الرياضيات ● المدرس : محمد السيدعلي ● حل تمارين ومسائل ● المتتاليات ● حل تمارين ومسائل ● المدرس : محمد السيدعلي ● الرياضيات

1 – التمرين الأول دورة ٢٠١٧ الأولى : (٦٠ درجة)

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n - 2 \ , \ U_0 = 1$

ولتكن المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $V_n = U_n + 3$

1) أثبت أن $(V_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية ، وأوجد أساسها .

2) اكتب عبارة V_n بدلالة n ، ثم عبارة U_n بدلالة n

3) ليكن في حالة عدد طبيعي n : $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$ ، عبر عن S_n بدلالة n

واستنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$

الحـــــل :

$$V_{n+1} = U_{n+1} + 3 = \frac{1}{3}U_n - 2 + 3 = \frac{1}{3}U_n + 1 = \frac{1}{3}(U_n + 3) = \frac{1}{3}V_n$$

أي أن $(V_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول $V_0 = U_0 + 3 = 1 + 3 = 4$ ويكون $V_n = 4(\frac{1}{3})^n$

لدينا $V_n = U_n + 3$ فيكون : $U_n = V_n - 3$ وبالتالي نجد : $U_n = 4(\frac{1}{3})^n - 3$

محمد السيدعلي

$S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$

عدد الحدود : $n - 0 + 1 = n + 1$ والأساس $q = \frac{1}{3}$ والحد الأول $V_0 = 4$ وبالتالي :

$$S_n = a\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \Rightarrow S_n = 4.\frac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = 6\left[1-(\frac{1}{3})^{n+1}\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} 6\left[1-(\frac{1}{3})^{n+1}\right] = 6(1-0) = 6$$

Scanned by CamScanner

2 – التمرين الأول دورة ٢٠١٧ الثانية : (٦٠ درجة)

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق ما يأتي : $U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

1) أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متناقصة 2) أثبت أن $0 \leq U_n \leq 1$ واستنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها

الحـــل :

■ المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ معرفة بشكل صريح لدراسة اطرادها ندرس اطراد التابع $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ على المجال $]0,+\infty[$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} < 0$ وذلك لأن

$$\forall x \in]0,+\infty[: x+1 > x \Rightarrow \sqrt{x+1} > \sqrt{x} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x+1}} < \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$$

والتابع متناقص ومنه المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متناقصة

طريقة ثانية : $\forall n \in \mathbb{N} : n+1 \geq n \Rightarrow \sqrt{n+1} \geq \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \geq 0$ وبالتالي حدود المتتالية موجبة تماماً

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \frac{\dfrac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}}{\dfrac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}} = \frac{\dfrac{1}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}}{\dfrac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}} \Rightarrow$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})} < 1 \Rightarrow U_{n+1} < U_n$$

أي أن المتتالية متناقصة

طريقة ثالثة :

$$U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$

$$U_{n+1} = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})} = \frac{1}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})} - \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) - (\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \Rightarrow$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} < 0 \Rightarrow U_{n+1} < U_n$$

أي أن المتتالية متناقصة

$\forall n \in \mathbb{N} : n+1 \geq n \Rightarrow \sqrt{n+1} \geq \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \geq 0$ وبالتالي المتتالية محدودة من الأدنى

$$U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{n+1-n}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \leq 1$$

وذلك لأن $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq 1$ وبالتالي المتتالية محدودة من الأعلى ، مما سبق نجد أن : $0 \leq U_n \leq 1$

بما المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1-n}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = 0$$

الرياضيات المدرس : محمد السيدعلي حل تمارين ومسائل المتتاليات

Scanned by CamScanner

الرياضيات المدرس : محمد السيدعلي حل تمارين ومسائل المتتاليات

3 – دورة ٢٠١٨ الأولى (٦٠ درجة) :

لتكن المتتاليتان $(U_n)_{n \ge 0}$ و $(V_n)_{n \ge 0}$ المعرفتان وفق : $U_n = 5 - \frac{1}{n}$ ، $V_n = 5 + \frac{1}{n^2}$

① أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n \ge 0}$ متزايدة

② أثبت أن المتتالية $(V_n)_{n \ge 0}$ متناقصة

③ هل المتتاليتان $(U_n)_{n \ge 0}$ و $(V_n)_{n \ge 0}$ متجاورتان ؟ علل ذلك

الحـــــل :

$$U_n = 5 - \frac{1}{n}$$

$$U_{n+1} = 5 - \frac{1}{n+1}$$

$$U_{n+1} - U_n = \left(5 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(5 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0 \qquad \left(n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}\right)$$

أي أن المتتالية $(U_n)_{n \ge 0}$ متزايدة تماماً

$$V_n = 5 + \frac{1}{n^2}$$

$$V_{n+1} = 5 + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$V_{n+1} - V_n = \left(5 + \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \left(5 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} < 0$$

$$\left(n < n+1 \Rightarrow n^2 < (n+1)^2 \Rightarrow \frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

أي أن المتتالية $(V_n)_{n \ge 0}$ متناقصة تماماً

$$\lim_{n \to +\infty} (V_n - U_n) = \lim_{n \to +\infty} \left[\left(5 + \frac{1}{n^2}\right) - \left(5 - \frac{1}{n}\right)\right] = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\right] = 0$$

فالمتتاليتان $(U_n)_{n \ge 0}$ و $(V_n)_{n \ge 0}$ متجاورتان

طريقة ثانية :

$$U_{n+1} - U_n = \left(5 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(5 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

أي أن المتتالية $(U_n)_{n \ge 0}$ متزايدة تماماً

$$V_{n+1} - V_n = \left(5 + \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \left(5 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 - (n+1)^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{n^2 - n^2 - 2n - 1}{n^2(n+1)^2}$$

$$\Rightarrow V_{n+1} - V_n = -\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} < 0$$

أي أن المتتالية $(V_n)_{n \ge 0}$ متناقصة تماماً

$$\lim_{n \to +\infty} (V_n - U_n) = \lim_{n \to +\infty} \left[\left(5 + \frac{1}{n^2}\right) - \left(5 - \frac{1}{n}\right)\right] = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\right] = 0$$

فالمتتاليتان $(U_n)_{n \ge 0}$ و $(V_n)_{n \ge 0}$ متجاورتان

Scanned by CamScanner

4 – دورة ٢٠١٨ الثانية (٤٠ درجة)

لتكن المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية أساسها : $q = 2$ وفيها $U_0 = 1$ والمطلوب :

احسب U_3 ثم احسب المجموع $S = U_3 + U_4 + \dots\dots + U_7$

الحـــل :

بما أن $(U_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وحدها الأول $U_0 = 1$ ويكون $U_n = (2)^n$ ونجد : $U_3 = (2)^3 = 8$

عدد الحدود : $7 - 3 + 1 = 5$ والأساس $q = 2$ والحد الأول $U_3 = 8$

ويكون : $U_3 + U_4 + \dots\dots + U_7 = U_3 \dfrac{1-q^5}{1-q}$ ومنه :

$$S = U_3 + U_4 + \dots\dots + U_7 = 8 \times \frac{1-(2)^5}{1-2} = -8\left[1-(2)^5\right] = 8\left[32-1\right] = 8 \times 31 = 248$$

5 – دورة ٢٠١٩ الأولى (٦٠ درجة)

لتكن المتتالية $(S_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق : $S_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^3} + \dfrac{1}{3^4} + \dots\dots + \dfrac{1}{3^n}$ والمطلوب :

1) أثبت أن المتتالية $(S_n)_{n \geq 0}$ متزايدة تماماً

2) أثبت أن S_n تكتب بالشكل $S_n = \dfrac{1}{2}(3 - \dfrac{1}{3^n})$ ، ثم استنتج عنصراً راجحاً على المتتالية $(S_n)_{n \geq 0}$ وبين أنها متقاربة

