين الطرفيين) .

(3) تابع التسارع:

إنّ تابع التسارع هو المشتقّ الأول لتابع السرعة بالنسبة للزمن ،

وهو المشتقّ الثاني لتابع المطال بالنسبة للزمن .

توابع حركة النّواس المرن:

(1) تابع المطال: الشكل العام لتابع المطال

$$\bar{x} = X_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

لكن بفرض أن الجسم كان في مطاله الأعظمي

الموجب $x = +X_{max}$ في اللحظة $t=0$ بالتالي:

$$X_{max} = X_{max} \cos(\bar{\varphi})$$

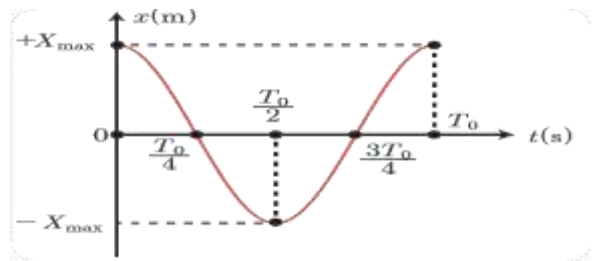
$$\cos(\bar{\varphi}) = 1 \Rightarrow \bar{\varphi} = 0 \text{ rad}$$

بالتالي: $\bar{x} = X_{max} \cos(\omega_0 t)$

• أكمل الجدول التالي:

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
x	$+X_{max}$	0	$-X_{max}$	0	$+X_{max}$

• ارسم المنحني البياني لتغيرات المطال بدلالة الزمن خلال دور .



• أحدد مطال الجسم في اللحظة $t = \frac{3T_0}{2}$

$$x = X_{max} \cos \omega_0 t = X_{max} \cos \frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{3T_0}{2}$$

$$x = X_{max} \cos 3\pi = -X_{max}$$

أستنتج: المطال أعظمي (طويلة) في الموضعين الطرفيين

$$x = |^+ X_{max}|$$

المطال معدوم في مركز الاهتزاز $x = 0$

$$E_p = \frac{1}{2} K x^2 \text{ الطاقة الكامنة المرنة للنابض هي}$$

نعوض تابع المطال:

$$E_p = \frac{1}{2} k X_{max}^2 \cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \text{ الطاقة الحركية للجسم هي}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_{max}^2 \sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

نعوض في (1):

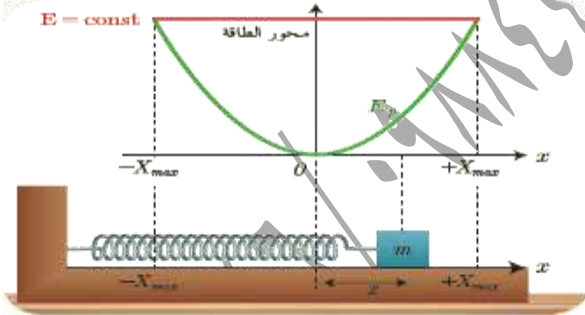
$$E_{tot} = \frac{1}{2} k X_{max}^2 \cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi}) + \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_{max}^2 \sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$k = m \omega_0^2 \text{ لكن}$$

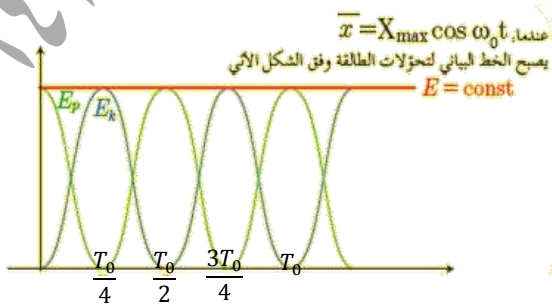
$$E_{tot} = \frac{1}{2} k X_{max}^2 \cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi}) + \frac{1}{2} k X_{max}^2 \sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2} k X_{max}^2 [\cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi}) + \sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})]$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2} k X_{max}^2 = \text{const}$$



تمثل الطاقة الكامنة المرنة بقطع مكافئ ذرته 0 بينما تمثل الطاقة الميكانيكية بخط مستقيم يوازي محور المطالات.



$$\bar{a} = (v)'_t = (x)''_t$$

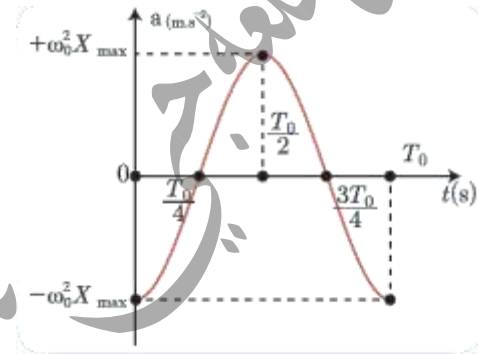
$$\bar{a} = -\omega_0^2 X_{max} \cos(\omega_0 t)$$

$$\bar{a} = -\omega_0^2 \bar{x}$$

• أكمل الجدول التالي:

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
a	$-\omega_0^2 X_{max}$	0	$+\omega_0^2 X_{max}$	0	$-\omega_0^2 X_{max}$

• ارسم المنحني البياني لتغيرات التسارع بدلالة الزمن خلال دور.



• أحدد قيمة تسارع الجسم في اللحظة $t = \frac{5T_0}{2}$:

$$a = -\omega_0^2 X_{max} \cos(\omega_0 t) = -\omega_0^2 X_{max} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{5T_0}{2}\right)$$

$$a = -\omega_0^2 X_{max} \cos(5\pi) = +\omega_0^2 X_{max}$$

استنتج: التسارع أعظمي (طويلة)

عند المرور في المطالين الأعظمين (الموضعين الطرفين).

- التسارع معدوم $a = 0$ عند المرور في مركز الاهتزاز.

- التسارع غير ثابت تتغير قيمته بتغير المطال.

الطاقة في الحركة التوافقية البسيطة:

إن الطاقة الميكانيكية للنواس المرن هي مجموع الطاقين

الكامنة والحركية:

$$E_{tot} = E_p + E_k \dots\dots\dots(1)$$

- سعة الحركة X_{max} هي طول الشعاع \overline{OM} الثابتة عند الدوران .

- مطال الحركة \bar{x} هو مسقط الشعاع \overline{OM} على المحور $x'x$ وهو متغير بتغير الزمن .

$$\text{النسبة} \frac{\bar{x}}{X_{max}} = \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

- التابع الزمني لحركة المسقط تابع جيب من الشكل $x = X_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$ لذلك تسمى الحركة جيبية انسحابية (توافقية بسيطة) .

تطبيق: نواس مرز أفقي مؤلف من جسم ونابض مرز تابعه الزمني $x = 0.1 \cos(\pi t + \pi)$

المطلوب:

- (1) حدد ثوابت الحركة لهذا النواس .
- (2) احسب دوره T_0
- (3) حدد موضع المتحرك (الجسم) ووجهة حركته في لحظة بدء الزمن .

الحل: (1) نكتب التابع الزمني للنواس المرز

$$\bar{x} = X_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$\bar{x} = 0.1 \cos(\pi t + \pi)$$

بالمقارنة نجد: المطال الأعظمي: $X_{max} = 0.1m$

النبض $\omega_0 = \pi \text{ rad.s}^{-1}$ والطور الابتدائي للحركة

(عند اللحظة $t = 0$) هو $\bar{\varphi} = +\pi \text{ rad}$

(2) حساب الدور الخاص: من العلاقة:

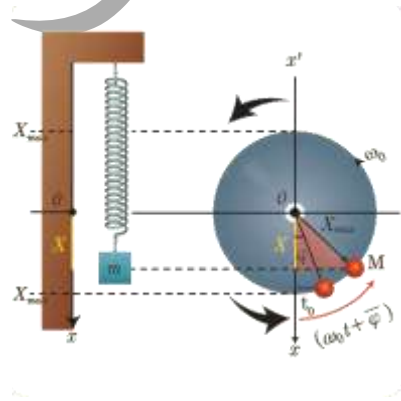
$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\pi} = 2s$$

• أحدد المواضع التي تكون فيها كل من الطاقين الحركية والكامنة المرونية: عظمى ومعدومة.

الجواب: تنعدم الطاقة الحركية في الوضعين الطرفين بسبب انعدام السرعة وتكون عظمى في مركز الاهتزاز وذلك لأن السرعة عظمى عندئذ .

كما تنعدم الطاقة الكامنة المرونية في وضع التوازن بسبب انعدام المطال وتكون عظمى في الوضعين المتطرفين وذلك لأن المطال أعظمي عندئذ .

العلاقة بين الحركة الدائرية والحركة التوافقية البسيطة (تمثيل فريبل):



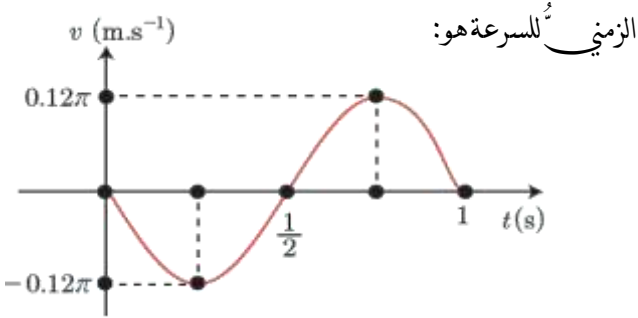
مثل فريبل الحركة الجيبية التوافقية البسيطة بشعاع:

- الطور الابتدائي للحركة $\bar{\varphi}$ هو الزاوية بين الشعاع \overline{OM} والمحور $x'x$ في اللحظة $t = 0$

- طور الحركة $(\omega_0 t + \bar{\varphi})$ هو الزاوية بين الشعاع \overline{OM} والمحور $x'x$ في اللحظة t .

- النبض الخاص للحركة ω_0 يقابل السرعة الزاوية الثابتة التي تدور بها النقطة M .

2. الرسم البياني جانياً يمثل تغيرات السرعة مع الزمن لجسم مرتبط بنابض مرز يتحرك بحركة توافقية بسيطة، فيكون التابع الزمني للسرعة هو:



- .A $\bar{v} = 0.06\pi \cos \pi t$
 .B $\bar{v} = -0.06\pi \cos 2\pi t$
 .C $\bar{v} = -0.12\pi \sin 2\pi t$
 .D $\bar{v} = 0.12\pi \sin \pi t$

الإجابة الصحيحة: (C) $\bar{v} = -0.12\pi \sin 2\pi t$

$T_0 = 1s$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \text{ rad s}^{-1}$ •

$v_{max} = \omega_0 X_{max} \Rightarrow$

$X_{max} = \frac{v_{max}}{\omega_0} = \frac{0.12\pi}{2\pi} = 0.06m$ •

• نبدل في التابع الزمني للسرعة ($t = 0$, $v = 0$)

فنجند: $\bar{v} = -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$0 = -2\pi \times 0.06 \sin(0 + \bar{\varphi}) \Rightarrow$

$-0.12\pi \sin(\bar{\varphi}) = 0$

إما: $\bar{\varphi} = 0 \text{ rad}$ الحل مقبول لأنه يحقق السرعة سالبة

في اللحظة $t = \frac{T_0}{4} = \frac{1}{4} s$

$\bar{v} = -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi}) \Rightarrow$

$\bar{v} = -2\pi \times 0.06 \sin\left(2\pi \frac{1}{4} + 0\right) = -0.12\pi \text{ m.s}^{-1}$

أو: $\bar{\varphi} = \pi \text{ rad}$ الحل مرفوض لأنه يحقق السرعة موجبة

في اللحظة $t = \frac{T_0}{4} = \frac{1}{4} s$

$t = 0 \Rightarrow x = 0.1 \cos \pi = -0.1m$ (3)

أي المتحرك في مطاله الأعظمي السالب في لحظة بدء الزمن.

