2023

الجلسات الامتحانية لمادة الرياضيات

للمدرس

محمد رسول صباغ

0934 131 159

@Mohammadrasoulsabbagh

RIE RASOUL INTERNATIONAL EDUCATION

ملخص المتتاليات ...

المتتالية : هي قائمة مرتبة من الأعداد

2 4 6 8 10 ...

المتتالية : هي تابع منطلقه مجموعة الأعداد الطبيعية أو أي مجموعة جزئية غير منتهية منها، ومستقره $\mathbb{R}$.

	المتتالية	التابع
الرمز	u, v, w	f, g, h
المتغير	n	x
تابعة مرتبط (الشكل العام)	u_n	$f(x)$
	$(u_n)_{n \geq n_0}$	$f: D \to \mathbb{R} ; f(x)$

أشكال المتتالية ...

1) حد صريح : u_n بدلالة n

2) تدريجية : وفيها نحسب كل حد من خلال حد سابق

$u_0 = 2$

$u_{n+1} = 3u_n - 5$

3) سلسلة :

$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

اطراد متتالية ...

2 4 6 8 ...

مطردة (متزايدة)

8 4 2 1 ...

مطردة (متناقصة)

5 5 5 ...

مطردة (ثابتة)

2 -2 2 ...

غير مطردة

اطراد متتالية

حد صريح

الفرق (المقارنة مع 0)

$u_{n+1} - u_n > 0$ متزايدة تماماً

$u_{n+1} - u_n < 0$ متناقصة تماماً

$u_{n+1} - u_n = 0$ ثابتة

القسمة (المقارنة مع 1)

$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ متزايدة تماماً

$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ متناقصة تماماً

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ ثابتة

الاشتقاق

$u_n = f(n)$

$f'(n) > 0$ متزايدة تماماً

$f'(n) < 0$ متناقصة تماماً

السلسلة

نستخدم الفرق

مثال :

$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$

$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$

$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$ متزايدة تماماً

التدريجية

مضروبة غير مجموعة : القسمة

$u_0 = 2$

$u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n$

مجموعة غير مضروبة : الفرق

$u_0 = 2$

$u_{n+1} = u_n + 3$

غير ذلك : الإثبات بالتدريج

لا يجوز استخدام طريقة القسمة اذا كانت حدود المتتالية سالبة
وتستخدم طريقة القسمة في الحدود ذي العاملات $(\frac{1}{n!} \quad , \quad 2^n \quad ...)$

تستخدم اذا كانت المتتالية متناوبة (غير مطردة) $(-1)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ زوجي} \\ -1 & n \text{ فردي} \end{cases}$

اطراد متتالية تدريجية لا يرتبط باطراد تابعها

مقارنة بين الحسابية والهندسية

	الحسابية	الهندسية
تعريف	كل حد ينتج عن سابقه بإضافة عدد ثابت يسمى الأساس ويرمز له بـ r $2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 10 \dots \quad r=2$	كل حد ينتج عن سابقه بالضرب بعدد ثابت يسمى الأساس ويرمز له بـ q $2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32 \dots \quad q=2$
الحد العام	$u_n = u_0 + nr \;/\; u_n = u_1 + (n-1)r$ لا حد بدي / حد بدي لا	$u_n = u_0 \cdot q^n \;/\; u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$
حدين لا على التعيين	$u_m = u_p + (m-p)r$ $r = \frac{u_m - u_p}{m-p}$	$u_m = u_p \cdot q^{m-p}$ $q^{m-p} = \frac{u_m}{u_p}$
اثبات	$u_{n+1} - u_n = \text{ثابت} = r$	$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \text{ثابت} = q$
ثلاث حدود متوالية	$2b = a + c$ $b = a + r \qquad c = a + 2r$	$b^2 = a \cdot c$ $b = a \cdot q \qquad c = a \cdot q^2$
المجموع	$S = u_i + u_{i+1} + \dots + u_j$ $S = n\frac{a+l}{2}$ $a = u_i \qquad l = u_j$ $n = j - i + 1$ عدد الحدود	$S = u_i + u_{i+1} + \dots + u_j$ $S = a\frac{1-q^n}{1-q}$ $a = u_i$ $n = j - i + 1$

الاثباتات بالتدريج ...

نستخدم لإثبات صحة علاقة مؤلفة من n ويتم ذلك من خلال مرحلتين.

المرحلة الأولى: ويتم فيها اثبات صحة القضية من أجل حد البدء (معطى ضمن المسألة)

المرحلة الثانية:

الفرض: نص المسألة

الطلب: نستبدل كل n بـ $n+1$

الاثبات: ١) المتطابقات
٢) المساواة

ننطلق من الطرف الأول من الطلب ونتوصل للطرف الثاني بالاستفادة من الفرض.

٣) المتراجحة:

ننطلق من الفرض ونتوصل للطلب بالاستفادة من خواص المتراجحات

خواص المتراجحات:

منطقة كبيرة > منطقة صغيرة

في المنطقة الكبيرة يمكن حذف حد سالب

في المنطقة الصغيرة يمكن حذف حد موجب

$b < a$ اذا b اصغر من اي عدد اكبر من a.

$c > d$ اذا c اكبر من اي عدد اصغر من d.

تمرين: (u_n) متتالية هندسية

-١- $n \geq 0$ ، $q = 3$ ونضع $u_1 = -2$

١) احسب u_n بدلالة n

٢) احسب المجموع $S = u_2 + u_4 + \dots + u_{2n}$ بدلالة n.

١)
$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = -2(3)^{n-1}$$
$$= -2(3)^{-1} \cdot 3^n$$
$$u_n = \frac{-2}{3} \cdot 3^n$$

٢)
$$S = u_2 + u_4 + \dots + u_{2n}$$

نفرض $u_2 = v_1$ ، $u_4 = v_2$ ، $u_{2n} = v_n$

ومنه
$$S = v_1 + v_2 + \dots + v_n$$
$$q = \frac{v_2}{v_1} = \frac{u_4}{u_2} = \frac{\frac{-2}{3} \cdot 3^4}{\frac{-2}{3} \cdot 3^2} = 3^2$$
$$q = 9$$
$$S = a \, \frac{1 - q^n}{1 - q}$$
$$a = v_1 = u_2 = \frac{-2}{3} \cdot 3^2 = -6$$
$$S = -6 \, \frac{1 - 9^n}{1 - 9}$$

بحيث $n = n - 1 + 1 = n$

ومنه
$$S = -6 \, \frac{1 - 9^n}{-8}$$
$$= \frac{-6}{-8}(1 - 9^n)$$
$$S = \frac{3}{4}(1 - 9^n)$$

تمرين: احسب المجموع:

$$S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \dots + 10 \;?$$

المجموع هو مجموع لمتتالية حسابية لأن كل حد ينتج عن سابقه بإضافة ثابت ($r = \frac{1}{2}$)

$$S = n\,\frac{a+l}{2} \quad \dots *$$

$a = \frac{1}{2} \qquad l = 10$

ولمعرفة عدد الحدود نفرض

$m = n \qquad p = 1$

$$U_m = U_p + (m-p)\,r$$

$$U_n = U_1 + (n-1)\,\frac{1}{2}$$

$$10 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} \Rightarrow n = 20$$

نعوض في *

$$S = 20 \times \frac{\frac{1}{2}+10}{2}$$

$$= 10\left(\frac{1}{2}+10\right)$$

$$= 5 + 100 = 105$$

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \frac{1}{256}$$

مجموع لمتتالية هندسية لأن كل حد ينتج عن سابقه بضربه بعدد ثابت ($q = \frac{1}{2}$)

$$S = a\,\frac{1-q^n}{1-q} \qquad a = \frac{1}{2}$$

$$U_m = U_p \cdot q^{m-p} \qquad m = n \quad p = 1$$

$$U_n = U_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Leftrightarrow \frac{1}{256} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$(1)\quad \frac{1}{256} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow n = 8$$

ومنه $S = \frac{1}{2}\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8$

$$= 1 - \frac{1}{256} = \frac{255}{256}$$

تخمين الحد العام.

$$U_0 = 2$$

$$U_{n+1} = 2U_n - 3$$

خمن عبارة U_n بدلالة n

$$U_1 = 2U_0 - 3 = 1$$

$$U_2 = 2U_1 - 3 = -1$$

$$U_3 = 2U_2 - 3 = -5$$

$$U_4 = 2U_3 - 3 = -13$$

$$U_5 = 2U_4 - 3 = -29$$

$$U_1 - U_0 = 1 - 2 = -1 = -2^0$$

$$U_2 - U_1 = -1 - 1 = -2 = -2^1$$

$$U_3 - U_2 = -5 + 1 = -4 = -2^2$$

$$U_4 - U_3 = -13 + 5 = -8 = -2^3$$

$$U_5 - U_4 = -29 + 13 = -16 = -2^4$$

$$U_{n+1} - U_n = -2^n$$

$$2U_n - 3 - U_n = -2^n$$

$$U_n = 3 - 2^n$$

ونثبت على صحة ذلك بالتدريج

الفرض: $U_n = 3 - 2^n$

الطلب: $U_{n+1} = 3 - 2^{n+1}$

البرهان:

$$U_{n+1} = 2U_n - 3$$

$$= 2(3 - 2^n) - 3$$

$$= 6 - 2\cdot 2^n - 3 = 3 - 2^{n+1}$$

وهو المطلوب .....

ملخص النهايات والاستمرار ..

• الأصل في النهاية التعويض

ازالة حالات عدم التعيين ..

$\frac{\infty}{\infty}$

البسط او المقام فيه جذر تربيعي ← اخراج عامل مشترك

$\infty - \infty$

- متماثلان:
  - $\sqrt{4x^2+1} - 2x$
  - $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$
  - ← الضرب بالمرافق
- غير متماثلان:
  - $\sqrt{4x^2+1} - 3x$
  - $\sqrt{x+1} - 3\sqrt{x}$
  - ← اخراج عامل مشترك

$\frac{0}{0}$

- البسط والمقام توابع جبرية ← نحلل البسط والمقام ثم نختصر ثم نعوض
- البسط او المقام فيه جذر تربيعي ← الضرب بالمرافق

النهايات المثلثية

- الحصول على $\sin(0)$ في عدم التعيين $(\frac{0}{0})$ ← قواعد
- الحصول على $\sin\infty$ او $\cos\infty$ اثناء التعويض ← إحاطة

قواعد

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \qquad \lim_{\theta \to 0} \frac{\theta}{\sin\theta} = 1$$

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} = 1$$

قوانين مستخدمة .

1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

2) $\sin 2\theta = 2\sin\theta \cdot \cos\theta$

3) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
$= 2\cos^2\theta - 1$
$= 1 - 2\sin^2\theta$

4) $1 - \cos 2\theta = 2\sin^2\theta$

5) $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$
$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

إحاطة

احاطة (1)	احاطة (2)	احاطة (3)
احاطة	قيمة مطلقة	مقارنة
اذا كان لدينا ثلاث توابع f, g, h تحقق ما يلي: 1) $h \le f \le g$ 2) $\lim_{x\to a} g = \lim_{x\to a} h = M$ فإن $\lim_{x\to a} f(x) = M$	اذا كان لدينا $\lvert f(x) + l \rvert \le g$ وكانت $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ فإن $\lim_{x\to a} f(x) = -l$	اذا كان $f(x) \ge g(x)$ 1) $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ فإن $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ 2) $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$

ملاحظات المدرس :

المقاربات

أفقي

$\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = b$

$y=b$ مقارب أفقي

شاقولي

$\lim_{x\to a} f(x) = \mp\infty$

$x=a$ مقارب شاقولي

نقطة مقاربة

$\lim_{x\to a} f(x) = b$

(a,b) نقطة مقاربة

مقارب مائل

$\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \mp\infty$

المقارب المائل ودراسته

معادلته : $y=ax+b$

شرطه : لا يوجد مقارب مائل في الجوار الذي يكون مقارب أفقي

إثباته : لإثبات $y=ax+b$ مقارب مائل يجب أن نتحقق :

$$\lim_{x\to\mp\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$$

أنواع «حالات المقارب المائل»

f : تابع كسري بسطه ومقامه توابع صحيحة على أن تكون درجة البسط أكبر من درجة المقام بدرجة واحدة فقط.

نستخدم القسمة الإقليدية

$f = \text{الخارج} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقام}}$

الخارج $=y$ مقارب مائل

لدينا

$\lim_{x\to\mp\infty}(f-y_\Delta)=0$

كل تابع من الشكل

$f=ax+b+$ كسر درجة مقامه أكبر من درجة البسط

عندئذٍ تكون $y=ax+b$ مقارب مائل

لدينا

$\lim_{x\to\mp\infty}(f-y_\Delta)=0$

f تابع جذري تربيعي

نكتب ما تحت الجذر بالصيغة القانونية (الإتمام إلى مربع كامل)

$f=\sqrt{a(x-b)^2+c}$

$a>0$ فيكون

$y=\sqrt{a}\,|x-b|$

مقارب مائل في جوار $\mp\infty$

لدينا

$\lim_{x\to\mp\infty}(f-y_\Delta)=0$

القانون

$y=ax+b$

$a=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{f(x)}{x}$

$b=\lim_{x\to\mp\infty}(f(x)-ax)$

لدينا

$\lim_{x\to\mp\infty}(f-y_\Delta)=0$

دراسة الوضع النسبي

مقارب شاقولي

$\lim_{x\to a^+} f(x)=\mp\infty$

$\lim_{x\to a^-} f(x)=\mp\infty$

C يمين الشاقولي

أفقي أو مائل

ندرس إشارة الفرق

$f-y_\Delta>0$ C فوق Δ

$f-y_\Delta<0$ C تحت Δ

حل معادلة $f(x) = k$

صيغة السؤال

ما عدد حلول المعادلة

بيانياً: نرسم المستقيم الموافق $y = k$، عدد نقاط تقاطع المستقيم مع المنحني هي عدد الحلول.

جبرياً (جدول التغيرات): نبحث عن عدد مرات تواجد k في السطر الأخير.

اثبت ان للمعادلة

اثبت ان للمعادلة $f(x) = k$ حل وحيد في المجال $]a,b[$

f: مستمر ومطرد تماماً على $]a,b[$

كما ان $k \in f(]a,b[)$

اذن للمعادلة $f(x)=k$ حل وحيد $\alpha \in]a,b[$

الوسطى ← مبرهنة القيمة

اثبت ان للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]a,b[$

f مستمر ومطرد تماماً على $]a,b[$

كما ان $f(a) \times f(b) < 0$

اذن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد $\alpha \in]a,b[$.

الاستمرار

f مستمر عند x_0 اذا وفقط اذا تحقق احد الشرطين

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

2) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

* النهاية في طرف مساواة الصورة في المساواة.

* يكون f مستمر على D_f اذا وفقط اذا كان مستمر على جميع نقاط D_f.

$|x| < a \iff -a < x < a$

$|x-a| < b \Rightarrow x-a \in]-b,b[$

$x \in]a-b, a+b[$

$|x| > a \Rightarrow x \in]-\infty,-a[\cup]a,+\infty[$

تابع الجزء الصحيح $E(x)$

$x-1 < E(x) \leq x$

$E(5,7) = 5$

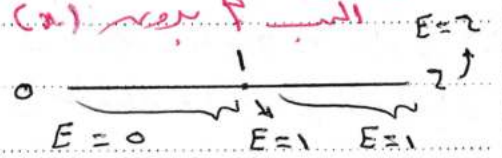
$E(2,1) = 2$

$E(5) = 5$

$E(-3,8) = -4$

مثال: $f(x) = x - E(x)$ $[0,2]$

اكتب f بدون $E(x)$



نقسم $[0,2]$ الى اجزاء بحيث كل جزء يكون E واحدة

$$f(x) = \begin{cases} x-0 & [0,1[\\ x-1 & [1,2[\\ 2-2 & x=2 \end{cases}$$

مثال ١: $f(x)=\frac{4x-5}{2x+3}$ $\mathbb{R}\setminus\{\frac{-2}{3}\}$

١) اوجد نهاية $f(x)$ عند $+\infty$

٢) اوجد A الذي يحقق الشرط

اذا كان $x>A$ انتمى $f(x)$ الى المجال المفتوح I الذي مركزه 2 ونصف قطره $r=0,05$

الحل ص١٥

مثال ٢: لتكن $f(x)=\frac{1}{x}\sin x$

١) جد نهاية f عند $+\infty$

٢) جد نهاية f عند (0)

الحل ص١٥

مثال ٣: $f(x)=x+\cos x$

جد نهاية f عند $+\infty$

$f(x)=\frac{x}{2}+2\sin x$

جد نهاية f عند $+\infty$

$f(x)=\frac{E(x)}{x}$

جد نهاية f عند $+\infty$

الحل ص١٥

مثال ٤: $f(x)=\sqrt{1-\cos x}$

١) ما مجموعة تعريف f

٢) بين ان f تابع زوجي واستنتج الصفة التناظرية له

٣) اوجد دور التابع f (T)

٤) لتكن g مقصور التابع f على $[0,\pi]$ اثبت ان g مستمر وارسم خطه البياني.

٥) استنتج خط البياني للتابع f على $[-2\pi, 2\pi]$

الحل ص١٥+١٦

مثال ٥: $f(x)=x^2$ C_1

$g(x)=\sqrt{x}$ C_2

اثبت ان f تقابل على $]0,+\infty[$

وان g تقابله العكسي

ثم استنتج الصفة التناظرية لهما

الحل ص١٦

مثال ٦: $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ $[0,+\infty[$

اثبت ان C_f يقبل مقاربا مائلا في جوار $+\infty$

جد معادلته.

وادرس الوضع النسبي له.

الحل ص١٦

أهم تريثات الوحدة ...

٨/٦٩ + ١٦/٧١ + ٢١/٧٢ + ٣٦+٣٧/٧٥

٣٥+٢٣/٧٤

ملاحظة ...

* لإيجاد $\lim_{x\to a} g(f(x))$

نبحث عن $\lim_{x\to a} f(x)$ ولتكن b اي

$\lim_{x\to a} f(x)=b$ عندئذ:

$$\lim_{x\to a} g(f(x))=\lim_{x\to b} g(x)$$

* التوابع الاشتقاقية هي توابع مستمرة

* استمرار f عند a لا يعني بالضرورة قابلية الاشتقاق في a

- $f(x)=\sqrt{x}$ $g(x)=|x|$

f و g مستمران عند (0) وغير اشتقاقيين عند

الاشتقاق

الاشتقاق حسب التعريف ....

تمرين هام : ليكن $f(x) = \frac{1}{x}$ R^* اوجد f' باستخدام تعريف المشتق

$$t(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0}$$

$$= \frac{\frac{x_0 - x}{x \cdot x_0}}{x - x_0} = \frac{-1}{x \cdot x_0}$$

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} t(x)$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} t(x) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{-1}{x \cdot x_0} \right) = \frac{-1}{x_0^2}$$

ومنه $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$

معادلة المماس ....

لايجاد معادلة المماس يلزمنا نقطة $A(x_0, y_0)$ وميل (m) وتكون معادلة المماس

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

انواع الميل

- $m =$ عدد : مماس مائل، معادلته $y - y_0 = m(x - x_0)$
- $m = 0$: مماس افقي، معادلته $y = y_0$
- $m = \infty$: مماس شاقولي، معادلته $x = x_0$

س٢٥ ٥٢س

هل اذا كان التابع f غير اشتقاقي عند نقطة ما كان المماس غير اشتقاقي.

1) $\lim_{x \to x_0} t(x) = \mp\infty$

f غير اشتقاقي عند x_0

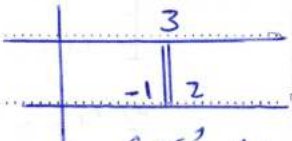
ويكون معادلة المماس $x = x_0$

2) $\lim_{x \to x_0^+} t(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} t(x)$

f غير اشتقاقي عند x_0

ويكون لدينا نصفي مماسين.

غير اشتقاقي عند 3 والمماس شاقولي



غير اشتقاقي عند 3 ويملك نصفي مماس

فوائد ....

1) $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

2) d_1 مستقيم ميله m_1

d_2 مستقيم ميله m_2

$d_1 \parallel d_2 \iff m_1 = m_2$

$d_1 \perp d_2 \iff m_1 \times m_2 = -1$

التقريب التآلفي

صيغة السؤال: اوجد القيمة التقريبية لـ $f(k)$.

1) نكتب k بالشكل $k = a + h$

a قيمة قريبة من k ومن السهل حسابها

2) نوجد $f(a)$ ، $f'(x)$ ، $f'(a)$

3) نعوض بـ $f(k) \simeq f(a) + f'(a)\,h$

مثال: اوجد القيمة التقريبية لـ $(19,8)^2$

نصطنع تابع المسألة

$f(x) = x^2$ ، $\mathbb{R}$

$19,8 = \underbrace{20}_{a} + \underbrace{(-0,2)}_{h}$

$f(a) = f(20) = 400$

$f'(x) = 2x$ ، $f'(20) = 40$

$f(19,8) \simeq f(20) + f'(20)\,h$

$\simeq 400 + 40 \times \frac{-2}{10}$

$\simeq 400 - 8$

$\simeq 392$

مثال: $f(x) = \sqrt{x^3}$ ، $[0,+\infty[$

احسب ميل المماس لـ C في نقطة فاصلتها $4,1$

$f(x) = x^{\frac{3}{2}}$

نعلم $m = f'(x)$

$m = f'(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow m = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

$4,1 = 4 + 0,1$ ، $a = 4$ ، $h = 0,1$

$m(a) = m(4) = 8$

$m' = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{x}}$

$m'(4) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

$m(4,1) \simeq m(4) + m'(4)\,h$

$\simeq 8 + \frac{3}{8} \times \frac{1}{10} \simeq 8 + \frac{3}{8}$

القيم الحدية..

$f(a)$ قيمة حدية كبرى $f(x) \leq f(a)$

$f(b)$ قيمة حدية صغرى $f(x) \geq f(b)$

اذا كانت $f(c)$ قيمة حدية كان $f'(c) = 0$ والعكس ليس من الضروري صحيح.

اذا كانت $f(c)$ قيمة حدية كان $y = c$ مماس افقي.

اذا انعدم f' عند c وتغيرت اشارته عندها كانت $f(c)$ قيمة حدية

اذا انعدم f' عند c ولم يتغير اشارته تكون c نقطة انعطاف وليست قيمة حدية

x	1		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$f(1)$ البداية قيمة حدية.

1) نختار مجال مفتوح يحوي (1) $I =]-1,2[$

2) نوجد $I \cap D_f$

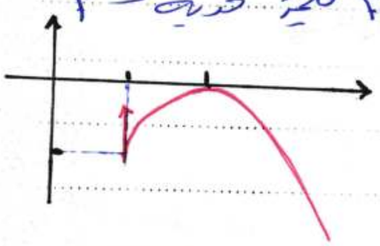
$I \cap D_f =]-1,2[\cap [1,+\infty[$

$= [1,2[$

3) $x \in [1,2[$ لدينا

$f(x) \geq f(1) = -1$

ومنه $f(1) = -1$ قيمة حدية لـ f



ارسم الخط البياني للتابع السابق

ليس بالضرورة أن يكون التابع f اشتقاقي عند a لكي تكون f(a) قيمة حدية

مثال: $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}-1$ $\mathbb{R}$

ادرس تغيرات f وبين ما لها من قيم حدية.

$f(x)=(x-1)^{\frac{2}{3}}-1$

$\lim_{x\to\mp\infty} f(x)=+\infty$

$f'=\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$

ومنه نلاحظ أن f غير اشتقاقي عند (1)

f اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$-$	$\Vert$	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1)=-1$ قيمة حدية صغرى

مثال (نشاط): $f(x)=\frac{x+2}{|x|+1}$ $\mathbb{R}$

1) ادرس قابلية اشتقاق f عند 0^+

2) " " " f عند 0^-

3) ارسم نصفي المماسين في $A(0,2)$ ثم ارسم C_f على $[-2,2]$

$t(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{x+2}{|x|+1}-2}{x-0}$

1) 0^+: $t(x)=\frac{\frac{x+2}{x+1}-2}{x}=\frac{\frac{x+2-2x-2}{x+1}}{x}$

$t(x)=\frac{-x}{x(x+1)}=\frac{-1}{x+1}$

$\lim_{x\to 0^+} t(x)=-1$

ومنه f اشتقاقي عند 0 من اليمين

2) 0^-: $t(x)=\frac{\frac{x+2}{-x+1}-2}{x}=\frac{3x}{x(-x+1)}$

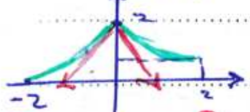
$\lim_{x\to 0^-} t(x)=3$

ومنه f اشتقاقي عند 0 من اليسار

ولكن f غير اشتقاقي عند 0

3) $f(2)=\frac{4}{3}$ $f(-2)=0$

$f=\begin{cases}\frac{x+2}{x+1} & [0,2]\\ \frac{x+2}{-x+1} & [-2,0]\end{cases}$ $f'=\begin{cases}\frac{-1}{(x+1)^2}\\ \frac{3}{(-x+1)^2}\end{cases}$



x	-2		0		2
f'		$+$	$3\ \Vert\ -1$	$-$	
f	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{4}{3}$

مثال: $f(x)=x^3-x^2+ax$ $\mathbb{R}$

عين العدد الحقيقي a لكي يكون التابع f قيمة حدية عند $x=1$

f يقبل قيمة حدية عند $x=1$ إذن

$f'(1)=0$

$f'(x)=3x^2-2x+a$

$0=3-2+a \Rightarrow a=-1$

$f(x)=x^3-x^2-x$

$f(x)=\frac{ax^2+bx+1}{x-1}$ دورة $\frac{4}{89}$

$f(-1)=0$ عين a, b لكي تكون قيمة حدية.

$C \ni (-1,0)$ فهي تحقق معادلته.

$0=\frac{a-b+1}{-1-1} \iff a-b+1=0$ (1)

$f'=\frac{(2ax+b)(x-1)-1(ax^2+bx+1)}{(x-1)^2}$

$0=\frac{(-2a+b)(-2)-0}{(-1-1)^2} \Rightarrow -2a+b=0$ (2)

بحل جملة المعادلتين (1) و(2) نجد أن:

$a=1$

$b=2$

اشتقاق تابع مركب ....

$$f(x) = g(u(x))$$
$$f'(x) = u'(x) \times g'(u(x))$$

مثال : $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ $\quad \mathbb{R}\setminus\{1\}$

1) عين f'

2) $g(x) = f(\sqrt{x})$ $\quad I =]1,+\infty[$

اثبت ان g اشتقاقي على I ثم احسب g'

$$f'(x) = \frac{-5}{(x-1)^2}$$

f : اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ فهو اشتقاقي على I

$\sqrt{x}$: اشتقاقي على $]0,\infty[$ " " على I

كما ان $\sqrt{x} \neq 1$ على هذا المجال اذن

g اشتقاقي على I :

$$g'(x) = (\sqrt{x})' \times f'(\sqrt{x})$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{-5}{(\sqrt{x}-1)^2}$$

المشتقات من مراتب عليا ....