الحـــل :

$$S_{n+1} - S_n = (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots\dots + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}}) - (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots\dots + \frac{1}{3^n}) \Rightarrow$$

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{3^{n+1}} > 0$$

والمتتالية متزايدة تماماً

والطرف الثاني من الشكل $q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + q^4 + \dots\dots + q^n$

نلاحظ أن S_n هو مجموع حدود متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{3}$ وحدها الأول 1 وعدد حدودها $n+1$ ونجد

$$S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots\dots + \frac{1}{3^n} = 1 \times \frac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = 1 \times \frac{3}{2}\left[1-(\frac{1}{3})^{n+1}\right] = \frac{1}{2}\left[3-(\frac{1}{3})^n\right] \leq \frac{3}{2}$$

أي المتتالية S_n محدودة من الأعلى بالعدد $\dfrac{3}{2}$ وبالتالي العدد $\dfrac{3}{2}$ حداً راجحاً على المتتالية $(S_n)_{n \geq 0}$

المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

Scanned by CamScanner

6 – دورة ٢٠١٩ الثانية (٦٠ درجة)

لتكن المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق : $U_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$ والمطلوب :

1) ادرس اطراد المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$

2) أثبت أن العدد 2 راجح على $(U_n)_{n \geq 0}$

3) احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ ثم جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق أياً كان $n > n_0$ كان U_n في المجال $]1.9, 2.1[$

الحـــــــل :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+1} - \frac{2n-1}{n+1} = \frac{2n+2-1}{n+2} - \frac{2n-1}{n+1} = \frac{2n+1}{n+2} - \frac{2n-1}{n+1} =$$

$$= \frac{2n^2+n+2n+1-(2n^2-n+4n-2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{3n+1-3n+2}{(n+2)(n+1)} = \frac{3}{(n+2)(n+1)} > 0$$

أي أن المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ متزايدة تماماً

محمد السيدعلي

$$U_n - 2 = \frac{2n-1}{n+1} - 2 = \frac{2n-1}{n+1} - \frac{2n+2}{n+1} = -\frac{3}{n+1} < 0 \Rightarrow U_n - 2 < 0 \Rightarrow U_n < 2$$

أي المتتالية محدودة من الأعلى بالعدد 2 وبالتالي العدد 2 حداً راجحاً على المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{2n-1}{n+1} = 2$$

$$U_n \in]1.9, 2.1[\Rightarrow 1.9 < U_n < 2.1 \Rightarrow 1.9 - 2 < U_n - 2 < 2.1 - 2 \Rightarrow$$

$$-0.1 < U_n - 2 < 0.1 \Rightarrow |U_n - 2| < 0.1 \Rightarrow \left|\frac{2n-1}{n+1} - 2\right| < 0.1 \Rightarrow \left|\frac{2n-1}{n+1} - \frac{2n+2}{n+1}\right| < 0.1$$

$$\left|\frac{2n-1-2n-2}{n+1}\right| < 0.1 \Rightarrow \left|\frac{-3}{n+1}\right| < 0.1 \Rightarrow \frac{3}{n+1} < 0.1 \Rightarrow \frac{3}{n+1} < \frac{1}{10} \Rightarrow$$

$$\frac{n+1}{3} > \frac{10}{1} \Rightarrow n+1 > 30 \Rightarrow n > 29 \Rightarrow n_0 = 29$$

الرياضيات ● المدرس : محمد السيدعلي ● حل تمارين ومسائل ● المتتاليات ● حل تمارين ومسائل ● المدرس : محمد السيدعلي ● الرياضيات

Scanned by CamScanner

الرياضيات ● المدرس : محمد السيدعلي ● حل تمارين ومسائل ● المتتاليات

7 - دورة ٢٠٢٠ الأولى (٨٠ درجة) :

نتأمل المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية : $U_0 = 3$ ، $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{2} + \dfrac{2}{U_n}$ عند كل $n \geq 0$ والمطلوب :