- لتحديد جهة الحركة نحسب المطال في اللحظة $t = \frac{T_0}{4} = \frac{1}{2} s$

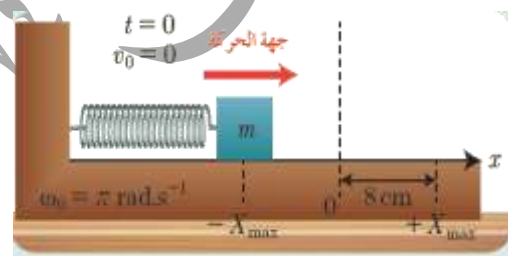
$\bar{x} = 0.1 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = 0.1 \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0m$

أي أن الجسم الصلب يتحرك من المطال الأعظمي السالب إلى وضع التوازن.

اختبر نفسي:

أولاً- اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

1. تابع المطال الذي يصف حركة الهزازة الجيبية في الشكل المجاور هو:



.A $\bar{x} = 0.08 \cos(\pi t + \pi)$

.B $\bar{x} = 8 \cos(\pi t + \pi)$

.C $\bar{x} = 0.008 \cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$

.D $\bar{x} = 0.8 \cos(\pi t)$

الإجابة الصحيحة: (A) $\bar{x} = 0.08 \cos(\pi t + \pi)$

توضيح اختيار الإجابة: شروط البدء:

$v_0 = 0$, $x = -X_{max}$, $t = 0$

نبدل في التابع الزمني للمطال:

$-0.08 = 0.08 \cos \bar{\varphi} \Rightarrow \cos \bar{\varphi} = -1 \Rightarrow \bar{\varphi} = \pi \text{ rad}$

$\omega_0 = \pi \text{ rad.s}^{-1}$

$\Rightarrow \bar{x} = 0.08 \cos(\pi t + \pi)$

$$x_1 = X_{\max} \cos \omega_0 t \Rightarrow x_1 = X_{\max} \cos 3\pi = -X_{\max} \quad (1)$$

$$x_2 = X_{\max} \cos \omega_0 t \Rightarrow x_2 = X_{\max} \cos 6\pi = +X_{\max} \quad (2)$$

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

$$(1) \text{ أثبت صحة العلاقة } v = \omega_0 \sqrt{X_{\max}^2 - x^2} \text{ في}$$

الحركة التوافقية البسيطة.

$$E_K = E - E_P \quad \text{البرهان:}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k X_{\max}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

$$v^2 = \frac{k}{m} (X_{\max}^2 - x^2)$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{m} \cdot (X_{\max}^2 - x^2)}$$

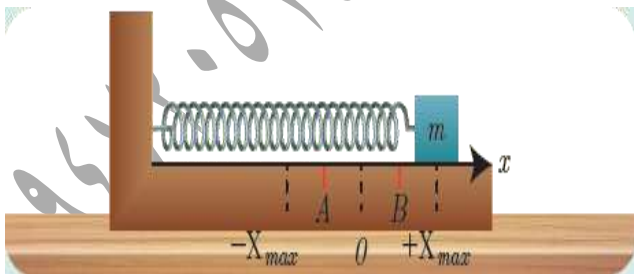
$$v = \omega_0 \sqrt{X_{\max}^2 - x^2}$$

(2) نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته k، مثبت

من أحد طرفيه، ويربط بطرفه الآخر جسم صلب كتلته m يمكنه

أن يتحرك على سطح أفقي أملس، كما في الشكل

الجاور



نشد الجسم مسافة أفقية مناسبة، وتركه دون سرعة ابتدائية. المطلوب:

a. ادرس حركة الجسم، واستنتج التابع الزمني للمطال.

$$\bar{v} = -\omega_0 X_{\max} \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow$$

$$\bar{v} = -2\pi \times 0.06 \sin\left(2\pi \frac{1}{4} + \pi\right) = -0.12\pi \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$= +0.12\pi \text{ m.s}^{-1}$$

3. يمثل الشكل 1 هزازتان توافقيتان (1) و(2)

تنطلقان من الموضع نفسه وفي اللحظة نفسها، فإنهما بعد

مضي 3s من بدء حركتهما:

A. تلتقيان في مركز الاهتزاز.

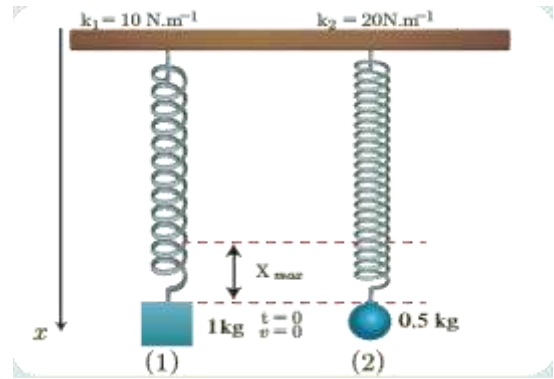
B. تلتقيان في الموضع $+X_{\max}$

C. لا تلتقيان لأن مطال الأولى $+X_{\max}$

ومطال الثانية $-X_{\max}$.

D. لا تلتقيان لأن مطال الأولى $-X_{\max}$

ومطال الثانية $+X_{\max}$.



الشكل 1

الإجابة الصحيحة: (D)

للهازتين (t=0 v=0 x=+X_max) بالتالي فإن $\varphi=0$

$$\omega_{01} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{10}{1}} = \pi \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\omega_{02} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \sqrt{\frac{20}{0.5}} = \sqrt{40} = 2\pi \text{ rad.s}^{-1}$$

بالمقارنة بين (1) و (2) نجد أن: $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ومنه:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$$

وهذا محقق لأن k, m موجبان.

حركة الجسم هي حركة جيئية انسحابية توافقية بسيطة التابع الزمني للمطال يعطى بالعلاقة:

$$\bar{x} = X_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

b. استنتاج علاقة الطاقة الحركية للجسم بدلالة X_{max} :

$$E_{tot} = E_p + E_k \Rightarrow E_k = E_{tot} - E_p$$

$$E_k = \frac{1}{2} k X_{max}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow$$

$$E_k = \frac{1}{2} k (X_{max}^2 - x^2)$$

عندما: $x_A = -\frac{X_{max}}{2}$ فإن:

$$E_{ka} = \frac{1}{2} k (X_{max}^2 - x^2) = \frac{1}{2} k \left(X_{max}^2 - \frac{X_{max}^2}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} k X_{max}^2 \right) = \frac{3}{8} k X_{max}^2$$

$$E_{ka} = \frac{3}{4} E_{tot} \text{ أي}$$

عندما: $\bar{x}_B = +\frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$ فإن:

$$E_{kB} = \frac{1}{2} k (X_{max}^2 - x^2) = \frac{1}{2} k \left(X_{max}^2 - \frac{X_{max}^2}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} k X_{max}^2 \right) = \frac{1}{4} k X_{max}^2$$

$$E_{kB} = \frac{1}{2} E_{tot} \text{ أي}$$

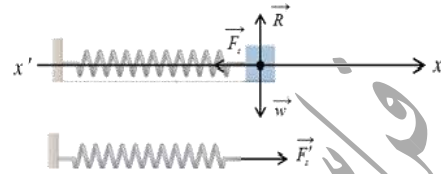
النتيجة: بزيادة القيمة المطلقة للمطال تزداد الطاقة الكامنة المرنة

وتقل الطاقة الحركية.

b. استنتاج علاقة الطاقة الحركية للجسم بدلالة X_{max} في كل

من الموضعين A و B

$$x_B = +\frac{X_{max}}{\sqrt{2}} \text{ و } x_A = -\frac{X_{max}}{2}$$



a. القوى الخارجية المؤثرة في مركز عتالة الجسم:

قوة الثقل: \vec{W} - قوة رد فعل السطح: \vec{R} - قوة توتر النابض: \vec{F}_s

بتطبيق قانون نيوتن الثاني:

$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a}$$

$$\vec{W} + \vec{R} + \vec{F}_s = m \vec{a}$$

بالإسقاط على محور أفقي موجه كما في الشكل:

$$-F_s = ma$$

تؤثر على النابض قوة شد \vec{F}'_s التي تسبب له الاستطالة x

حيث: $F'_s = F_s = k\bar{x}$ (لأنهما قوتى داخلية)

بالتعويض نجد:

$$x''_t = -\frac{k}{m} (\bar{x}) \dots (1)$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيئياً من الشكل:

$$\bar{x} = X_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

نشق التابع مرتين بالنسبة للزمن نجد:

$$(\bar{x})'_t = \bar{v} = -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{x})''_t = \bar{a} = -\omega_0^2 X_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{x})''_t = -\omega_0^2 \bar{x} \dots (2)$$

المسألة الأولى: تتألف هزازة جيبية أنسحابية من نابض مرن شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة يهتز بدوره الخاص، ما نوع حركة الجسم بعد انفصاله عن النابض في كل من الموضعين الآتين، ولماذا؟

$k = 10N.m^{-1}$ ، مثبت من أحد طرفيه، ويحمل في طرفه الآخر جسماً كتلته m ،

ويعطى التابع الزمني لمطال حركتها بالعلاقة:

$$\bar{x} = 0.1 \cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$$

المطلوب: (1) أوجد قيم ثوابت الحركة ودورها الخاص.

(2) احسب كتلة الجسم m .

(3) احسب قيمة السرعة في موضع مطاله $x = 6cm$ ،

والجسم يتحرك بالاتجاه الموجب للمحور.

(4) حدد موضع الجسم ووجهة حركته لحظة بدء الزمن.

الحل: (1) $\bar{x} = 0.1 \cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$

بالمطابقة مع الشكل العام: $\bar{x} = X_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

نجد: $\bar{\varphi} = \frac{\pi}{2} \text{rad}$ ، $\omega_0 = \pi \text{rad s}^{-1}$ ، $X_{max} = 0.1m$

حساب T_0 : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\pi} = 2S$

(2) $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow m = \frac{k}{\omega_0^2} = \frac{10}{\pi^2} = \frac{10}{10}$
 $\Rightarrow m = 1 \text{ kg}$

(3) $v = \omega_0 \sqrt{X_{max}^2 - x^2}$

$v = \pi \sqrt{(0.1)^2 - (0.06)^2} = \pi \sqrt{10^{-2} - 36 \times 10^{-4}}$

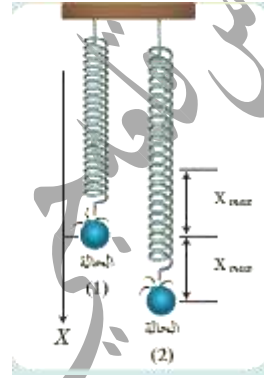
$= \pi \sqrt{100 \times 10^{-4} - 36 \times 10^{-4}} = \pi \sqrt{64 \times 10^{-4}}$

$v = 8\pi \times 10^{-2} = 0.25m.s^{-1}$

3) جسم معلق بنابض مرن شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة يهتز بدوره الخاص، ما نوع حركة الجسم بعد انفصاله عن النابض في كل من الموضعين الآتين، ولماذا؟

a- مركز الاهتزاز، وهو يتحرك بالاتجاه السالب؟

b- المطال الأعظمي الموجب؟



لحظة انفصال الجسم يخضع لقوة ثقله فقط $\vec{W} = m\vec{g}$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g} = \text{const}$$

• الانفصال في مركز الاهتزاز: قذف شاقولي نحو الأعلى

لأن الجسم مزود بسرعة ابتدائية شاقولية للأعلى والحركة مستقيمة متغيرة بانتظام ولهذه الحركة طوران: طور صعود متباطئة بانتظام وطور هبوط متسارعة بانتظام.

• الانفصال في المطال الأعظمي الموجب: سقوط حر

لأن السرعة الابتدائية للجسم معدومة والحركة مستقيمة متسارعة بانتظام.

