١

امتحان نهائي (١)

أولاً:

السؤال الأول:

1] $\lim_{x \to -\infty} f_x = 1$

$y=1$ مقارب أفقي يوازي xx'

2] $y=1$ مقارب أفقي يوازي xx' في جوار $-\infty$

3] $f(0)=0$ قيمة حدية صغرى

4] $f'(x) < 0$ ومنه بخط ~~[illegible]~~ نازل

مجموعة الحلول: $]-\infty, 0[$

أي تقع على الفواصل

السؤال الثاني:

$U_{d}(3,4,-1)$

$U_{d'}(-9,-12,3)$

$$\frac{-9}{3} \overset{?}{=} \frac{-12}{4} \overset{?}{=} \frac{+3}{-1}$$

$$-3 = -3 = -3$$

المركبات متناسبة ⇐ فالشعاعان مرتبطان خطياً ⇐ المستقيمان متوازيان

لدراسة الانطباق:

نوجد نقطة من d:

نفرض $t=0$

$\Rightarrow A(1,0,1) \in d$

نعوض بـ d' للنقطة A

$\Rightarrow x=1 \Rightarrow 1 = -9s+4 \Rightarrow$ $\boxed{s = \frac{1}{3}}$

$\Rightarrow y=0 \Rightarrow 0 = -12s+4$ $\boxed{s = \frac{1}{3}}$

$\Rightarrow z=1 \Rightarrow 1 = 3s$ $\boxed{\Rightarrow s = \frac{1}{3}}$

⇐ المستقيمان منطبقان.

السؤال الثالث:

$$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} \cdot b^r$$

$$T_r = \binom{9}{r} a^{9-r} \cdot b^r$$

$$T_r = \binom{9}{r} (x^2)^{9-r} \cdot \frac{1}{x^r}$$

$$T_r = \binom{9}{r} x^{18-2r} \cdot x^{-r}$$

$$T_r = \binom{9}{r} x^{18-3r} \cdot x^{-r}$$

$$18-3r = 3$$
$$18-3 = 3r$$
$$15 = 3r$$
$$r = 5$$

$$T_5 = \binom{9}{5} x^{18-15} \cdot x^{-5}$$

$$y = \frac{2}{3} e^{3x} + \frac{1}{3}$$

السؤال السادس:

تجربة برنولية:

$$P(H) + P(T) = 1$$

$$2P(T) + P(T) = 1$$

$$3P(T) = 1$$

$$P(T) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow P(H) = \frac{2}{3}$$

$n = 4$, $K = \{3, 4\}$

$P_{(H)} = \frac{2}{3}$ (صادرة) $q = \frac{1}{3}$ ($P_{(H)}$ عكس)

$$P(K) = \binom{n}{K} p^K q^{n-K}$$

$$P(3) = \binom{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^{4-3}$$

$$P(3) = (4)\left(\frac{8}{27}\right) \cdot \frac{1}{3}$$

$$P(3) = \frac{32}{81}$$

$$P(4) = \binom{4}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0$$

$$P(4) = \frac{16}{81}$$

$$\Rightarrow P(H) = P(3) + P(4)$$

$$P_H = \frac{32}{81} + \frac{16}{81} = \frac{48}{81}$$

$$Tr = 126\, x^3$$

السؤال الرابع:

$$\ln(x-2) \le \ln(2x-1)$$

$$x - 2 \le 2x - 1$$

$$-x \le +1$$

$$x \geq -1$$

$$E\, [-1, +\infty[$$

$$S = D \cap E$$

$$=]2, +\infty[$$

السؤال الخامس:

$$y' = 3y - 1$$

$a = 3$, $b = -1$

الحل: $y = Ke^{ax} - \frac{b}{a}$

$$y = K e^{3x} + \frac{1}{3}$$

$$f(0) = 1$$

$x = 0$, $y = 1$

$$1 = K e^{0} + \frac{1}{3}$$

$1 = K + \frac{1}{3}$ $K = \frac{1}{(3)} - \frac{1}{3}$

$$K = \frac{2}{3}$$

ثانياً:

التمرين الأول:

$f(x) = \frac{2x}{x+1}$ $(-1, 2)$ ← a , b

1] $f(a+x) + f(a-x) = 2b$ أو $f(2a-x) + f(x) = 2b$

أياً كانت $x \in R\setminus\{-1\}$ فإن
$-x \in R\setminus\{+1\}$
$\Rightarrow -2-x \in R\setminus\{-1\}$

$f(-2-x)+f(x) = 2b$ 4

$4 = 4$

2] $\lim_{x\to -1^+} f_x = -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2$

x	-1		+∞
f'(x)	‖	+	
f(x)	‖	-∞ ↗	2

3] A] نرمز $E(n): U_n \geq U_{n+1} \geq 1$

نبرهن صحة العلاقة من أجل $n=0$

$U_0 \geq U_1 \geq 1$

نعوض

$2 \geq \frac{4}{3} \geq 1$

محققة.

نفرض $E(n)$ صحيحة ←

E_n: $U_n \geq U_{n+1} \geq 1$ (*)

نبرهن صحة العلاقة من أجل $E(n+1)$

ننطلق من (*) أي نبرهن أن $U_{n+1} \geq U_{n+2} \geq 1$

$U_n \geq U_{n+1} \geq 1$

$f(U_n) \geq f(U_{n+1}) \geq f(1)$

$U_{n+1} \geq U_{n+2} \geq 1$

محققة

B] من الطلب السابق نجد أن
$U_n \geq U_{n+1}$
فإن (U_n) متناقصة

C] بما أنها متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد 1 فهي متقاربة.

النهاية: $f(x) = x$

التابع مستمر على $R\setminus\{-1\}$ فهو مستمر عند l

$x = \frac{2x}{x+1}$

$2x = x^2 + x$

$x^2 - 2x + x = 0$

$x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0$

إما $x = 0$
أو $x = 1$

$V_0 = 2$

0   1   2

$x=1$

مقبول $l=1$

التمرين الثاني:

1) $f(0)=0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x-\ln x} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

$-(-\infty) = +\infty$

شرط الاستمرار

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

$0=0$ محقق

f مستمر عند الصفر

2) $$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{x-\ln x} - 0}{x-0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x-\ln x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x-\ln x} = 0$$

التابع f قابل للاشتقاق

نصف مماس افقي (لانو طبيعي)

$y=0$ و $y=f(x)$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = x$$

نخرج x عامل مشترك

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x-\ln x} = \frac{1}{1-0} = \boxed{1}$$

$y=1$

4) $y - f(a) = f'(a)[x-a]$

$\Rightarrow y = x$

التقريب الخطي:

$f(1,1)$

$h = 1.1 - 1 = \boxed{0,1}$ $a=1$

$f(a+h) = f(a) + f'(a).h$

$f(1,1) = f(1) + f'(1)(0,1)$

$= 1 + 1(0,1)$

$\simeq 1,1$

التمرين الثالث:

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 3(-1) + 7$

$= -7 + 7 = 0$

محققة $=0$

المسألة الأولى:

1] $x-2y=5$

$y+z=4$

$\vec{n_1}(1,-2,0)$

$\vec{n_2}(0,1,1)$

الناظمان غير مرتبطان خطياً فالمستويان متقاطعان.

2] نفرض:

$$\left.\begin{aligned} x &= 5+2t \\ y &= t \\ z &= 4-t \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

ونستبدل نعوض بالمعادلة الصحيحة أيضاً.