① أثبت أن التابع $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$ متزايد تماماً على $]2,+\infty[$

② أثبت بالتدريج أنّ $2 \leq U_{n+1} \leq U_n$ أياً كان العدد الطبيعي n

③ استنتج أن المتتالية متقاربة واحسب نهايتها

الحـــــــل :

① إثبات تزايد التابع :

التابع f معرف ومستمر واشتقاقي على $]2,+\infty[$

$f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{x^2}{2x^2} - \dfrac{4}{2x^2} = \dfrac{x^2-4}{2x^2} > 0$ فالتابع متزايد تماماً على المجال $]2,+\infty[$

② الإثبات بالتدريج :

$E(n) : 2 \leq U_{n+1} \leq U_n$

- القضية $E(0)$ محققة وضوحاً لأن $U_1 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{9}{6} + \dfrac{4}{6} = \dfrac{13}{6} \Rightarrow 2 \leq U_1 \leq U_0$
- لنفرض أن القضية $E(n)$ محققة أي نفرض صحة العلاقة $2 \leq U_{n+1} \leq U_n$
- ولنبرهن أن القضية $E(n+1)$ محققة أي لنبرهن صحة العلاقة $2 \leq U_{n+2} \leq U_{n+1}$

لدينا $2 \leq U_{n+1} \leq U_n$ و التابع f متزايد تماماً على المجال $]2,+\infty[$ ونجد :

$$f(2) \leq f(U_{n+1}) \leq f(U_n) \Rightarrow \frac{2}{2} + \frac{2}{2} \leq U_{n+2} \leq U_{n+1} \Rightarrow 2 \leq U_{n+2} \leq U_{n+1}$$

والقضية $E(n+1)$ محققة أي أن : $2 \leq U_{n+1} \leq U_n$ مهما كان العدد الطبيعي n

③ استنتاج أن المتتالية متقاربة وحساب نهايتها :

- بما أن $2 \leq U_{n+1} \leq U_n$ فإن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة من ℓ حيث $\ell \in]2,+\infty[$
- بما أن المتتالية متقاربة والتابع $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$ مستمر على المجال $]2,+\infty[$

فهو مستمر عند ℓ ويكون : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$ حيث ℓ هو حل المعادلة $f(x) = x$

$$f(x) = x \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{2}{x} = x \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{x}{2} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow$$

$x = -2$ مرفوض

$x = 2$

وبالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 2$

Scanned by CamScanner

الرياضيات المدرس : محمد السيدعلي حل تمارين ومسائل المتتاليات حل تمارين ومسائل المدرس : محمد السيدعلي الرياضيات

8 - دورة ٢٠٢٠ الثانية (٦٠ درجة) :

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق : $U_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \frac{4}{e^4} + \ldots\ldots + \frac{n}{e^n}$ والمطلوب :

① أثبت أن $n \leq 2^n$ مهما كان العدد الطبيعي $n \geq 1$

② استنتج أن $\frac{2}{e-2}$ عنصر راجح على المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$

③ أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ متقاربة

الحــــــــل :

نفرض القضية $E(n) : n \leq 2^n$

- القضية $E(1)$ محققة وضوحاً لأن $1 \leq 2^1 = 2$
- لنفرض أن القضية $E(n)$ محققة أي نفرض صحة العلاقة $n \leq 2^n$
- ولنبرهن أن القضية $E(n+1)$ محققة أي لنبرهن صحة العلاقة $n+1 \leq 2^{n+1}$

لدينا $n \leq 2^n$ نضرب طرفي المتراجحة بالعدد 2 نجد : $2n \leq 2\times 2^n \Rightarrow 2n \leq 2^{n+1}$

ونعلم أن $n+1 \leq n+n \Rightarrow n+1 \leq 2n \leq 2^{n+1}$ أي $n+1 \leq 2^{n+1}$