ثالثاً: حلّ المسائل الآتية:

في جميع المسائل: ($4\pi = 12.5$ ، $\pi^2 = 10$ ، $g = 10m.s^{-1}$)

$$v = \omega_0 \sqrt{X_{max}^2 - x^2} = \omega_0 X_{max}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1.25} = \frac{8\pi}{5} = \frac{25}{5} = 5 \text{ rad.s}^{-1} \quad \text{لكن}$$

$$\Rightarrow v = 5 \times 0.1 = 0.5 \text{ m.s}^{-1}$$

المسألة الثالثة: نشكل هزازة توافقية بسيطة من جسم كتلة

$m = 1 \text{ kg}$ معلق بطرف نابض مرنب شاقولي مهمل الكتلة

حلقائه متباعدة فينجز 10 هزات في 10s ، ويرسم في أثناء

حركته قطعة مستقيمة طولها 16 cm . المطلوب:

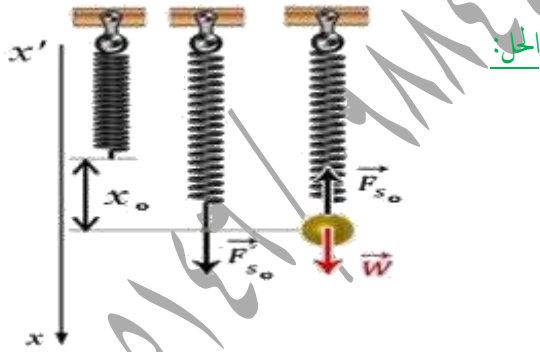
(1) استنج قيمة الاستطالة السكونية لهذا النابض، ثم احسب قيمتها .

(2) احسب قيمة السرعة العظمى (طويلة) .

(3) احسب قيمة التسارع في مطال $x = 6 \text{ cm}$.

(4) احسب الطاقة الكامنة المرؤية في موضع مطالعه

$x = -4 \text{ cm}$ واحسب الطاقة الحركية عندئذ .



(1) القوى الخارجية المؤثرة في مركز عطالة الجسم في حالة

السكون: قوة الثقل: \vec{W} وقوة توتر النابض: \vec{F}_{s_0}

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{W} + \vec{F}_{s_0} = \vec{0}$$

بالإسقاط على محور شاقولي موجه نحو الأسفل كما في الشكل:

$$W - F_{s_0} = 0$$

$$W = F_{s_0} \dots \dots (1)$$

(4) لحظة بدء الزمن $t=0$ وبالتالي:

$$\bar{x} = 0.1 \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

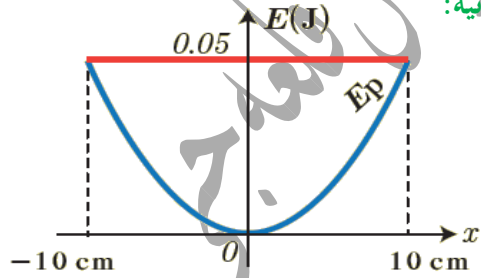
- لتحديد جهة الحركة نحسب المطال في اللحظة $t = \frac{T_0}{4} = \frac{1}{2} \text{ S}$

$$\bar{x} = 0.1 \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 0.1 \cos(\pi) = -0.1 \text{ m}$$

أي أن الجسم الصلب يتحرك من وضع التوازن

إلى المطال الأعظمي السالب .

المسألة الثانية:



يوضح الرسم البياني تغيرات الطاقة الكامنة المرؤية بتغير الموضع

لهزازة توافقية بسيطة مؤلفة من نابض مرنب مهمل الكتلة حلقائه

متباعدة ثابت صلابته k معلق به جسم كتلته 0.4 kg

(1) استنج قيمة ثابت صلابة النابض .

(2) احسب الدور الخاص للحركة .

(3) احسب قيمة السرعة عند المرور في مركز الاهتزاز .

$$E_{tot} = \frac{1}{2} k X_{max}^2 \Rightarrow k = \frac{2E}{X_{max}^2} \quad \text{(الحل: 1)}$$

$$k = \frac{2(0.05)}{(10 \times 10^{-2})^2} \Rightarrow k = 10 \text{ N.m}^{-1}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{0.4}{10}} = \frac{4\pi}{10} = 0.4\pi \quad (2)$$

$$T_0 = \frac{12.5}{10} = 1.25 \text{ S}$$

(3) في مركز الاهتزاز يعدم المطال $x=0$ بالتالي:

المسألة الرابعة: تهتز كرة معدنية كتلتها m بمروية نابض شاقولياً

مهمل الكتلة، حلقاته متباعدة، ثابت صلابته $k = 16 \text{ N.m}^{-1}$

بحركة توافقية بسيطة دورها الخاص 1 s ، وسعة اهتزاز

بنقطة مطالها $\frac{X_{max}}{2}$ وهي تتحرك بالاتجاه السالب. المطلوب:

(1) استنتج التابع الزمني لمطال حركة الكرة انطلاقاً من شكله العام.

(2) عين لحظتي المرور الأول والثالث للكرة في موضع

التوازن، ثم احسب شدة قوة الإرجاع في نقطة مطالها

$$x = +0.1 \text{ m}$$

(3) احسب كتلة الكرة.

$$\bar{x} = X_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi}) \quad \text{(الحل: 1)}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \text{ rad.s}^{-1}$$

$$X_{max} = 0.1 \text{ m}$$

نعوض شروط البدء ($x = \frac{X_{max}}{2}$, $t = 0$) في التابع الزمني:

$$\frac{X_{max}}{2} = X_{max} \cos(0 + \bar{\varphi}) \Rightarrow \cos \varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\bar{\varphi} = -\frac{\pi}{3} \text{ rad} \text{ أو } \bar{\varphi} = +\frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

نختار الحل الذي يجعل السرعة سالبة:

$$\bar{v} = -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

في اللحظة ($t=0$) السرعة:

$$\bar{v}_0 = -\omega_0 X_{max} \sin(\bar{\varphi})$$

$$\varphi = +\frac{\pi}{3} \text{ rad}: v_0 = -\omega_0 X_{max} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0$$

مقبول يوافق شروط البدء يحقق سرعة سالبة

تؤثر على النابض القوة \vec{F}'_{s_0} التي تسبب له الاستطالة x_0 حيث:

$$F'_{s_0} = F_{s_0} = kx_0$$

بالتعويض في (1) نجد:

$$x_0 = \frac{mg}{k}$$

$$T_0 = \frac{\text{زمن الهزات}}{\text{عدد الهزات}} = \frac{10}{10} \Rightarrow T_0 = 1 \text{ s}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow k = \frac{4\pi^2 m}{(T_0)^2} = \frac{40 \times 1}{1} = 40 \text{ N.m}^{-1}$$

تنويه: يمكن حساب k من القانون $k = \omega_0^2 m$

$$x_0 = \frac{1 \times 10}{40} = 0.25 \text{ m}$$

(2) حساب قيمة السرعة العظمى (طويلة):

$$v_{max} = |\pm \omega_0 X_{max}|$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \text{ rad.s}^{-1}$$

$$X_{max} = \frac{\text{طول القطعة المستقيمة التي يرسمها مركز عطالة الصلب}}{2} = \frac{0.16}{2} = 0.08 \text{ m}$$

$$v_{max} = 2\pi \times 0.08 = 0.16\pi = 0.5 \text{ m.s}^{-1}$$

(3) قيمة التسارع في مطال $\bar{x} = +6 \text{ cm}$:

$$\bar{a} = -\omega_0^2 \bar{x} = -(2\pi)^2 \times 6 \times 10^{-2} = -2.4 \text{ m.s}^{-2}$$

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} \times 40 \times (-0.04)^2 = 0.032 \text{ J} \quad (4)$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2} kX_{max}^2 = \frac{1}{2} (40)(0.08)^2 = 0.128 \text{ J}$$

$$E = E_p + E_k \Rightarrow E_k = E - E_p = 0.128 - 0.032 = 0.096 \text{ J}$$

$\rho_{H_2O} > \rho_{wood}$ ومساحة سطحه A فيطفو وهو بحالة

توازن وقد برز جزء منه فوق سطح الماء. عند التأثير بقوة شاقولية على المكعب الخشبي ليغمر كلياً بالماء ثم يترك فجأة. ما نوع حركة المكعب الخشبي؟

الجواب: في حالة السكون تتساوى شدة قوة ثقل

المكعب الخشبي مع شدة دافعة أرخميدس المؤثرة عليه

فتكون محصلة القوى المؤثرة معدومة. وعند التأثير

على المكعب الخشبي بقوة شاقولية جهتها نحو الأسفل يتغير

الحجم المغمور من المكعب الخشبي فتتغير شدة دافعة

أرخميدس لتصبح محصلة القوى متناسبة مع الإزاحة X

ومعاكسة لها بالجهة وهي ما تسمى قوة الإرجاع

فتكون الحركة : حركة جيبية انسحابية.

----- انتهى البحث -----

ندعوكم للانضمام لقناتنا على التيلغرام:

قناة فراس قلعه جي للفيزياء والكيمياء

$$\varphi = -\frac{\pi}{3} \text{ rad} : v_0 = +\omega_0 X_{max} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) > 0$$

الحل مرفوض يخالف شروط البدء يحقق سرعة موجبة

نعوض ثوابت الحركة في التابع الزمني :

$$\bar{x} = 0.1 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

(2) في موضع التوازن x=0 :

$$0 = 0.1 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \Rightarrow \left(2t + \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{2} + k\right)$$

$$2t = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + k = \frac{1}{6} + k \Rightarrow t = \frac{1}{12} + \frac{k}{2}$$

المرور الأول: k = 0 بالتالي: t = $\frac{1}{12}$ s

المرور الثالث: k = 2 بالتالي: t = $\frac{13}{12}$ s

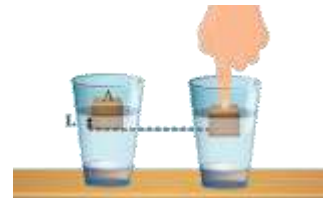
$$F = -kx = -16 \times 0.1 = -1.6 \text{ N} \text{ : شدة قوة الارجاع}$$

وشدتها : F=1.6N

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow m = \frac{k}{\omega_0^2} = \frac{16}{4\pi^2} = \frac{16}{40} \quad (3)$$

$$\Rightarrow m = 0.4 \text{ kg}$$

التفكير الناقد:



لدينا كأس فيه ماء كتلته الحجمية ρ_{H_2O} يوضع فيه مكعب

خشبي كتلته m_{wood} وكتلته الحجمية ρ_{wood} حيث

نَواَسِ الفِتلِ غيرِ المُتخامدِ

تعريفه: جسم صلب متجانس (ساق أو قرص) معلق من مركزه يهتز في مستو أفقي حول سلك قتل شاقولي ثابت قتلته k بتأثير عزم مزدوجة الفتل.

دراسة حركة نَواَسِ الفتل:

القوى الخارجية المؤثرة في الساق: قوة الثقل \vec{W} ، قوة التوتر \vec{T} .
عندما ندير الساق زاوية θ عن وضع توازنها في مستو أفقي تنشأ في السلك مزدوجة فتل $\vec{\Gamma}$ تقاوم عملية الفتل تعمل على إعادة الساق إلى وضع توازنها عزمها هو **عزم إرجاع** يتناسب طردياً مع زاوية الفتل θ ويعاكسها بالإشارة

$$\Gamma_{\vec{n}/\Delta} = -k\theta$$

ملاحظة: يُعطى ثابت قتل السلك بالعلاقة: $K = K' \frac{(2r)^4}{l}$

k' ثابت يتعلق بنوع مادة السلك، $2r$ قطر السلك، l طول السلك.