3] إذا تعامد مستوي مع مستويين فإن الفصل المشترك هو الناظم

$n = \vec{U_\Delta} = (2,1,-1)$

$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

4] نعوض معادلات Δ في Q فنستنتج t ثم نعوض t في Δ فنستنتج نقطة التقاطع

$\Rightarrow B(7,1,3)$

5] حساب البعد

$BA=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2}$

$=\sqrt{5}$

$$\begin{array}{r|l} z^3-3z^2+3z+7 & z+1 \\ \hline 00 & z^2-4z+7 \end{array}$$

$\Rightarrow P(z)=(z+1)(z^2-4z+7)=0$

إما $z+1=0 \Rightarrow z=-1$

أو $z^2-4z+7=0$

$\Delta = b^2-4.a.c$

$=16-4(7)=16-28$

$=-12$

إما $z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}\,i}{2a}$

$z_1 = \frac{4-2\sqrt{3}\,i}{2}$

أو $z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}\,i}{2a}$

$=\frac{4+2\sqrt{3}\,i}{2}$

$A(-1,0)$

$B(2,-\sqrt{3})$

$C(2,+\sqrt{3})$

$$\left.\begin{aligned} AB &= \sqrt{12} \\ BC &= \sqrt{12} \\ AC &= \sqrt{12} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ فالمثلث متساوي الأضلاع

المسألة الثانية:

$$f(x) = \frac{x+\ln x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} f_x = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f_x = \lim_{x\to+\infty} \cancel{x}\left(\frac{1+\frac{\ln x}{x}}{\cancel{x}}\right)$$

$$= 1+0 = 1$$

$$f'(x) = \frac{1+\frac{1}{x}(x) - 1(x+\ln x)}{x^2}$$

$$= \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$\Rightarrow 1-\ln x = 0$$

$$\ln x = 1$$

$$e \qquad e \qquad \Rightarrow x = e$$

x	0		e		$+\infty$
f'	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1+e}{e}$	↘	1

2] التابع مستمر ومتزايد على المجال
$]0,e[$

$$f]0,e[=]-\infty, \frac{1+e}{e}[$$

3] يوجد شرطان

$$f(a) = g(a)$$

$$f'(a) = g'(a)$$

$$\Downarrow$$

$$1 = 1$$

B] $y - f(a) = f'(a)\{x-a\}$

$$y = x$$

مماس مشترك

الفصل $\boxed{4}$

الدراسة ←

نجد النواة

استنتاج C

$f(x) = -1 + \frac{1}{x}\ln(\frac{1}{x})$

$-f(x) = \frac{-x - \ln x}{x}$

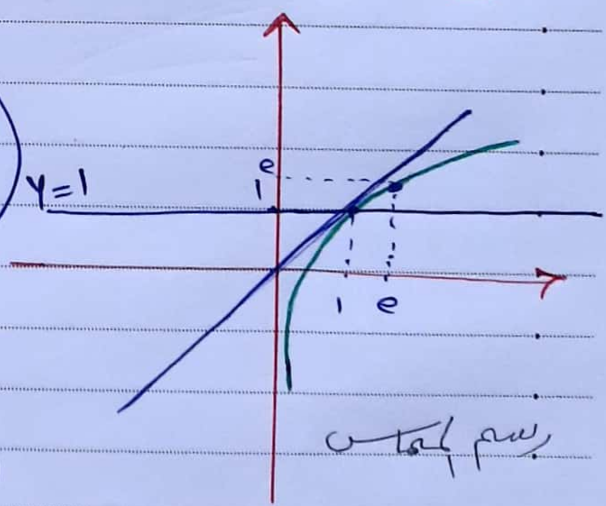
$= -1 - \frac{\ln x}{x} = -1 - \frac{1}{x}\ln x$

$= -1 + \frac{1}{x}\ln x^{-1}$

$= -1 + \frac{1}{x}\ln\frac{1}{x} = f_1(x)$

$\Leftarrow$ C' ينتج عن C بالتناظر لمحور الفواصل.

توضيح الرسمة



رسم المماس

$x = 0 \Rightarrow y = 0 \quad (0,0)$

$x = 1 \Rightarrow y = 1 \quad (1,1)$

أ. زينب الشوشي