والقضية $E(n+1)$ محققة أي أن : $n \leq 2^n$ مهما كان العدد الطبيعي n

- لدينا : $U_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \frac{4}{e^4} + \ldots\ldots + \frac{n}{e^n}$ وبالاستفادة من أن $n \leq 2^n$ مهما كان العدد الطبيعي n يكون :

$$U_n \leq \frac{2^1}{e^1} + \frac{2^2}{e^2} + \frac{2^3}{e^3} + \frac{2^4}{e^4} + \ldots\ldots + \frac{2^n}{e^n} \quad \text{أي} \quad U_n \leq (\frac{2}{e})^1 + (\frac{2}{e})^2 + (\frac{2}{e})^3 + (\frac{2}{e})^4 + \ldots\ldots + (\frac{2}{e})^n$$

والطرف الثاني من الشكل $q^1 + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots\ldots + q^n$ أي هو مجموع متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{e}$ وحدها الأول $\frac{2}{e}$ ونجد

$$U_n \leq (\frac{2}{e})^1 + (\frac{2}{e})^2 + (\frac{2}{e})^3 + (\frac{2}{e})^4 + \ldots\ldots + (\frac{2}{e})^n = \frac{2}{e}\times\frac{1-(\frac{2}{e})^n}{1-\frac{2}{e}} = \frac{2}{e}\times\frac{e}{e-1}\left[1-(\frac{2}{e})^n\right] = \frac{2}{e-1}\left[1-(\frac{2}{e})^n\right] \Rightarrow$$

$$U_n \leq \frac{2}{e-1}$$

أي المتتالية محدودة من الأعلى بالعدد $\frac{2}{e-1}$ وبالتالي العدد $\frac{2}{e-1}$ حداً راجحاً على المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$

- $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \frac{4}{e^4} + \ldots\ldots + \frac{n+1}{e^{n+1}} - (\frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \frac{4}{e^4} + \ldots\ldots + \frac{n}{e^n}) = \frac{n+1}{e^{n+1}} > 0$

فالمتتالية متزايدة تماماً

بما أن المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

Scanned by CamScanner

9 – دورة ٢٠٢١ الأولى (٧٠ درجة) :

لتكن لدينا المتتالية $(U_n)_{n \ge 0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية : $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 3 \ , \ U_0 = 2$

ولنعرف المتتالية $(V_n)_{n \ge 0}$ وفق : $V_n = U_n + 6$ والمطلوب :

1) أثبت أنّ المتتالية $(V_n)_{n \ge 0}$ هندسية عين أساسها واحسب V_0 ، ثم احسب عبارة V_n بدلالة n

2) لنعرف المتتالية $(W_n)_{n \ge 0}$ وفق : $W_n = \ln V_n$ أثبت أنّ المتتالية $(W_n)_{n \ge 0}$ حسابية واحسب W_0

ثم احسب المجموع : $S = W_0 + W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5$

الحـــــل :

$$V_{n+1} = U_{n+1} + 6 = \frac{1}{2}U_n - 3 + 6 = \frac{1}{2}U_n + 3 = \frac{1}{2}(U_n + 6) = \frac{1}{2}V_n$$

أي أن $(V_n)_{n \ge 0}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $V_0 = U_0 + 6 = 2 + 6 \Rightarrow V_0 = 8$ ويكون $V_n = 8(\frac{1}{2})^n$

$$W_{n+1} - W_n = \ln 8(\frac{1}{2})^{n+1} - \ln 8(\frac{1}{2})^n = \ln \frac{8(\frac{1}{2})^{n+1}}{8(\frac{1}{2})^n}) = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 = r$$

أي أنّ $(W_n)_{n \ge 0}$ متتالية حسابية أساسها $-\ln 2$ وحدها الأول :

$$W_0 = \ln V_0 = \ln(U_0 + 6) = \ln(2 + 6) = \ln 8 = 3\ln 2$$

ويكون : $W_n = \ln 8 - n\ln 2$

$$W_5 = \ln 8 - 5\ln 2 = 3\ln 2 - 5\ln 2 = -2\ln 2$$

$$S = W_0 + W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 = \frac{6}{2}(3\ln 2 - 2\ln 2) = 3\ln 2$$