مثال : $f(x) = \frac{1}{1-x}$ $\quad \mathbb{R}\setminus\{1\}$

اثبت ان المشتق من المرتبة n يعطى بالصيغة

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

$E(n)$: $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

من اجل $n=1$

$$f'(x) = \frac{1!}{(1-x)^{1+1}} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

لنشتق f

$$f'(x) = \frac{-(-1)(1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

والقضية محققة من اجل $n=1$

الفرض : $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

الطلب : $f^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$

للاثبات الطلب نشتق الفرض

$$(f^{(n)}(x))' = \frac{-(n+1)(1-x)^n(-1).n!}{((1-x)^{n+1})^2}$$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)\,n!\,\cancel{(1-x)^n}}{(1-x)^{2n+2}}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

والعلاقة محققة من اجل $n+1$ فهي صحيحة

تمرين

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad \mathbb{R}^*$

اثبت ان المشتق من المرتبة n يعطى ب

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n . n!}{x^{n+1}}$$

من اجل $n=1$

$$f'(x) = \frac{-1.1}{x^{1+1}} = \frac{-1}{x^2}$$

نشتق التابع

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

محققة من اجل $n=1$

الفرض : $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n . n!}{x^{n+1}}$

الطلب : $f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} . (n+1)!}{x^{n+2}}$

الاثبات : نشتق الفرض

$$(f^{(n)}(x))' = \frac{0-(n+1)x^n(-1)^n . n!}{(x^{n+1})^2}$$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)(-1)^n(n+1)n!\,\cancel{x^n}}{x^{2n+2}}$$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} . (n+1)!}{x^{n+2}}$$

ومنه العلاقة محققة من اجل $n+1$ فهي صحيحة .

نهاية متتالية..

دائماً $n \to +\infty$

نهاية متتالية.

حد صحيح — لنهاية تابع

متباعدة — ناتج حل المعادلة $f(x) = x$

حالة المتتالية الهندسية...

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} 0 & -1 < q < 1 \\ +\infty & q > 1 \\ \text{ليس لها نهاية} & q \le -1 \\ 1 & q = 1 \end{cases}$$

محدودية متتالية...

$u_n \le M$ محدودة من الأعلى

كل M يسمى عنصراً راجحاً.

وكل عدد أكبر من الراجح هو راجح

$u_n \ge m$ محدودة من الأدنى

كل m يسمى قاصر

وكل عدد أصغر من القاصر فهو قاصر.

* u_n متزايدة ومحدودة من الأعلى تكون نهايتها (l) أصغر العناصر الراجحة، وتسمى هذه النهاية حد أعلى.

* u_n متناقصة ومحدودة من الأدنى تكون نهايتها (K) أكبر العناصر القاصرة، وتسمى هذه النهاية حد أدنى.

* إذا كانت متتالية غير محدودة من الأعلى فهي لا تتقارب بالضرورة إلى $+\infty$

وليس من الضروري إذا انتهت متتالية إلى $+\infty$ فهي متزايدة.

لدراسة محدودية متتالية

(أوجد راجح، أوجد قاصر)

u_n حد صحيح — لا يشترط تقاربها

١) الحصر ٢) التصويب...

- ملاحظات في الحصر...

١) مجموع أعداد حقيقية موجبة أكبر من أي منها!

$u_n = 3n^2 + n + 1 \Rightarrow u_n \ge 3n^2$

٢) إذا كان S مجموع K عدداً حقيقياً وكان m أصغر هذه الأعداد و M أكبرها فإن

$Km \le S \le KM$

$u_n = n^3 + n^2 + n \Rightarrow 3n \le u_n \le 3n^2$

٣) لا يجوز قلب طرفي متراجحة إلا بشرط أن يكونا من إشارة واحدة.

$a \ge b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \le \frac{1}{b}$; $a \cdot b > 0$

٤) لا يجوز جذر طرفي متراجحة إلا إذا كانا من إشارة واحدة.

$a \le b \Rightarrow \sqrt{a} \le \sqrt{b}$; $a, b > 0$

٥) a, b, c, d أعداد موجبة.

$\left.\begin{matrix} a \le c \\ b \ge d \end{matrix}\right\} \frac{a}{b} \le \frac{c}{d}$

ملاحظات في التصغير...

نصطنع تابع المتتالية $U_n = f(n)$

وندرس اطراده.

ثم نعوض طرفي مجموعة التعريف...

مثال: $U_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ ، $n \geq 1$

بين إذا كانت U_n محدودة من الأعلى أو من الأدنى.

* الحصر.

لدينا $1 \leq n < +\infty$

$1 \leq n^2 < +\infty \Rightarrow 1 \geq \frac{1}{n^2} > 0$

$2 \geq 1 + \frac{1}{n^2} > 1 \Leftrightarrow$

$1 < U_n \leq 2$

ومنه U_n محدودة:

$m = 1$ ، $M = 2$

* التصغير...

$U_n = f(n)$ و $f(n) = 1 + \frac{1}{n^2}$

$f'(n) = \frac{-2}{n^3} < 0$

نعوض أطراف مجموعة التعريف.

$f(1) = 2$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ $\Big\}$ $1 < U_n \leq 2$

ومنه U_n محدودة

$m = 1$ ، $M = 2$

صيغة السؤال...

اثبت أن M راجح أو m قاصر

نعتمد بدراسة إشارة الفرق

$U_n - M$ أو $U_n - m$

مثال: $U_n = 5 - \frac{10}{n^2}$ ، $n \geq 1$

اثبت أن 5 راجح...

$U_n - 5 = \frac{-10}{n^2} < 0 \Leftrightarrow U_n < 5$

ومنه $M = 5$ راجح.

U_n مسلسلة

نقوم بإصلاح المسلسلة وفق قضية نثبتها من خلال طلب سابق

مثال: $U_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{n}{3^n}$

اثبت بالتدريج $n \leq 2^n$ أياً كان n

استنتج مما سبق عنصراً راجحاً على U_n.

$E(n):\ n \leq 2^n$

من أجل $n = 0 \Leftrightarrow 0 \leq 1$ محققة

الفرض: $n \leq 2^n$

الطلب: $n+1 \leq 2^{n+1}$

الإثبات: $n \leq 2^n$ لدينا فرضاً

$n + 1 \leq 1 + 2^n$

لكن $1 + 2^n \leq 2 \cdot 2^n$

ومنه $n+1 \leq 2 \cdot 2^n \Leftrightarrow n+1 \leq 2^{n+1}$

والقضية محققة من أجل $n+1$ فهي صحيحة،

$U_n \leq \frac{2^1}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} + \frac{2^4}{3^4} + \dots + \frac{2^n}{3^n}$

$U_n \leq \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n}$

مجموع لمتتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$

وحدها الأول $\frac{2}{3}$ وعدد الحدود n

$U_n \leq a \frac{1 - q^n}{1 - q} \Rightarrow U_n \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}}$

$U_n \leq \frac{2}{3} \times 3 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \Rightarrow$

$U_n \leq 2\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \Rightarrow$

$U_n \leq 2 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow$

$U_n \leq 2$ ومنه $M = 2$

* u_n متقاربة إذا وفقط إذا
تحقق أحد الشروط

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

u_n متقاربة من ℓ

2) u_n متتالية هندسية أساسها $-1 < q \le 1$

u_n متقاربة نحو (0) ..

3) متزايدة ومحدودة من الأعلى .

4) متناقصة ومحدودة من الأدنى .

* u_n متباعدة إذا وفقط إذا
تحقق أحد الشروط

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mp\infty$

u_n متباعدة نحو $+\infty$ أو $-\infty$.

2) u_n هندسية $q > 1$

u_n متباعدة نحو $+\infty$

3) متزايدة وغير محدودة من الأعلى .

4) متناقصة وغير محدودة من الأدنى .

مثال

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \dots - \frac{1}{2^n}$$

اكتب u_n بشكل آخر واستنتج أنها متقاربة

$$u_n = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= 1 - \left(\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

مجموع متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $a = \frac{1}{2}$ وعدد الحدود n

$$u_n = 1 - a\,\frac{1-q^n}{1-q} = 1 - \frac{1}{2}\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \cancel{\frac{1}{2}}\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\cancel{\frac{1}{2}}} = 1 - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$u_n = 1 - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

ومنه u_n متتالية متقاربة نحو (0)

متتاليات متجاورة ..

u_n و v_n متجاورتان إذا وفقط إذا
تحقق الشرطان

1) إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة
(u_n و v_n متعاكستان)

2) لهما النهاية نفسها
(نهاية الفرق صفر)

رسم متتالية تدريجية

$$u_0 = 2$$

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$$

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

لتكن $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ $\quad]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$$f' = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-2}{2x^2}$$

$$f' = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \mp\sqrt{2}$$

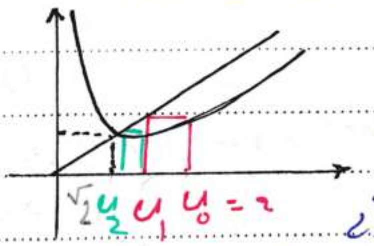
$x = \sqrt{2} \qquad f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

نحل المعادلة $f(x) = x$

$\frac{x}{2}+\frac{1}{x}=x \Leftrightarrow x=\sqrt{2}$

أي أنه (تقاطع منصف الربع الأول والثابت في نقطة واحدة $x=\sqrt{2}$



واضح من الرسم u_n متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد $\sqrt{2}$ فهي متقاربة.

$\lim_{n\to+\infty} u_n=\sqrt{2}$

ناتج حل المعادلة $f(x)=x$

معه جواب نهاية متتالية تدريجية

مسألة ٢٢/١٤٤

$u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n} \quad n>0$

١) اثبت ان u_n متزايدة

٢) اكتب $u_{2n}-u_n$ واستنتج $u_{2n}-u_n \geq \frac{1}{2}$

٣) اثبت بالتدريج $u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$

١) $u_{n+1}=\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}}_{u_n}+\frac{1}{n+1}$

$u_{n+1}=u_n+\frac{1}{n+1} \Rightarrow$

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n+1}>0$

فهي متزايدة تماماً

٢)

$u_{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}$

$=u_n+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}$

$u_{2n}-u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}$

$u_{2n}-u_n \geq \frac{1}{2n}\times n$

$u_{2n}-u_n \geq \frac{1}{2}$

٣) $E(n): u_{2^n} \geq \frac{n}{2} \quad n \geq 1$

من أجل $n=1$

$u_2 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 1+\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$

محققة من أجل $n=1$

الفرض: $u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$

الطلب: $u_{2^{n+1}} \geq \frac{n+1}{2}$

الإثبات:

$u_{2^{n+1}}=\underbrace{u_{2\cdot 2^n}-u_{2^n}}+u_{2^n}$

$2^n=n$ من الطلب الثاني من الفرض

$u_{2^{n+1}} \geq \frac{1}{2}+\frac{n}{2}$

$u_{2^{n+1}} \geq \frac{n+1}{2}$

والعلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي صحيحة.

المتتالية غير محدودة فليس لها نهاية حقيقية.

اهم تمارين نهاية متتالية..

٨/١٢٨ + ١٠+٩/١٢٨ + ١٦/١٤٢ + ١٧/١٤٤

٢١/١٤٤ + ٢٢+٢٣/١٤٤ + ٢٧/١٤٥

اهم تمارين اشتقاق

٢/٩٩ + ٢/١٠٠ + ٢/١٠٢ + ١٩+١٨+١٧+١٥/١٠٨

٢٧ + الطلب ٤ من المسألة ٢٨ + ٢٩/١١٠ + ٢٢+٢٠/١١١

١٢/١٠٧

اهم تمارين النهايات..

١١+١٣+١٤/٧٠ ، ١٦+١٩/٧١ ، ٢١+٢٣/٧٢ ، ٢٩+٢١/٧٢

اهم تمارين المتتاليات.

١/٢١ + ٦/٢٢ + ١٥+١٦/٢٥ + ١٧/٢٦

التابع اللوغاريتمي ....

هو آلية تحويل الجداء الى مجموع ويرمز له بـ

$\log_a$ (لوغاريتم ذو الاساس a)

$\log_{10} = \log$ $\qquad \log_e = \ln$

التابع اللوغاريتمي النيبيري ..

$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R} \; ; \; f(x) = \ln(x)$

قيم x موجبة

ليس للعدد السالب لوغاريتم

$\ln(-2)$ لغز $\qquad \ln(0,5) \simeq -0,7$

قواعد ....

[1] $\ln(e) = 1 \qquad \ln(1) = 0$

$\ln(\frac{1}{e}) = -1 \qquad \ln(2) \simeq 0,7$

$\ln(3) \simeq 1,1 \qquad \ln(5) \simeq 1,6$

[2] $\ln(e^x) = x \qquad x \in \mathbb{R}$

$e^{\ln(y)} = y \qquad y \in \mathbb{R}_+^*$

$\ln x = y \iff x = e^y$

[3] $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$

$\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$

(سلم) $\ln a^r = r \ln a$

$\ln(\frac{a}{b}) = -\ln(\frac{b}{a})$

[4] $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$

$\ln(a) \gtrless \ln(b) \iff a \gtrless b$

بشرط $0 < b, a$

[5] $0 < a < 1 \qquad \ln(a) < 0$

$a > 1 \qquad \ln(a) > 0$

ونستخدم لمناقشة اشارة لوغاريتم

$\ln(\frac{3}{2}) > 0 \qquad \ln(\frac{5}{7}) < 0$

$\ln(\frac{x}{x+1})$

نقرب اشارته وذلك وفق مجال

اشارة x وذلك من خلال أخذ قيمة تجريبية

لـ x من المجال المعطى.

$\ln(\frac{x}{x+1}) > 0 \qquad]-\infty, -1[$

$\ln(\frac{x}{x+1}) < 0 \qquad]0, +\infty[$

مجموعة تعريف

$f(x) = \ln(g(x))$

معرف من أجل $g(x) > 0$

$\ln(x-1) \qquad]1, +\infty[$

$\ln(2-x) \qquad]-\infty, 2[$

$\ln(x^2 - 5x + 4) \qquad]-\infty, 1[\cup]4, \infty[$

$\ln(4 - x^2) \qquad]-2, 2[$

$\ln(x^2 - 2x + 1) \qquad \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\ln(-x^2 + 6x - 9) \qquad \phi$

$\ln(x^2 + 1) \qquad \mathbb{R}$

$\ln(-x^2 - 4) \qquad \phi$

$\ln(\frac{x+1}{x-2}) \qquad]-\infty, -1[\cup]2, \infty[$

$\ln(\frac{x}{1-x}) \qquad]0, 1[$

$\ln|x-2| \qquad \mathbb{R} \setminus \{2\}$

.. المكتب العلمي الرياضي ..

$\dfrac{1}{\ln x}$ $\quad]0,+\infty[\setminus\{1\}$

$\dfrac{1}{\ln(x)-1}$ $\quad]0,+\infty[\setminus\{e\}$

مشتقات

$f(x)=\ln(g(x))$

$f'(x)=\dfrac{g'}{g}$

$f(x)=\ln(x^2-3x+4)$

$f'(x)=\dfrac{2x-3}{x^2-3x+4}$

$f(x)=\ln(\ln(x))$

$f'=\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x}=\dfrac{1}{x\cdot\ln x}$

ملاحظة: لا يجوز استخدام أي خاصة من خواص التابع اللوغاريتمي مالم توجد مجموعة تعريف.

اما أثناء الاشتقاق فيجوز استخدام خواص اللوغاريتم لتبسيط عملية الاشتقاق.

مثال: $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

$f(x)=\ln(x+1)-\ln(x-1)$

$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2}{x^2-1}$

* اما في مجموعة التعريف.

$\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=\ln(x+1)-\ln(x-1)$

$D_1=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

$D_2=]1,+\infty[$

ويمكن استخدام هذه الخاصية في فكرة استنتاج رسم خط بياني من آخر.

نلاحظ البياني للطرف الأول لم يكن مطابق تماماً للخط البياني للطرف الثاني على فرع واحد.

نهايات ...

* $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln x}=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to 0^+}x\cdot\ln x=0^-$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\ln(x+1)}=1$

أي تمرين نهايات يجب التفكير بطريقة رد السؤال المعطى الى احدى هذه القواعد الخمس.

ويجب التركيز للحصول على معرفة القاعدة المناسبة

$f(x)=x-\ln x \qquad +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)=\infty-\infty$

عدم تعيين.

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)=+\infty(1-0)$

$=+\infty$

$f=\dfrac{\ln(x+1)}{x} \qquad +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}\right)$

$=0+0=0$

استنتاج خط بياني من آخر..

نطابق التابع المعطى حتى نستطيع مقارنته بالتابع الأساسي f ونحصل على إحدى هذه الحالات.....

1) $f_1(x) = -f(x)$

C_1 نظير C بالنسبة لـ $x'x$.

أي $(x,y) \to (x,-y)$

2) $f_2(x) = f(-x)$

C_2 نظير C بالنسبة لـ $y'y$.

أي $(x,y) \to (-x,y)$

3) $f_3(x) = -f(-x)$

C_3 نظير C بالنسبة للمبدأ.

أي $(x,y) \to (-x,-y)$

4) $f_4(x) = a + f(x)$

انسحاب نحو الأعلى $a > 0$

" " الأسفل $a < 0$

$(x,y) \to (x, a+y)$

5) $f_5(x) = f(x+a)$

انسحاب نحو اليمين $a < 0$

" " اليسار $a > 0$

$(x,y) \to (x-a, y)$

2019

$f(x) = \frac{4}{1+e^{x}}$ C

$g(x) = \frac{4e^{x}}{1+e^{x}}$ C_1

نطابق شكل التابع $g(x)$

$$g(x) = \frac{4e^{x} \times e^{-x}}{1+e^{x} \times e^{-x}} = \frac{4}{e^{-x}+1} = f(-x)$$

ومنه C_1 نظير C بالنسبة لـ $y'y$

$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$ C_f

$g(x) = \frac{1 - x + \ln x}{x}$ C_g

نطابق شكل g

$$g(x) = \frac{1}{x} - 1 + \frac{\ln x}{x}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} - 1$$

$$= f(x) - 1$$

C_g نظير C_f وفق انسحاب نحو الأسفل درجة واحدة.

$f(x) = \frac{2x}{(x-1)^2}$ C_f

$g(x) = \frac{-2x}{(x+1)^2}$ C_g

$$g(x) = \frac{2(-x)}{(-(-x+1))^2} = \frac{2(-x)}{(-x-1)^2}$$

$$= f(-x)$$

ومنه C_g نظير C_f بالنسبة لـ $y'y$.

$f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}$ C

$f_1(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(\frac{1}{x})}$ C_1

$$f_1(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(\frac{1}{x})} = \frac{1}{x(-\ln x)}$$

$$= \frac{1}{-x \cdot \ln x} = -\frac{1}{x \cdot \ln x}$$

$$= -f(x)$$

C_1 نظير C بالنسبة لـ $x'x$.

.. المكتب العلمي الرياضي ..

اثبات صحة متراجحة ..

خطوات الحل ...

1) نجعل المتراجحة في طرف واحد ثم نصطنع تابع يمثل هذا الطرف

2) ندرس اطراد هذا التابع

3) من جدول الاطراد نقرر الاثبات .

اثبت ان $\ln(x) \leq 2(\sqrt{x}-1)$

$\ln(x) - 2(\sqrt{x}-1) \leq 0$

$f(x) = \ln(x) - 2(\sqrt{x}-1) \qquad]0,+\infty[$

$f'(x) = \frac{1}{x} - 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

$= \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{x}$

$f' = 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{x} = 0$

$1 = \sqrt{x} \Rightarrow x = 1$

$f(1) = 0$

x	0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	0	$\searrow$	

واضح من جدول الاطراد ان

$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \ln x - 2(\sqrt{x}-1) \leq 0$

$\ln x \leq 2(\sqrt{x}-1)$

وهي محققة .

حل كل معادلة او متراجحة ..

1) $(\ln x - 1)(\ln x + 2) = 0$

شرط الحل $x > 0$

إما $\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1$

$x = e$

أو $\ln x + 2 = 0 \Rightarrow \ln x = -2$

$x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

$\ln x - 1 \qquad]0,+\infty[$

$\ln(x-1) \qquad]1,+\infty[$

2) $\frac{1}{2}\ln(2x) = \ln(3-x) - \ln\sqrt{x+1}$

شرط الحل

$D_1 =]0,+\infty[$

$D_2 =]-\infty,3[$

$D_3 =]-1,+\infty[$

$D_1 \cap D_2 \cap D_3 =]0,3[$

$\ln\sqrt{2x} = \ln\frac{3-x}{\sqrt{x+1}}$

$\sqrt{2x} = \frac{3-x}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow \sqrt{2x}\sqrt{x+1} = 3-x$

$\sqrt{2x(x+1)} = 3-x \qquad$ نربع $]0,3[$ في

$2x(x+1) = (3-x)^2$

$2x^2 + 2x - 9 + 6x - x^2 = 0$

$x^2 + 8x - 9 = 0$

$x = 1$ مقبول

$x = -9$ مرفوض

3) $\ln^2 x - 5\ln x + 6 = 0$

$x > 0$

$(\ln x - 2)(\ln x - 3) = 0$

إما $\ln x = 2 \Rightarrow x = e^2$

أو $\ln x = 3 \Rightarrow x = e^3$

التابع الأسي النيبري ..

سؤال هام ....

اثبت ان التابع $f(x) = \ln x$ تقابل وأوجد تقابله العكسي .
واستنتج الصفة التناظرية لها .

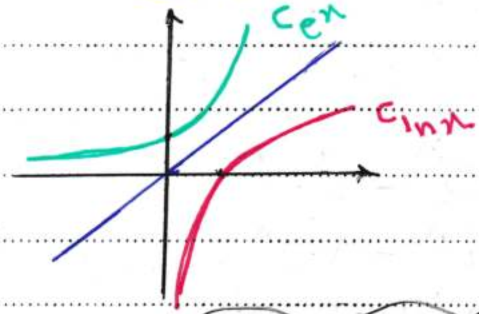
لكي يكون f تقابل يجب ان يكون للمعادلة $f(x) = y$ حل وحيد .

$\ln x = y \iff x = e^{y} \quad x > 0$

للمعادلة حل وحيد اذا f تقابل وتقابله العكسي

$f^{-1}(x) = e^{x} \quad x \in \mathbb{R}$

f , f^{-1} متناظران بالنسبة لمنصف الربعين الاول والثالث .



تناظر بالنسبة لـ Δ_1
$(x, y) \longrightarrow (y, x)$
تناظر بالنسبة لـ Δ_2
$(x, y) \longrightarrow (-y, -x)$

التابع الأسي النيبري :

$f: \mathbb{R} \to]0, +\infty[\; ; \; f(x) = e^{x}$

المنطلق — المستقر

$e^{x} > 0$ دائماً

قواعد

1) $e^{1} = e \qquad e^{0} = 1$

$e \simeq 2,7 \qquad e^{2} \simeq 7$

$\sqrt{e} \simeq 1,5$

2) $e^{x} = y \iff x = \ln y$

$e^{-\ln a} = \frac{1}{a}$

$a^{b} = e^{b \cdot \ln a}$

3) $e^{a} \times e^{b} = e^{a+b}$

$\frac{e^{a}}{e^{b}} = e^{a-b}$

$(e^{a})^{b} = e^{a \cdot b}$

$e^{-a} = \frac{1}{e^{a}}$

4) $e^{a} = e^{b} \iff a = b$

$e^{a} \gtrless e^{b} \iff a \gtrless b$

5) $a > 0 \qquad e^{a} > 1$

$a < 0 \qquad 0 < e^{a} < 1$

مجموعة تعريف

معرف على مجموعة تعريف الأس .

$f(x) = e^{g(x)} \qquad D_f = D_g$

$f(x) = e^{\ln x} \qquad]0, +\infty[$

$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \qquad \mathbb{R}^{*}$

$f(x) = e^{\sqrt{x}} \qquad [0, +\infty[$

.. المكتب العلمي الرياضي ..

مشتقة

$f(x) = e^{g(x)}$

$f'(x) = g'(x)\, e^{g(x)}$

$f(x) = e^{x^2+1}$ $\quad f' = 2x\, e^{x^2+1}$

نهايات

$\lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ $\quad \lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty$ $\quad$ 2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x}} = 0$

3) $\lim_{x\to-\infty} x\cdot e^{x} = 0$

4) $\lim_{x\to0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1$ $\quad$ 5) $\lim_{x\to0} \frac{x}{e^{x}-1} = 1$

6) $\lim_{t\to0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$

7) $\lim_{t\to\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} = e$

نستخدمها اذا حصلنا على 1^{∞}

$f(x) = \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}$ $\quad +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1^{\infty}$

$x-1 \,\overline{)\, x+3}$ $\quad 1$

$x-1$

4

$f(x) = \left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}$

نفرض $\frac{4}{x-1} = t \Rightarrow 4 = xt - t$

$xt = 4+t \Rightarrow x = \frac{4+t}{t}$

$x\to+\infty \quad t\to0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{t\to0} (1+t)^{\frac{4+t}{2t}}$

$= \lim_{t\to0} (1+t)^{\frac{2}{t}+\frac{1}{2}}$

$= \lim_{t\to0} (1+t)^{\frac{2}{t}}\cdot(1+t)^{\frac{1}{2}}$

$= \lim_{t\to0} \left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{2} (1+t)^{\frac{1}{2}}$

$= e^{2}\cdot 1^{\frac{1}{2}} = e^{2}$

$f(x) = 4^{x} - 2^{x+2}$ $\quad \mathbb{R}$

ادرس تغيرات f ونظم جدولاً به وارسم مخطط البياني.

$f(x) = (2^{2})^{x} - 2^{2}\cdot 2^{x}$

$= 2^{2x} - 4\cdot 2^{x}$

$= 2^{x}(2^{x}-4)$

$f(x) = e^{x\ln2}\left(e^{x\ln2}-4\right)$ $\quad \mathbb{R}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$f'(x) = \ln2\, e^{x\ln2}\left(e^{x\ln2}-4\right) + e^{2x\ln2}\cdot\ln2$

$= \ln2\, e^{x\ln2}\left(e^{x\ln2}-4+e^{x\ln2}\right) = 0$

$= \ln2\, e^{x\ln2}\left(2e^{x\ln2}-4\right) = 0$

نعدمه

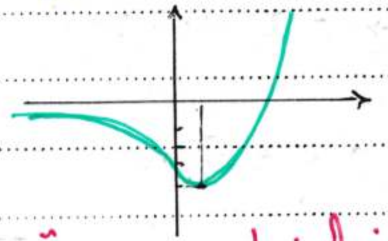
$\ln 2\, e^{x\cdot\ln 2} = 0$

$e^{x\cdot\ln 2} = 2 = e^{\ln 2}$

$x\cdot\ln 2 = \ln 2 \Rightarrow x = 1$

$f(1) = 4^1 - 2^{1+2} = 4 - 8 = -4$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$



معادلات تفاضلية ...

كل معادلة تحوي y' , y'' , ... , y , x تسمى معادلة تفاضلية .

شكلها : $y' = ay + b$

حلها : $y = Ke^{ax} - \frac{b}{a}$

K : مقدار ثابت $\in \mathbb{R}$.