حيث k ثابت قتل السلك تقاس بـ: $m \cdot N \cdot rad^{-1}$

بتطبيق العلاقة الأساسية في التحريك الدوراني حول محور Δ منطبق على سلك الفتل الشاقولي:

$$\sum \Gamma_{\Delta} = I_{\Delta} \bar{\alpha}$$

حيث I_{Δ} عزم عطالة الساق حول محور الدوران Δ (السلك) $\bar{\alpha}$ التسارع الزاوي

$$\Gamma_{\vec{w}/\Delta} + \Gamma_{\vec{T}/\Delta} + \Gamma_{\vec{n}/\Delta} = I_{\Delta} \alpha \dots \dots (1)$$

إن عزم كل من قوة الثقل \vec{W} وقوة التوتر \vec{T} معدوم لأن:
حامل كل منهما منطبق على محور الدوران Δ .

$$\Gamma_{\vec{n}/\Delta} = -K\bar{\theta} \text{ عزم مزدوجة الفتل}$$

$$0 + 0 = -k\bar{\theta} = I_{\Delta} \bar{\alpha}$$

$$-k\bar{\theta} = I_{\Delta} (\bar{\theta})''$$

$$(\bar{\theta})'' = -\frac{k}{I_{\Delta}} \bar{\theta} \dots \dots (2)$$

المعادلة (2) هي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية تقبل حل جيبياً من الشكل:

$$\bar{\theta} = \theta_{\max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

وللتحقق من صحة الحل نشق مرتين بالنسبة بالزمن:

$$\bar{\omega} = (\bar{\theta})'_t = -\omega_0 \theta_{\max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$\alpha = (\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2 \theta_{\max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2 \bar{\theta} \dots \dots (3)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{I_{\Delta}} \dots \dots (4)$$

بموازنة العلاقتين (2) و (3) نجد: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I_{\Delta}}} > 0$

وهذا ممكن لأن: k, I_{Δ} موجبان أي أن

حركة نَواَسِ الفتل جيبية دورانية توافقية بسيطة تابعة للزمن من الشكل:

$$\bar{\theta} = \theta_{\max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$\bar{\theta}$: المطال الزاوي في اللحظة t واحدته rad .

θ_{\max} : المطال الزاوي الأعظمي (السعة الزاوية) واحدته rad .

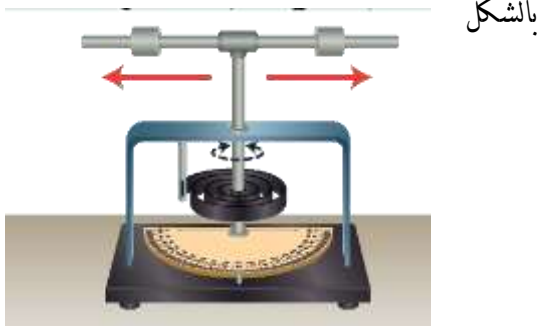
ω_0 : النبض الخاص بالحركة واحدته $rad \cdot s^{-1}$.

$\bar{\varphi}$: الطور الابتدائي للحركة واحدته rad .

اختبر نفسي:

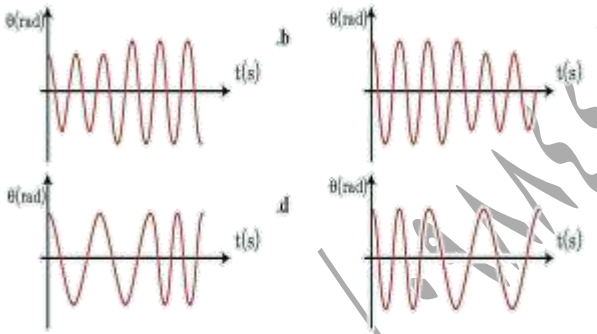
أولاً: اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

1- يهتز نواس قتل بدور خاص T_0 في لحظة ما أثناء حركته ابتعدت الكتلتان عن محور الدوران بالمقدار نفسه كما هو موضح



بالشكل

فالرسم البياني الذي يعبر عن تغير المطال مع الزمن



في هذه الحالة هو: الإجابة الصحيحة: (C)

التوضيح: بإزدياد البعد بين الكتلتين يزداد عزم عطالة جملة النواس وبالتالي سيزداد الدور (أي ينقص التواتر).

2- مقياسية تعتمد في عملها على نواس قتل كما في الشكل



دور نواس القتل:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I_\Delta}} \Rightarrow \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{k}{I_\Delta}} \Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}$$

استنتج دور نواس القتل:

- لا يتعلق بالسعة الزاوية للحركة θ_{max} .
- يتناسب طردياً مع الجذر التربيعي لعزم عطالة جملة النواس حول محور الدوران (سلك القتل).
- يتناسب عكسياً مع الجذر التربيعي لثابت قتل السلك.

أجرب وأستنتج:

- لا تتغير قيمة الدور الخاص لنواس القتل بتغير السعة الزاوية للحركة.
- يزداد الدور الخاص لنواس القتل بزيادة عزم عطالة الجملة.
- ينقص الدور الخاص لنواس القتل بتقصان طول سلك القتل.

التشابه الشكلي بين النواس المرن ونواس القتل:

نواس قتل	نواس مرن
حركة جيبية دورانية	حركة جيبية انسحابية
مطال زاوي $\bar{\theta}$	المطال \bar{x}
السرعة الزاوية: $\omega = (\bar{\theta})'_t$	السرعة $\bar{v} = (\bar{x})'_t$
التسارع الزاوي: $\bar{\alpha} = (\bar{\theta})''_t$	التسارع $\bar{a} = (\bar{x})''_t$
ثابت القتل k	ثابت الصلابة k
عزم الإرجاع Γ	قوة الإرجاع F
الطاقة الكامنة المرينية: $E_p = \frac{1}{2} k \theta^2$	الطاقة الكامنة المرينية: $E_p = \frac{1}{2} k x^2$
الطاقة الحركية: $E_k = \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2$	الطاقة الحركية: $E_k = \frac{1}{2} m v^2$
الطاقة الميكانيكية: $E = \frac{1}{2} k \theta_{max}^2$	الطاقة الميكانيكية: $E = \frac{1}{2} k x_{max}^2$

التوضيح: من الشكل نجد: $\omega_{\max} = \frac{\pi^2}{8} \text{ rad.s}^{-1}$

$$2T_0 = 8 \Rightarrow T_0 = 4 \text{ s}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ rad.s}^{-1}$$

نعوض شروط البدء ($t = 0$ ، $\omega = 0$) في التابع الزمني للسرعة الزاوية:

$$\bar{\omega} = -\omega_0 \theta_{\max} \sin(\omega t + \bar{\varphi})$$

$$0 = -\omega_0 \theta_{\max} \sin(0 + \bar{\varphi})$$

$$\sin(\bar{\varphi}) = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \text{ أو } \pi \text{ rad}$$

نختار الحل الذي يجعل السرعة سالبة من أجل زمن $t = \frac{T_0}{4}$

إما: $\bar{\varphi} = 0 \text{ rad}$ الحل مقبول لأنه يحقق السرعة سالبة في

$$t = \frac{T_0}{4} = 1 \text{ s}$$

$$\omega = -\omega_0 \theta_{\max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi}) \Rightarrow$$

$$\bar{\omega} = -\frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1 + 0\right) = -\frac{\pi^2}{8} \text{ rad.s}^{-1}$$

أو: $\bar{\varphi} = \pi \text{ rad}$ الحل مرفوض لأنه يحقق السرعة موجبة

$$\text{في اللحظة } t = \frac{T_0}{4} = 1 \text{ s}$$

$$\bar{\omega} = -\frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1 + \pi\right) = +\frac{\pi^2}{8} \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\Rightarrow \bar{\omega} = -\frac{\pi^2}{8} \sin \frac{\pi}{2} t$$

ثانياً أجب عن الأسئلة الآتية:

1_ انطلاقاً من مصوئية الطاقة الميكانيكية برهن أن

حركة نواس الفتل حركة جيبيّة دورانية.

$$E_{\text{tot}} = E_p + E_k = \text{const}$$

ولتصحيح التأخير الحاصل بالوقت فيها، قدم الطّاب مقترحاتهم،

فإنّ الاقتراح الصحيح هو:

a. زيادة طول سلك الفتل بمقدار ضئيل.

b. زيادة كتلة القرص مع المحافظة على قطره.

c. إنقاص طول سلك الفتل بمقدار ضئيل.

d. زيادة قطر القرص مع المحافظة على كتلته.

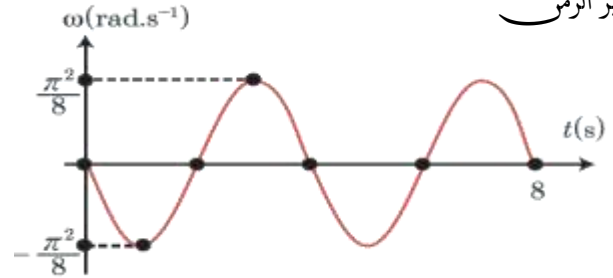
الإجابة الصحيحة: (C) إنقاص طول سلك الفتل بمقدار ضئيل.

التوضيح: التأخير بالوقت يعني الدور أكبر من 2s ويجب

إنقاصه لذا يجب إنقاص طول سلك الفتل بمقدار ضئيل.

3- يمثّل الرسم البيانيّ المجاورُ تغيّرات السرعة الزاوية لنواس فتل

بتغيّر الزمن



فإنّ تابع السرعة الزاوية الذي يمثله هذا المنحني هو:

$$\bar{\omega} = \frac{\pi^2}{8} \sin 3\pi t \quad .a$$

$$\bar{\omega} = -\frac{\pi^2}{8} \sin 2\pi t \quad .b$$

$$\bar{\omega} = +\frac{\pi^2}{8} \sin \frac{\pi}{2} t \quad .c$$

$$\bar{\omega} = -\frac{\pi^2}{8} \sin \frac{\pi}{2} t \quad .d$$

الإجابة الصحيحة: (d)

$$\frac{2T_{0_2}}{T_{0_2}} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} \text{ (بالتربيع)} \Rightarrow \frac{4}{1} = \frac{l_1}{l_2} \Rightarrow l_1 = 4l_2$$

ثالثاً: حل المسائل الآتية:

المسألة الأولى: يتألف نواس قتل من قرص متجانس كتلته

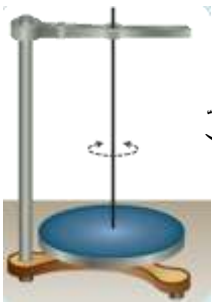
$m = 2 \text{ kg}$ ، نصف قطره $r = 4 \text{ cm}$ معلق من مركزه إلى

سلك قتل شاقولي ثابت قتلته $k = 16 \times 10^{-3} \text{ m. N. rad}^{-1}$

ندير القرص في مستواً أفقياً زاوية $\theta = +\frac{\pi}{4} \text{ rad}$ عن

وضع توازنه، وتركه دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t = 0$.

المطلوب:



(1) احسب الدور الخاص للنواس.

(2) استنتج التابع الزمني للمطال الزاوي

اظلاقاً من شكله العام.

(3) احسب الطاقة الكامنة في وضع

مطاله الزاوي $\theta = \frac{\pi}{8} \text{ rad}$ ، ثم احسب الطاقة الحركية

عندئذ.

(عزم عطالة قرص حول محور عمودي على مستويه

ومار من مركزه $I_{\Delta/c} = \frac{1}{2}mr^2$)

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta}}{K}} \quad \text{(الحل: 1)}$$

$$I_{\Delta} = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2} \times 2(4 \times 10^{-2})^2$$

$$= 16 \times 10^{-4} \text{ Kg. m}^2$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{16 \times 10^{-4}}{16 \times 10^{-3}}} \Rightarrow T_0 = 2s$$

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2}k\theta^2 + \frac{1}{2}I_{\Delta}\omega^2$$

نشق طرفي العلاقة بالنسبة للزمن:

$$0 = \frac{1}{2}k 2(\bar{\theta} \cdot \bar{\omega}) + \frac{1}{2}I_{\Delta}2(\bar{\omega} \cdot \bar{\alpha})$$

$$\omega \neq 0 \quad 0 = \omega(k\theta + I_{\Delta}\bar{\alpha})$$

$$0 = k(\bar{\theta}) + I_{\Delta}(\bar{\theta})''_t$$

$$(\bar{\theta})''_t = -\frac{K}{I_{\Delta}}(\bar{\theta}) \dots \dots (1)$$

نشق التابع مرتين بالنسبة للزمن:

$$(\bar{\theta})'_t = \bar{\omega} = -\omega_0\theta_{\text{max}} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{\theta})''_t = \bar{\alpha} = -\omega_0^2\theta_{\text{max}} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2\bar{\theta} \dots \dots (2)$$

بالمقارنة بين (1) و (2) نجد أن: $\omega_0^2 = \frac{k}{I_{\Delta}}$

ومنه: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I_{\Delta}}}$ وهذا محقق لأن k, I_{Δ} موجبان

ودوره $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta}}{k}}$ وبالتالي حركة نواس الفتل حركة

جيبية دورانية توافقية بسيطة.