حيث عدد الحدود : 6 و $a = 3\ln 2$ و $\ell = -2\ln 2$

الرياضيات المدرس : محمد السيدعلي حل تمارين ومسائل المتتاليات

Scanned by CamScanner

10 – دورة ٢٠٢١ الثانية (٧٠ درجة)

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $U_0 = \frac{5}{2}$ وأياً كان العدد الطبيعي n : $U_{n+1} = (U_n - 2)^2 + 2$ والمطلوب :

① أثبت أن $2 \leq U_n \leq 3$ أياً كان العدد الطبيعي n

② أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متناقصة

③ استنتج تقارب المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ وجد $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

الحــــــــــل :

① $E(n) : 2 \leq U_n \leq 3$

- القضية $E(0)$ محققة وضوحاً لأن $U_0 = \frac{5}{2} \Rightarrow 2 \leq U_0 \leq 3$
- لنفرض أن القضية $E(n)$ محققة أي نفرض صحة العلاقة $2 \leq U_n \leq 3$
- ولنبرهن أن القضية $E(n+1)$ محققة أي لنبرهن صحة العلاقة $2 \leq U_{n+1} \leq 3$

$$2 \leq U_n \leq 3 \Rightarrow 2-2 \leq U_n - 2 \leq 3-2 \Rightarrow 0 \leq U_n - 2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (U_n-2)^2 \leq 1 \Rightarrow$$

$$0+2 \leq (U_n-2)^2 + 2 \leq 1+2 \Rightarrow 2 \leq (U_n-2)^2+2 \leq 3 \Rightarrow \boxed{2 \leq U_{n+1} \leq 3}$$

والقضية $E(n+1)$ محققة أي أن : $2 \leq U_n \leq 3$ أياً كان العدد الطبيعي n

② إثبات أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متناقصة :

لإثبات أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متناقصة نبرهن أن $U_{n+1} - U_n \leq 0$

$$U_{n+1} - U_n = (U_n-2)^2 + 2 - U_n = U_n^2 - 4U_n + 4 + 2 - U_n = U_n^2 - 5U_n + 6 = (U_n-2)(U_n-3) \leq 0$$

وذلك لأن $(U_n - 3) \leq 0$ ، $(U_n - 2) \geq 0$ على المجال $[2,3]$

أي أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متناقصة

محمد السيدعلي

③ استنتاج تقارب المتتالية :

- بما أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة من ℓ حيث $\ell \in [2, \frac{5}{2}]$
- بما أن المتتالية متقاربة والتابع $f(x) = (x-2)^2 + 2$ مستمر على المجال $[2, \frac{5}{2}]$

فهو مستمر عند ℓ ويكون : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$ حيث ℓ هو حل المعادلة $f(x) = x$

$$f(x) = x \Rightarrow (x-2)^2 + 2 = x \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 2 = x \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-2) = 0$$

$x = 3$ مرفوض

$x = 2$

وبالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 2$

الرياضيات المدرس : محمد السيدعلي حل تمارين ومسائل المتتاليات

Scanned by CamScanner

11 – دورة ٢٠٢٢ الأولى (٧٠ درجة)

نعرف المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ وفق $U_0 = \frac{5}{2}$ ، $U_{n+1} = U_n^2 - 4U_n + 6$

① أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أن $2 \leq U_n \leq 3$ أياً كان العدد الطبيعي n

② أثبت أن $U_{n+1} - U_n = (U_n - 3)(U_n - 2)$

③ استنتج أن المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ متناقصة

④ بين أن المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها

الحـــــل :