حل المعادلة التفاضلية $y' + 5y = 0$

يمر بالنقطة $A(-2,1)$

$y' = -5y$

$y = Ke^{-5x}$

نعوض النقطة $1 = Ke^{10} \Rightarrow K = e^{-10}$

ومنه $y = e^{-10}\cdot e^{-5x}$

$= e^{-10-5x}$

$2y + 3y' - 1 = 0$

$3y' = -2y + 1$

$y' = -\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}$ $\quad a = -\frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$

$y = Ke^{-\frac{2}{3}x} + \frac{1}{2}$

$f(x) = e^{\frac{1+x}{1-x}}$ $\quad \mathbb{R}\setminus\{1\}$

ادرس تغيرات f وارسم خطها C

f معرفة مستمرة اشتقاقية على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$\lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = e^{\frac{2}{0^-}} = e^{-\infty} = 0$

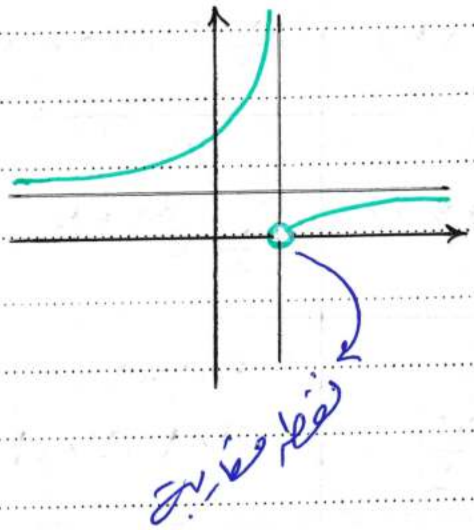
نقطة مقاربة $(1,0)$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = e^{\frac{2}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty$

$f'(x) = \frac{1-x-(-1)(1+x)}{(1-x)^2}\, e^{\frac{1+x}{1-x}}$

$= \frac{2}{(1-x)^2}\, e^{\frac{1+x}{1-x}} > 0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	||	$+$	
f	$\frac{1}{e}$	$\nearrow$ $+\infty$	||	0 $\nearrow$	$\frac{1}{e}$



.. المكتب العلمي الرياضي ..

التكامل

محدد

$$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

غير محدد

تابع أصلي

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

f تابع f' مشتق التابع

F تابع أصلي لـ f

$$F'(x) = f(x)$$

لكل تابع الرسم تابع أصلي

حالات خاصة ..

$\sin(g(x)) \xrightarrow{\text{اشتقاق}} g'\cos(g(x))$ ، $\xleftarrow{\text{تكامل}}$

$\cos(g(x)) \longrightarrow -g'\sin(g(x))$ ، $\longleftarrow$

$\tan x \leftarrow 1+\tan^2 x$ ، $\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$e^{g(x)} \longrightarrow g'(x)\cdot e^{g(x)}$ ، $\longleftarrow$

$\cot x \leftarrow -(1+\cot^2 x)$ ، $\dfrac{-1}{\sin^2 x}$

قواعد ...

f	$F(x)$	
0	c	ثابت
a	ax	
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	
$\sin x$	$-\cos x$	
$\sin(ax+b)$	$\dfrac{-1}{a}\cos(ax+b)$	
$\cos x$	$\sin x$	
$\cos(ax+b)$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)$	
e^x	e^x	
e^{ax+b}	$\dfrac{1}{a}e^{ax+b}$	
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	
$\dfrac{g'}{g}$	$\ln\lvert g(x)\rvert$	
$g'(x)\cdot g^r(x)$	$\dfrac{g^{r+1}}{r+1}$	$r \neq -1$

مسألة مكنة

قوانين مثلثية ...

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$$

دساتير التحويل

$$\sin a\cdot\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$$

$$\cos a\cdot\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$$

$$\sin a\cdot\sin b = \frac{-1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$$

التكامل المحدد ...

أولاً : تكامل القيمة المطلقة ..

نجزئ تكامل القيمة المطلقة عند القيمة التي تعدم ما داخل القيمة المطلقة وذلك إن وجدت ضمن حدود التكامل .

$$\int_{-2}^{+2}|x^2-4x|\,dx=\int_{-2}^{0}|x^2-4x|+\int_{0}^{2}|x^2-4x|$$

$$=\int_{-2}^{0}(x^2-4x)+\int_{0}^{2}(-x^2+4x)$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2\right]_{0}^{2}$$

$$\int_{0}^{\pi}|\cos x|\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|\cos x|+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}|\cos x|$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\cos x$$

$$=[\sin x]_{0}^{\frac{\pi}{2}}-[\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$\int_{2}^{3}|x-1|\,dx=\int_{2}^{3}(x-1)\,dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_{2}^{3}$$

ثانياً : التكامل بالتجزئة ..

أ) تكامل بالتجزئة محددة .

$$\boxed{\int_{a}^{b}u\cdot v'\,dx=[u\cdot v]_{a}^{b}-\int_{a}^{b}v\,u'\,dx}$$

$u=$ صحيح $\qquad v'=\begin{cases}\cos\\ \sin\\ e\end{cases}$

$u=\ln \qquad v'=$ صحيح

ب) تكامل بالتجزئة غير محدد ..

$$F(x)=\int_{a}^{x}f(t)\,dt$$

a : قيمة ما صحيحة تتناسب مع السؤال

ثم نتابع التجزئة محددة

أوجد F . $\quad f(x)=x\cdot\ln x$

$$F(x)=\int_{1}^{x}f(t)\,dt$$

$$=\int_{1}^{x}t\cdot\ln t\,dt$$

$u=\ln t \qquad u'=\frac{1}{t}$

$v'=t \qquad v=\frac{t^2}{2}$

$$F(x)=[u\cdot v]_{1}^{x}-\int_{1}^{x}\frac{t}{2}$$

$$=\left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]_{1}^{x}-\left[\frac{t^2}{4}\right]_{1}^{x}$$

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}2x\cos^2 x\,dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cancel{2}x\cdot\frac{1+\cos 2x}{\cancel{2}}$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x(1+\cos 2x)\,dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x+\underbrace{\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\cdot\cos 2x}_{J}\ *$$

$$J=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\cos 2x\,dx$$

$u=x \qquad u'=1$

$v'=\cos 2x \qquad v=\frac{1}{2}\sin 2x$

$$J = \left[\frac{x}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$= \frac{\pi}{4}\sin\pi - 0 - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 0 + \frac{1}{4}\left[\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\cos\pi - \cos(0)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[-1-1\right] = -\frac{1}{2}$$

ثالثاً : تكامل الكسور الجزئية ..

أ) قوة البسط اكبر او تساوي قوة المقام
نستخدم القسمة التقليدية .

ب) قوة المقام اكبر من قوة البسط .
نستخدم التفريق .

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-x-2} \qquad]2,+\infty[$$

$$\begin{array}{r|l} & x+1 \\ \hline x^2-x-2 & x^3 \\ & \underline{x^3 - x^2 - 2x} \\ & x^2+2x \\ & \underline{x^2 - x - 2} \\ & 3x+2 \end{array}$$

$$f(x) = x+1+\frac{3x+2}{x^2-x-2}$$

نفرق الكسر

$$\frac{3x+2}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}$$

$$x+1 \qquad x-2$$

$$3x+2 = A(x+1)+B(x-2)$$

لحساب A : نعوض $x=2$

$$8 = 3A \Rightarrow A = \frac{8}{3}$$

لحساب B : $x=-1$

$$-1 = -3B \Rightarrow B = \frac{1}{3}$$

$$\frac{3x+2}{x^2-x-2} = \frac{\frac{8}{3}}{x-2}+\frac{\frac{1}{3}}{x+1}$$

$$f(x) = x+1+\frac{8}{3}\frac{1}{x-2}+\frac{1}{3}\frac{1}{x+1}$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2}+x+\frac{8}{3}\ln|x-2|+\frac{1}{3}\ln|x+1|$$

$$= \frac{x^2}{2}+x+\frac{8}{3}\ln(x-2)+\frac{1}{3}\ln(x+1)$$

$$f(x) = \frac{2x-1}{(x+2)^2} \qquad]-\infty,-2[$$

$$\frac{2x-1}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}$$

$$2x-1 = A(x+2)+B$$

$$2x-1 = Ax+2A+B$$

بالمطابقة .

$$A = 2$$

$$2A+B = -1 \Rightarrow 4+B = -1$$

ومنه $B = -5$

$$f(x) = \frac{2}{x+2}+\frac{-5}{(x+2)^2}$$

$$= 2\frac{1}{x+2} - 5(x+2)^{-2}$$

$$F(x) = 2\ln|x+2| - 5\frac{(x+2)^{-1}}{-1}$$

$$= 2\ln|x+2| + \frac{5}{x+2}$$

احسب مساحة السطح المحصور بين C و $x'x$. $f(x) = x^2 - 2x$

لإيجاد حدود التكامل نحل المعادلة

$f(x) = 0 \iff x^2 - 2x = 0 \to x = 0$, $x = 2$

لمعرفة وضعية السطح نختبر

$f(1) = 1 - 2 = -1 < 0$ تحت $x'x$.

$S = \int_0^2 -f(x)$

$= \int_0^2 (-x^2 + 2x)$

$= \left[-\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2}\right]_0^2$

$= \left[-\frac{8}{3} + 4 - 0\right]$

$= \frac{4}{3}$ واحدة مربعة .

$f_1(x) = x^2$ C_1

$f_2(x) = \sqrt{x}$ C_2

احسب مساحة السطح المحصور بين C_1 و C_2 .

لإيجاد حدود التكامل نحل المعادلة

نضع $f_1 = f_2 \iff x^2 = \sqrt{x}$

$x^4 = x \Rightarrow x^4 - x = 0$

$x^3(x-1) = 0 \to x = 0$, $x = 1$

$f_1\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$, $f_2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$ $\Big\}$ $f_2 > f_1$

$S = \int_0^1 (f_2 - f_1) = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx$

$= \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - x^2)\,dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$

$= \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ وحدة مكعبة

ملاحظات هامة

* لإيجاد حدود التكامل في الحالات الثلاث نحل المعادلة $f(x) = 0$

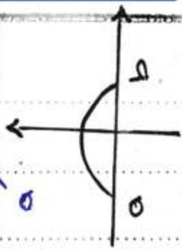
أما في الحالة الرابعة نحل المعادلة $f_1(x) = f_2(x)$

* لمعرفة وضعية السطح .

في الحالة الثالثة نفرض قيمة تجريبية من ضمن حدود التكامل وطبيعة الناتج موجب فوق ، الناتج سالب تحت

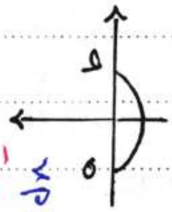
في الحالة الرابعة نفرض قيمة تجريبية من ضمن حدود التكامل الناتج الأكبر هو الدالة .

الحالة الأولى



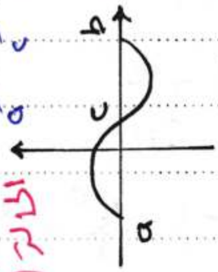
$S = \int_a^b f(x)\,dx$

الحالة الثانية



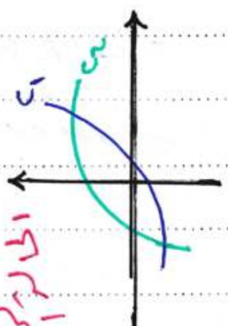
$S = \int_a^b -f(x)\,dx$

الحالة الثالثة



$S = \int_a^c f + \int_c^b -f$

الحالة الرابعة



$S = \int_a^b (f_1 - f_2)$

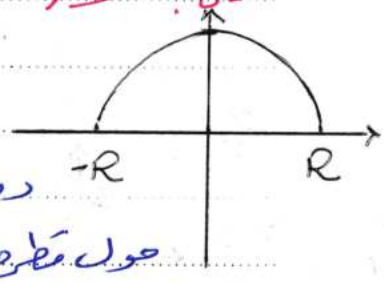
$S = \int_a^b |f(x)|\,dx$; $a < b$

.. المكتب العلمي الرياضي ..

حجم

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 \, dx$$

مثال : اثبت ان حجم الكرة التي مركزها (0,0) ونصف قطرها R . تعطى بالعلاقة $V = \frac{4}{3}\pi R^3$



نعلم ان الكرة ناتجة عن دوران نصف دائرة حول قطرها دورة كاملة .

معادلة الدائرة $x^2 + y^2 = R^2$

ومنه $y^2 = R^2 - x^2$

$$V = \int \pi y^2 \, dx$$

$$= \pi \int (R^2 - x^2) \, dx$$

$$= \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^{R}$$

$$= \pi \left[R^3 - \frac{R^3}{3} - \left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right) \right]$$

$$= \pi \left[R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3} \right]$$

$$= \pi \left[2R^3 - \frac{2R^3}{3} \right]$$

$$= \pi \left(\frac{4}{3} R^3 \right) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

واحدة مكعبة

تمارين هامة ..

احسب التكاملات الآتية ؟

$$M = \int_0^\pi e^x \cos x \, dx$$

$u = e^x \qquad u' = e^x$

$v' = \cos x \qquad v = \sin x$

$$M = [uv]_0^\pi - \int_0^\pi v u'$$

$$= [e^x \cdot \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cdot \sin x$$

$$= -\int_0^\pi e^x \sin x \quad \ldots *$$

لتكن $N = \int_0^\pi e^x \cdot \sin x \, dx$

$u = e^x \qquad u' = e^x$

$v' = \sin x \qquad v = -\cos x$

$$N = [-e^x \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi -e^x \cdot \cos x$$

$$= -e^\pi(-1) - (-1) + \int_0^\pi e^x \cdot \cos x$$

$$= e^\pi + 1 + M$$

نعوض في *

$$M = -e^\pi - 1 - M \Rightarrow$$

$$2M = -e^\pi - 1$$

$$M = \frac{1}{2}(-e^\pi - 1)$$

$f(x) = \min(x^2, 2-x)$

احسب $\int_0^2 f(x)\,dx$

$\min(5,2)=2$ — $\max(5,2)=5$

$x^2-(2-x)=0 \Rightarrow x^2+x-2=0 \left\{ \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix} \right.$

x	$-\infty$	-2	0	1	2	$+\infty$
		+	0	−	0	+

$[0,1]$

$x^2-(2-x)<0 \Rightarrow x^2 < 2-x$

ومنه $\min(x^2, 2-x) = x^2$

$[1,2]$

$x^2-(2-x)>0 \Rightarrow x^2 > 2-x$

ومنه $\min(x^2, 2-x) = 2-x$

اذن

$\int_0^2 f(x) = \int_0^1 x^2 + \int_1^2 (2-x)$

$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2$

$= \frac{1}{3} - 0 + 4 - 2 - (2 - \frac{1}{2})$

$= \frac{1}{3} + 4 - 2 - 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

$f(x) = \frac{\ln x - 1}{x^2}$

$f(x) = \frac{1}{x^2}\ln x - \frac{1}{x^2}$

$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$

$= \int_1^x \frac{1}{t^2}\ln t - \int_1^x \frac{1}{t^2}$ .... *

لتكن $G(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2}\ln t\,dt$

$u = \ln t \qquad u' = \frac{1}{t}$

$v' = \frac{1}{t^2} = t^{-2} \qquad v = \frac{t^{-1}}{-1} = \frac{-1}{t}$

$G(x) = \left[\frac{-1}{t}\ln t\right]_1^x - \int_1^x \frac{-1}{t^2}$

$= \frac{-1}{x}\ln x + \int_1^x \frac{1}{t^2}$

نعوض في *

$F(x) = \frac{-1}{x}\ln x + \int_1^x \frac{1}{t^2} - \int_1^x \frac{1}{t^2}$

$= \frac{-1}{x}\ln x$

خواص التكامل المحدد.

1) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

2) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

3) $\int_a^b \lambda f(x) = \lambda \int_a^b f(x)$

4) $\int_a^b (f_1+f_2) = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$

خاصة توزيع التكامل على الجمع والطرح

ولا تكمل على الضرب والقسمة

5) $\int_a^b f(x) = \int_a^c f(x) + \int_c^b f$

علاقة شال في التكامل

6) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

المكتب العلمي الرياضي

تمرين هام

$f(x) = (2-x)e^x$ ، $\mathbb{R}$

1) ادرس تغيرات f وارسم C.

f معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty(+\infty) = -\infty$

عدم تعيين $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty(0)$

$\lim_{x\to-\infty}(2e^x - xe^x) = 0-0=0$

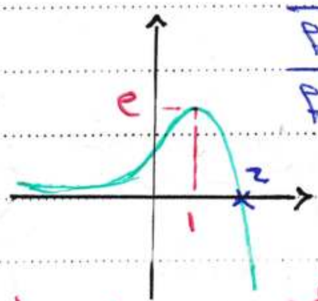
$f'(x) = -e^x + e^x(2-x)$

$= e^x(1-x)$ $\quad f'=0$

$\Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow x=1$

$f(1)=e$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	$-\infty$



$f=0 \Rightarrow x=2$

2) احسب مساحة السطح المحصور بين C و x'x والمستقيمين $x=2$ ، $x=0$

$S=\int_0^2 f(x) = \int_0^2 (2-x)e^x\,dx$

$u=2-x \qquad u'=-1$

$v'=e^x \qquad v=e^x$

$S=[uv]_0^2 - \int_0^2 vu'\,dx$

$=[(2-x)e^x]_0^2 - \int_0^2 -e^x\,dx$

$=0-(2)+[e^x]_0^2$

$=-2+e^2-1$

$=e^2-3$

واحدة مربعة.

3) عند الدوران حول x'x ينتج مجسم دوراني نحسب v

عين a ، b ، c كي يكون التابع G المعطى ب

$G(x)=(ax^2+bx+c)e^{2x}$

تابعاً أصلياً ل $(f(x))^2$

$G' = f^2 \Leftrightarrow$ G تابعاً أصلياً ل $(f(x))^2$

$(2ax+b)e^{2x}+2e^{2x}(ax^2+bx+c)=f^2$

$\cancel{e^{2x}}(2ax+b+2ax^2+2bx+2c) = (2-x)^2\cancel{e^{2x}}$

$2ax^2+(2a+2b)x+b+2c = 4-4x+x^2$

بالمطابقة:

$2a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$

$2a+2b=-4 \Rightarrow b=\frac{-5}{2}$

$b+2c=4 \Rightarrow c=\frac{13}{4}$

$G(x)=(\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+\frac{13}{4})e^{2x}$

نستنتج قيمة v ..

$v=\pi\int_0^2 (f(x))^2\,dx$

$=\pi[G(x)]_0^2$

$=\pi[(\frac{x^2}{2}-\frac{5}{2}x+\frac{13}{4})e^{2x}]_0^2$

$=\pi[(2-5+\frac{13}{4})e^4-(\frac{13}{4})]$

$=\pi[\frac{e^4}{4}-\frac{13}{4}] = \pi\frac{e^4-13}{4}$

مثال $\frac{1}{8}$

$f(x) = \frac{4x-5}{2x+3}$ $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$

أ) نهاية f عند $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$

ب) عيّن A ⇐ كل ممكن $r=0,05 , 2$ $x > A$

$|f(x)-c| < r \Rightarrow \left|\frac{4x-5}{2x+3} - 2\right| < 0,05$

$\left|\frac{4x-5-4x-6}{2x+3}\right| < 0,05$

$\left|\frac{-11}{2x+3}\right| < 0,05$

$-0,05 < \frac{-10}{2x+3} < \cancel{0,05}$

$-0,05 < \frac{-11}{2x+3} \Rightarrow 0,05 > \frac{11}{2x+3}$

$20 < \frac{2x+3}{10} \Rightarrow 200 < 2x+3$

$\left.\begin{array}{l} x > \frac{197}{2} \\ x > A \end{array}\right\} \quad A = \frac{197}{2}$

مثال ٤

$f(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin x$

أ) $+\infty$ (الاحاطة للحصول على $\sin\infty$)

$-1 \le \sin x \le 1$

نقسم على x ، $x>0$ $\frac{-1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{x})=0 \\ \lim_{x\to+\infty}(\frac{-1}{x})=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

حسب الاحاطة (١)

ب) 0 (توابع مثلثية للحصول على $\frac{0}{0}$)

$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$

مثال ٥

$f(x) = x + \cos x$ $+\infty$:

$-1 \le \cos x \le 1$

$x-1 \le x+\cos x \le \cancel{x+1}$

بما ان $x \to +\infty$ نحذف الاكبر

$\lim_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

حسب المبرهنة (٢) (المقارنة)

$f = \frac{x}{2} + 2\sin x$ $-\infty$

$-2 \le 2\sin x \le 2$

$\cancel{\frac{x}{2}-2} \le \frac{x}{2}+2\sin x \le \frac{x}{2}+2$

$x \to -\infty$ نحذف الاصغر

$\lim_{x\to-\infty}(\frac{x}{2}+2) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty}(\frac{x}{2}+2\sin x) = -\infty$

حسب مبرهنة المقارنة

$f(x) = \frac{E(x)}{x}$ $+\infty$

$x-1 < E(x) \le x$

نقسم على x ، $0<x$

$\frac{x-1}{x} < \frac{E(x)}{x} \le \frac{x}{x}$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty}(\frac{x}{x})=1 \\ \lim_{x\to+\infty}(\frac{x-1}{x})=1 \end{array}\right\} \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

حسب الاحاطة .

مثال ٤ ! $f(x) = \sqrt{1-\cos x}$

١) مجموعة التعريف

$1-\cos x \ge 0 \Rightarrow \cos x \le 1$ محقق

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ دوماً

٢) بيّن ان f زوجي ثم استنتج الصفة الهندسية

$f(-x) = \sqrt{1-\cos(-x)} = \sqrt{1-\cos x}$

$= f(x)$

ومنه f تابع زوجي ومخطط بيانه متناظر

بالنسبة لـ $y'y$

٣) α أمثال x $\quad T = \frac{2\pi}{|\alpha|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

لأنه $f(x+2\pi) = \sqrt{1-\cos(x+2\pi)}$

$= \sqrt{1-\cos x} = f(x)$

ومنه f تابع دوري دوره $T = 2\pi$

ثانياً: $g(x) = \sqrt{1-\cos x}$

$= \sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}} = \sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|$

$= \sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$

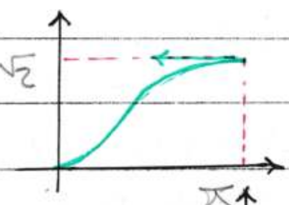
حيث في حال $x \in [0,\pi]$ فإن

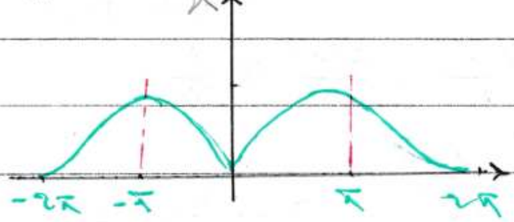
$\sin\frac{x}{2} \geq 0$

لذلك ينطبق g مع مقصور التابع على

المجال $[0,\pi]$ ومنه g تتقابل مع f

ونرسم تناظري.





مثال: $f = x^2$ $\quad g = \sqrt{x}$

اثبت أن f تقابل وأوجد تقابله العكسي

مستقيم المنصف التناظري على $[0,+\infty[$

لكي يكون f تقابل يجب أن يكون للمعادلة

$f = y$ حل وحيد

$y = x^2 \Leftrightarrow x = \mp\sqrt{y}$

على المجال $[0,+\infty[$ يكون $x = \sqrt{y}$

وله حل وحيد إذن f تقابل

والتقابل العكسي $f^{-1} = g(x) = \sqrt{x}$

ويكون f و g متناظران بالنسبة لمنصف

الربع الأول والثالث.

مثال نشاط

$f(x) = \sqrt{x^2+1}$ على $[0,+\infty[$

اثبت أن C يقبل مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$

جد معادلته ثم ادرس الوضع.

واضح أن $y = |x|$ مقارب مائل

في جوار $+\infty$ $\quad y = x$ لأن

$f - y_\Delta = \sqrt{x^2+1} - x$

$\lim_{x\to+\infty}(f - y_\Delta) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$

لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة

الفرق

$f - y_\Delta = \sqrt{x^2+1} - x$

بالجذر $\quad x^2+1 > x^2$

$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2+1} > x$

$\sqrt{x^2+1} - x > 0$

ومنه $\quad f - y_\Delta > 0$

أي C فوق Δ.

الأشعة

أولاً: جمع الأشعة

طريقة شال (نهاية - بداية)

شرط: نهاية الأول هي بداية الثاني.

الناتج: شعاع بدايته بداية الأول ونهايته نهاية الثاني.

فوائد: - جمع عدة أشعة

$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD}$

- ادخال نقطة.

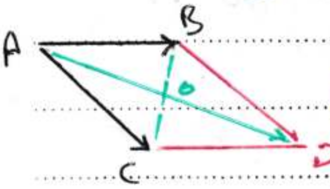
$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$

$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$

طريقة متوازي الأضلاع (بداية - بداية)

شرط: بداية الأول بداية الثاني

الناتج: قطر متوازي الأضلاع المنشأ على هذين الشعاعين



$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$

أو

$\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AO}$

اذا تساوى شعاعين متقابلين في رباعي ما كان الرباعي متوازي الأضلاع.

$\vec{AB} = \vec{CD}$

متوازي أضلاع ABDC

اذا تساوى شعاعين لهما البداية ذاتها فالنهايات منطبقة

$\vec{AM} = \vec{AB} \Rightarrow$ M منطبقة على B

ثانياً: قوانين

١) الشعاع $\vec{AB}$

$\vec{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$

٢) المسافة بين النقطتين A , B

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

٣) مركبات الشعاع $\vec{AB}$

$\vec{AB}(x_B - x_A , y_B - y_A , z_B - z_A)$

٤) احداثيات I منتصف AB

$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

٥) احداثيات G مركز ثقل المثلث ABC

$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$

٦) طويلة (النظيم) شعاع

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

٦) اذا تساوى شعاعين تساوت مركباتهما

$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x_1 = x_2$

$y_1 = y_2 \quad , \quad z_1 = z_2$

ثالثاً: الارتباط الخطي لشعاعين

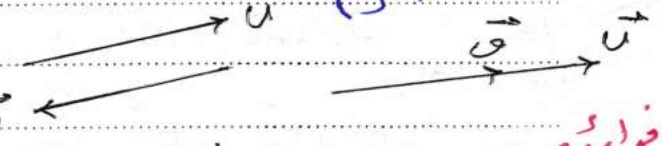
المفهوم الهندسي: التوازي أو الانطباق

المفهوم الجبري: $\vec{u}$, $\vec{v}$ مرتبطان خطياً

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$$

$$\vec{u}=\lambda\vec{v} \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

1) الشعاع الصفري يرتبط خطياً مع أي شعاع آخر.



فوائد:

1) اثبات ثلاث نقط على استقامة واحدة.

2) اثبات ثلاث نقط تعين مستوٍ (غير مرتبطان خطياً)

3) الارتباط الخطي لشعاعين من اربع نقط (يعني التوازي لحاملي الشعاعين).