2- نعلق ساقين متماثلتين بسلكي قتل متماثلتين

طول الأول l_1 وطول الثاني l_2 فإذا علمت أن:

$T_{0_1} = 2T_{0_2}$ ، أوجد العلاقة بين طولي السلكين.

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta}}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta}}{k' \frac{(2r)^4}{l}}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta} l}{k' (2r)^4}}$$

$$T_0 = \text{const} \sqrt{l}$$

$$\frac{T_{0_1}}{T_{0_2}} = \frac{\text{const} \sqrt{l_1}}{\text{const} \sqrt{l_2}}$$

(2) استنتاج التابع الزمني للمطال الزاوي انطلاقاً من

شكله العام: إيجاد ثوابت الحركة $(\bar{\varphi}, \theta_{\max}, \omega_0)$:

$$\bar{\theta} = \theta_{\max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

السعة الزاوية: $\theta_{\max} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$ لأن القرص ترك

دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t = 0$.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad.s}^{-1}$$

إيجاد الطور الابتدائي نعوض شروط البدء في التابع

$$(\theta = +\frac{\pi}{4} \text{ rad}, t = 0):$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \cos(0 + \bar{\varphi}) \Rightarrow \cos \bar{\varphi} = 1 \Rightarrow \bar{\varphi} = 0 \text{ rad}$$

نعوض ثوابت الحركة في التابع الزمني للمطال الزاوي:

$$\bar{\theta} = \frac{\pi}{4} \cos(\pi t)$$

(2) حساب الطاقة الكامنة والطاقة الحركية في وضع مطال

$$\theta = \frac{\pi}{8} \text{ rad}$$

$$E_p = \frac{1}{2} k \theta^2 = \frac{1}{2} \times 16 \times 10^{-3} \times \left(\frac{\pi}{8}\right)^2$$

$$E_p = \frac{1}{8} \times 10^{-2} \text{ J}$$

$$E_{\text{tot}} = E_p + E_k \Rightarrow E_k = E_{\text{tot}} - E_p$$

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} k \theta_{\max}^2 = \frac{1}{2} \times 16 \times 10^{-3} \left(\frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \times 10^{-2} \text{ J}$$

$$E_k = \frac{1}{2} \times 10^{-2} - \frac{1}{8} \times 10^{-2} = \frac{3}{8} \times 10^{-2}$$

$$E_k = 375 \times 10^{-5} \text{ J}$$

المسألة الثانية: ساق مهمل الكتل طولها l ، نثبت في كل من

طرفيها كتلة تغطية 125 g ، ونعلق الجملة من منتصفها إلى

سلك قتل شاقولي ثابت فتله $16 \times 10^{-3} \text{ m.N.rad}^{-1}$

لتؤلف الجملة نواس قتل، نزيح الساق عن وضع توازنها في مستو

أفقي بزاوية $\theta = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$ وتترك دون سرعة ابتدائية لحظة

بدء الزمن، قهتت بمجرّة جيبيّة دورانية، دورها الخاص 2.5 s .

المطلوب:

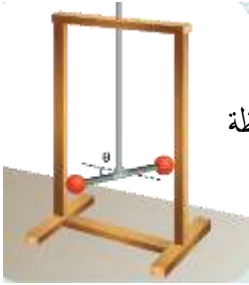
(1) استنتاج التابع الزمني للمطال الزاوي انطلاقاً من

شكله العام

(2) احسب قيمة السرعة الزاوية للساق لحظة

مرورها الأول بوضع التوازن.

(3) احسب طول الساق.



الحل: (1) استنتاج التابع الزمني للمطال الزاوي انطلاقاً

من شكله العام: إيجاد ثوابت الحركة $(\bar{\varphi}, \theta_{\max}, \omega_0)$:

$$\bar{\theta} = \theta_{\max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

السعة الزاوية: $\theta_{\max} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$ لأن الساق تركت

دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t = 0$.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2.5} = \frac{4\pi}{5} \text{ rad.s}^{-1}$$

إيجاد الطور الابتدائي نعوض شروط البدء في التابع

$$(\theta_{\max} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}, t = 0):$$

$$\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \cos(0 + \bar{\varphi}) \Rightarrow \cos \bar{\varphi} = 1 \Rightarrow \bar{\varphi} = 0 \text{ rad}$$

$$\bar{\theta} = \frac{\pi}{3} \cos\left(\frac{4\pi}{5} t\right)$$

بالتالي:

(2) حساب قيمة السرعة الزاوية للساق لحظة مروره الأول بوضع التوازن:

$$\bar{\omega} = -\omega_0 \theta_{\max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$\bar{\omega} = -\frac{4\pi}{5} \times \frac{\pi}{3} \sin\left(\frac{4\pi}{5} t\right)$$

$$\bar{\omega} = -\frac{8}{3} \sin\left(\frac{4\pi}{5} t\right)$$

لحظة المرور الأول بوضع التوازن يوافق ربع هزة أي:

$$t = \frac{T_0}{4} = \frac{2.5}{4} = \frac{5}{8} \text{ s}$$

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= -\frac{8}{3} \sin\left(\frac{4\pi}{5} \times \frac{5}{8}\right) = -\frac{8}{3} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\frac{8}{3} \text{ rad.s}^{-1} \end{aligned}$$

(3) حساب طول الساق:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta}}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{2m_1 r_1^2}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{2m_1 \left(\frac{\ell}{2}\right)^2}{k}}$$

$$2.5 = 2\pi \sqrt{\frac{2 \times 125 \times 10^{-3} \times \frac{\ell^2}{4}}{16 \times 10^{-3}}}$$

$$\Rightarrow 6.25 = 40 \times \frac{2 \times 125 \times 10^{-3} \times \frac{\ell^2}{4}}{16 \times 10^{-3}}$$

$$\ell = \sqrt{\frac{4 \times 6.25 \times 16}{40 \times 2 \times 125}} \Rightarrow \ell = 0.2 \text{ m}$$

المسألة الثالثة: ساق أفقية متجانسة طولها $\ell = ab = 40 \text{ cm}$

معلقة بسلك قتل شاقولي يمر من منتصفها

(a) ندير الساق في مستو أفقي بزاوية $\theta = 60^\circ$ انطلاقاً

من وضع توازنها، ونتركها دون سرعة ابتدائية في

اللحظة $t=0$ ، فهتز بحركة جيبية دورانية دورها الخاص $T_0 = 1 \text{ s}$

فإذا علمت أن عزم عطالة الساق بالنسبة لسلك

$$I_{\Delta/C} = 2 \times 10^{-3} \text{ Kg.m}^2$$

(1) استنتج التابع الزمني للمطال الزاوي انطلاقاً من شكله العام.

(2) احسب قيمة السرعة الزاوية للساق لحظة مرورها الثاني بوضع التوازن.

(3) احسب قيمة التسارع الزاوي للساق عندما تصنع زاوية $30^\circ -$ مع وضع توازنها.

(b) نثبت بالطرفين a, b كتلتين تقطيتين

$m_1 = m_2 = 75 \text{ g}$ ، استنتج قيمة الدور الخاص الجديد للجملّة المهتزة، ثم احسب قيمة ثابت قتل السلك.

(c) تقسم سلك القتل قسامين متساويين، ونعلق الساق

بعدها بنصفي السلك معاً؛ أحدهما من الأعلى،

والآخر من الأسفل ومن منتصفها، ويثبت طرف هذا السلك

من الأسفل بحيث يكون شاقولياً. استنتج قيمة الدور الخاص الجديد للساق (دون وجود كتل تقطية).

الحل: 1- استنتج التابع الزمني للمطال الزاوي انطلاقاً

من شكله العام: إيجاد ثابت الحركة $(\omega_0, \theta_{\max}, \bar{\varphi})$:

$$\bar{\theta} = \theta_{\max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

السعة الزاوية: $\theta_{\max} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$ لأن الساق تركزت

دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t=0$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \text{ rad.s}^{-1}$$

لإيجاد الطور الابتدائي نعوض شروط البدء في التابع

$$\text{الزمني: } (\theta_{\max} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}, t = 0)$$

$$(k_2 = k' \frac{(2r)^4}{\frac{1}{2}l'} = 2k' \frac{(2r)^4}{l'}) \Rightarrow k_2 = 2k$$

$$K^* = 2K + 2K = 4K$$

$$T'_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{K^*}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{4k}} = \frac{1}{2} \times 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}$$

$$T'_0 = \frac{1}{2} T_0 = \frac{1}{2} \times 1 \Rightarrow T'_0 = \frac{1}{2} \text{ s}$$

التفكير الناقد:



نواس قتل مؤلف من سلك

قتل ثابت قتل k وقرص

معدني عزم عطالته

$I_\Delta = \frac{1}{2} mr^2$ وقد ثبت على

محيطه كأسان متماثلان يحويان نفس الكمية من الماء

وقد جهز كل منهما بصمام يتجه نحو مركز القرص. تراج الجملة عن

موضع توازنها زاوية $\theta_{\max} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ وتترك دون سرعة ابتدائية

في اللحظة $t = 0$ ، وفي إحدى النوسات تم فتح

الصمامين هل تزداد السرعة الزاوية أم تنقص ولماذا؟ **الجواب:**

سوف ينقص عزم عطالة الجملة فينقص الدور ويزداد النبض الخاص

فتزداد السرعة الزاوية العظمى.

----- انتهى البحث -----

ندعوكم للانضمام إلى قناتنا على التيلغرام:

قناة فراس قلعه جي للفيزياء والكيمياء

$$\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \cos(0 + \bar{\varphi}) \Rightarrow \cos \bar{\varphi} = 1 \Rightarrow \bar{\varphi} = 0 \text{ rad}$$

نعوض ثوابت الحركة في التابع الزمني للمطال الزاوي:

$$\bar{\theta} = \frac{\pi}{3} \cos(2\pi t)$$

2- حساب قيمة السرعة الزاوية للساق لحظة مرورها الثاني

بوضع التوازن: $\bar{\omega} = -\omega_0 \theta_{\max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$$\bar{\omega} = -2\pi \times \frac{\pi}{3} \sin(2\pi t) = -\frac{20}{3} \sin(2\pi t)$$

لحظة المرور الثاني بوضع التوازن يوافق ثلاث أرباع هزة

$$t = \frac{3T_0}{4} = \frac{3 \times 1}{4} = \frac{3}{4} \text{ s}$$

$$\bar{\omega} = -\frac{20}{3} \sin(2\pi \frac{3}{4}) = +\frac{20}{3} \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\alpha = -\omega_0^2 \theta \quad -3$$

$$\bar{\alpha} = -40 \times \left(\frac{-\pi}{6}\right) \Rightarrow \bar{\alpha} = \frac{20\pi}{3} \text{ rad.s}^{-2}$$

$$T'_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I'_\Delta}{K}} \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{K}} \quad (b)$$

$$\frac{T'_0}{T_0} = \frac{\sqrt{I_\Delta + 2m_1 r_1^2}}{\sqrt{I_\Delta}} = \frac{\sqrt{I_\Delta + 2m_1 \left(\frac{l}{2}\right)^2}}{\sqrt{I_\Delta}}$$

$$\frac{T'_0}{T_0} = \frac{\sqrt{2 \times 10^{-3} + 2 \times 75 \times 10^{-3} \times 400 \times 10^{-4}}}{\sqrt{2 \times 10^{-3}}}$$

$$\frac{T'_0}{1} = \sqrt{\frac{8 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-3}}} = 2 \Rightarrow T'_0 = 2 \text{ s}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{I_\Delta} \Rightarrow k = \omega_0^2 I_\Delta = 40 \times 2 \times 10^{-3}$$

$$\Rightarrow k = 8 \times 10^{-2} \text{ m.N.rad}^{-1}$$

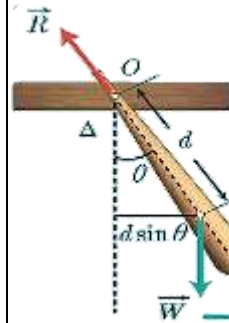
$$(k_1 = k' \frac{(2r)^4}{\frac{1}{2}l'} = 2k' \frac{(2r)^4}{l'}) \Rightarrow k_1 = 2k \quad (c)$$

النواس الثقلي المركب

تعريفه: هو كل جسم صلب يهتز بتأثير عزم قوة ثقله في مستو

شاقولي حول محور دوران أفقي عمودي على مستويه، ولا يمر من مركز عطالته.