① $E(n) : 2 \leq U_n \leq 3$

- القضية $E(0)$ محققة وضوحاً لأن $U_0 = \frac{5}{2} \Rightarrow 2 \leq U_0 \leq 3$
- لنفرض أن القضية $E(n)$ محققة أي نفرض صحة العلاقة $2 \leq U_n \leq 3$
- ولنبرهن أن القضية $E(n+1)$ محققة أي لنبرهن صحة العلاقة $2 \leq U_{n+1} \leq 3$

محمد السيدعلي

لدينا : $U_{n+1} = U_n^2 - 4U_n + 6 = (U_n^2 - 4U_n + 4) + 2 = (U_n - 2)^2 + 2$

$$2 \leq U_n \leq 3 \Rightarrow 2 - 2 \leq U_n - 2 \leq 3 - 2 \Rightarrow 0 \leq U_n - 2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (U_n - 2)^2 \leq 1 \Rightarrow$$

$$0 + 2 \leq (U_n - 2)^2 + 2 \leq 1 + 2 \Rightarrow 2 \leq (U_n - 2)^2 + 2 \leq 3 \Rightarrow \boxed{2 \leq U_{n+1} \leq 3}$$

والقضية $E(n+1)$ محققة أي أن : $2 \leq U_n \leq 3$ مهما كان العدد الطبيعي n

طريقة ثانية لإثبات أن القضية $E(n+1)$ محققة :

لندرس اطراد التابع $f(x) = x^2 - 4x + 6$

التابع f معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$

$f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2)$ فالتابع متزايد على المجال $[2, +\infty[$ أي أن التابع متزايد على المجال $[2, 3]$

لدينا $2 \leq U_{n+1} \leq 3$ و التابع f متزايد نجد :

$$f(2) \leq f(U_n) \leq f(3) \Rightarrow 4 - 8 + 6 \leq U_{n+1} \leq 9 - 12 + 6 \Rightarrow 2 \leq U_{n+1} \leq 3$$

والقضية $E(n+1)$ محققة أي أن : $2 \leq U_{n+1} \leq 3$ مهما كان العدد الطبيعي n

② إثبات أن $U_{n+1} - U_n = (U_n - 3)(U_n - 2)$:

$$U_{n+1} - U_n = U_n^2 - 4U_n + 6 - U_n = U_n^2 - 5U_n + 6 = (U_n - 3)(U_n - 2)$$

③ استنتاج أن المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ متناقصة :

بما أن $2 \leq U_n \leq 3$ فإن $U_n \leq 3 \Rightarrow U_n - 3 \leq 0$ و $U_n \geq 2 \Rightarrow U_n - 2 \geq 0$ وبالتالي $(U_n - 3)(U_n - 2) \leq 0$

$$U_{n+1} - U_n = (U_n - 3)(U_n - 2) \leq 0$$

أي أن المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ متناقصة

الرياضيات ● المدرس : محمد السيدعلي ● حل تمارين ومسائل ● المتتاليات

Scanned by CamScanner

④ بيان أنّ المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ متقاربة وحساب نهايتها :

بما أن المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى ($2 \leq U_n \leq 3$) فإن المتتالية متقاربة

بما أن المتتالية متقاربة والتابع $f(x) = x^2 - 4x + 6$ مستمر على المجال $\mathbb{R}$ فهو مستمر على المجال $[2.3]$

فهو مستمر عند ℓ ويكون : $\lim_{n \to +\infty} U_n = \ell$ حيث ℓ هو حل المعادلة $f(x) = x$

$$f(x) = x \Rightarrow x^2 - 4x + 6 = x \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow$$
$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \vee \quad x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

ولأن المتتالية متناقصة فإن : $\lim_{n \to +\infty} U_n = 2$

طريقة ثانية لإثبات أن المتتالية متناقصة

لتكن : $E(n) : U_{n+1} < U_n$

- القضية $E(0)$ محققة وضوحاً لأن $U_1 = (\frac{5}{2})^2 - 4(\frac{5}{2}) + 6 = \frac{25}{4} - 10 + 6 = \frac{25}{4} - \frac{16}{4} = \frac{9}{4} < U_0 = \frac{5}{2}$
- لنفرض أن القضية $E(n)$ محققة أي نفرض صحة العلاقة $U_{n+1} < U_n$
- ولنبرهن أن القضية $E(n+1)$ محققة أي لنبرهن صحة العلاقة $U_{n+2} < U_{n+1}$