4) اثبات توازي أو انطباق.

اثبات ثلاث نقط على استقامة واحدة

1) ارتباط خطي لشعاعين من ثلاث نقط

2) احداهن مركز ابعاد متناسبة للنقطتين الأخريين

3) وقوع النقاط الثلاث على الفصل المشترك لمستويين (على مستقيم واحد)

اثبات مستقيم يوازي مستوٍ..

1) الارتباط الخطي لشعاع توجيه المستقيم مع شعاعين غير مرتبطين خطياً في المستوي

2) $\vec{n}$ ناظم المستوي $\vec{n}\times\vec{v}=0$

$\vec{v}$ شعاع توجيه المستقيم.

ثلاث اشعة..

تعريف: $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ثلاث اشعة مرتبطة خطياً اذا وفقط اذا تحقق الشرط:

$$\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v} \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

1- اربع نقط: الارتباط الخطي لثلاث اشعة مكونة من اربع نقط تعني (وقوع النقاط الاربع في مستوٍ واحد)

صيغة السؤال: اثبت ان النقاط A, B, C, D تقع في مستوٍ واحد.

خمس نقط: الارتباط الخطي لثلاث اشعة مكونة من خمس نقط تعني (شعاع يوازي مستوٍ).

صيغة السؤال: اثبت AB يوازي المستوي CDE

$$\vec{AB}=\alpha\vec{CD}+\beta\vec{CE}$$

مثال: $A(1,-1,0)$ $B(1,2,-3)$ $C(0,1,-1)$ $D(-1,0,1)$

اثبت انها تقع في مستوٍ واحد.

$\vec{AB}(0,3,-3)$

$\vec{AC}(-1,2,-1)$

$\vec{AD}(-2,1,1)$

$\frac{-1}{-2}\neq\frac{2}{1}$ غير مرتبطان خطياً

$$\vec{AB}=\alpha\vec{AC}+\beta\vec{AD}$$

$$(0,3,-3)=\alpha(-1,2,-1)+\beta(-2,1,1)$$

$$=(-\alpha-2\beta,\ 2\alpha+\beta,\ -\alpha+\beta)$$

$-\alpha-2\beta=0$

$2\alpha+\beta=3$

$-\alpha+\beta=-3$

من 1، 2: $\alpha=2,\ \beta=-1$

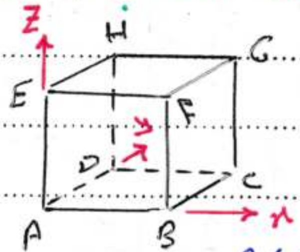
نلاحظ انها تحقق المعادلة (3) فالاشعة مرتبطة خطياً.

-٢-

ثالثاً : احداثيات رؤوس مكعب (متوازي مستطيلات)

مبدؤه A

أ) طول حرفه (1)



$(A ; \vec{AB} , \vec{AD} , \vec{AE})$

A(0,0,0) B(1,0,0)

C(1,1,0) D(0,1,0) E(0,0,1)

H(0,1,1) F(1,0,1) G(1,1,1)

ب) طول حرفه (a)

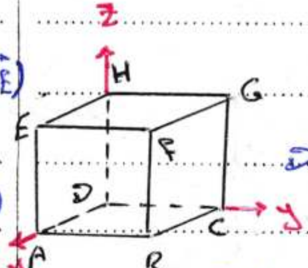
$(A ; \frac{1}{a}\vec{AB} , \frac{1}{a}\vec{AD} , \frac{1}{a}\vec{AE})$

A(0,0,0) B(a,0,0) C(a,a,0)

D(0,a,0) E(a,0,a) F(a,0,a)

H(0,a,a) G(a,a,a)

مبدؤه D



$(D ; \vec{DA} , \vec{DC} , \vec{DH})$

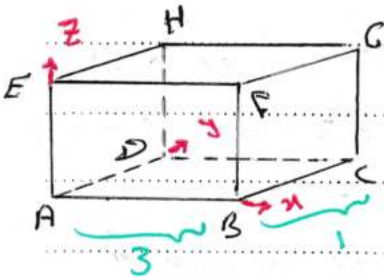
D(0,0,0) A(1,0,0)

B(1,1,0) C(0,1,0)

E(1,0,1) H(0,0,1)

F(1,1,1) G(0,1,1)

متوازي مستطيلات .



$(A ; \frac{1}{3}\vec{AB} , \vec{AD} , \frac{1}{2}\vec{AE})$

A(0,0,0) B(3,0,0)

C(3,1,0) D(0,1,0)

E(0,0,2) F(3,0,2)

H(0,1,2) G(3,1,2)

رابعاً : معادلة مستو $(P : ax + by + cz + d = 0)$

$a,b,c,d \in \mathbb{R}$ لإيجاد معادلة مستو يلزمنا ناظم $\vec{n}(a,b,c)$ ونقطة $A(x_0,y_0,z_0)$

طرائق ايجاد معادلة مستو ..

- نقطة وناظم $A(x_0,y_0,z_0)$ $\vec{n}(a,b,c)$
- نقطة وشعاعي توجيه غير متوازيين فقط
- ثلاث نقاط ليست كلها على استقامة واحدة
- معادلة مستو Q مار بنقطتين والعامد على مستو P
- معادلة مستو عمودي على مستويين متقاطعين
- معادلة مستو محوري لقطعة مستقيمة
- معادلة المستوي بدلالة مستقيمين متقاطعين

حالة خاصة : معادلة مستو يقطع محاور الاحداثيات الثلاث .

مثال : جد معادلة المستوي المار بالنقاط A(1,0,0) B(0,2,0) C(0,0,3)

معادلة مستو مار بالنقاط A(a,0,0) B(0,b,0) C(0,0,c)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \quad \times 6$$

$$6x + 3y + 2z - 6 = 0$$

ويمكن حلها بطرق مختلفة ولكن هذه الطريقة أسرع ..

مثال دورة

$$L': \begin{cases} x = 4 - 5\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \qquad L: \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

اثبت ان L , L' متقاطعان في نقطة يطلب تعيين احداثياتها

اوجد معادلة المستوي المحدد بالمستقيمين L , L'.

الحل:

$\vec{u_1}(-5,-2,2)$, $\vec{u_2}(0,-1,-2)$ ، $\frac{-2}{-1} \neq \frac{2}{-2}$

⇐ المستقيمان متقاطعان أو متخالفان.

بالمطابقة:

$4-5\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = 1$

$3-2\lambda = 1-t \Rightarrow t = 0$

$-1+2\lambda = 1-2t$

نلاحظ أن $\lambda = 1$, $t = 0$ تحققان (3)

⇐ المستقيمان متقاطعان ولإيجاد نقطة التقاطع نعوض $t=0$ في جملة مستقيم:

$x = -1$, $y = 1$, $z = 1$ ، $I(-1,1,1)$ نقطة التقاطع.

لإيجاد معادلة المستوي الذي يمر بنقطة I ومستوي توجيه يرتبطان خطياً...

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n}\cdot\vec{u_1} = 0 \Rightarrow -5a - 2b + 2c = 0$ —(1)

$\vec{n}\cdot\vec{u_2} = 0 \Rightarrow -b - 2c = 0$ —(2)

نفرض $b = 2 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow a = \frac{-6}{5}$

$\vec{n}\left(\frac{-6}{5}, 2, -1\right) = (-6, 10, -5)$

ومنه معادلة المستوي

$-6x + 10y - 5z + d = 0$

نعوض I ⇐ $d = -11$

$P: -6x + 10y - 5z - 11 = 0$

دراسة وضع مستويين:

$P: ax + by + cz + d = 0$

$Q: a'x + b'y + c'z + d' = 0$

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$ ⇐ المستويان منطبقان

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'}$ ⇐ المستويان متوازيان

$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ ⇐ المستويان متقاطعان

إذا كان $aa' + bb' + cc' = 0$ ⇐ المستويان متعامدان

تمرين:

$P: x + y + z + 1 = 0$

$Q: x + y + z - 2 = 0$

احسب البعد بين P , Q

أولاً يجب أن يكون المستويان متوازيان

$\vec{n_P}(1,1,1)$, $\vec{n_Q}(1,1,1)$ مرتبطان خطياً ⇐ المستويان متوازيان

ثانياً: نختار نقطة من المستوي P وذلك بفرض $x = y = 0$ ومنه $z = -1$

ثم نحسب بعد النقطة $(0,0,-1)$ عن Q

$$dist(A,Q) = \frac{|0+0-1-2|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

وهو البعد بين المستويين

معادلات مستقيم

سادساً: (x,y) في الهندسة المستوية

- الشكل العام: $ax+by+c=0$
- الشكل المختزل: $y=ax+b$
- معادلة مستقيم مار بالنقطة (x_0,y_0) وميله m معلوم: $y-y_0=m(x-x_0)$
- المستقيم d_1 ميله m_1 والمستقيم d_2 ميله m_2:
  $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_1=m_2$
  $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 \times m_2=-1$
- ميل مستقيم مار بنقطتين: $m_{AB}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

في الهندسة الفراغية (x,y,z)

معادلات وسيطية

يلزم نقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ من مستقيم

توجيه $\vec{u}(a,b,c)$.

$$x=x_0+at$$
$$y=y_0+bt \qquad t\in$$
$$z=z_0+ct$$

- $\mathbb{R}$ مستقيم
- $[0,1]$ قطعة مستقيمة
- $[0,+\infty[$ نصف مستقيم

طرائق إيجاد المعادلات الوسيطية

- نقطة وشعاع توجيه
- نقطتين A, B: $\vec{u}=\vec{AB}$
- مستويين (الفصل المشترك)

سابعاً: دراسة وضع مستقيمين (فراغياً)

نوجد $\vec{u_1}$، $\vec{u_2}$ ونميز حالتين

- مرتبطان خطياً: فالمستقيمان متقاطعان في مستوٍ واحد ومتوازيان
- غير مرتبطان خطياً: فالمستقيمان متخالفان (لا يقعان في مستوٍ واحد) أو متقاطعان (يقعان في مستوٍ واحد)

ثامناً: دراسة وضع مستقيم مع مستوٍ

نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم في معادلة المستوي فنحصل على المعادلة بالشكل $at=b$

- $a\in\mathbb{R}^*, b\in\mathbb{R}$: فالمستقيم يشترك مع المستوي بنقطة واحدة فقط ولإيجاد إحداثيات هذه النقطة نعوض قيمة t في المعادلات الوسيطية.
- $a=b=0$: للمعادلة عدد لانهائي من الحلول فالمستقيم محتوى في المستوي.
- $a=0, b\neq 0$: المعادلة مستحيلة الحل فالمستقيم لا يشترك مع المستوي بأية نقطة فهما متوازيان.

بحث ثانٍ

معادلة الكرة..

الشكل النموذجي

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

مركزها $\Omega(x_0,y_0,z_0)$

ونصف قطرها R

ونستخدم لإيجاد معادلة الكرة..

* وضع مستوٍ مع كرة

نحسب بعد مركز الكرة عن المستوي (dist)

ونميز الحالات الآتية..

1) $dist > R$ المستوي خارج الكرة

2) $dist = R$ المستوي يمس الكرة

3) $dist < R$ المستوي يقطع الكرة

محدداً عليها دائرة نصف قطرها (r)

نعطى بالعلاقة $r^2=R^2-dist^2$

وتسمى الدائرة عظمى إذا كانت $R=r$

* جد معادلة الكرة التي تمثل فيها النقطتين A ، B نقطتي قطر بحيث

$A(1,2,-1)$ $B(1,0,-3)$

مركز الكرة هو منتصف $[AB]$

$\Omega(\frac{1+1}{2},\frac{2+0}{2},\frac{-1-3}{2})$

$\Omega(1,1,-2)$

$AB=2R=\sqrt{0+4+4}=\sqrt{8}$

$2R=2\sqrt{2} \Rightarrow R=\sqrt{2}$

ومنه معادلة الكرة

$(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=2$

الشكل العام

$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

مركزها $\Omega(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2})$

$R^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}-d$

موجب: كرة

معدوم: نقطة

سالب: مجموعة خالية

ماذا تمثل مجموعة النقاط

$x^2+y^2+z^2-2x+4y-4=0$

$a=-2$ $b=4$ $c=0$ $d=-4$

$\Omega(1,-2,0)$

$R^2=(1)^2+(-2)^2+0+4=9$

ومنه هي معادلة كرة مركزها Ω

ونصف قطرها R.

$x^2+y^2+z^2+4x-2y+4z+9=0$

$a=4$ $b=-2$ $c=4$ $d=9$

$\Omega(-2,1,-2)$

$R^2=4+1+4-9=0$

تمثل نقطة هي Ω.

$x^2+y^2+z^2-2x+4y+8=0$

$a=-2$ $b=4$ $c=0$ $d=8$

$\Omega(1,-2,0)$

$R^2=1+4+0-8$

$=-3<0$

مجموعة النقاط تمثل مجموعة خالية.

عاشراً

معادلة الاسطوانة ...

محورها ox $(\vec{i})$

$y^2+z^2=R^2$; $x_{سفلي} \le x \le x_{علوي}$

$h = x_{علوية} - x_{سفلية}$

محورها oy $(\vec{j})$

$x^2+z^2=R^2$ * $y_{سفلي} \le y \le y_{علوية}$

$h = y_{علوية} - y_{سفلية}$

محورها oz $(\vec{k})$

$x^2+y^2=R^2$ * $z_{سفلية} \le z \le z_{علوية}$

$h = z_{علوية} - z_{سفلية}$

وكي تقع النقطة على الاسطوانة يجب أن تحقق المعادلة والشرط معاً.

وإذا لم يتحقق أحدهما فإن النقطة لا تقع على الاسطوانة (كذلك المخروط)

معادلة المخروط

المحور ox $(\vec{i})$

$y^2+z^2=\frac{R^2}{h^2}x^2$; $x_{سفلية} \le x \le x_{علوية}$

$h = x_{علوية} - x_{سفلية}$

المحور oy $(\vec{j})$

$x^2+z^2=\frac{R^2}{h^2}y^2$ * $y_{سفلي} \le y \le y_{علوية}$

$h = y_{علوية} - y_{سفلية}$

المحور oz $(\vec{k})$

$x^2+y^2=\frac{R^2}{h^2}z^2$ * $z_{سفلية} \le z \le z_{علوية}$

$h = z_{علوية} - z_{سفلية}$

جد معادلة الاسطوانة التي محورها (ox) ومركزي قاعدتيها A و B حيث

$A(2,0,0)$ و $B(5,0,0)$ ونصف قطر قاعدتها $R=\sqrt{3}$

$y^2+z^2=R^2$ ، $x_A \le x \le x_B$ $\iff$ $y^2+z^2=3$ ، $2 \le x \le 5$

بيّن أن النقاط التالية تقع على الاسطوانة $C(-1,0,\sqrt{3})$ ، $D(3,1,2)$ ، $E(3,\sqrt{3},0)$

$C: 0+3=3$ محقق و $2 \le -1 \le 5$ غير محقق

ومنه C تحقق المعادلة لا تحقق الشرط إذن C لا تقع على الاسطوانة

$D: 1+4 \ne 3$ ، $D \notin$ الاسطوانة ، $E: 3+0=3$ محقق ، $2 \le 3 \le 5$ محقق

ومنه $E \in$ الاسطوانة

بعد نقطة

حادي عشر!

عن مستقيم (x,y)

$d: ax+by+c=0$

$A(x_0,y_0)$

$$dist(A,d)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

عن مستقيم (x,y,z)

1) نكتب المعادلات الوسيطية لمستقيم في الفراغ إن لم تكن موجودة

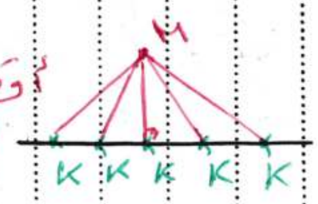
2) نختار نقطة K من المستقيم تحقق إحداثياتها المعادلات الوسيطية لـ d

3) نحسب المسافة بين M و K ونكتب ما تحت الجذر بالصيغة القانونية (الشكل المربع الكامل)

$$MK=\sqrt{a(t-b)^2+c}$$

4) نختار أقصر مسافة ومنه يكون $a(t-b)^2=0 \Rightarrow t=b$

ومنه $MK=\sqrt{c}$ البعد M عن المستقيم



أقصر المسافات العمود

عن فصل مشترك

المستويات متقاطعة وغير متعامدة

1) نوجد المعادلات الوسيطية للفصل المشترك من خلال حل المشترك لجملة المعادلتين P و Q

2) نتابع الحل بنفس الطريقة لبعد نقطة عن مستقيم في الفراغ (x,y,z).

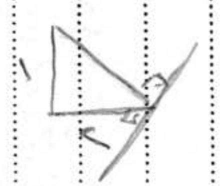
المستويات متقاطعة ومتعامدة

1) نحسب البعد النقطة M عن P

2) نحسب البعد النقطة M عن Q

3) ومنه نحسب من مبرهنة فيثاغورث وبالاعتماد على نظرية الأعمدة الثلاثة يكون لدينا

$$d^2=d_1^2+d_2^2$$



عن مستوٍ

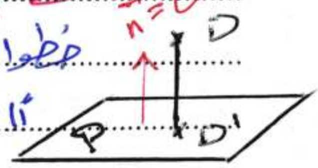
$P: ax+by+cz+d=0$

$A(x_0,y_0,z_0)$

$$dist(A,P)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$dist=0$ أي أن النقطة تقع في المستوي.

اثنا عشر: إيجاد إحداثيات D' المسقط القائم لـ D على المستوي P.



خطوات الحل ...

1) نوجد معادلة المستوي إن لم تكن معطاة.

2) نوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم DD' المار بالنقطة D والذي يقبل ناظم المستوي شعاع توجيه له.

3) نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم DD' في معادلة المستوي فنحصل على قيمة t نعوضها في المعادلات الوسيطية فنحصل على إحداثيات D'.

ثلاثة عشر: حل جملة ثلاث معادلات خطية بثلاث مجاهيل (غاوس)

(دراسة الوضع النسبي لثلاث مستويات).

خطوات غاوص

1) نحذف x من المعادلتين الثانية والثالثة.

2) نحذف y من المعادلة الثالثة.

3) نحصل على جملة مدرجة ثلاث مجاهيل - مجهولين - مجهول ثم نوجد قيمة z من المعادلة الثالثة.

* للجملة حل وحيد: المستويات الثلاث متقاطعة بنقطة واحدة.

* للجملة عدد لانهائي من الحلول: المستويات الثلاث تشترك بفصل مشترك

(معادلتين بثلاث مجاهيل)

* الجملة مستحيلة الحل: المستويات الثلاث لا تشترك مع بعضهم البعض بأي نقطة.

$P_1: x+y+z=3 \quad L_1$

$P_2: 2x+y-z=2 \quad L_2$

$P_3: 3x-y-z=1 \quad L_3$

$-2L_1+L_2 \quad * \quad -3L_1+L_3$

$x+y+z=3 \quad L_1$

$-y-3z=-4 \quad L_2'$

$-4y-4z=-8 \quad L_3'$

$-4L_2'+L_3'$

$x+y+z=3 \quad (1)$

$-y-3z=-4 \quad (2)$

$8z=8 \quad (3)$

∴ المستويات الثلاث تشترك بنقطة

$z=1$ من (3)

$y=1$ بالتعويض في (2)

$x=1$ بالتعويض في (1)

ومنه $(1,1,1)$ نقطة تقاطع المستويات الثلاث

نفضل أن يكون أمثال x في المعادلة الأولى (1)

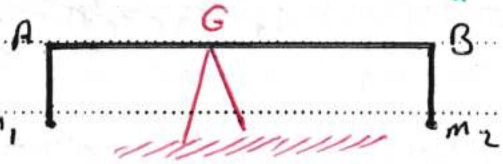
لذلك نقوم بتبديل المعادلات

$L_2 \leftrightarrow L_1$

مركز الأبعاد المتناسبة ...

مركز الأبعاد المتناسبة أي مركز التوازن .

فيزيائياً : قانون ارخميدس في التوازن



كي تتوازن المطرقة بالنقطة G يجب ان يتحقق قانون ارخميدس

$$m_1 \times AG = m_2 \times GB$$

أي كي تتوازن المطرقة يجب ان يكون هنالك تناسب بين المسافة والكتلة المعلقة .

رياضياً : $m_1 = \alpha \qquad m_2 = \beta$

$$\alpha AG = \beta GB$$

$$\alpha \vec{AG} - \beta \vec{GB} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\alpha \vec{AG} + \beta \vec{BG} = \vec{0}$$

العلاقة الشعاعية لمركز الأبعاد المتناسبة

ملاحظة : الشعاعين الأول ينتهي بـ G والثاني يبدأ بـ G

تعريف : G مركز أبعاد متناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,\alpha)(B,\beta)$ إذا وفقط إذا تحقق الشرطان

1) $\alpha \vec{AG} + \beta \vec{BG} = \vec{0}$

2) $\alpha + \beta \neq 0$

$2\vec{AG} + 3\vec{BG} = \vec{0} \qquad \alpha = 2 \quad \beta = 3$

$2\vec{AG} + 3\vec{GB} = \vec{0} \qquad \alpha = 2 \quad \beta = -3$

ثانياً : تعيين موضع مركز الأبعاد

G م.أ.م لـ $(A,\alpha)(B,\beta)$

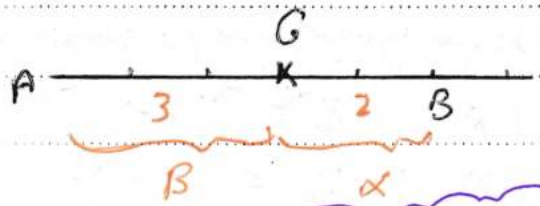
1) $\vec{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{AB}$

$\vec{BG} = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\vec{BA}$

مثال : عين موقع G كي تكون مركز أبعاد متناسبة للنقطتين

1) $(A,2)(B,3)$

$$\vec{AG} = \frac{3}{5}\vec{AB}$$

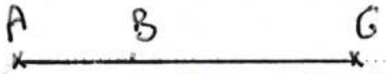


- بداية العد دائماً
- التقسيم على المسافات

2) $(A,2)(B,-3)$

$$\vec{AG} = \frac{-3}{-1}\vec{AB}$$

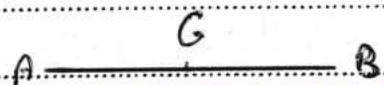
$$\vec{AG} = 3\vec{AB}$$



- إذا كانت التثقيلات من اشارة واحدة للنقطتين كان مركز الأبعاد داخل النقطتين .
- إذا كانت التثقيلات من اشارتين مختلفتين كان مركز الأبعاد خارج النقطتين

3) $(A,2)(B,2)$

$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{4}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



إذا كانت التثقيلات متساوية لنقطتين كان مركز الأبعاد المتناسبة منتصف

G م.أ.م لـ A , B كان G , A , B على استقامة واحدة

4) $(A,2)(B,-2)$

لا حل له وذلك لأن مجموع التثقيلات معدوم

ثانياً : مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط

تعريف : G م.أ.م لـ $(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)$

إذا وفقط إذا تحقق الشرطان

1) $\alpha\overrightarrow{AG} + \beta\overrightarrow{BG} + \gamma\overrightarrow{CG} = \vec{0}$

2) $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

G م.أ.م لـ $(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)$ **

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{BA} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{CG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{CA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{CB}$$

G م.أ.م لـ A , B , C أي G , A , B , C في مستوٍ واحد

G م.أ.م لثلاث نقاط متساوية التثقيلات كان G مركز ثقل المثلث ABC

ثالثاً : الصفة التجميعية :

G م.أ.م لـ $(A,\alpha)(B,\beta)$ فإن تثقيل G هو $\alpha+\beta$

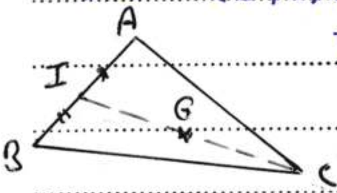
عيّن موضع G م.أ.م لـ $(A,1)(B,1)(C,2)$

لتكن I م.أ.م لـ $(A,1)(B,1)$

أي I في منتصف $[AB]$ ووزنه 2

G م.أ.م لـ $(I,2)(C,2)$ أي

G في منتصف IC



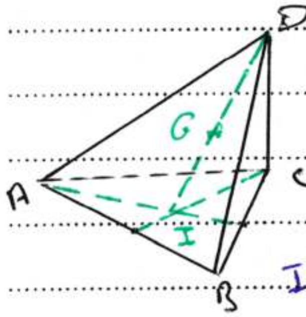
G م.أ.م لـ $(A,1)(B,1)(C,1)(D,3)$

لتكن I م.أ.م لـ $(A,1)(B,1)(C,1)$

أي I مركز ثقل المثلث ABC ووزنه 3

G م.أ.م لـ $(I,3)(D,3)$

أي G في منتصف ID



إذا ضربنا أو قسمنا التثقيلات كلها بعدد واحد مغاير للصفر لا يتغير شيء

11

G م.أ.م لـ $(A,\alpha)(B,\beta) \Rightarrow$ G م.أ.م لـ $(A,k\alpha)(B,k\beta)$

رابعاً : ماذا تمثل مجموعة النقط

لتكن G م.أ.م لـ $(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)$

ولتكن M نقطة ما من الفراغ :

$$\alpha\,\overrightarrow{MA}+\beta\,\overrightarrow{MB}+\gamma\,\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\,\overrightarrow{MG}$$

الحالات لمجموعة النقط

1) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

سطح كرة قطرها AB .

2) $MA = MB$

مستوي محوري للقطعة [AB] .

3) $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\|$

مستوي محوري للقطعة [AB] .

4) $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$

كرة مركزها A و $R=\|\overrightarrow{BC}\|$

5) $\|\overrightarrow{MA}\| = a\,\|\overrightarrow{MB}\|$ $\quad a\neq 1,\ a\neq 0$

كرة .

6) $\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

مستوي محوري للقطعة [AB]

I منتصف [AB]

خامساً : احداثيات مركز الأبعاد .

G م.أ.م لـ $(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)$

اذن

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

الأعداد العقدية

أولاً: الشكل الجبري

$Z = x + iy$

$x : Re$ القسم الحقيقي .

$y : Im$ القسم التخيلي .

ويمثل العدد العقدي بنقطة $M(x,y)$

مرافق عدد عقدي .

$Z = x + iy$

$\bar{Z} = x - iy$

قواعد المرافق ..

1) Z حقيقي ← $y = 0$ ، $\bar{Z} = Z$

2) Z تخيلي بحت ← $x = 0$ ، $\bar{Z} = -Z$

3) $Z \cdot \bar{Z} = x^2 + y^2$

4) $Z + \bar{Z} = 2Re$

$Z - \bar{Z} = 2i\,Im$

طويلة عدد عقدي

$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

قواعد

1) $|Z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{Z \cdot \bar{Z}}$

$|Z|^2 = Z \cdot \bar{Z}$

2) إذا كان $|Z| = 1 \iff \bar{Z} = \frac{1}{Z}$

3) للتخلص من i الموجودة في المقام نضرب بمرافق المقام .