الدراسة التحريكية للنواس الثقلي:



نعلق جسماً صلباً كتلته m ، مركز

عطالته C إلى محور دوران أفقي

Δ ، مار من النقطة O من

الجسم حيث البعد $d = Oc$

نزيح الجسم عن موضع توازنه الشاقولي زاوية θ ونتركه

دون سرعة ابتدائية ليهتز في مستو شاقولي.

تؤثر في الجسم قوتان هما:

قوة ثقله \vec{W} وقوة رد فعل محور الدوران على الجسم \vec{R} .

بتطبيق العلاقة الأساسية في التحريك الدوراني

(نظرية التسارع الزاوي):

$$\sum \bar{\Gamma}_{\Delta} = I_{\Delta} \bar{\alpha}$$

$$\bar{\Gamma}_{\vec{W}/\Delta} + \bar{\Gamma}_{\vec{R}/\Delta} = I_{\Delta} \bar{\alpha}$$

وباختيار الجهة الموجبة للدوران عكس جهة دوران عقارب الساعة نجد:

$$\bar{\Gamma}_{\vec{R}/\Delta} = 0 \text{ : لأن حامل القوة يمر من محور الدوران.}$$

$$\bar{\Gamma}_{\vec{W}/\Delta} = -(d \sin \theta) W$$

$$-(d \sin \theta) W + 0 = I_{\Delta} \bar{\alpha} \text{ بالتعويض نجد:}$$

$$-mgd \sin \theta = I_{\Delta} \bar{\alpha}$$

لكن: $\bar{\alpha} = (\theta)''_t$

$$(\theta)''_t = -\frac{mgd}{I_{\Delta}} \sin \bar{\theta} \dots \dots (1)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تحتوي $\sin \bar{\theta}$

بدلاً من θ فحلها ليس جيبياً، ومن ذلك فإن حركة

النواس الثقلي هي حركة اهتزازية غير توافقية.

ومن أجل السعات الزاوية الصغيرة ($\theta \leq 0.24 \text{ rad} = 14^\circ$)

في هذه الحالة يكون $\sin \bar{\theta} \approx \theta$.

نعوض في العلاقة (1) فنجد:

$$(\theta)''_t = -\frac{mgd}{I_{\Delta}} \bar{\theta} \dots \dots (2)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حل جيبياً

من الشكل:

$$\bar{\theta} = \theta_{\max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

للتحقق من صحة الحل نشق تابع المطال الزاوي مرتين

بالنسبة للزمن نجد:

$$\bar{\alpha} = (\theta)''_t = -\omega_0^2 \bar{\theta} \dots \dots (3)$$

بالمطابقة بين (2) و (3) نجد:

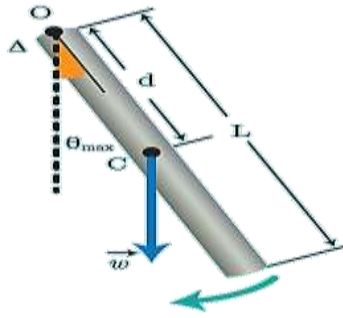
$$\omega_0^2 = \frac{mgd}{I_{\Delta}} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I_{\Delta}}} > 0$$

وهذا محقق لأن المقادير (m, g, d, I_{Δ}) موجبة، فحركة

النواس الثقلي من أجل السعات الزاوية الصغيرة هي

حركة جيبية دورانية توافقية بسيطة.

الحل:



يُعطى دور النواس الثقلي بالعلاقة: $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta}}{mgd}}$

لإيجاد عزم عطالة الساق حول المحور المار من O نطبق نظرية هاينزن:

$$I_{\Delta/O} = I_{\Delta/c} + Md^2 \quad d = \frac{L}{2}$$

$$I_{\Delta} = \frac{1}{12} ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{4}{12} ML^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

نعوض في علاقة الدور:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3} M \cdot L^2}{Mg \frac{L}{2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}} = 2\pi \sqrt{\frac{2 \times 0.375}{3 \times 10}} = 1 \text{ S}$$

النواس الثقلي البسيط:

نظرياً: نقطة مادية تهتز بتأثير ثقلها على بعد ثابت من محور أفقي ثابت.

عملياً: كرة صغيرة كتلتها m كثافتها النسبية كبيرة معلقة بحيط مهمل الكتلة لا يمتد طولها كبير بالنسبة لنصف قطر الكرة.

الدراسة التحريكية:



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{mgd}{I_{\Delta}}} \Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta}}{mgd}}$$

وهي العلاقة العامة للدور الخاص للنواس الثقلي في حالة الاهتزازات صغيرة السعة.

T_0 دور النواس الثقلي الخاص بسعة زاوية صغيرة، واحده S

I_{Δ} عزم عطالة الجسم الصلب، واحده $\text{Kg} \cdot \text{m}^2$

d بعد محور الدوران عن مركز عطالة الجسم الصلب واحده m ويمكن حسابها:

$$d = OC = \frac{m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2 \dots \dots \dots + m_i \bar{r}_i}{m_1 + m_2 + \dots + m_i}$$

\bar{r} مقدار جبري نعده موجبا إذا كان مركز عطالة الكتلة المهتزة تحت محور الدوران، وسالبا إذا كان مركز عطالة الكتلة المهتزة فوق محور الدوران.

تطبيق: نواس ثقلي مؤلف من ساق متجانسة طولها $L = 0.375 \text{ m}$ وكتلتها M معلقة من طرفها العلوي بمحور أفقي عمودي على مستويها الشاقولي،

نزيح الساق عن موضع توازنها الشاقولي زاوية صغيرة ($\theta \leq 14^\circ$) ونتركها دون سرعة ابتدائية. استنتج بالرموز

العلاقة المحددة للدور الخاص انطلاقاً من العلاقة العامة للدور الخاص للنواس الثقلي المركب ثم احسب قيمتها .

علماً أن عزم عطالة الساق حول محور عمودي على مستويها ومار من مركز عطالتها ($I_{\Delta/c} = \frac{1}{12} M \cdot L^2$).

طريقة ثانية: القوى الخارجية المؤثرة في الكرة:

$$\vec{w} = m\vec{g} \text{ و توتر الخيط } \vec{T}$$

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{w} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على المحور المماس الموجّه بجهة إزاحة الكرة:

$$-mg \sin \theta + 0 = ma_t$$

$$a_t = -g \sin \theta$$

$$\bar{a}_t = r \bar{\alpha} = l \bar{\alpha} = l(\bar{\theta})'' \text{ لكن}$$

$$(\bar{\theta})'' = -\frac{g}{l} \sin \theta \text{ عوض في العلاقة السابقة فنجد:}$$

وفي حالة السعات الزاوية الصغيرة: $\sin \theta \approx \theta$ فإن $\theta \leq 0.24 \text{ rad}$

$$(\bar{\theta})'' = -\frac{g}{l} \bar{\theta} \text{ (1)}$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبيًا من الشكل:

$$\bar{\theta} = \theta_{\max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

للتحقّق من صحة الحل نشقّ تابع المطال مرتين بالنسبة للزمن

$$(\theta)'' = -\omega_0^2 \bar{\theta} \text{ (2)}$$

بالمطابقة بين (1) و (2) نجدُ

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} > 0$$

وهذا محقّق لأنّ g, l مقداران موجبان، فحركة

النواس الثقلي البسيط من أجل السعات الزاوية الصغيرة

هي حركة جيبيّة توافقية بسيطة.

الدراسة التحريكية:
القوى الخارجية المؤثرة في الكرة:

$$\vec{w} = m \vec{g} \text{ ثقل الكرة.}$$

\vec{T} توتر الخيط.

لنطبق العلاقة الأساسية في التحريك الدوراني:

$$\Sigma \bar{\Gamma}_\Delta = I_\Delta \bar{\alpha}$$

$$\bar{\Gamma}_{\vec{w}/\Delta} + \bar{\Gamma}_{\vec{T}/\Delta} = I_\Delta \bar{\alpha}$$

$$\bar{\Gamma}_{\vec{T}/\Delta} = 0$$

لأن حامل \vec{T} يمر من محور الدوران Δ .

$$0 - mg \ell \sin \theta = m \ell^2 (\bar{\theta})''$$

$$-g \sin \theta = \ell (\bar{\theta})''$$

$$(\bar{\theta})'' = -\frac{g}{\ell} \sin \theta$$

$$(\bar{\theta})'' = -\frac{g}{l} \sin \theta \text{ عوض في العلاقة السابقة:}$$

وفي حالة السعات الزاوية الصغيرة: $\sin \theta \approx \theta$ فإن $\theta \leq 0.24 \text{ rad}$

$$(\bar{\theta})'' = -\frac{g}{l} \bar{\theta} \text{ (1)}$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبيًا من الشكل:

$$\bar{\theta} = \theta_{\max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

للتحقّق من صحة الحل نشقّ تابع المطال مرتين بالنسبة للزمن

$$(\theta)'' = -\omega_0^2 \bar{\theta} \text{ (2)}$$

بالمطابقة بين (1) و (2) نجدُ

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} > 0$$

وهذا محقّق لأنّ g, l مقداران موجبان، فحركة

النواس الثقلي البسيط من أجل السعات الزاوية الصغيرة

هي حركة جيبيّة انسحابية (دائرية) توافقية بسيطة.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

وهي علاقة الدور الخاص للنواس الثقلي البسيط في

السعات الزاوية الصغيرة.

ملاحظة: يمكن الوصول لعلاقة الدور الخاص للنواس البسيط

انطلاقاً من العلاقة العامة للدور الخاص للنواس الثقلي المركب

في حالة السعات الزاوية الصغيرة، وذلك بتعويض كل من:

$$d = l, \quad I_{\Delta} = mr^2 = ml^2$$

في علاقة الدور:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} \Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

استنتاج:

1- لا يتعلّق دور النواس البسيط بكتلته، ولا بنوع مادّة كرتة.

2- النوسات صغيرة السعة لها الدور نفسه (متوائمة فيما بينها).

3- يتناسب دور النواس البسيط من أجل السعات الزاوية الصغيرة:

طرداً مع الجذر التربيعي لطول الخيط.

عكساً مع الجذر التربيعي لتسارع الجاذبية الأرضية.

يعطى دور النواس الثقلي في حال السعات الزاوية الكبيرة

$$T'_0 \approx T_0 \left[1 + \frac{\theta_{\max}^2}{16} \right] \text{ بالعلاقة:}$$

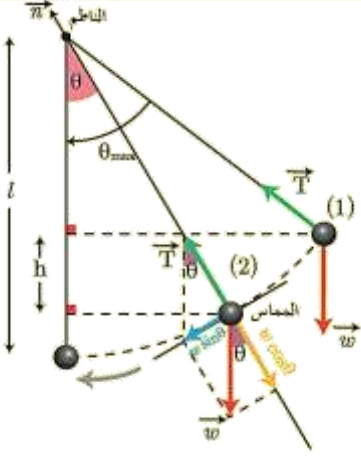
استنتاج العلاقة المحددة لسرعة كرة النواس وعلاقة

توتر خيط التعليق في نقطة من مسارها:

نزح كرة النواس عن موضع توازنها الشاقولي بزاوية θ_{\max}

ونتركها دون سرعة ابتدائية: لإيجاد العلاقة المحددة لسرعة الكرة

في الوضع (2)



القوى الخارجيّة المؤثرة:

ثقل الكرة \vec{W} ، توتر الخيط \vec{T} .

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين:

الأول: حيث يصنع الخيط مع الشاقول الزاوية θ_{\max} ويترك

بدون سرعة ابتدائية.