لدينا $U_{n+1} < U_n$ والتابع متزايد على المجال $[2.3]$

$$f(U_{n+1}) < f(U_n) \Rightarrow U_{n+2} < U_{n+1}$$

والقضية $E(n+1)$ محققة أي أن : $U_{n+1} < U_n$ مهما كان العدد الطبيعي n وبالتالي المتتالية متناقصة

Scanned by CamScanner

الرياضيات ● المدرس : محمد السيدعلي ● حل تمارين ومسائل ● المتتاليات ● حل تمارين ومسائل ● المدرس : محمد السيدعلي ● الرياضيات

12 – دورة ٢٠٢٢ الثانية (٧٠ درجة)

لتكن المتتاليتان $(U_n)_{n\geq 1}$ و $(V_n)_{n\geq 1}$: $U_n = \frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\dots\dots+\frac{1}{5^n}$ و $V_n = U_n + \frac{1}{2^n}$ والمطلوب :

① أثبت أن $(U_n)_{n\geq 1}$ متتالية متزايدة و $(V_n)_{n\geq 1}$ متتالية متناقصة

② استنتج أن المتتاليتين $(U_n)_{n\geq 1}$ و $(V_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان

③ أثبت أن $U_n = \frac{1}{4}(1-\frac{1}{5^n})$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ واستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

الحـــــــــل :

① إثبات أن $(U_n)_{n\geq 1}$ متتالية متزايدة و $(V_n)_{n\geq 1}$ متتالية متناقصة :

$$U_{n+1}-U_n = \frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\dots\dots+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{5^{n+1}}-(\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\dots\dots+\frac{1}{5^n}) = \frac{1}{5^{n+1}} > 0$$

أي أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ متزايدة

$$V_{n+1}-V_n = U_{n+1}+\frac{1}{2^{n+1}}-(U_n+\frac{1}{2^n}) = U_{n+1}-U_n+\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^n} = \frac{1}{5^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^n} \Rightarrow$$

$$V_{n+1}-V_n = \frac{1}{5^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{2}{2^{n+1}} = \frac{1}{5^{n+1}}-\frac{1}{2^{n+1}} < 0$$

أي أن المتتالية $(V_n)_{n\geq 1}$ متتالية متناقصة

② استنتاج أن المتتاليتين $(U_n)_{n\geq 1}$ و $(V_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان :

$$\lim_{n\to+\infty}\left[V_n-U_n\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[U_n+\frac{1}{2^n}-U_n\right] = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n} = 0$$

أي أن المتتاليتين $(U_n)_{n\geq 1}$ و $(V_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان

③ إثبات أن $U_n = \frac{1}{4}(1-\frac{1}{5^n})$ ، ثم حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ واستنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$:

لدينا : $U_n = \frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\dots\dots+\frac{1}{5^n}$

والطرف الأيمن من الشكل $q^1+q^2+q^3+q^4+\dots\dots+q^n$

أي هو مجموع متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{5}$ وحدها الأول $\frac{1}{5}$ ونجد :

محمد السيدعلي

$$U_n = \frac{1}{5}\times\frac{1-(\frac{1}{5})^n}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\times\frac{1-(\frac{1}{5})^n}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{5}\times\frac{5}{4}\left[1-(\frac{1}{5})^n\right] = \frac{1}{4}\left[1-(\frac{1}{5})^n\right] = \frac{1}{4}(1-\frac{1}{5^n})$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4}\left[1-(\frac{1}{5})^n\right] = \frac{1}{4}$$

بما أن المتتاليتين متجاورتان فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{4}$

Scanned by CamScanner