ثانياً: الشكل المثلثي

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$x = r\cos\theta$ $\cos\theta = \frac{x}{r}$

$y = r\sin\theta$ $\sin\theta = \frac{y}{r}$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Z ← ربع أول θ

← ربع ثاني $\pi - \theta$

← ربع ثالث $\pi + \theta$

← ربع رابع $-\theta$

ويتم معرفة الربع من خلال إشارة كل من x , y

قواعد

$Z_1 = [r_1, \theta_1]$ $Z_2 = [r_2, \theta_2]$

1) $Z_1 \cdot Z_2 = [r_1 \cdot r_2 , \theta_1 + \theta_2]$

2) $\frac{Z_1}{Z_2} = [\frac{r_1}{r_2} , \theta_1 - \theta_2]$

3) $Z_1^n = [r_1^n , n\theta_1]$ دوموافر

دوبر قلب

اول θ — ثاني $\pi-\theta$ — ثالث $\pi+\theta$ — رابع $-\theta$

مع قلب

اول $\frac{\pi}{2}-\theta$ — ثاني $\frac{\pi}{2}+\theta$ — ثالث $\frac{3\pi}{2}-\theta$ — رابع $\frac{3\pi}{2}+\theta$

اكتب بالشكل المثلثي ...

$$Z = -\cos x + i\sin x$$
$$= \cos(-x) + i\sin(-x)$$

لا يحتاج الى قلب

cos سالب ربع
sin موجب رابع

$$Z = -\cos x - i\sin x$$
$$= \cos(\pi+x) + i\sin(\pi+x)$$

لا يحتاج الى قلب

cos سالب ربع
sin سالب ثالث

$$Z = \sin x - i\cos x$$

يحتاج لقلب

$+\cos$
$-\sin$
ربع
رابع

$$= \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)$$

$$Z = -\sin x + i\cos x$$

$-\cos$ $+\sin$

مربع ثاني

$$Z = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$

ثالثاً: الشكل الأسي ...

$$Z = r \cdot e^{i\theta}$$

نستخرج θ ، r بنفس الأسلوب في الشكل المثلثي .

قواعد

$Z_1 = [r_1, \theta_1]$ $Z_2 = [r_2, \theta_2]$

$$Z_1 \cdot Z_2 = [r_1 \cdot r_2, \theta_1 + \theta_2]$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \left[\frac{r_1}{r_2}, \theta_1 - \theta_2\right]$$

$$Z_1^n = [r_1^n, n\theta]$$

دستورا أويلر ..

أ) $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \Leftrightarrow e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$

ثانياً) $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \Leftrightarrow e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$

أشكال سريعة ..

$$-1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi}$$

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$-i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$1 = e^{0i} \qquad e^{0i} = \cos 0 + i\sin 0$$

π كدرجي $= \pi$ — π كدرازي $= 0$

حل معادلات في $\mathbb{C}$

$$az^2 + bz + c = 0$$

$a, b, c \in \mathbb{C}$

$\Delta = b^2 - 4ac = \alpha + i\beta$

نفرض $\sqrt{\Delta} = x + iy$

ولنوجد x , y من خلال المعادلات:

$x^2 - y^2 = \alpha$ (1)

$x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ (2)

$2xy = \beta$ (3)

نجمع (1) مع (2) نحصل على قيمتين لـ x

نعوض في (2) نحصل على قيمتين لـ y

من خلال (3) نحدد الإشارات.

نختار قيمة واحدة لـ $\sqrt{\Delta}$ ثم نعوض

$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

مثال: $z^2 + (1+4i)z - 5 - i = 0$

$a = 1$ $\quad b = 1 + 4i$ $\quad c = -5 - i$

$\Delta = b^2 - 4ac = (1+4i)^2 - 4(-5-i)$

$= 1 + 8i - 16 + 20 + 4i = 5 + 12i$

نفرض $\sqrt{\Delta} = x + iy$

$x^2 - y^2 = 5$ (1)

$x^2 + y^2 = \sqrt{25 + 144} = 13$ (2)

$2xy = 12$ (3)

نجمع (1) مع (2): $2x^2 = 18$ $\quad x = \mp 3$

نعوض في (2): $y^2 = 4$ $\quad y = \mp 2$

$\sqrt{\Delta} = 3 + 2i$ $\quad \sqrt{\Delta} = -3 - 2i$

$z_1 = \frac{-1 - 4i - 3 - 2i}{2} = -2 - 3i$

$z_2 = \frac{-1 - 4i + 3 + 2i}{2} = 1 - i$

$a, b, c \in \mathbb{R}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

موجب: للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان

$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

معدوم: للمعادلة حل حقيقي وحيد

$z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$

سالب: للمعادلة حلان عقديان مترافقان

$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

$z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

ملاحظة هامة: لا يكون الحلول مترافقين إلا إذا كانت المعاملات (a, b, c) حقيقية من $\mathbb{R}$.

$az^2 + bz + c = 0$

$z_1 + z_2 = \frac{-b}{2a}$

$z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a}$

المعادلة من الدرجة الثانية التي جذراها z_1 , z_2 هي

$z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 \cdot z_2 = 0$

مثال: حل في $\mathbb{C}$

$z^2 + 2z + 3 = 0$

$a = 1$ $\quad b = 2$ $\quad c = 3$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 12 = -8 < 0$

للمعادلة حلان عقديان مترافقان

$-\Delta = 8$ $\quad \sqrt{-\Delta} = 2\sqrt{2}$

$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 2\sqrt{2}i}{2}$

$z_1 = -1 - \sqrt{2}i$

$z_2 = -1 + \sqrt{2}i$

0934131159 0956659541

مثال: أعط الشكل الأسي للعدد العقدي

$Z = 1 + e^{2i\theta} \qquad \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$Z = e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta} + e^{i\theta} \cdot e^{i\theta}$

$= e^{i\theta}\left(e^{-i\theta} + e^{i\theta}\right) = e^{i\theta}\, 2\cos\theta$

$= 2\cos\theta \; e^{i\theta}$

حسب اولير.

تمرين هام

1) حل المعادلة $Z^2 = 1 + i$

أي صيغة السؤال جد جذر التربيعي لـ $1+i$

نفرض $Z = x + iy$

$x^2 - y^2 = 1 \qquad 1$

$x^2 + y^2 = \sqrt{2} \qquad 2$

$2x \cdot y = 1 \qquad 3$

نجمع 1 و 2 $\Rightarrow 2x^2 = 1 + \sqrt{2}$

$x = \mp\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$

2 نعوض في $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + y^2 = \sqrt{2}$

$y^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \Rightarrow y = \mp\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$

من 3 الإشارات متماثلة

$Z_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\, i \qquad *$

$Z_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\, i \qquad **$

2) حل المعادلة $Z^2 = 1 + i$ بأسلوب ثاني واستنتج النسب المثلثية لـ $\frac{\pi}{8}$

نفرض $Z = r \cdot e^{i\theta} \Rightarrow Z^2 = r^2 \cdot e^{2\theta i}$

$* \quad 1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

نعوض في المعادلة

$r^2 e^{2\theta i} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

بالمطابقة

$r^2 = \sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt[4]{2}$

$2\theta = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \Rightarrow$

$\theta = \frac{\pi}{8} + \pi k$

نفرض $k = 0 \qquad \theta = \frac{\pi}{8}$

$Z_1 = \sqrt[4]{2}\, e^{\frac{\pi}{8} i}$

$= \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$

$= \sqrt[4]{2}\cos\frac{\pi}{8} + i\sqrt[4]{2}\sin\frac{\pi}{8} \qquad \text{(I)}$

$k = 1 \qquad \theta = \frac{9\pi}{8}$

$Z_2 = \sqrt[4]{2}\, e^{\frac{9\pi}{8} i}$

$= \sqrt[4]{2}\cos\frac{9\pi}{8} + i\sqrt[4]{2}\sin\frac{9\pi}{8} \qquad \text{(II)}$

بالمطابقة بين * و I

$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}}{\sqrt[4]{2}}$

$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}}{\sqrt[4]{2}}$

تطبيقات الأعداد العقدية

تطبيقات الأعداد العقدية ...

$Z_A = a$ $\quad Z_B = b$ $\quad Z_C = c$

قوانين

1) $Z_{\vec{AB}} = Z_B - Z_A = b - a$

$\vec{CD} = d - c$

2) $Z_I = \frac{a+b}{2}$ I منتصف AB

3) $Z_G = \frac{a+b+c}{3}$ G مركز ثقل مثلث

6) الكسر العقدي

$\frac{a-b}{a-c} =$
- حقيقي ← A, B, C على استقامة واحدة
- تخيلي بحت ← $AC \perp AB$

$\frac{a-b}{c-d} =$
- حقيقي ← $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$
- تخيلي بحت ← $\vec{AB} \perp \vec{CD}$

زاوية الكسر العقدي هي زاوية ناتج الكسر.

4) قياس زاوية موجهة

$(\vec{MA}, \vec{MB}) = \arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right)$

نوجد ناتج الكسر ثم نحسب زاوية الناتج.

5) الارتباط الخطي ...

1) $\vec{AB} = \lambda \vec{AC}$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$

A, B, C على استقامة واحدة

2) $\vec{AB} = \lambda \vec{CD}$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$

$\vec{AB} \parallel \vec{CD}$

3) $\vec{AB} = i \vec{AC}$

مثلث ABC قائم ومتساوي الساقين

$\vec{AB} = a i \vec{AC}$ $\quad a \neq 1$

مثلث ABC قائم غير متساوي الساقين

4) $\vec{AB} = a i \vec{CD}$ $\quad a \neq 0,\ a \neq 1$

$|\vec{AB}| = |a||\vec{CD}|$ $\quad CD \perp AB$

له قيمة مطلقة

* $\vec{AB} = i \vec{CD}$

$|\vec{CD}| = |\vec{AB}|$ ، $CD \perp AB$

المضلع الرباعي

متوازي أضلاع: فيه ضلعين متقابلين متساويين.

المستطيل: متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة ← قطراه متساويا الطول

المعين: متوازي أضلاع فيه ضلعين متجاورين متساويين ← قطراه متعامدان

شبه منحرف: فيه ضلعين متقابلين متوازيين وغير متساويين

المربع: مستطيل بعداه متساويا الطول ← معين فيه زاوية قائمة

التحويلات الهندسية

أ) الانسحاب T

$z' = z + \vec{w}$

z': صورة z وفق الانسحاب T.

$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ شعاع الانسحاب

٢) التحاكي H

$z' - w = k(z - w)$

z': صورة z وفق التحاكي H

w: مركز التحاكي

k: نسبة التحاكي

$|k| < 1$ تصغير

$|k| > 1$ تكبير

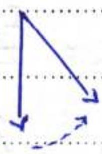
٣) الدوران R

$z' - w = e^{i\theta}(z - w)$

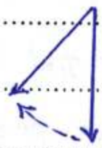
z': صورة z وفق دوران R

w: مركز الدوران

θ: زاوية الدوران.



عكس عقارب الساعة مباشر $+$



مع عقارب الساعة غير مباشر $-$

مثلث ABC قائم متساوي الساقين $\vec{AB} = e^{i\frac{\pi}{2}}\vec{AC}$

مثلث ABC متساوي الأضلاع $\vec{AB} = e^{i\frac{\pi}{3}}\vec{AC}$

٤) التناظر "S"

$z' = \bar{z}$

تناظر بالنسبة لـ ox.

$z' = -z$

تناظر بالنسبة للمبدأ.

$z' = 2z_A - z$

تناظر بالنسبة للنقطة A.

$z' = -\bar{z}$

تناظر بالنسبة لـ oy.

مجموعة نقط

أ) $|z-a| = |z-b|$

تمثل معادلة محور القطعة $[AB]$

ب) $|z-a| = b \qquad b \in \mathbb{R}^*_+$

تمثل معادلة دائرة مركزها a

$R = b$

ط: نفرض $z = x + iy$ ونتابع

ماذا تمثل مجموعة النقط $|z-2+3i| = \sqrt{2}$

$|x+iy-2+3i| = \sqrt{2}$

$|(x-2)+i(y+3)| = \sqrt{2}$

$\sqrt{(x-2)+i(y+3)} = \sqrt{2}$ نربع

$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 2$

معادلة دائرة مركزها $\Omega(2,-3)$

$R = \sqrt{2}$

التحليل التوافقي

طرائق العد

التباديل
مرتب (موصوف)
كلي
تباديل
عاملي — المبدأ الأساسي — التراتيب
جزئي
مع تكرار
المبدأ الأساسي بالعد
دون تكرار
المبدأ الأساسي بالعد — تراتيب P_n^r

التوافيق
غير مرتب (عشوائي)
توافيق $\binom{n}{r}$

التباديل

$E=\{a,b\}$ → (a,b) ، (b,a)

أوجد لها تبديلين

$E=\{a,b,c\}$

$a \to b \to c$ ، $a \to c \to b$ ؛ b ؛ c

نتفرع ثلاث ثم اثنان ثم واحد لذلك

عدد التباديل $3!=1\times2\times3$

قاعدة:

عدد التباديل لمجموعة تضم n عنصر مختلف يساوي $n!$ تبديلاً

$E=\{a,b,c,d\}$

عدد التباديل $=4!$

$E=\{a,a,b\}$

$\frac{3!}{2!}$ ← 3 عدد عناصر المجموعة ، 2 عدد مرات تكرار a

$E=\{a,a,b,b,c\}$

عدد التباديل $=\frac{5!}{2!\times2!}$

عدد مرات تكرار a ، عدد مرات تكرار b

$E=\{a,a,a,b,b,c\}$

$=\frac{6!}{3!\times2!}$

نريد بناء أربع خانات بالأعداد 9952 بكم طريقة

$\frac{4!}{2!}=\frac{24}{2}=12$

نريد ترتيب 6 كتب على رف بكم طريقة يمكننا ذلك.

$6!=6\times5\times4\times3\times2\times1$

كم كلمة مختلفة يمكننا تشكيلها انطلاقاً من حروف كلمة SYRIA

$5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

العاملي ...... (!)

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

$6! = 6 \times \underbrace{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{5!}$

$6! = 6 \times 5!$

$$\boxed{\begin{gathered} n! = n(n-1)(n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 \\ n! = n(n-1)! \\ (n+1)! = (n+1)\,n\,(n-1)! \\ 1! = 1 \qquad 0! = 1 \end{gathered}}$$

تطبيقات عاملية..

1) $2! + 3! = 5!$

2) $2! \times 3! = 6$

3) $(3!)^2 = 9!$

4) $\frac{8!}{2!} = 4!$

التراتيب P_n^r $\quad n \geq r$

$P_8^3 = 8 \times 7 \times 6$

$P_5^2 = 5 \times 4$

$P_n^n = n! \qquad P_n^1 = n$

صف فيه 8 طلاب نريد اختيار ثلاث طلاب لأدوار مسرحية على أن يكون الأول ملك والثاني وزير والثالث حاجباً، بكم طريقة يمكننا ذلك.

اختيار من صف ... جزئي مع دون تكرار

ط: $P_8^3 = 8 \times 7 \times 6 =$

ط: وحسب المبدأ الأساسي بالعد $8 \times 7 \times 6 =$

الملك $= 8$

الوزير $= 7$

حاجب $= 6$

$E = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

1) بكم طريقة يمكننا اختيار عدد مكون من منزلتين

مسألة ترتيب

ط: يمكن تكرار الاختيارات لأنه يمكن التكرار

وحسب المبدأ الأساسي بالعد $\times 5 = 2$

آحاد $= 5$

عشرات $=$

2) عدد مكون من منزلتين مختلفتين

ترتيب — دون تكرار

ط: وحسب المبدأ الأساسي بالعد $4 \times 5 = 20$

آحاد $= 5$

عشرات $= 4$

ط: $P_5^2 = 5 \times 4 = 20$

صف فيه 8 طلاب نريد اختيار ثلاث طلاب لأدوار متمايزة شكلاً، بكم طريقة يمكننا ذلك.

الاختيار جزئي لأنه حسب الصف ... (ترتيب)

الحل باستخدام التراتيب

التوافيق $\binom{n}{r}$ $r \le n$

1) $\binom{n}{r} = \dfrac{P_n^r}{r!}$ $\binom{8}{2} = \dfrac{8\times 7}{2\times 1}$

2) $\binom{n}{1} = n$ $\binom{n}{0} = 1$

$\binom{n}{n} = 1$

4) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ نستخدم اذا كانت r اكبر من نصف n

$\binom{12}{8} = \binom{12}{12-8} = \binom{12}{4}$

$\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$

5) $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$ نستخدم بالاثباتات او البراهين

6) $\binom{n}{r_1} = \binom{n}{r_2} \Rightarrow$ $r_1 = r_2$, $r_1 + r_2 = n$

مركز الصيانة الحاسوبية فيه 4 مهندسين و 5 عمال نريد تشكيل لجنة مكونة من مهندسين أحدهما كرئيس والآخر كنائب له و 3 عمال بكم طريقة يمكننا ذلك

نلاحظ ان المهندسين متميزين بوظيفتهم اما العمال فالاختيار عشوائي

$P_4^2 \times \binom{5}{3} = 4\times 3 \times \dfrac{5\times 4\times 3}{3\times 2\times 1}$

$= 12 \times 10 = 120$

كم كلمة من ثلاث حروف مختلفة يمكننا تكوينها انطلاقاً من حروف كلمة SYRIA

اولاً الاختيار مرتب (خانات)
ثانياً جزئي ثالثاً دون تكرار

الخانة الاولى = 5
الخانة الثانية = 4
الخانة الثالثة = 3

وحسب المبدأ الاساسي بالعد $5\times 4\times 3 = 60$

قاعدة هامة :

عدد المجموعات الجزئية من مجموعة تحوي n عنصراً $= 2^n$.

$E = \{1, 2, 3\}$

المجموعات الجزئية هي :

Φ , 1 , 2 , 3 , 12 , 13 , 23 , 123

كم طريقة ممكنة لترتيب حروف كلمة سلسبيل

عدد الطرق $= \dfrac{6!}{2!\times 2!}$

بكم طريقة مختلفة يمكنه توزيع 9 تفاحات متمايزة مختلفة على ثلاث طلاب بحيث يأخذ الاول 4 تفاحات والثاني تفاحتين والثالث 3 تفاحات

عدد الطرق $= \dfrac{9!}{4!\times 2!\times 3!}$

مدرسين 12 شخصاً، بكم طريقة يمكن انتخاب لجنتين كل منهما تتكون من 3 أشخاص بحيث لا يكون شخص واحد عضواً في اللجنتين معاً

$\binom{12}{3} \times \binom{9}{3} = 220 \times 84 = 18480$

بكم طريقة يمكن توزيع الجوائز الأولى والثانية والثالثة على المتسابقين في أولمبياد الرياضيات علماً بأن عدد المتسابقين عشرة

عدد الطرق $= P_{10}^{3} = 10 \times 9 \times 8 = 720$

بكم طريقة يمكن تشكيل مجلس مختلف إذا كان عدد المتقدمين (12) شخص في الحالتين

أ) دون شروط

ب) مدير ومعاون وأمين سر وعضوين

أ) عدد الطرق $= \binom{12}{5} = 792$

ب) $P_{12}^{3} \times \binom{9}{2}$

1) اختبار يتكون من 8 تمارين بكم طريقة يستطيع الطالب أن يختار 6 منها إذا كان عليه أن يجيب عن سؤالين على الأقل من بين الثلاث الأولى

2) احسب r: $\binom{7}{2r-5} = \binom{7}{r+3}$

أ) $\binom{3}{2}\binom{5}{4} + \binom{3}{3}\binom{5}{3}$

$= 3\times5 + 1\times10 = 25$

إما $2r-5 = r+3 \Rightarrow r = 8$

أو $2r-5+r+3 = 7 \Rightarrow r = 3$

نريد تأليف لجنة مكونة من مدير وثلاث رؤساء من مجموعة تضم خمس أشخاص بكم طريقة يمكننا اختيار هذه اللجنة علماً أنه في هذه المجموعة شخصين متنافسين لا يجتمعان في اللجنة ذاتها

$P_3^3 + P_2^1 \times P_3^2 \times 3$

$6 + 2\times6\times3 = 6+36 = 42$

لتكن المجموعة $S = \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$

أ) ما عدد الأعداد المكونة من ثلاث خانات مختلفة وأرقامها مأخوذة من S مثنى مثنى

ب) ما عدد الأعداد المؤلفة من ثلاث خانات مختلفة وأرقامها مأخوذة من S وكل عدد منها من مضاعفات 5 وأصغر من 500

أ) حسب المبدأ الأساسي بالعد:
الخانة الأولى = 6
الخانة الثانية = 5
الخانة الثالثة = 4
$6\times5\times4 =$

آحاد	عشرات	مئات
5		2 3

حسب المبدأ الأساسي بالعد:
آحاد = 1
مئات = 2
عشرات = 4
$1\times2\times4 = 8$

منشور ثنائي الحد

الشكل العام ...

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

اذا كان $(a-b)^n$ نفس المنشور لكن الاشارة تكون متناوبة انطلاقاً من الموجب

ويستخدم هذا الشكل اذا كانت صيغة السؤال اوجد منشور

الشكل المختزل ..

$$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

$r = 0, 1, 2, \dots, n$

$r=3$ الحد الرابع $r=5$ الحد السادس

ويستخدم هذا الشكل اذا كانت صيغة السؤال عن ما الحد الذي يحوي x^n ، ما امثال الحد x^n

عين الحد المستقل عن x في المنشور

$$\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^6$$

$n = 6 \quad a = x \quad b = \frac{1}{x^2}$

$$T_r = \binom{n}{r} x^{6-r} \left(\frac{1}{x^2}\right)^r$$

$$= \binom{6}{r} x^{6-r} \cdot x^{-2r}$$

$$= \binom{6}{r} x^{6-3r}$$

حد مستقل عن x اي

$$x^0 = x^{6-3r}$$

$6 - 3r = 0 \Rightarrow r = 2$

والحد المستقل عن x هو الحد الثالث

$$T_r = \binom{6}{2}$$

ما الشرط على العدد الطبيعي n كي يحوي منشور $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ على حد ثابت مستقل عن x

$$T_r = \binom{n}{r} (x^2)^{n-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r$$

$$= \binom{n}{r} x^{2n-2r} \cdot x^{-r}$$

$$= \binom{n}{r} x^{2n-3r}$$

حل مستقل عن x

$$x^0 = x^{2n-3r}$$

ومنه

$2n - 3r = 0 \Rightarrow r = \frac{2}{3} n$

r طبيعي

ومنه يجب ان تكون n من مضاعفات العدد 3

الاحتمالات

قوانين

1) $P(\Omega) = 1 \qquad P(\Phi) = 0$

$0 \leq P(A) \leq 1$

2) $P(A) + P(A') = 1$

$P(A') = 1 - P(A)$

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

4) $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$

$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

5) $P(A' \cap B') = P(A \cup B)'$

$= 1 - P(A \cup B)$

$P(A' \cup B') = P(A \cap B)'$

$= 1 - P(A \cap B)$

الاحتمال المشروط...

لا يقع حدث إلا بشرط وقوع حدث آخر

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

احتمال A علماً أن B قد وقع

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

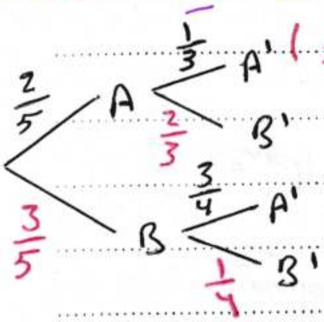
المخطط الشجري

يستخدم المخطط الشجري إذا كان هنالك في نص المسألة تفرع أو تتالي

- مدرسة فيها ذكور وإناث بلعيون ولا بلعيون (تفرع)
- مصنع فيه ماكينتين تنتج حبات سكاكر (تفرع)

صندوق يحوي ... كرة نسحب منها للصندوق ثم نسحب كرة (تتالي)

مثال



$P(A') = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{4}$

$P(B) = 1 - P(A) = \frac{3}{5}$

الاستقلال الاحتمالي لحدثين..

A و B مستقلان احتمالياً إذا وفقط إذا تحقق الشرط

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

إذا كان A و B مستقلان فإن

1) A و B' مستقلان

2) A' و B "

3) A' و B' "

مسائل الاستقلال هي:

مسائل الرمي + النجاح + السحب مع الإعادة

مثال: أطلق رام على هدف طلقتين فإذا كان احتمال إصابة الهدف بالطلقة الأولى $\frac{6}{10}$ واحتمال إصابة الهدف بالطلقة الثانية $\frac{8}{10}$

A: إصابة الهدف بالأولى

B: " " بالثانية

٢) ما احتمال اصابة الهدف بالطلقتين معاً

C: حدث " " " "

$P(C) = P(A\cap B)$

$= P(A)\times P(B) = \frac{6}{10}\times\frac{8}{10} = \frac{48}{100}$

٣) ما احتمال اصابة الهدف بالطلقة الاولى فقط

D: حدث " " بالاولى فقط

$P(D) = P(A\cap B') = P(A)\times P(B')$

$= \frac{6}{10}\times\frac{2}{10} = \frac{12}{100}$

٤) ما احتمال عدم اصابة الهدف

E: حدث " " " "

$P(E) = P(A'\cap B') = P(A')\times P(B')$

$= \frac{4}{10}\times\frac{2}{10} = \frac{8}{100}$

٤) ما احتمال اصابة الهدف

F: حدث " "

$P(F) = P(A\cap B') + P(A'\cap B) + P(A\cap B)$

$= \frac{12}{100} + \frac{32}{100} + \frac{48}{100} = \frac{92}{100}$

٥) اذا علمت ان الهدف اصيب فما احتمال اصابته بالطلقة الاولى.

شرطي

F: الهدف أصيب

G: بالطلقة الاولى

$P(G\mid F) = \frac{P(G\cap F)}{P(F)}$

$= \frac{P(A\cap B') + P(A\cap B)}{\frac{92}{100}}$

المتغير العشوائي ...

مثال: صندوق فيه 5 كرات 3 بيضاء و 2 سوداء نسحب بالتتابع ثلاث كرات على التتالي دون اعادة، لتكن X متغير عشوائي يدل على عدد الكرات البيضاء المسحوبة

2	3
B	W

دون اعادة.

$\Omega = \{\cancel{0}, 1, 2, 3\}$

التبرير: أخذ (0) لا يمكن لأن (0) تعني ثلاث كرات سوداء وهذا اكبر مما يوجد

(١) أي كرتين سود وكرة ب

(٢) أي كرة سوداء وكرتين ب

$P(X=1) = \frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times 3 = \frac{6}{20}$

$P(X=2) = \frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times 3 = \frac{12}{20}$

$P(X=3) = \frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3} = \frac{2}{20}$

X	1	2	3	Σ
P	$\frac{6}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{2}{20}$	1
X·P	$\frac{6}{20}$	$\frac{24}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{36}{20}$
X^2·P	$\frac{6}{20}$	$\frac{48}{20}$	$\frac{18}{20}$	$\frac{62}{20}$

$E(X) = \Sigma X\cdot P = \frac{36}{20}$ التوقع الرياضي

$E(X^2) = \Sigma X^2\cdot P = \frac{62}{20}$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ التباين

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ الانحراف المعياري

تجربة برنولي: ...