الثاني: حيث يصنع الخيط مع الشاقول الزاوية θ .

$$\Delta \bar{E}_{K(1 \rightarrow 2)} = \sum \bar{W}_{\vec{F}}$$

$$E_{K2} - E_{K1} = \bar{W}_{\vec{W}} + \bar{W}_{\vec{T}}$$

$$\bar{W}_{\vec{W}} = mgh$$

$\bar{W}_{\vec{T}} = 0$ لأن حامل \vec{T} يعامد الانتقال في كل لحظة

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgh + 0$$

وبملاحظة الشكل نجد:

القوى المبددة للطاقة، إذ يهتز بسعة زاوية ثابتة θ_{max} إلى جانبي موضع توازنه الشاقولي.

إن الطاقة الميكانيكية هي مجموع الطاقين الكامنة الثقالية، والحركية حيث أن مبدأ قياس الطاقة الكامنة الثقالية هو المستوي الأفقي المار من مركز عطالة الكرة عند مرور النواس في وضع توازنه الشاقولي.

اختبر نفسي:

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

1- قمت بزيارة بيت جدك، وطلبت إليك جدتك تصحيح الميقاتية



المعلقة على الجدار، وهي مؤلفة من ساق منتهية بقرص قابل للحركة صعوداً أو هبوطاً، فأتصلت بالساعة الناطقة فأشارت إلى السادسة تماماً عندما كانت الميقاتية

تشير إلى السادسة وخمس دقائق، ولتصحيح الوقت يجب:

- إيقاف الميقاتية، وخفض القرص بمقدار ضئيل ثم إعادة تشغيلها
- إيقاف الميقاتية، ورفع القرص بمقدار ضئيل ثم إعادة تشغيلها
- تصحيح عقرب الدقائق، وإعادة تليشير الوقت إلى السادسة تماماً.
- إيقاف الميقاتية مدة خمس دقائق، ثم إعادة تشغيلها مرة أخرى.

الإجابة الصحيحة: (a)

التوضيح: الميقاتية تقدم لذا يجب إبطاؤها بتكبير دورها

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta}}{mgd}}$$

يؤدي لزيادة عزم العطالة وتكبير الدور.

$$h = l \cos \theta - l \cos \theta_{max}$$

$$h = l (\cos \theta - \cos \theta_{max})$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgl (\cos \theta - \cos \theta_{max})$$

$$v^2 = 2gl (\cos \theta - \cos \theta_{max})$$

$$v = \sqrt{2gl (\cos \theta - \cos \theta_{max})}$$

حالة خاصة: عند المرور بالشاقول: $\theta = 0$ تصبح:

$$v = \sqrt{2gl (1 - \cos \theta_{max})}$$

لإيجاد العلاقة المحددة لقوة تؤثر الخيط في الوضع (2) نطبق العلاقة الأساسية في التحريك:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{w} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على المحور الناظم الذي له نفس حامل \vec{T} وبجته:

$$-W \cos \theta + T = ma_c$$

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{l}$$

$$T = m \frac{v^2}{l} + mg \cos \theta$$

$$T = 2mg(\cos \theta - \cos \theta_{max}) + mg \cos \theta$$

$$T = 2mg \cos \theta - 2mg \cos \theta_{max} + mg \cos \theta$$

$$T = 3mg \cos \theta - 2mg \cos \theta_{max}$$

$$T = mg(3 \cos \theta - 2 \cos \theta_{max})$$

حالة خاصة: عند المرور بالشاقول

$$T = mg(3 - 2 \cos \theta_{max})$$

الطاقة الميكانيكية للنواس الثقلي البسيط:

إن الطاقة الميكانيكية للنواس الثقلي البسيط ثابتة بإهمال

2- ميقاتيان متماثلتان مضبوطتان عند سطح الأرض بالتوقيت المحلي، نضع الأولى بالطابق الأرضي لناطحة سحاب، بينما نضع الثانية في الطابق الأخير، فإنه بعد شهر مع ثبات درجة الحرارة.

(a) تشيران إلى التوقيت نفسه.

(b) تقدم الثانية، ويجب تعديلها.

(c) تؤخر الثانية، ويجب تعديلها.

(d) تؤخر الأولى، ويجب تعديلها.

الإجابة الصحيحة: تؤخر الثانية، ويجب تعديلها.

التوضيح: في الطابق الأخير تنقص قيمة الجاذبية الأرضية

وبالتالي تزداد قيمة الدور.

ثانياً: حل المسائل الآتية:

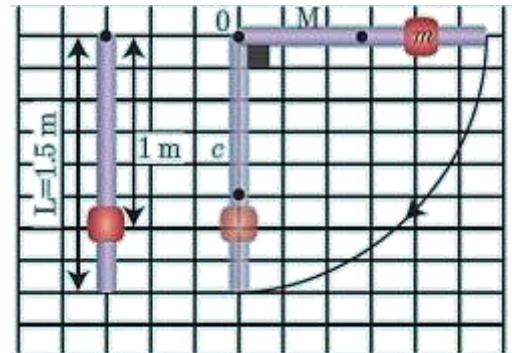
المسألة الأولى: يتألف نواس ثقلي مركب من ساق شاقولية

متجانسة كتلتها $M = 0.5 \text{ kg}$ ، طولها 1.5 m ، يمكنها أن

تنوس حول محور أفقي مار من طرفها العلوي، ومثبت عليها

كتلة نقطية $m' = 0.5 \text{ kg}$ على بعد 1 m من هذا

الطرف العلوي كما في الشكل المجاور



1- احسب دور هذا النواس في حالة الساعات الزاوية الصغيرة.

2- نزيح جملة النواس عن موضع توازنها الشاقولي بزاوية

$\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ وتركها دون سرعة ابتدائية احسب الطاقة

الحركية للنواس لحظة مروره بالشاقول، ثم احسب السرعة الخطية

للكتلة النقطية m' عندئذ.

(عزم عطالة ساق حول محور عمودي على مستويها ومار من مركز

$$I_{\Delta/c} = \frac{1}{12} ML^2$$

(الحل: 1) حساب دور هذا النواس في حالة الساعات الزاوية

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta}}{mgd}} \quad \text{الصغيرة:}$$

حساب عزم عطالة النواس:

• عزم عطالة الساق: حسب نظرية هاينغنز:

$$I_{\Delta/o} = I_{\Delta/c} + Md^2$$

$$I_{\Delta/o} = \frac{1}{12} ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

$$I_{\Delta/o} = \frac{1}{3} \times 0.5 \times (1.5)^2 = \frac{3}{8} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

• عزم عطالة الكتلة النقطية:

$$I_{\Delta/m'} = m' r'^2 = 0.5 \times (1)^2 = \frac{1}{2} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

• عزم عطالة جملة النواس: $I_{\Delta/\text{جملة}} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$

$$d = \frac{M\bar{r}_1 + m'\bar{r}_2}{M + m'} \quad \text{حساب } d:$$

$$d = \frac{M\frac{L}{2} + m'r'}{M + m} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times 1}{0.5 + 0.5} = \frac{7}{8} \text{ m}$$

$$m_{\text{جملة}} = (m' + M) = 0.5 + 0.5 = 1 \text{ kg}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{7}{8}}{1 \times 10 \times \frac{7}{8}}} = 2 \text{ S}$$

1_ يحرف الخيط عن وضع التوازن بزاوية θ_{max} ، وتترك الكرة

بدون سرعة ابتدائية فتكون سرعتها لحظة مرورها بالشاقول

$$v = 2m \cdot s^{-1} \text{ استنتج قيمة الزاوية } \theta_{max}.$$

2_ استنتج بالرموز علاقة توتر خيط النواس لحظة مروره بوضع الشاقول

ثم احسب قيمتها .

(الحل: 1) نطبق نظرية الطاقة الحركية بين الوضعين :

الأول: المطال الزاوي الأعظمي $\theta_1 = \theta_{max}$

وبدون سرعة ابتدائية الثاني: المرور بالشاقول $\theta_2 = 0$

$$\Delta E_K = \sum \bar{W}_{\vec{F}}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = \bar{W}_{\vec{W}} + \bar{W}_{\vec{T}}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgh + 0$$

$$h = l(1 - \cos \theta_{max})$$

$\bar{W}_{\vec{T}} = 0$ لأن حامل \vec{T} يعامد الانتقال في كل لحظة

$$v^2 = 2gl(1 - \cos \theta_{max})$$

$$\cos \theta_{max} = 1 - \frac{v^2}{2gl}$$

$$\cos \theta_{max} = 1 - \frac{(2)^2}{2(10)(0.4)}$$

$$\cos \theta_{max} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_{max} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

(2) طريقة أولى للحل: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$$\vec{w} + \vec{T} = m\vec{a}$$

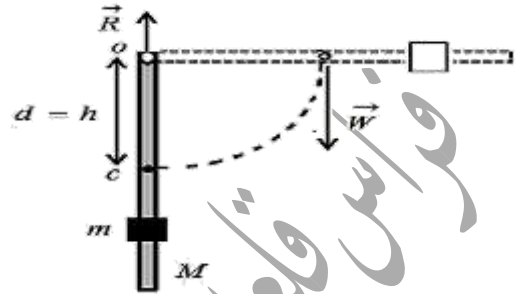
بالإسقاط على المحور الناظم الذي له نفس حامل \vec{T} وبجته:

$$-W + T = ma_c$$

(2) نطبق نظرية الطاقة الحركية بين الوضعين :

الأول: المطال الزاوي الأعظمي $\theta_1 = \theta_{max}$ وبدون

سرعة ابتدائية الثاني: المرور بالشاقول $\theta_2 = 0$



$$\Delta E_K = \sum \bar{W}_{\vec{F}}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = \bar{W}_{\vec{W}} + \bar{W}_{\vec{R}}$$

$$E_k - 0 = (M + m')gh + 0$$

$\bar{W}_{\vec{R}} = 0$ لأن نقطة تأثير \vec{R} لا تتقل

$$E_k = (M + m')gh$$

$$h = d \Rightarrow E_k = (M + m')gd$$

$$E_k = (0.5 + 0.5) \times 10 \times \frac{7}{8} = \frac{70}{8} \text{ J}$$

• السرعة الزاوية عند المرور بالشاقول:

$$E_k = \frac{1}{2}I_{\Delta}\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2E_k}{I_{\Delta}}} = \sqrt{\frac{2 \times \frac{70}{8}}{\frac{7}{8}}}$$

$$\omega = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ rad.s}^{-1}$$

• السرعة الخطية عند المرور بالشاقول:

$$v = \omega r = 2\sqrt{5} \times 1 = 2\sqrt{5} \text{ m.s}^{-1}$$

المسألة الثانية: خيط مهمل الكتلة لا يمتط طوله $l = 40 \text{ cm}$ ، نعلق

في نهايته كرة صغيرة نعدّها نقطة مادية كتلتها $m = 100 \text{ g}$

المطلوب:

1- استنتج بالرموز العلاقة المحددة لسرعة الكرة عند مرورها بالشاقول، ثم احسب قيمتها موضحاً بالرسم.

2- استنتج قيمة الزاوية θ_{max} ثم احسب قيمتها.

3- احسب دور هذا النواس.