تستخدم اذا كان لدينا مسائل ذات تكرارات كبيرة او مسائل بسحب اعادة.

$$P(X=K)=\binom{n}{K}p^{K}q^{n-K}$$

n عدد الاختبارات

$K=0,1,2,3,\dots,n$ السؤال

p الاحتمال

$q=1-p$

في تجربة رمي حجر نرد خمس مرات ما احتمال ظهور وجه زوجياً

1) ثلاث مرات فقط

2) مرة على الأقل.

$n=5$

$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

$A=\{2,4,6\}$

$p=\frac{1}{2}\qquad q=\frac{1}{2}$

1) $K=3$

$P(X=3)=\binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=10\times\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=\frac{10}{64}$

2) $K=1,2,3,4,5$

$P(X\geq 1)=1-P(X=0)$

$=1-\binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}$

$=1-\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$

نكرر اربع مرات تجربة القاء قطعتي نقود متوازنتين ونسجل في كل مرة الوجهين الظاهرين احسب احتمال حدث A الحصول ثلاث مرات وجهين شعار

$\Omega=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$

$A=\{(H,H)\}$

$n=4\qquad p=\frac{1}{4}\qquad q=\frac{3}{4}$

$K=3$

$P(X=3)=\binom{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{3}\left(\frac{3}{4}\right)$

$=4\times\frac{1}{64}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{64}$

K	0	1	2	3	4
P					16/81

1) ما عدد الاختبارات في التجربة.

2) احسب E و σ.

عدد الاختبارات $n=4$

$P(X=4)=\binom{4}{4}p^{4}\cdot q^{4-4}$

$\frac{16}{81}=p^{4}\Rightarrow p=\frac{2}{3}$

$E=n\cdot p=4\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$

$V=n\cdot p\cdot q=4\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{8}{9}$

$\sigma=\sqrt{V}$

$V=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

فقط في برنولي

متتاليات ونهايتها

التمرين الأول:

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرَّفة وفق: $n \geq 0$; $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{2u_n+6} \end{cases}$.

1- أثبت أن التابع $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$ متزايدة تماماً واستنتج أن $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$ أياً تكن n.

2- أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة.

3- استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وأوجد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الثاني:

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرَّفة وفق: $n \geq 0$; $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$.

1- أثبت أن $0 \leq u_n \leq 2$ أياً تكن n.

2- أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً.

3- استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وأوجد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الثالث:

المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق:

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

1- أثبت بالتدريج أن $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

2- استنتج أن العدد (3) راجع على $(u_n)_{n\geq 0}$.

3- أثبت أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة.

نهايات واشتقاق

التمرين الأول:

a, b عددان حقيقيان. C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \frac{3x^3 + ax + b}{x^2 + 1}$$

أولاً: عين a, b لتكون $y = 4x + 3$ معادلة المماس لـ C في النقطة التي فاصلتها (0) منه.

ثانياً: بفرض $a = 4, b = 3$، أثبت أن $y = 3x$ مقارب مائل في جوار $\pm\infty$ وادرس الوضع النسبي لـ C مع Δ.

التمرين الثاني:

ليكن f التابع المعرف وفق: $f(x) = x\sqrt{x(2-x)}$، المطلوب:

1- تحقق أن f معرف على $[0,2]$.

2- ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر من اليمين وعند (2) من اليسار.

3- اكتب معادلة نصف المماس في نقطة منه فاصلتها $x = 0$.

النمرين الثالث:

أولاً: ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & ; x \neq 0 \\ m & ; x = 0 \end{cases}$، المطلوب:

1- جد نهاية f عند (0).

2- عين قيمة m كي يكون f مستمراً على $\mathbb{R}$.

ثانياً: ليكن f التابع المعرف وفق: $f(x) = \frac{x^3+4-4\cos x}{x^2}$

1- أوجد نهاية f عند (0) من اليمين.

2- أثبت أن $y = x$ مقارب لـ C في جوار $+\infty$.

التمرين الرابع:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$، المطلوب:

1- احسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

2- احسب $a = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$، $b = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - ax)$.

3- استنتج وجود مقارب مائل Δ لـ C في جوار $-\infty$.

التمرين الخامس:

نجد جانباً \جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$+$	
f	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\nearrow$	6

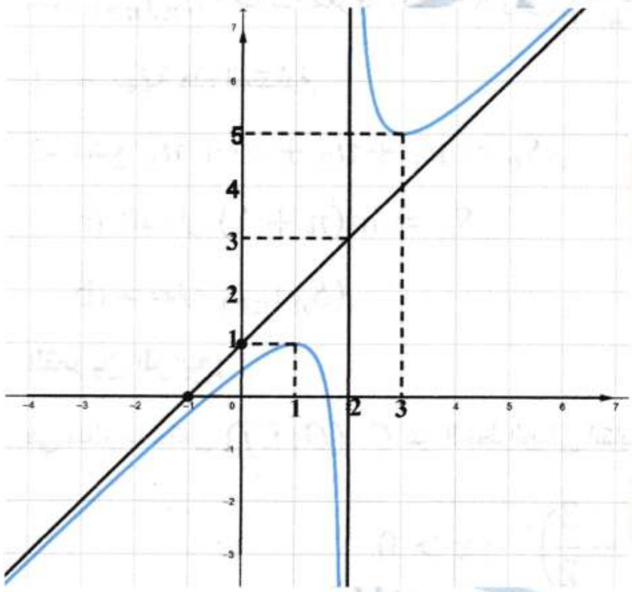
1- جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. واستنتج ما للتابع من مقاربات أفقية. وأوجد b: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x}$

2- أثبت أن $f(2)$ قيمة حدية صغرى.

3- هل $f(5)$ قيمة حدية للتابع؟ علل ذلك؟

4- اكتب مجموعة تعريف التابع g حيث: $g(x) = \ln(f(x))$.

التمرين السادس:



في الشكل المرسوم جانباً:

1- جد D_f , $f(D_f)$.

2- جد $\lim\limits_{f(x)\to+\infty} f(x)$.

3- ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$؟

4- اكتب معادلة المقارب المائل.

5- جد إحداثيات I مركز تناظر C_f.

التابع اللوغارتمي

التمرين الأول:

حل ما يلي:

1- $\ln 4 + \ln 2 = \ln(x-6) + \ln(x+1)$

2- $\ln(3x^2 - x) < \ln x + \ln 2$

التمرين الثاني:

أثبت أن: $\ln x \leqslant 2\left(\sqrt{x} - 1\right)$

التمرين الثالث:

لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ وفق: $u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$، المطلوب:

1- جد نهاية هذه المتتالية.

2- نضع $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

a) أثبت أن $S_n = \ln(n+1)$.

b) ما نهاية $(S_n)_{n\geq 1}$.

التمرين الرابع:

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$، C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $[0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right) & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

1- احسب $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$، واستنتج أن f اشتقاقي عند (0).

2- احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

التمرين الخامس:

جد الحل المشترك للمعادلتين:

$$\begin{cases} 2\ln x + \ln y = 2 \\ 3\ln x - \ln y = 3 \end{cases}$$

التمرين السادس:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة: $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$، المطلوب:

1- تحقق أن مجموعة تعريفه هي $]1,3[$.

2- أثبت أن $A(2,0)$ هي مركز تناظر لـ C.

3- احسب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف.

4- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

5- ارسم الخط C واستنتج الخط C_1 للتابع g المعطى بالعلاقة $g(x) = \ln\left(\frac{x+3}{-x-1}\right)$.

التابع الأسي

التمرين الأول:

جد نهاية التابع $f(x) = \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}$ عند (0).

التمرين الثاني:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = 4^x - 2^{x+2}$.

ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

التمرين الثالث:

حل المتراجحة: $4^x + 2^{x+1} - 3 \leq 0$

التمرين الرابع:

لتكن E المعادلة التفاضلية: $E: 2y' + 3y = x^2 + 1$.

عين كثير الحدود من الدرجة الثانية f يحقق المعادلة E.

التمرين الخامس:

لتكن E المعادلة التفاضلية: $E: y' + 3y = 2e^{-x}$. عين العدد (a) ليكون التابع $f(x) = ae^{-x}$ حلاً للمعادلة E.

التمرين السادس:

ادرس تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ بالصيغة: $f(x) = \exp\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ وارسم خطه البياني.

التمرين السابع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = (x-1)e^x$، المطلوب:

1- أثبت بطريقة الاستقراء الرياضي أن المشتق من الرتبة n يعطى بالعلاقة:

$$f^{(n)}(x) = (x+n-1)e^x$$

2- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها وجد ما للتابع من مقاربات.

3- ادرس بحسب قيم $m \in \mathbb{R}$ قابلية المعادلة $f(x) = m$ للحل.

4- ارسم كل مقارب وجدته وارسم C واستنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع $f_1(x) = xe^{x+1}$.

5- احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحوري الإحداثيات.

التكامل

التمرين الأول:

جد تابعاً أصلياً لكل من التوابع التالية:

1- $f(x) = x \cdot \ln(x)$

2- $f(x) = \frac{2x-1}{(x+2)^2}$

3- $f(x) = \sin x \cdot \cos^2 x \quad ; F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

4- $f(x) = \frac{\ln x - 1}{x^2}$

التمرين الثاني:

احسب التكامل $\int_0^2 f(x)\, dx$ حيث: $f(x) = \min(x^2, 2 - x)$

التمرين الثالث:

ليكن f التابع المعرَّف على $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ وفق: $f(x) = \frac{4x^2-5x+1}{x+3}$، المطلوب:

1- جد الأعداد c, b, a التي تحقق: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+3}$.

2- أثبت أن $y = ax + b$ مقارب مائل في جوار $\pm\infty$ وادرس وضعه النسبي مع C.

3- احسب $J = \int_2^0 f(x)\, dx$.

التمرين الرابع:

تيقن أنه في حالة $0 < x < a$ يكون: $1 \le \frac{1}{1+x} \le \frac{1}{1+a}$ واستنتج أن $\frac{a}{1+a} \le \ln(1+a) \le a$.

التمرين الخامس:

ليكن f التابع المعرف وفق: $f(x) = (2 - x)e^x$، المطلوب:

1- احسب مساحة السطح المحصور بين C, $x = 0, x = 2$.

2- ليكن $G = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$، عين c, b, a ليكون G تابع أصلي لـ $\left(f(x)\right)^2$ ثم استنتج الحجم v.

الأشعة

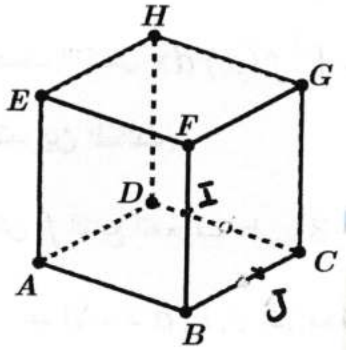
التمرين الأول:

ليكن لدينا النقاط التالية: $A(3,-1,1)\,,B(3,-3,-1)\,,\overrightarrow{u}(1,0,-2)\,,\vec{v}(2,1,-3)$ وليكن:

- d: المستقيم المار بـ A وشعاعه $\overrightarrow{u}$.
- d': المستقيم المار بـ B وشعاعه $\overrightarrow{v}$.

أثبت أن d', d متقاطعان وعين I نقطة تقاطعهما.

التمرين الثاني:



$ABCDEFGH$ مكعب، النقطتان J, I تحققان على التوالي العلاقتان
$\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}\,,\overrightarrow{DI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$.

أثبت أن المستقيم (HI) يوازي (EGJ) ثم جد معادلة المستوي EGJ.

التمرين الثالث:

إذا علمت أن $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\,,\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$، أثبت أن النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)\,,(B,3)\,,(C,1)\,,(D,2)$ تقع على $[EF]$ ثم عين النقطة G على $[EF]$.

التمرين الرابع:

جد مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق:

$$\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right\|$$

التمرين الخامس:

لتكن لدينا النقطتان $A(1,-1,2)\,,B(2,0,4)$، والمستوي $P: x-y+3z-4=0$، المطلوب:

1- جد معادلة للمستوي Q العمودي على P ويمر بالنقطتين B, A.

2- أثبت أن المستقيم (AB) يقطع المستوي R وعين C نقطة التقاطع بحيث:

$$R: 2x-3y+z-5=0$$

التمرين السادس:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط $C(1,5,5)$, $B(-1,0,-1)$, $A(2,5,3)$.

1- ليكن P المستوي الذي يقبل $\vec{u}(1,1,-2)$, $\vec{v}(3,-1,-1)$ شعاعين موجهين، أثبت أن المستقيم (AB) عمودي على المستوي P.

2- جد إحداثيات D' المسقط القائم لـ $D(-2,10,-\frac{1}{4})$ على المستوي ABC.

٣) هل تقع د على P
هل تقع د على (AB)

التمرين السابع:

في معلم متجانس، ليكن لدينا النقطة $A(2,1,2)$ والمستويين $P: x+y-2z-1=0$ ، $Q: x+y+z=0$ المطلوب:

1- أثبت أن Q, P متعامدان.

2- احسب بعد A عن كل من Q, P.

3- استنتج بعد النقطة A عن الفصل المشترك لـ Q, P.

4- جد معادلة المستوي R العمودي على كل من Q, P.

التمرين الثامن:

لتكن لدينا النقطتان $A(1,1,1)$, $B(0,-1,-1)$، المطلوب:

أعطِ معادلة للمجموعة المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق العلاقة:

a) $MA = 2MB$ b) $MA = MB$ c) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$

التمرين التاسع:

$\overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ، ولتكن I منتصف $[AD]$، J منتصف $[BC]$، G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2)$, $(B,1)$, $(C,1)$, $(D,2)$، المطلوب:

1- a) أثبت أن J, I, G تقع على استقامة واحدة.

b) أثبت أن L, K, G تقع على استقامة واحدة.

2- استنتج وقوع النقاط L, K, J, I في مستوٍ واحد.

الأعداد العقدية

التمرين الأول:

$$Z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \; , Z_2 = 1 - i$$

1- اكتب Z_1 و Z_2 , $\frac{Z_1}{Z_2}$ بالشكل المثلثي.

2- اكتب $\frac{Z_1}{Z_2}$ بالشكل الجبري.

3- استنتج النسب المثلثية لـ $\frac{\pi}{12}$.

4- أثبت أن $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{48}$ حقيقي.

التمرين الثاني:

اكتب بالشكل المثلثي كلاً من:

- $Z_1 = \left(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right)^6$
- $Z_2 = \left(\sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5}\right)^6$
- $Z_3 = -12e^{\frac{\pi}{4}i}$

التمرين الثالث:

حل في $\mathbb{C}$ كل من المعادلات التالية:

1- $2Z^2 - 6z + 5 = 0$

2- $Z^2 - 2(1+\sqrt{2})Z + 2(\sqrt{2}+2) = 0$

3- $Z^2 - 2\cos\theta\, Z + 1 = 0$

4- $Z^2 + (1+4i)Z - 5 - i = 0$

التمرين الرابع:

ليكن a عدداً عقدياً معطي، ولتكن ξ مجموعة الأعداد العقدية Z، بحيث: $a = \alpha + i\beta$ و $Z = x + iy$.

عين مجموعة النقط التي تحقق: $Z^2 - a^2 = \bar{Z}^2 - \bar{a}^2$.

تطبيقات العقدية

التمرين الأول:

ليكن لدينا النقاط $a=-1\,,b=2+i\sqrt{3}\,,c=2-i\sqrt{3}\,,d=3$، المطلوب:

1- عين النقاط D,C,B,A ثم احسب $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AB}$ واستنتج طبيعة المثلث ABC.

2- عين $\arg\frac{a-c}{d-c}$ واستنتج طبيعة المثلث DAC.

3- أثبت أن D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)\,,(B,2)\,,(C,2)$.

التمرين الثاني:

أولاً: حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $Z^2-2\sqrt{2}Z+4=0$

ثانياً: لدينا $Z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{2}\,,Z_B=\overline{Z_A}$ ، المطلوب:

1- اكتب $Z_B\,,Z_A$ بالشكل الأسي ثم بيّن أن $\left(\frac{2}{Z_B}\right)^{2018}$ تخيلي بحت.

2- لتكن C صورة B وفق تحاكٍ H مركزه ω حيث $\omega=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ونسبته (-3)، أوجد العدد العقدي c الممثل للنقطة C.

3- احسب Z_D صورة B وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$-.

ثالثاً:

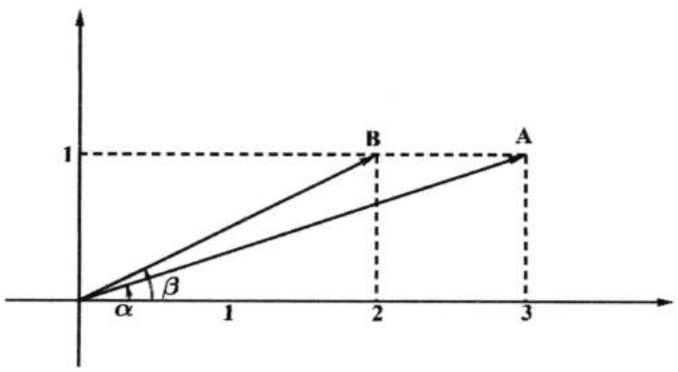
1- بيّن أن $\frac{Z_C-Z}{Z_D-Z_A}=-i$ ثم استنتج طبيعة المثلث ACD.

2- أوجد العدد العقدي لـ E بحيث يكون $ACED$ مربعاً.

التمرين الثالث:

1- اكتب Z_B,Z_A بالشكل الجبري والأسي.

2- احسب $Z_A\cdot Z_B$ بالشكل الجبري والأسي واستنتج $\alpha+\beta$.



التمرين الرابع:

لتكن الأعداد العقدية: $a = 1 + \frac{3}{4}i \, , b = 2 - \frac{5}{4}i \, , c = 3 + \frac{7}{4}i$، المطلوب:

1- وضع النقاط A, B, C في شكل. وما العلاقة التي تربط الأعداد العقدية الممثلة للشعاعين $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

2- استنتج أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.

3- احسب العدد العقدي $Z_{A'}$ ليكون الشكل $ABA'C$ مربعاً.

4- جد العدد العقدي الممثل لمركز الدائرة المارة برؤوس المربع $ABA'C$.

التمرين الخامس:

لدينا $u = \frac{Z+\omega}{1+Z\cdot\omega}$ و $|Z| = |\omega| = 1$ ، أثبت أن u عدد حقيقي.

تذكير:

$$Z_1 \cdot Z_2 = \frac{c}{a} \, , Z_1 + Z_2 = -\frac{b}{a}$$

التحليل التوافقي

التمرين الأول:

كود موبايل مكون من الأرقام 1 , 5 , 9 , 9، كم رمّازاً مختلفاً يمكن للشخص أن يكون من هذه الأرقام؟

التمرين الثاني:

يلتقي عشرة أصدقاء في حفل، يصافح كل منهم الأشخاص التسعة الآخرين مرة واحدة فقط، فكم عدد المصافحات التي جرت في الحفل؟ عمم النتيجة إلى حالة n حالة.

التمرين الثالث:

أثبت أن عدد أقطار مضلع محدب عدد رؤوسه n حيث $n \geq 4$ يعطى بالعلاقة $\frac{n(n-3)}{2}$.

التمرين الرابع:

احسب قيمة r التي تحقق: $\frac{1}{\binom{4}{r}} = \frac{1}{\binom{5}{r}} + \frac{1}{\binom{6}{r}}$

التمرين الخامس:

نريد تأليف لجنة مكونة من (مدير – نائب مدير – أمين سر) من مجموعة تضم خمسة أشخاص. بكم طريقة يمكن اختيار اللجنة هذه؟ علماً أنه في المجموعة شخصين متخاصمين لا يجتمعان في اللجنة ذاتها.

التمرين السادس:

لتكن لدينا المجموعة $s = \{2,3,5,6,7,9\}$، المطلوب:

1- ما عدد الأعداد المكونة من ثلاث خانات المختلفة مثنى مثنى؟

2- ما عدد الأعداد المؤلفة من ثلاث خانات مختلفة وأرقامها مأخوذة من s وكل منها من مضاعفات العدد 5 وأصغر من 500؟

الاحتمالات

التمرين الأول:

نتأمل صندوقين، يحتوي الأول على (3) كرات مرقّمة $1,2,3$ ويحوي الصندوق الثاني (4) كرات مرقّمة $5 , 4 , 3 , 2$، نسحب عشوائياً كرة من الصندوق الأول ثم نسحب كرة من الصندوق الثاني، المطلوب:

1- اكتب فضاء العينة المرتبط مع هذه الاختبار.

2- ليكن الحدث A: إحدى الكرتين المسحوبتين على الأقل تحمل الرقم (3)

الحدث B: مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين أكبر تماماً من (5)

هل B, A مستقلان احتمالياً؟ علل ذلك.

3- نعرف متغير عشوائي X يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين. اكتب مجموعة قيم X واكتب جدول قانونه الاحتمال ثم احسب توقعه الرياضي وتباينه.

التمرين الثاني:

صندوق يحتوي على ثلاث كرات حمراء وأربع كرات سوداء، نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات معاً.

وليكن الحدث A: الحصول على كرة حمراء على الأقل.

الحدث B: الحصول على كرتين سوداوين على الأقل.

1- احسب احتمال $A|B , B , A$.

2- إذا كان X متغير عشوائي يدل على الكرات الحمراء المسحوبة، احسب توقعه الرياضي وتباينه.

التمرين الثالث:

أطلق رامٍ على هدف طلقتين، فإذا كان احتمال إصابة الهدف بالطلقة الأولى $\frac{6}{10}$ وبالثانية $\frac{8}{10}$.

وليكن الحدث A: إصابة الهدف بالطلقة الأولى.

الحدث B: إصابة الهدف بالطلقة الثانية.

1- ما احتمال إصابة الهدف بالطلقتين معاً؟

2- ما احتمال إصابة الهدف بالطلقة الأولى فقط؟

3- ما احتمال عدم إصابة الهدف؟

4- ما احتمال إصابة الهدف؟

5- إذا علمت أن الهدف قد أصيب، فما احتمال أن يكون قد أصيب بالطلقة الأولى؟

اختبار الجزء الأول

أولاً: أجب عن خمسة فقط من الأسئلة الستة الآتية: (40 درجة)

السؤال الأول: حل المتراجحة: $e^{x} - 1 \leq 6e^{-x}$.

السؤال الثاني: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}^{*}$ وفق: $f(x) = x + \frac{E(x)}{x}$، المطلوب: أثبت أن المستقيم $y = x + 1$ مقارب مائل لـ C وادرس الوضع النسبي لـ Δ مع C.

السؤال الثالث: أوجد التابع الأصلي للتابع f بحيث: $f(x) = \ln x \; ; \; x \in]0, +\infty[$.

السؤال الرابع: ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = e^{x} \cdot \sin x$. أثبت أن f هو حل للمعادلة التفاضلية $y' - y = e^{x} \cos x$.

السؤال الخامس: لتكن المتتالية $u_n = 4n + 1$. أثبت أن المتتالية حسابية وعين أساسها واحسب

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{10}$$

السؤال السادس: تأمل جدول التغيرات:

x	0		$\frac{1}{e}$		1			$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	$\|\|$		$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-e$	$\searrow$ $-\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	0

1- جد D_f , $f(D_f)$.

2- دل على القيمة الحدية وبيّن نوعها.

3- جد مجموعة حلول المتراجحة $f(x) > 0$.

4- ارسم C من خلال هذا الجدول.

ثانياً: حل التمارين الثلاثة الآتية:

التمرين الأول: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بالصيغة: $u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots + \frac{n}{3^n}$

1- أثبت بالتدريج على n أن $n \leq 2^n$ أياً تكن n.

2- استنتج مما سبق عنصراً راجحاً على المتتالية u_n.

3- أهي متقاربة؟

التمرين الثاني: ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وفق الصيغة: $f(x) = \frac{1}{1-x}$. أثبت أن المشتق من المرتبة n يعطى بالصيغة: $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ حيث $x \neq 1$.

التمرين الثالث: أثبت أن حجم الكرة التي مركزها (O) ونصف قطرها (R) يعطى بالعلاقة: $v = \frac{4}{3}\pi R^3$.

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين:

المسألة الأولى: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق $f(x) = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$، المطلوب:

1- أوجد D_f وادرس تغيرات f.

2- أثبت أن المستقيم $d: y = x - \ln 2$ مقارب لـ C في جوار $\pm\infty$.

3- ادرس الوضع النسبي لـ C مع d.

4- أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد $\alpha \in]1,2[$.

5- ارسم C واستنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع $g(x) = x + \ln\left(2 - \frac{1}{x}\right)$.

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$، المطلوب:

1- a) بيّن أن التابع f فردي وادرس تغيراته وارسم C.

b) اكتب معادلة المماس d لـ C في المبدأ. وادرس الوضع النسبي لـ C مع d.

2- a) ليكن m عدداً حقيقياً. أثبت أن للمعادلة $f(x) = m$ حلاً وحيداً في $\mathbb{R}$ وليكن α هذا الحل.

b) أثبت أن المعادلة $f(x) = m$ تكافئ $e^{2x} - 2me^x - 1 = 0$ ثم استنتج أن $\alpha = \ln\left(m + \sqrt{m^2 + 1}\right)$

3- احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحوري الإحداثيات والمستقيم $x = 1$.

تمرين إضافي:

$$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} \; ; D_f = \mathbb{R}$$

1- أثبت أن المستقيم $\Delta: y = x + 1$ مقارب في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي لـ C مع Δ.

2- أثبت ان المستقيم $\Delta': y = x - 1$ مقا رب في جوار $-\infty$.

3- أثبت أن التابع f متزايد تماماً على $\mathbb{R}$.

اختبار الجزء الثاني

أولاً: أجب عن خمسة فقط من الأسئلة الستة الآتية: (40 درجة)

السؤال الأول: ليكن Z عدداً حقيقياً ما، وليكن ω عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد. أثبت أن $u = \frac{\omega z - z}{\omega i - i}$ تخيلي بحت.

السؤال الثاني: ما أمثال الحد x^2y في المنشور $\left(\frac{y^2}{x} + \frac{x}{y}\right)^8$؟

السؤال الثالث: اكتب بالشكل المثلثي العدد العقدي $Z = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$.

السؤال الرابع: صف مجموعة النقاط التي تحقق: $2 \le y \le 5$, $x^2 + z^2 = 16$.

السؤال الخامس: في إحدى مراكز الخدمة ثلاثة مهندسين وخمسة عمال. كم لجنة قوامها مهندس واحد وعاملان يمكن تشكيلها لمتابعة أعمال الخدمة.

السؤال السادس: إذا كان $P(B|A') = \frac{4}{5}$, $P(B|A) = \frac{1}{4}$, $P(A) = \frac{1}{3}$. احسب $P(B)$.

ثانياً: أجب عن ثلاثة تمارين من أربع تمارين الآتية:

التمرين الأول: يشتري محل للأدوات الكهربائية 400 مصباحاً من المصنع A و 200 مصباح من المصنع B.
إذا علمت أن نسبة المصابيح المعطوبة في إنتاج المصباح A هي 4% وفي إنتاج المصباح B هي 2% .
نسحب عشوائياً مصباحاً:

1- ما احتمال أن يكون المصباح معطوباً؟

2- إذا علمت أن المصباح معطوب، ما احتمال أن يكون من B؟

التمرين الثاني: لتكن لدينا النقاط التالية: $A(1,0,-1)$, $B(2,2,3)$, $C(3,1,-2)$, $D(-4,2,1)$

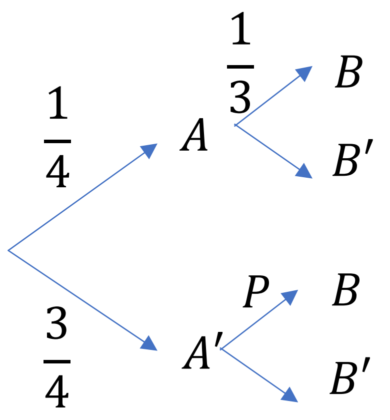
1- أثبت أن ABC قائم واحسب مساحته.

2- أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على (ABC) واستنتج معادلة (ABC).

3- احسب بعد النقطة D عن النقطة D عن ABC ثم احسب حجم رباعي الوجوه $DABC$.

التمرين الثالث: ليكن لدينا المخطط الشجري المجاور:

عين قيمة P ليكون الحدثان A, B مستقلان.



التمرين الرابع: في معلم $\left(O; \frac{1}{a}A, \frac{1}{b}B, \frac{1}{c}C\right)$ جد معادلة المستوي ABC

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين:

المسألة الأولى: في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن لدينا النقاط $A(1,1,1)\,,B(3,2,0)\,,C(1,-1,1)$ وليكن P المستوي المار بـ B ويقبل $\overrightarrow{AB}$ ناظماً له، و Q المستوي الذي معادلته $Q: x-y+2z+4=0$ ولتكن s الكرة التي مركزها A ونصف قطرها AB، المطلوب:

1- جد معادلة المستوي P.

2- جد معادلة الكرة.

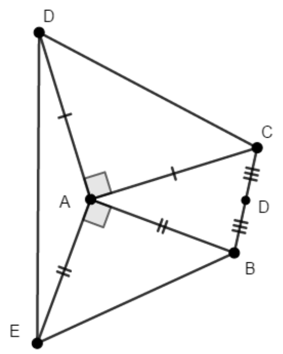
3- جد المسقط القائم للنقطة A على Q..

4- جد المعادلات الوسيطية للفصل المشترك للمستويين Q,P.

5- جد المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$.

6- ماذا تمثل مجموعة النقاط $x^2+y^2+z^2-2x+4y+5=0$.

7- جد إحداثيات النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)\,,(B,2)\,,(C,-1)$.



المسألة الثانية: نتأمل في المستوي مثلثاً ABC مباشر التوجيه كيفياً، لتكن M منتصف $[BC]$ وليكن $ACD\,,AEB$ مثلثين قائمين في A متساويي الساقين مباشرين. نختار معلماً مباشراً مبدؤه النقطة A ونرمز بالرمزين b,c إلى العددين العقديين للنقطتين B,C .

1- احسب بدلالة c,b الأعداد العقدية m,d,e الممثلة للنقط M,D,E

2- احسب $\frac{d-e}{m-a}$ ثم استنتج أن AM ارتفاع في المثلث AED وأن $ED=2AM$.

3- بفرض A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,1)\,,(C,1)\,,(E,3)\,,(D,2)$. احسب $\frac{c}{d}$ ثم استنتج قياس الزاوية BAC.

اختبار الجزء الأول ... النموذج الثاني ....

أولاً: أجب عن خمسة فقط من الأسئلة الستة التالية.

السؤال الأول: ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق

$$f(x)=\frac{1}{1-x}$$

عندئذٍ أثبت أن المشتق من المرتبة n بالصيغة

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \quad x\neq 1$$

السؤال الثاني: ليكن n عدد طبيعي

$$u_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

1) أوجد a و b من $\mathbb{R}$ تحقق

$$u_n=\frac{a}{2n-1}+\frac{b}{2n+1}$$

2) ليكن $S_n=u_0+u_1+u_2+\dots+u_n$ عبر عن S_n بدلالة n واستنتج نهاية المتتالية S_n.

السؤال الثالث: في معلم متجانس f , g

$f(x)=\ln(x+1)$ $\quad]-1,+\infty[$

$g(x)=\frac{x}{x+1}$ $\quad]-1,+\infty[$

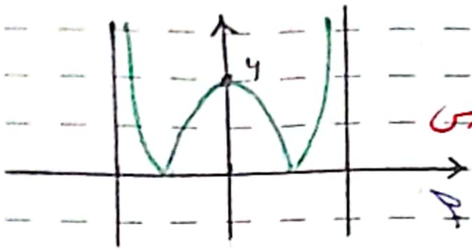
أثبت أن $f(x)\geq g(x)$ أياً كان x من I

السؤال الرابع: حل المعادلات التالية

$$e^{-2x}-7e^{-x}+6=0$$

السؤال الخامس: جد التابع الأصلي

$$f(x)=\frac{1}{\sin 2x}$$



السؤال السادس: تحدد جانباً الخط البياني للتابع f

1) جد D_f و $f(D_f)$

2) جد $f'(0)$ ، $f(0)$

3) $f([-2,2])$

4) اذكر ما للتابع من قيم حدية.

ثانياً: حل التمارين الثلاث التالية

التمرين الأول: ليكن f التابع المعرف على $]3,+\infty[$ وفق

$$f(x)=\frac{3x-1}{x-3}$$

1) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ واستنتج $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$

2) أوجد $\lim_{x\to+\infty} g(g(x))$ بدلالة

$g(g(x))$ بدلالة x

التمرين الثاني:

$x_0=3$

$x_{n+1}=\frac{1}{3}x_n-2$

$y_n=x_n+3$

1) a) أثبت أن المتتالية y_n هندسية

b) احسب y_n بدلالة n ثم x_n

2) $S_n=y_0+y_1+\dots+y_n$

$S'_n=x_0+x_1+\dots+x_n$

احسب كلاً من S_n و S'_n بدلالة n

ثم استنتج نهاية كل من S_n و S'_n

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

التمرين الثالث: ليكن C الخط البياني لـ f وفق $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f(x) = e^x + \ln|x|$

$g(x) = x e^x + 1$

1) ادرس تغيرات g واستنتج اشارة $\frac{g(x)}{x}$ على $\mathbb{R}^*$

2) ادرس تغيرات f وارسم C.

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين

المسألة الأولى: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ وفق

$f(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2}$

1) جد النهايات عند أطراف مجموعة التعريف وأول بيانياً نهاية حقيقية عند $x=-1$

2) جد معادلات المقارب الأفقي وادرس الوضع النسبي لـ C مع هذا المقارب

3) احسب f' ثم نظم جدولاً بتغيرات f محدداً ماله من قيم حدية.

4) جد معادلة المماس T لـ C في نقطة منه فاصلتها $x=-2$

5) ارسم كل ما وجدته وارسم T ثم C

6) احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيم $x=3$

المسألة الثانية.

ليكن C الخط البياني للتابع f المعطى بالعلاقة

$f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$

1) جد D_f

2) ادرس تغيرات f واستنتج ماله من مقاربات موازية لمحوري الاحداثيات

3) عيّن ما للمستقيم حديه حينئذٍ نوكد.

4) ارسم ما وجدته من مقاربات أفقية ثم ارسم C

5) احسب مساحة السطح المحصور بين C و $x'x$ والمستقيمين $x=\frac{1}{e}$ ، $x=\frac{1}{e^2}$

انتهى اختبار الجزء الأول

النموذج الثاني

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

السؤال الاول :

$f(x) = \frac{1}{1-x}$

$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

من أجل $n=1$

$f'(x) = \frac{1!}{(1-x)^{1+1}} = \frac{1}{(1-x)^2}$

نشتق التابع

$f'(x) = \frac{1-x-1(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$ محقق

الفرض : $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

الطلب : $f^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$

الاثبات : نشتق الفرض

$(f^{(n)}(x))' = \frac{-(n+1)(1-x)^{n}(-1)\,n!}{((1-x)^{n+1})^2}$

$f^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)n!\,(1-x)^{n}}{(1-x)^{2n+2}}$

$= \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$

والعلاقة تحقق من أجل $n+1$ فهي صحيحة.

السؤال الثاني :

$U_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$

$1 = 2an + a + 2nb - b$

$1 = (2a+2b)n + a - b$

بالمطابقة :

$2a + 2b = 0 \Rightarrow a + b = 0$

$+\ a - b = 1$

$2a = 1$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$

$U_n = \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{2n+1}$

$U_n = \frac{1}{4n-2} + \frac{-1}{4n+2}$

$U_0 = \frac{-1}{2} + \cancel{\frac{-1}{2}}$

$U_1 = \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{-1}{6}}$

$U_2 = \cancel{\frac{1}{6}} + \cancel{\frac{-1}{8}}$

$\vdots$

$U_n = \cancel{\frac{1}{4n-2}} + \frac{-1}{4n+2}$ +

$S_n = \frac{-1}{2} + \frac{-1}{4n+2}$

$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{-1}{2}$

السؤال الثالث : للاثبات صحة المتراجحة ندرس اطراد تابع الفرق

$h(x) = f(x) - g(x)$

$h(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$ $]-1, \infty[$

$h'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2} > 0$

x	-1		0		$+\infty$
		$+$	0	$+$	
			0	↗	

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

واضح من جدول الأطراف $f(x) \geq 0$

$f(x) - g(x) \geq 0$

محقق. $f(x) \geq g(x)$

السؤال الرابع:

$e^{-2x} - 7e^{-x} + 6 = 0$

بفرض $e^{-x} = X \Rightarrow X^2 - 7X + 6 = 0$

إما $X = 1$ $\quad e^{-x} = 1$ $\quad x = 0$

أو $X = 6$ $\quad e^{-x} = 6$

$-x = \ln 6 \Rightarrow x = -\ln 6$

السؤال الخامس:

$$f(x) = \frac{1}{\sin 2x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2\sin x \cdot \cos x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{2\sin x \cos x} + \frac{\cos^2 x}{2\sin x \cdot \cos x}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{-\sin x}{\cos x} + \frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$F(x) = -\frac{1}{2}\ln|\cos x| + \frac{1}{2}\ln|\sin x|$$

السؤال السادس:

$D_f =]-2, 2[$

$f(D_f) = [0, +\infty[$

$f(0) = 4 \qquad f'(0) = 0$

$f(]-1, 1[) =]0, 4]$

$f(-1)$ قيمة حدية صغرى

$f(1)$ " " "

$f(2)$ " " كبرى

التمرين الأول:

$f(x) = \dfrac{3x-1}{x-3}$ $\quad]3, +\infty[$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(f(x)) = \lim_{x \to 3} f(x) = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

$$f(f(x)) = f\left(\frac{3x-1}{x-3}\right)$$

$$= \frac{3\,\frac{3x-1}{x-3} - 1}{\frac{3x-1}{x-3} - 3} = \frac{\frac{9x-3}{x-3} - 1}{\frac{3x-1}{x-3} - 3}$$

$$= \frac{\frac{9x-3-x+3}{x-3}}{\frac{3x-1-3x+9}{x-3}} = \frac{8x}{8}$$

$$= x$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(f(x)) = +\infty$$

التمرين الثاني:

$x_0 = 3$

$x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n - 2$

$y_n = x_n + 3$

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{x_{n+1} + 3}{x_n + 3} = \frac{\frac{1}{3}x_n + 1}{x_n + 3} = \frac{1}{3}$$

فهي متتالية هندسية $q = \frac{1}{3}$

$y_n = y_0 \cdot q^n$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

y_0 نكتب $y_0 = x_0 + 3 = 6$

$y_n = 6\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$\boxed{x_n = y_n - 3}$ لدينا

$x_n = 6\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3$

$\lim_{n \to +\infty} x_n = -3$

$S_n = y_0 + y_1 + \dots + y_n$

$= a\,\frac{1 - q^n}{1 - q} = 6\,\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$

$= 6 \times \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$

$= 9\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = 9 - 9\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

$\lim_{n \to +\infty} S_n = 9$ $\qquad \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

$S'_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$

من $*$

$S'_n = y_0 - 3 + y_1 - 3 + \dots + y_n - 3$

$= y_0 + y_1 + \dots + y_n - 3 - 3 - \dots - 3$

$= S_n - 3(n+1)$

$\lim_{n \to +\infty} S'_n = \lim_{n \to +\infty} \left(S_n - 3(n+1)\right)$

$= -\infty$

التمرين الثالث: $f(x) = e^x + \ln|x|$

$g(x) = xe^x + 1$

(1) معرف ومستمر على $\mathbb{R}$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 1$

$g'(x) = e^x + e^x x = e^x(1 + x)$

$g' = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \quad x = -1$

$g(-1) = \frac{-1}{e} + 1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g	1	$\searrow$	$1 - \frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

واضح من جدول التغيرات ان $g(x) > 0$

ومنه اشارة $\frac{g(x)}{x}$ هي من اشارة x

$x > 0 \quad \frac{g(x)}{x} > 0$

$x < 0 \quad \frac{g(x)}{x} < 0$

(2) f معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$

$f(x) = \begin{cases} e^x + \ln(x) & x > 0 \\ e^x + \ln(-x) & x < 0 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} e^x + \frac{1}{x} & x > 0 \\ e^x + \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$

$e^x + \frac{1}{x} = 0$ نعدم الفرع الثاني

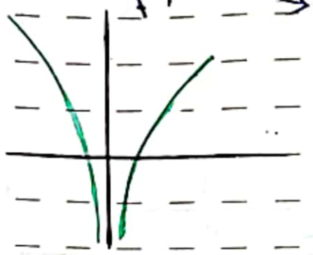
$\Rightarrow \frac{xe^x + 1}{x} = \frac{g(x)}{x} = 0 \Rightarrow$

g = 0 وهذا لا يعدم من جدول الطلب السابق

ومنه اشارة f' هي من اشارة الطلب السابق

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	$\|$	$+$
f	$+\infty \searrow -\infty$	$\|$	$-\infty \nearrow -\infty$



المسألة الأولى :

$$f(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2}$$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to -1^{\pm}} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

للخط مقارب شاقولي عند $x=-1$

$y=0$ مقارب أفقي

$$f(x) - y_\Delta = \frac{x+2}{(x+1)^2}$$

نقطة تقاطع $f - y_\Delta = 0 \quad x=-2$

فوق Δ $\quad f - y_\Delta > 0 \quad x > -2$

تحت Δ $\quad f - y_\Delta < 0 \quad x < -2$

$$f' = \frac{(x+1)^2 - 2(x+1)(x+2)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{(x+1)(x+1-2(x+2))}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{x+1-2x-4}{(x+1)^3} = \frac{-x-3}{(x+1)^3}$$

$f' = 0 \Rightarrow x = -3$

$f(3) = \frac{-1}{4}$

x	$-\infty$	-3		-1	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	$\|$	$-$
f	$0 \searrow$	$\frac{-1}{4}$	$\nearrow +\infty$	$\|$	$+\infty \searrow 0$

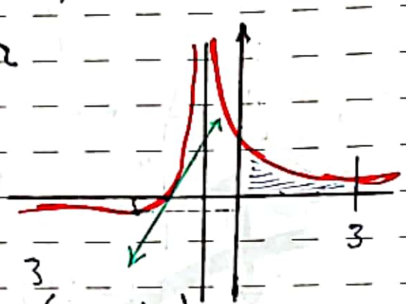
$f(-3) = -\frac{1}{4}$ قيمة صغرى محلية

$f(-2) = 0$

نقطة تماس $(-2, 0)$

$m = f'(-2) = \frac{-1}{-1} = +1$

$y = x+2$



$$S = \int_0^3 \frac{x+2}{(x+1)^2} = \int_0^3 \frac{x+1+1}{(x+1)^2}$$

$$= \int_0^3 \left(\frac{x+1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} \right)$$

$$\int_0^3 \left(\frac{1}{x+1} + (x+1)^{-2} \right)$$

$$= \left[\ln(x+1) - \frac{1}{x+1} \right]_0^3$$

$$= \ln 4 - \frac{1}{4} - 0 + 1$$

$$= \ln 4 + \frac{3}{4}$$ واحدة مربعة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المسألة الثانية: $f = \frac{1}{x(1-\ln x)}$

1) معرف من أجل $x \in]0,+\infty[\setminus \{e\}$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x - x\ln x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$x=0$ مقارب شاقولي

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

$y=0$ مقارب أفقي

$\lim_{x\to e^+} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$ مقارب شاقولي $x=e$

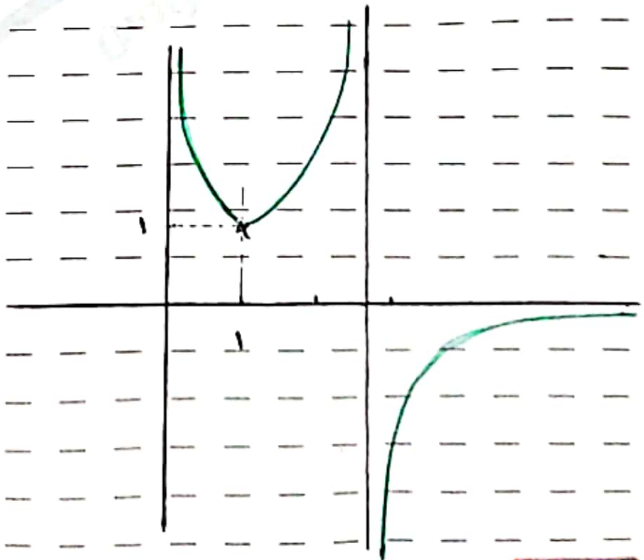
$\lim_{x\to e^-} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$$f' = \frac{-(1-\ln x + \frac{-1}{x}x)}{x^2(1-\ln x)^2}$$

$$= \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2} \qquad f'=0 \Rightarrow$$

$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1 \qquad f(1)=1$

x	0		1		e		$+\infty$
f'	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$ $+\infty$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0



$$S = \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} f(x)\,dx$$

$$= \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}\,dx$$

$$= \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} \frac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}\,dx$$

$$= -\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} \frac{\frac{-1}{x}}{1-\ln x}\,dx$$

$$= -\left[\ln|1-\ln x|\right]_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}$$

$$= -\left[\ln\left|1-\ln\frac{1}{e}\right| - \ln\left|1-\ln\frac{1}{e^2}\right|\right]$$

$$= -\left[\ln|1+e| - \ln|1+e^2|\right]$$

$$= \ln(1+e^2) - \ln(1+e)$$

$$= \ln\left(\frac{1+e^2}{1+e}\right)$$

واحدة مربعة.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المدرس
محمد رسول صباغ

أولاً: أجب عن خمسة أسئلة مما يأتي؟

السؤال الأول: إذا كان $z_1 = 2+i$ هو أحد جذري المعادلة $z^2 - bz + 5 = 0$ أوجد b ثم استنتج الجذر الآخر

السؤال الثاني: اكتب معادلة المستوي P بحيث P يقطع محور ox في نقطة فاصلتها $a \neq 0$ ويقطع محور oy في نقطة ترتيبها $b \neq 0$ ويقطع oz في نقطة راقمها $c \neq 0$

السؤال الثالث: لتكن النقطتان $G(3 - i\sqrt{3})$ و $H(3 + i\sqrt{3})$ وليكن R الدوران الذي مركزه (o) ويحقق $R(G) = H$ احسب قياس الزاوية $(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OH})$

السؤال الرابع: إذا كان احتمال مشاركة أحد الطلاب A في مسابقة الرياضيات التي تقيمها المدرسة هو $\frac{8}{15}$ واحتمال مشاركة الطالب B في المسابقة نفسها هو $\frac{5}{15}$ واحتمال مشاركة الطالب A بشرط مشاركة B هو $\frac{2}{15}$ علماً شارك الطالب A ما احتمال عدم مشاركة B.

السؤال الخامس: في معلم متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لتكن $A(2, 1, -3)$ $B(1, 2, 1)$
$P: x + y + z = 0$
اثبت أن المستقيم (AB) يقطع المستوي P بنقطة واحدة جد احداثياتها...

السؤال السادس: كم كلمة مختلفة يمكننا تكوينها انطلاقاً من حروف كلمة SYRIA

ثانياً: حل التمارين الثلاثة الآتية؟...

التمرين الأول: لتكن $z_1 = 1+i$ ، $z_2 = \sqrt{3} - i$
1) أوجد z_1 ، z_2 ، $z_1 \cdot z_2$ بالشكل الأسي
2) أوجد $z_1 \cdot z_2$ بالشكل الجبري
3) استنتج النسب المثلثية للزاوية $\frac{\pi}{12}$
4) جد الجذرين التربيعيين للعدد z_1

التمرين الثاني: أوجد الشرط على العدد الطبيعي n كي يحوي منشور $(x^2 + \frac{1}{x})^n$ على حد ثابت مستقل عن x
الناشر $(x + \frac{1}{x})^{16}$ مستقل عن x في منشور ثنائي ... ما الحدود في المنشور $(x^2 - \frac{1}{x})^5$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

التمرين الثالث: يحتوي صندوق على 7 كرات منها 3 بيضاء تحمل الأرقام 2، 2، 1 وأربع حمراء تحمل الأرقام 2، 2، 1، 1

أولاً: نسحب كرة واحدة من الصندوق

a) ما احتمال أن تحمل الرقم (1)

b) إذا كانت الكرة المسحوبة تحمل الرقم (1) ما احتمال أن يكون لونها أحمر

ثانياً: نسحب كرتين على التتالي دون إعادة.

a) ما احتمال الحصول على كرتين تحمل كل منهما رقماً فردياً.

b) " " " " " من نفس اللون

c) " " " أن يكون مجموع الرقمين الظاهرين 3.

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين:

المسألة الأولى:

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-6z+10=0$

استنتج حلول المعادلة ذات المجهول z حيث $(\bar{z}+2)^2-6(\bar{z}+2)+10=0$

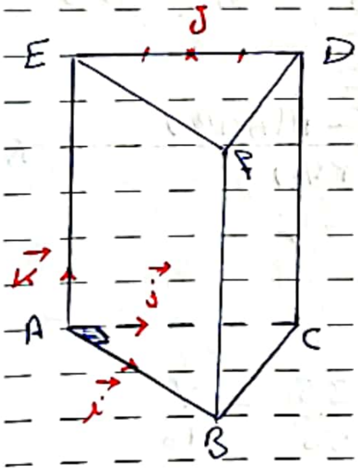
2) في المستوي $(O,\vec{u},\vec{v})$ لتكن $z_A = 3-i$

جد $z_{A'}$ صورة العدد العقدي z_A وفق دوران R مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

3) لتكن $z_E = 7-3i$ جد z_F صورة z_E وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

4) جد العدد العقدي للنقطة H صورة F وفق الانسحاب الذي شعاعه $\vec{AE}$

5) مثّل النقاط A، E، H، F وعيّن طبيعة الرباعي $AEHF$.



المسألة الثانية: $ABCEFD$ موشور قائم قاعدته ABC مثلث قائم في A

J منتصف $[ED]$

نتأمل المعلم المتجانس $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ حيث

$\vec{AB}=3\vec{i}$ ، $\vec{AC}=4\vec{j}$ ، $\vec{AE}=4\vec{k}$

1) جد إحداثيات النقاط B، C، D، E، J

2) جد معادلة المستوي (JBC)

3) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (JC)

4) احسب بعد النقطة E عن المستوي JBC

5) عيّن إحداثيات النقطة K مركز ثقل النقاط المثقلة $(J,2)$ $(B,1)$ $(C,2)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

السؤال الأول :

$(2+i)^2 - b(2+i) + 5 = 0$

$4 + 4i - 1 - b(2+i) + 5 = 0$

$8 + 4i = b(2+i) \Rightarrow b = \dfrac{8+4i}{2+i} = 4 \Rightarrow \boxed{b=4}$

$Z^2 - 4Z + 5 = 0$ وبما أن المعاملات حقيقية فإن الجذر الآخر مرافق للجذر الأول

$Z_2 = 2 - i$

السؤال الثاني : النقاط التي يقطع P $A(a,0,0)$ و $B(0,b,0)$ و $C(0,0,c)$

ومنه معادلة المستوي P بقطع بالعوامل

$P: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

ملاحظة : يمكن اعتبار السؤال الثاني ملغي

السؤال الثالث :

$(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OH}) = \dfrac{H-0}{G-0} = \dfrac{H}{G} = \dfrac{3+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}} = \dfrac{(3+i\sqrt{3})^2}{9+3}$

$= \dfrac{9+6\sqrt{3}i-3}{12} = \dfrac{6+6\sqrt{3}i}{12} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\frac{\pi}{3}i}$

ومنه $(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OH}) = \dfrac{\pi}{3}$

السؤال الرابع :

$P(A) = \dfrac{8}{10}$ $P(B) = \dfrac{5}{10}$ $P(A|B) = \dfrac{9}{10}$

$P(B'|A) = ? \Rightarrow P(B'|A) = \dfrac{P(A\cap B')}{P(A)} = \dfrac{P(A) - P(A\cap B)}{P(A)}$ ..... *

لدينا $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow \dfrac{9}{10} = \dfrac{P(A\cap B)}{\frac{5}{10}} \Rightarrow$

$P(A\cap B) = \dfrac{45}{100}$

* نعوض في $P(B'|A) = \dfrac{\frac{8}{10} - \frac{45}{100}}{\frac{5}{10}} = \dfrac{80-45}{50} = \dfrac{35}{50} = \dfrac{7}{10}$

السؤال الخامس :

$A(2,1,-3)$ $B(1,1,2)$ $P: x + y + z = 0$

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}(-1,0,5)\\ \vec{n}(1,1,1)\end{array}\right\} \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} \neq 0$ ومنه فالمستقيم يقطع المستوي P.