4- استنتج بالرموز العلاقة المحددة لشدة قوة توتر الخيط عند المرور بالشاقول، ثم احسب قيمته

الحل: 1) نطبق نظرية الطاقة الحركية بين الوضعين:

الأول: المطال الزاوي الأعظمي $\theta_1 = \theta_{max}$ وبدون

سرعة ابتدائية **الثاني:** المرور بالشاقول $\theta_2 = 0$

$$\Delta E_K = \sum \bar{W}_{\vec{F}}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = \bar{W}_{\vec{W}} + \bar{W}_{\vec{T}}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgh + 0$$

$\bar{W}_{\vec{T}} = 0$ لأن حامل \vec{T} يعامد الانتقال في كل لحظة

$$v^2 = 2gh \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 10 \times 0.8}$$

$$v = 4 \text{ m.s}^{-1}$$

$$h = l(1 - \cos \theta_{max}) \quad (2)$$

$$\cos \theta_{max} = 1 - \frac{h}{l} = 1 - \frac{0.8}{1.6}$$

$$\cos \theta_{max} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_{max} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

$$(3) \text{ حساب دور النواس: } T'_0 \approx T_0 \left[1 + \frac{\theta_{max}^2}{16} \right]$$

$$T'_0 \approx T_0 \left[1 + \frac{\theta_{max}^2}{16} \right] \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \frac{\theta_{max}^2}{16} \right] \Rightarrow$$

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{l}$$

$$T = m \frac{v^2}{l} + mg$$

$$T = 2mg(1 - \cos \theta_{max}) + mg$$

$$T = 2mg - 2mg \cos \theta_{max} + mg$$

$$T = 3mg - 2mg \cos \theta_{max}$$

$$T = mg(3 - 2 \cos \theta_{max})$$

$$T = 0.1 \times 10 (3 - 2 \times 0.5) = 2N$$

طريقة ثانية للحل: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$$\vec{W} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على المحور الناظم الذي له نفس حامل \vec{T} وبجهته:

$$-W + T = ma_c$$

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{l}$$

$$T = mg + m \frac{v^2}{l} = m(g + \frac{v^2}{l})$$

$$T = 0.1(10 + \frac{4}{0.4}) \Rightarrow T = 2N$$

المسألة الثالثة: نعلق كرة صغيرة نعدّها نقطة مادية، كتلتها

$m=0.5\text{kg}$ ، بجيّد مهمل الكتلة، لا يمتد، طوله $l = 1.6 \text{ m}$ ،

تؤلف نواساً ثقلياً بسيطاً، ثم نزيح الكرة إلى مستواً أفقي يرفع،

$h = 0.8\text{m}$ عن المستوي الأفقي المار منها وهي

في موضع توازنها الشاقولي، ليصنع خيط النواس مع الشاقول

زاوية θ_{max} ، ونتركها دون سرعة ابتدائية والمطلوب:

المسألة الرابعة: نثبت ساق شاقولية، مهملة الكتلة، طولها $l = 1m$

نثبت في منتصفها كتلة نقطية $m_1 = 0.4 \text{ kg}$ ونثبت في طرفها السفلي كتلة نقطية $m_2 = 0.2 \text{ kg}$ لتؤلف الجملة نواساً ثقلياً مركباً يمكنه أن ينوس في مستوي شاقولي حول محور أفقي مار من الطرف العلوي.

والمطلوب: 1- احسب دور نواسها صغيرة السعة.

2- نزع الجملة عن موضع توازنها بزاوية $\theta_{\max} > 0.24 \text{ rad}$

ونتركها دون سرعة ابتدائية، فتكون السرعة الخطية لمركز

عطالة جملة النواس لحظة مرورها بالشاقول $v = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} m.s^{-1}$

المطلوب: a- احسب السرعة الخطية للكتلة النقطية m_2

b- استنتج قيمة الزاوية θ_{\max} .

الحل: 1 حساب دور هذا النواس في حالة السعات الزاوية الصغيرة:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta}}{mgd}}$$

حساب عزم عطالة النواس: (الساق مهملة الكتلة)

$$I_{\Delta/0} = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = m_1 \left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_2 L^2$$

$$= 0.4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0.2(1)^2 = 0.3 \text{ Kg} \cdot m^2$$

$$d = \frac{m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \text{حساب d:}$$

$$d = \frac{m_1 \left(\frac{L}{2}\right) + m_2 L}{m_1 + m_2} = \frac{0.4 \times \frac{1}{2} + 0.2 \times 1}{0.4 + 0.2} = \frac{2}{3} m$$

$$m_{\text{جملة}} = (m_1 + m_2) = 0.4 + 0.2 = 0.6 \text{ kg}$$

$$\Rightarrow T_0 \approx 2\pi \sqrt{\frac{1.6}{10} \left[1 + \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2}{16}\right]} \approx 0.8\pi \left[1 + \frac{\left(\frac{10}{9}\right)}{16}\right]$$

$$T_0 \approx 2.5 \left[1 + \frac{10}{144}\right] \approx 2.5 \left(\frac{154}{144}\right) \approx 2.67 \text{ S}$$

(4) طريقة أولى للحل: $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$

$$\vec{W} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على المحور الناظم الذي له نفس حامل \vec{T} وبجته:

$$-W + T = ma_c$$

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{l}$$

$$T = m \frac{v^2}{l} + mg$$

$$T = 2mg(1 - \cos \theta_{\max}) + mg$$

$$T = 2mg - 2mg \cos \theta_{\max} + mg$$

$$T = 3mg - 2mg \cos \theta_{\max}$$

$$T = mg(3 - 2 \cos \theta_{\max})$$

$$T = 0.5 \times 10(3 - 2 \times 0.5) = 10 \text{ N}$$

طريقة ثانية للحل: $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$

$$\vec{W} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على المحور الناظم الذي له نفس حامل \vec{T} وبجته:

$$-W + T = ma_c$$

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{l}$$

$$T = mg + m \frac{v^2}{l} = m \left(g + \frac{v^2}{l}\right)$$

$$T = 0.5 \left(10 + \frac{16}{1.6}\right) \Rightarrow T = 10 \text{ N}$$

المسألة الخامسة: يتألف نواس ثقلي من ساقٍ شاقوليةٍ، مهملية الكتلة طولها L ، تحمل في كل من طرفيها كتلة تقطية m' نعلق الجملة بمحور دوران أفقي يبعد عن طرف الساق العلوي $\frac{L}{4}$ ، نزيح الجملة عن وضع توازنها الشاقولي بزاوية $\frac{1}{2\pi} \text{ rad}$ ونتركها دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t = 0$ فتتهز بدور خاص $T_0 = 2.5 \text{ s}$. المطلوب:

1- استنتج التابع الزمني للمطال الزاوي لحركة هذا النواس انطلاقاً من شكله العام.

2- استنتج بالرموز العلاقة المحددة لطول الساق، ثم احسب قيمته.

3- احسب قيمة السرعة الزاوية العظمى للحركة (طويلة).

4- لنفرض أنه في إحدى التوسات انفصلت الكتلة السفلية عن الساق، استنتج الدور الخاص الجديد للجملة في حالة السعات الزاوية الصغيرة.

الحل: (1) استنتاج التابع الزمني للمطال الزاوي انطلاقاً من شكله العام:

إيجاد ثابت الحركة ω_0 ، θ_{\max} ، $\bar{\varphi}$:

$$\bar{\theta} = \theta_{\max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2.5} = \frac{4\pi}{5} \text{ rad.s}^{-1} \text{ : النبض الخاص}$$

$$\theta_{\max} = \frac{1}{2\pi} \text{ rad} \text{ : السعة الزاوية: لأن الساق تركت}$$

دون سرعة ابتدائية لحظة بدء الحركة.

حساب $\bar{\varphi}$: لإيجاد الطور الابتدائي نعوض شروط البدء في

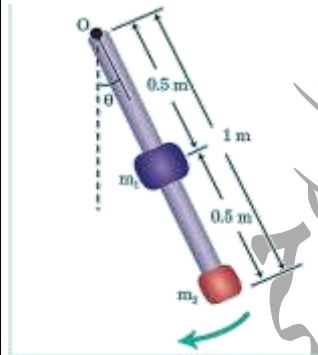
$$\theta = \theta_{\max} \text{ : التابع الزمني: } t=0 \text{ كانت}$$

$$\frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cos(0 + \bar{\varphi}) \Rightarrow \cos \bar{\varphi} = 1 \Rightarrow \bar{\varphi} = 0 \text{ rad}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{0.3}{(0.6) \times 10 \times \frac{2}{3}}} \Rightarrow T_0 = \sqrt{3} \text{ s}$$

$$v_c = \omega r_c \Rightarrow \omega = \frac{v_c}{r_c} = \frac{\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \text{ rad.s}^{-1} \text{ (a)}$$

$$v_{m2} = \omega r_{m2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \times 1 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \text{ m.s}^{-1}$$



(b) نطبق نظرية الطاقة الحركية

بين الوضعين:

الأول: المطال الزاوي

$$\bar{\theta}_1 = \theta_{\max} \text{ الأعظمي}$$

وبدون سرعة ابتدائية.

الثاني: المرور بالشاقول $\bar{\theta}_2 = 0$

$$\Delta E_K = \sum \bar{W}_{\bar{F}}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = \bar{W}_{\bar{W}} + \bar{W}_{\bar{R}}$$

$$E_K - 0 = (m_1 + m_2)gh + 0$$

$$\bar{W}_{\bar{R}} = 0 \text{ لأن نقطة تأثير } \bar{R} \text{ لا تنتقل}$$

$$\frac{1}{2} I_{\Delta} \omega^2 - 0 = (m_1 + m_2)gd(1 - \cos \theta_{\max})$$

$$\cos \theta_{\max} = 1 - \frac{\frac{1}{2} I_{\Delta} \omega^2}{(m_1 + m_2)gd} =$$

$$\cos \theta_{\max} = 1 - \frac{0.5 \times 0.3 \times \left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)^2}{0.6 \times 10 \times \frac{2}{3}} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$\cos \theta_{\max} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_{\max} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

نعوض ثوابت الحركة في التابع الزمني للمطال الزاوي:

$$\theta = \frac{1}{2\pi} \cos\left(\frac{4\pi}{5} t\right)$$

(2) يعطى دور هذا النواس في حالة السعات الزاوية الصغيرة:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta}}{mgd}}$$

حساب عزم عطالة النواس:

$$I_{\Delta/o} = m' \left(\frac{L}{4}\right)^2 + m' \left(\frac{3L}{4}\right)^2 = \frac{5}{8} m' L^2$$

$$d = \frac{-m' \frac{L}{4} + m' \frac{3L}{4}}{m' + m'} = \frac{m' \frac{L}{2}}{2m'} = \frac{L}{4} \quad m \quad \text{حساب } d:$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{5}{8} m' L^2}{2m' g \frac{L}{4}}} \Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{5L}{4g}}$$

$$\Rightarrow L = \frac{T_0^2 g}{5\pi^2} = \frac{(2.5)^2 \times 10}{5 \times 10} = 1.25 \text{ m}$$

$$\omega_{\max} = |\pm \omega_0 \theta_{\max}| \Rightarrow \omega_{\max} = \frac{4\pi}{5} \times \frac{1}{2\pi} \quad (3)$$

$$\omega_{\max} = 0.4 \text{ rad. s}^{-1}$$

(4) بعد انفصال الكتلة السفلية يصبح النواس في حالة توازن

قلق فيهتز ليصبح في حالة توازن مستقر وتصبح كتلة النواس

$$m' \text{ عزم عطالته, } I_{\Delta/c} = m' \left(\frac{L}{4}\right)^2, \quad d = \frac{L}{4}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta}}{m' g d}} \Rightarrow T_0 = \sqrt{\frac{m' \left(\frac{L}{4}\right)^2}{m' g \frac{L}{4}}}$$

$$\Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{4g}} \Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{1.25}{4 \times 10}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ s}$$

التفكير الناقد: عند انعدام الثقل

الظاهري ضمن المحطة الفضائية:

1_ لدينا كرة كتلتها m معلقة بخيط

مهمل الكتلة طوله l كما هو موضح

بالشكل جانبياً لتشكل نواساً بسيطاً عند

سطح الأرض ما قيمة الدور على متن

المحطة الفضائية مع التعليل.

2_ كيف يمكن جعله يهتز بجرعة

جيبية توافقية بسيطة؟

الجواب: 1- في محطة الفضاء تكون

قوة الثقل مساوية بالقيمة ومعاكسة بالجهة قوة العطالة النابذة

الناجمة عن الدوران فيحدث ما يسمى انعدام الثقل

الظاهري فيصبح الدور لانهائي.

2_ لجعل الكرة تهتز بجرعة جيبية توافقية نصل الكرة بناض

مرن فتصبح الحركة انسحابية توافقية بسيطة.

انتهى البحث

ندعوكم للانضمام إلى قناتنا على التيلغرام:

قناة فراس قلعه جي للفيزياء والكيمياء