لنوجد المعادلات الوسيطية لـ $(\overrightarrow{AB})$

$x = x_B + at = 1 - t$

$y = y_B + bt = 1$ $\quad t \in \mathbb{R}$

$z = z_B + ct = 2 + 5t$

نعوض المعادلات الوسيطية لـ (AB) في P.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$2t+1+2+5t=0 \Rightarrow 4+4t=0 \Rightarrow t=-1$

نعوض في المعادلات الوسيطية

$x=2 \quad y=1 \quad z=-3$

(AB) و C نقطة تقاطع $(2,1,-3)$

السؤال السادس: عدد الكلمات المختلفة $=5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

التمرين الأول:

$Z_1=1+i=\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}$

$Z_2=\sqrt{3}-i=2e^{-\frac{\pi}{6}i}$

$Z_1\cdot Z_2=2\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{12}i}=2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}+i\,2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}$ ...*

$Z_1\cdot Z_2=(1+i)(\sqrt{3}-i)=\sqrt{3}-i+\sqrt{3}i+1$

$=\sqrt{3}+1+(\sqrt{3}-1)i$ ...**

بالمطابقة بين * و **

$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \qquad \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$\tan\frac{\pi}{12}=\frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

التمرين الثاني:

$(x^2+\frac{1}{x})^n \;;\; T_r=\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$

$=\binom{n}{r}(x^2)^{n-r}(\frac{1}{x})^r=\binom{n}{r}x^{2n-2r}x^{-r}$

$=\binom{n}{r}x^{2n-3r}$

$x^{2n-3r}=x^0 \Leftrightarrow 2n-3r=0 \Rightarrow r=\frac{2}{3}n$

حتى n مضاعفات 3

عدد الحدود في منشور ثنائي الحد $n+1$

التمرين الثالث:

2	4	3 ب
1	1 2 2	1 2 2

1a) $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{3}{7}$

1b) B لون الثانية أحمر

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{2}{3}$

ثانياً: C: كل كرة أ

$P(C)=\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{7}$

D: نفس اللون

$P(D)=\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}+\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{7}+\frac{2}{7}=\frac{3}{7}$

E: مجموع الرقمين 3

$P(E)=\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}\times2=\frac{4}{7}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المسألة الأولى:

$Z^2-6Z+10=0$ $\quad \Delta=b^2-4ac$

$=36-40=-4<0$

للمعادلة جذران عقديان مترافقان

$-\Delta=4 \Rightarrow \sqrt{-\Delta}=2$

$Z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{6-2i}{2}=3-i$

$Z_2=3+i$

$(\bar{Z}+2)^2-6(\bar{Z}+2)+10=0 \Leftrightarrow Z^2-6Z+10=0$

ومنه $3-i=\bar{Z}+2 \Rightarrow \bar{Z}=1-i \Rightarrow Z_1=1+i$

$3+i=\bar{Z}+2 \Rightarrow \bar{Z}=1+i \Rightarrow Z_2=1-i$

$Z_{A'}-w=e^{i\theta}(Z_A-w) \Rightarrow Z_{A'}=i(Z_A)=i(3-i)$ (1)

$Z_{A'}=1+3i$

$Z_F-Z_A=e^{i\theta}(Z_E-Z_A) \Rightarrow Z_F-3+i=i(7-3i-3+i)$ (2)

$Z_F-3+i=i(4-2i)=4i+2$

$Z_F=5+3i$

$Z_H=Z_F+\vec{AE}=5+3i+e-a=5+3i+7-3i-3+i$ (3)

$=9+i$

$A(3,-1)$ $\quad E(7,-3)$

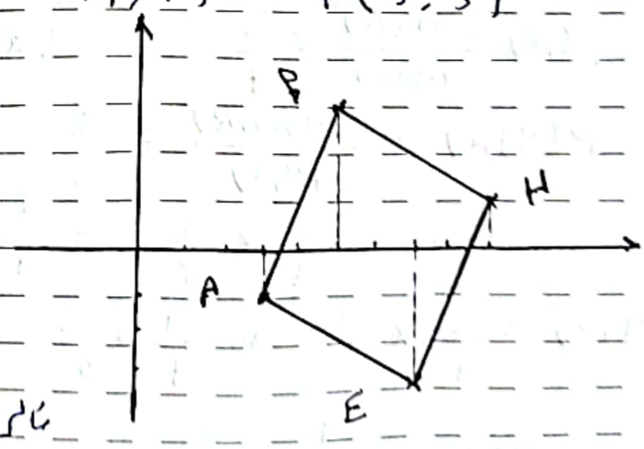
$H(9,1)$ $\quad F(5,3)$

$\vec{AF}=f-a=5+3i-3+i$

$=2+4i$

$\vec{EH}=h-e=9+i-7+3i$

$=2+4i$



بالتالي $AEHF$ متوازي أضلاع لتساوي شعاعين متقابلين فيه.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المسألة الثانية

$B(3,0,0)\quad C(0,4,0)\quad D(0,4,4)\quad E(0,0,4)$

$J\left(\frac{x_E+x_D}{2},\frac{y_E+y_D}{2},\frac{z_E+z_D}{2}\right)=(0,2,4)$

2) $\vec{JC}(0,2,-4)$ ، $\vec{JB}(3,-2,-4)$ } نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n}\cdot\vec{JC}=0 \Rightarrow 2b-4c=0$

$\vec{n}\cdot\vec{JB}=0 \Rightarrow 3a-2b-4c=0$

نفرض $c=1 \quad b=2 \quad a=\frac{8}{3} \Rightarrow \vec{n}\left(\frac{8}{3},2,1\right)$

$\vec{n}(8,6,3)$

ومنه $JBC: 8x+6y+3z+d=0$

B نعوض $\Rightarrow d=-24$ $\quad$ $JBC: 8x+6y+3z-24=0$

3) $J(0,2,4)$ ، $\vec{JC}(0,2,-4)$ }

$$JC:\begin{cases} x=0 \\ y=2+2t \\ z=4-4t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

4) $dist(E,JBC)=\frac{|8(0)+6(0)+3(4)-24|}{\sqrt{64+36+9}}=\frac{12}{\sqrt{109}}$

$$x_K=\frac{\alpha x_C+\beta x_B+\gamma x_J}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{2(0)+1\times3+2\times0}{5}=\frac{3}{5}$$

$$y_K=\frac{\alpha y_C+\beta y_B+\gamma y_J}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{2\times4+1\times0+2\times2}{5}=\frac{12}{5}$$

$$z_K=\frac{\alpha z_C+\beta z_B+\gamma z_J}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{2\times0+1\times0+2\times4}{5}=\frac{8}{5}$$

$$K\left(\frac{3}{5},\frac{12}{5},\frac{8}{5}\right)$$

انتهى النموذج الثاني

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أولاً: أجب عن خمسة مما يأتي؟

السؤال الأول: لتكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

1) احسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

2) أثبت وجود عدد حقيقي a يحقق $a = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$

وأن $b = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - ax)$ واستنتج مقارباً مائلاً في جوار $-\infty$

السؤال الثاني: عين طبيعة مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ في حالة

$x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2z + 26 = 0$

السؤال الثالث: أثبت صحة المساواة $\frac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{n+1-r}$

السؤال الرابع: حل المتراجحة $\ln(-6x+4) \geq \ln(3x^2 - x - 2)$

السؤال الخامس: حل المعادلة التفاضلية التي تحقق الشرط المعطى

$y' + 2y = 0$ ومنحني الحل يقطع محور التراتيب في النقطة $(0, -2)$ ... $\left(\frac{1}{2}\right)$

السؤال السادس: انشر العبارة $\left(x + \frac{1}{x}\right)^4$ مستخدماً مثلث باسكال

ثانياً: حل التمارين الثلاث الآتية؟

التمرين الأول: أثبت صحة المتراجحة

$2\sin x + \tan x \geq 3x$ أياً يكن $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

التمرين الثاني: ليكن z عدداً عقدياً طويلته $|z| = 1$ أثبت أن

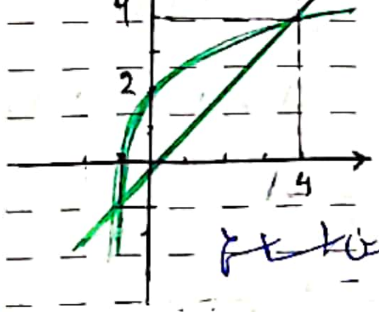
$\frac{2}{1-z} = 1 + i\cot\frac{\theta}{2}$

* إذا كانت $z = x + iy$ عين مجموعة النقاط $M(x, y)$ التي تحقق

$z \cdot \bar{z} \leq 4$

التمرين الثالث: نعرف المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ كالآتي $u_0 = \frac{1}{2}$

$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$



1) باستعمال الرسم مثّل على محور الفواصل الحدود u_1 , u_2 , u_3

2) ضع تخميناً حول اطراد المتتالية وتقاربها

3) نعرف المتتالية $t_n = \frac{u_n - 4}{u_n + 1}$ أثبت أنها هندسية وعين أساسها وحدها الأول

4) اكتب عبارة t_n بدلالة n ثم استنتج نهاية t_n

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

محمد رسول صباغ

ثالثاً: حل المسألتين التاليتين.

المسألة الأولى: تحاول سعاد إدخال الوتد في حلقات تباعاً تكرر سعاد التجربة عدداً من المرات، عندما سعاد في إدخال حلقة يصبح احتمال نجاحها في إدخال الحلقة التي بعدها $\left(\frac{1}{3}\right)$ وعندما تفشل في إدخال حلقة يصبح احتمال فشلها في إدخال الحلقة اللاحقة $\frac{4}{5}$ نفترض أن احتمال نجاح سعاد في إدخال الحلقة في المرة الأولى يساوي فشلها، نتأمل، أيّاً كان العدد الطبيعي الموجب تماماً (n) الحدثين الآتيين

A_n: نجحت سعاد في إدخال الحلقة عند الرمية n

B_n: فشلت سعاد في إدخال الحلقة عند الرمية n $\quad P_n = P(A_n)$

1) عيّن P_1 وبرهن أن $P_2 = \frac{4}{15}$ ثم أثبت أن $P_n = \frac{2}{15}P_{n-1} + \frac{1}{5}$ ، $n \geq 2$

2) أثبت أن U_n هندسية وعيّن حدها الأول U_1 وأساسها q ، $U_n = P_n - \frac{3}{13}$ ، $n \geq 1$

3) استنتج صيغة U_n ثم P_n بدلالة n احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n$

المسألة الثانية: لتكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \frac{3e^{x}-1}{e^{x}+1}$ وليكن (C) خطه

1) a) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون $f(-x) + f(x) = 2$ ثم عيّن إحداثيات A مركز تناظر (C)

b) احسب نهايات f عند $\pm\infty$ ثم فسّر النتائج هندسياً.

c) ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.

2) a) اكتب معادلة المماس T لـ C في النقطة $(x=0)$

b) استنتج وضعية المنحني (C) بالنسبة لـ T

3) ارسم كل من T و C والمقاربات إن وجدت

4) بيّن أن $f'(x) = \frac{4e^{x}}{(e^{x}+1)^2}$ ثم احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيم $x=1$

انتهت الأسئلة ...

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المدرّس: محمد رسول صباغ
0934131159

النموذج الامتحاني الجزء الأول

أولاً: أجب عن الأسئلة الأربعة التالية:

السؤال الأوّل:

نجد جانباً جدول تغيرات التابع f، المطلوب:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

1- ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ ؟

2- ما عدد القيم الحدية للتابع f ؟

3- اكتب معادلة مماس المنحني للتابع عند نقطة فاصلتها $x = 1$.

السؤال الثاني:

ليكن التابع f المعرف على $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ وفق: $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ ، أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم عين A $x > A$ ليكون $f(x)$ من المجال $[1.95,2.05]$.

السؤال الثالث:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة الآتية: $\ln(x-1) = \ln x - \ln(x+1)$.

السؤال الرابع:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق: $f(x) = \frac{x^2-5x+1}{x+1}$ ، المطلوب:

1- جد الأعداد a, b, c التي تحقق: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ أياً يكن $x \in D$.

2- احسب $I = \int_0^2 f(x)dx$.

ثانياً: حل التمارين الثلاثة التالية: (لكل تمرين 80 درجة)

التمرين الأول:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية: $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n} \end{cases}$ ، المطلوب:

1- أثبت أن $0 < u_n < 1$ أياً يكن $n \in \mathbb{N}$.

2- نعرف $(v_n)_{n\geq0}$ حيث: $v_n = \frac{1}{u_n} - 1$ ، أثبت أن $(v_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية واستنتج $(v_n)_{n\geq0}$ بدلالة n .

3- اكتب $(u_n)_{n\geq0}$ بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

RIE RASOUL
RASOUL International Education
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المدرس: محمد رسول صباغ

0934131159

الجزء الأول

التمرين الثاني:

إذا كان $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{2}$ أياً يكن $x \in \mathbb{R}^*$ ، أوجد نهاية التابع f عند الصفر .

التمرين الثالث:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ والمطلوب:

احسب نهاية f عند الصفر

هل f مستمر عند الصفر؟ هل هو مستمر على $\mathbb{R}$ ؟ علل إجابتك

التمرين الرابع:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وفق $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

1- ادرس نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه واستنتج ما له من مقاربات غير مائلة.

2- عين الأعداد a, b, c التي تحقق $f(x) = ax + c + \frac{c}{x-1}$.

3- استنتج معادلة المقارب المائل للخط البياني C للتابع f وادرس الوضع النسبي للمنحني مع هذا المقارب.

<u>ربعاً: حل المسألتين الآتيتين:</u> **(100 درجة لكل مسألة)**

المسألة الأولى:

أولاً: ليكن g التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $g(x) = e^x + 2 - x$ ، ادرس اطراد التابع g واستنتج مجموعة حلول المتراجحة $g(x) > 0$.

ثانياً: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = x + \frac{x-1}{e^x}$ ، والمطلوب:

1- أثبت أن $f'(x) = \frac{1}{e^x} g(x)$.

2- بيّن أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً α حيث: $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

3- أثبت أن المستقيم $\Delta: y = x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$ ، وادرس الوضع النسبي .

4- ارسم Δ, C في معلم متجانس ، ثم احسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيمين $x = 0, x = 1$.

RIE RASOUL

RASOUL International Education

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المدرّس: محمد رسول صباغ
0934131159

الجزء الأول

المسألة الثانية:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $]-\infty,-2[\,\cup\,]-2,+\infty[$ وفق، $f(x)=\frac{2x+1}{x+2}$،
والمطلوب:

1- أوجد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه واستنتج ما له من مقاربات غير مائلة.

2- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

3- في معلم متجانس، ارسم الخط البياني للتابع f.

4- لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالتدريج وفق $u_0=0$ و $u_{n+1}=\frac{2u_n+1}{u_n+2}$:

a) أثبت أن $0\leq u_n\leq 1$ أيا تكن $n\in\mathbb{N}$.

b) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة.

c) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها.

انتهت الأسئلة

RASOUL
International Education

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

... حل مذاكرة الجزء الأولى ...

السؤال الأول: أ) الحل وحيد.

٢) راجحة.

٣) في النقطة $x=1$ ينعدم المشتق الدالة الأولى فالمماس أفقي معادلته $y=1$

السؤال الثاني: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$

$r=\frac{2{,}05-1{,}95}{2}=0{,}05$

$|f(x)-c|<r \Rightarrow \left|\frac{2x+1}{x-1}-2\right|<0{,}05$

$\left|\frac{2x+1-2x+2}{x-1}\right|<\frac{5}{100}$

$\left|\frac{3}{x-1}\right|<\frac{5}{100} \Rightarrow \cancel{-\frac{5}{100}}<\frac{3}{x-1}<\frac{5}{100}$

$\frac{3}{x-1}<\frac{5}{100} \Rightarrow \frac{x-1}{3}>20 \Rightarrow$

$x-1>60 \Rightarrow x>61$, $x>A$, $A=61$

السؤال الثالث:

$D_1=]1,+\infty[$, $D_2=]0,+\infty[$, $D_3=]-1,+\infty[$ $\Rightarrow D=]1,+\infty[$

$\ln(x-1)=\ln\frac{x}{x+1} \Leftrightarrow x-1=\frac{x}{x+1}$

$(x-1)(x+1)=x \Rightarrow x^2-1=x$

$x^2-x-1=0$

$\Delta=b^2-4ac=1+4=5$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt5$

$x_1=\frac{-b-\sqrt\Delta}{2a}=\frac{1-\sqrt5}{2}$ مرفوض

$x_2=\frac{-b+\sqrt\Delta}{2a}=\frac{1+\sqrt5}{2}$ مقبول

السؤال الرابع:

$$\begin{array}{r|l} x^2-5x+1 & x+1 \\ \hline -x^2\mp x & x-6 \\ -6x+1 & \\ -6x-6 & \\ 7 & \end{array}$$

$f(x)=x-6+\frac{7}{x+1}$ $a=1$ $b=-6$ $c=7$

$I=\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2\left(x-6+\frac{7}{x+1}\right)dx$

$=\left[\frac{x^2}{2}-6x+7\ln(x+1)\right]_0^2$

$=2-12+7\ln(3)-[0-0+0]$

$=7\ln(3)-10$

ثانياً: التمرين الأول:

$\begin{cases} u_0=\frac12 \\ u_{n+1}=-1+\frac{2}{2-u_n}\end{cases}$

i) $E(n):\ 0<u_n<1$

من أجل $n=0$ محققة $0<u_0=\frac12<1$

الفرض: $0<u_n<1$

الطلب: $0<u_{n+1}<1$

الإثبات:

لدينا $0<u_n<1 \Rightarrow 0>-u_n>-1$

$2>2-u_n>1 \Rightarrow$

$\frac12<\frac{1}{2-u_n}<1$

$1<\frac{2}{2-u_n}<2 \Rightarrow 0<-1+\frac{2}{2-u_n}<1$

محققة $0<u_{n+1}<1$

$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\frac{1}{u_{n+1}}-1}{\frac{1}{u_n}-1}=\frac{\frac{2-u_n}{u_n}-1}{\frac{1}{u_n}-1}$

$=\frac{\frac{2-u_n-u_n}{u_n}}{\frac{1-u_n}{u_n}}=\frac{\frac{2(1-u_n)}{u_n}}{\frac{1-u_n}{u_n}}=2$

متتالية هندسية أساسها $q=2$

لدينا $v_0=\frac{1}{u_0}-1=1$

$v_n=v_0\cdot q^n=2^n$

لدينا $v_n=\frac{1}{u_n}-1 \Rightarrow v_n+1=\frac{1}{u_n}$

$u_n=\frac{1}{1+v_n}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$u_n = \frac{1}{1+u_n} = \frac{1}{1+2^n}$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{\infty} = 0$

التمرين الثاني:

$f(x) = \frac{-(1-\cos x)}{x^2} + \frac{1}{2}$

$= \frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} + \frac{1}{2}$

$= -2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2 + \frac{1}{2}$

$= -2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\frac{x}{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 0} f(x) = -2\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} = 0$

التمرين الثالث:

$-1 \le \cos\frac{1}{x} \le 1$

$x^2 \le x^2\cos\frac{1}{x} \le x^2$

$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0}(x^2) = 0 \\ \lim_{x\to 0}(-x^2) = 0\end{array}\right\} \lim_{x\to 0} f(x) = 0$

نلاحظ أن $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

لذا f مستمر عند (0) فهو مستمر على $\mathbb{R}$

التمرين الرابع:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x-1 \\ \hline -x^2 \pm x & x+1 \\ x & \\ x-1 & \\ 1 & \end{array}$$

$f = x + 1 + \frac{1}{x-1}$

$y = x+1$ مقارب مائل لأن

$\lim_{x\to+\infty}(f - y) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x-1}\right) = 0$

$f - y_\Delta = \frac{1}{x-1}$

$x > 1$ $\quad 0 < f - y_\Delta$ $\quad$ الخط فوق Δ

$x < 1$ $\quad 0 > f - y_\Delta$ $\quad$ الخط تحت Δ

المسألة الأولى: $g(x) = e^x + 2 - x$

$g' = e^x - 1$

$g' = 0 \Rightarrow x = 0$ $\qquad g(0) = 2$

نضع جدول التغيرات

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	2	$\nearrow$

$g(x) > 0$

ثانياً: $f(x) = x + \frac{x-1}{e^x}$

$f'(x) = 1 + \frac{e^x - e^x(x-1)}{e^{2x}} = 1 +$

$= 1 + \frac{2-x}{e^x} = \frac{e^x + 2 - x}{e^x}$

$= \frac{1}{e^x}(e^x + 2 - x) = \frac{1}{e^x}g(x)$

٢) $f' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e^x}g(x) = 0$

ولكن أثبتنا $g > 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty + \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f'		$+$	
f	$-\infty$	0	$+\infty$

$f = 0$ واضح من جدول التغيرات أن للمعادلة حل وحيد

f مستمر ومتزايد تماماً على $]0, \frac{1}{2}[$

$f(0) = -1 < 0$

$\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{e}} > 0 \end{array}\right\} f(0) \times f(\tfrac{1}{2}) < 0$

إذن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ حسب مبرهنة القيمة الوسطى.

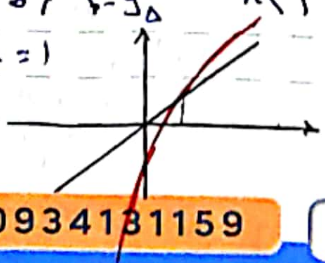
٣) $f - y_\Delta = \frac{x-1}{e^x}$ $\qquad \lim_{x\to+\infty}(f - y_\Delta) = 0$

إذن $y = x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

$x > 1$ $\quad 0 < f - y_\Delta$ $\quad$ فوق Δ

$x < 1$ $\quad 0 > f - y_\Delta$ $\quad$ تحت Δ.

$x = 1$ نقطة تقاطع مع Δ



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$S=\int_0^1 f(x)=\int_0^1 (x+\frac{x-1}{e^x})\,dx$

$=\int_0^1 x+\int_0^1 (x-1)e^{-x}\,dx$

$\int_0^1 (x-1)e^{-x}$

$u=x-1 \quad u'=1$

$v'=e^{-x} \quad v=-e^{-x}$

$\int_0^1 (x-1)e^{-x}=[(1-x)e^{-x}]_0^1+\int_0^1 e^{-x}$

$=[0-1]-[e^{-x}]_0^1$

$=-1-[e^{-1}-1]=\frac{-1}{e}$

$S=[\frac{x^2}{2}]_0^1-\frac{1}{e}=\frac{1}{2}-\frac{1}{e}=\frac{e-2}{2e}$ واحدة مربعة.

المسألة الثانية: $f(x)=\frac{2x+1}{x+2}$

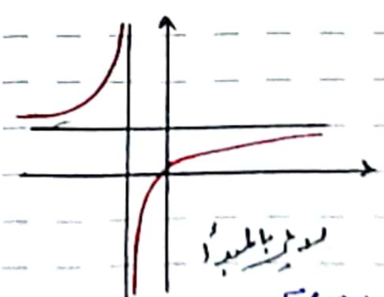
$\lim_{x\to\mp\infty} f(x)=2$ $y=2$ مقارب أفقي

$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\frac{-3}{0^+}=-\infty$

$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\frac{-3}{0^-}=+\infty$

$f'(x)=\frac{2x+4-2x-1}{(x+2)^2}=\frac{3}{(x+2)^2}>0$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
f'		$+$	‖	$+$	
f	2	$\nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow$	2



تمر بالمبدأ

$u_0=1$

$u_{n+1}=\frac{2u_n+1}{u_n+2}$

1) $0\leq u_n\leq 1$

$E(n): 0\leq u_n\leq 1$

صحة أجل $n=0$ نجد $0\leq u_0=1\leq 1$

الفرض: $0\leq u_n\leq 1$

الطلب: $0\leq u_{n+1}\leq 1$

الإثبات: $u_{n+1}=f(u_n)$

مع العلم أن f متزايدة.

الدنا فرضاً: $0\leq u_n\leq 1$

$f(0)\leq f(u_n)\leq f(1)$

نجد $\frac{1}{2}\leq u_{n+1}\leq 1$

$0\leq u_{n+1}\leq 1$

b) $E(n)$: u_n متزايدة

$u_1=\frac{2u_0+1}{u_0+2}=\frac{1}{2}$

محققة $u_1-u_0>0$

الفرض: $u_{n+1}>u_n$ الطلب: $u_{n+2}>u_{n+1}$

الإثبات:

لدينا $u_{n+1}>u_n \Rightarrow f(u_{n+1})>f(u_n)$

$u_{n+2}>u_{n+1}$

محققة

صحة أجل $n+1$ فهي صحيحة.

2) المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

لإيجاد نهايتها نحل المعادلة $f(x)=x$

$\frac{2x+1}{x+2}=x \Rightarrow 2x+1=x^2+2x$

$x^2=1 \Rightarrow x=\mp 1$

مرفوضة

$\lim_{n\to+\infty} u_n=1$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

معهد رسول التعليمي
أ: محمد رسول صباغ
هاتف: 0934131159

امتحان مادة الرياضيات
لعام 2022-2023
مذاكرة الجزء الأول كاملاً

الاسم:
الدرجة:

أولاً: حل التمرين الأربع الآتية؟ (40 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول:

أوجد نهاية كل من التوابع الآتية عند قيمة a المعطاة؟

1) $a = 0$ $\quad f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x \sin x}$

2) $a = +\infty$ $\quad f(x) = x + 1n(x+1) - 1nx$

التمرين الثاني:

احسب التكاملات الآتية؟

1) $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 - 2\cos 2x}\ dx$

2) $\int_1^e \ln x\ dx$

التمرين الثالث:

$a\ ,\ b$ **عددان حقيقيان و** f التابع المعرف على R وفق $f(x) = x^2 + ax + b$ عين $a\ ,\ b$

لكي يكون للتابع f قيمة حدية هي (-1) عند $x = 1$

التمرين الرابع:

$c\ ,\ b\ ,\ a$ ثلاثة أعداد حقيقية , $a \neq 0$ نعلم أن a, b, c هي ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية، نرمز إلى اساسها بالرمز q . كما نعلم أن $3a\ ,\ 2b\ ,\ c$ هي ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابية. احسب q .

ثانياً: أجب عن الأسئلة التالية: (60 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول:

نتأمل المتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(S_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين تدريجياً وفق:

$t_0 = 1$ $\qquad S_0 = 12$

$t_{n+1} = \dfrac{t_n + 2S_n}{3}$ $\qquad S_{n+1} = \dfrac{t_n + 3S_n}{4}$

1) أثبت أن المتتالية $(S_n - t_n)$ هندسية واحسب نهايتها.

2) أثبت أن المتتاليتين $S_n\ ,\ t_n$ متجاورتان.

3) أثبت أن المتتالية وفق $U_n = 3t_n + 8S_n$ ثابتة.

السؤال الثاني:

ادرس تغيرات التابع f المعرف على R وفق العلاقة $f(x) = x\,.\,2^x$ وارسم خطه البياني.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

السؤال الثالث:

ليكن f التابع المعرف على $R\setminus\{1\}$ وفق الصيغة $f(x) = \frac{1}{1-x}$ عندئذٍ يعطى المشتق من المرتبة n بالصيغة

$f^n(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ في حالة $x \neq 1$

السؤال الرابع:

نتأمل المعادلة التفاضلية $E = y`+3y = 2e^{-x}$

1) عين العدد a لكي يكون التابع $a\,e^{-x}$ حلاً لـــــــ E

2) ليكن g تابعاً اشتقاقياً معرف على R $h(x) = g(x) - a\,e^{-x}$ أثبت أن التابع g حلاً لـــــــ E إذاً وفقط إذا كان h حلاً لـــــــ F بحيث $F: y` + 3y = 0$

3) حل المعادلة التفاضلية F واستنتج مجموعة حلول E.

ثالثاً: حل المسألتين: (100 لكل مسألة)

المسألة الأولى: ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = 3\,sin^2 x + 4\,cos^3 x$

1) قارن كلاً من $f(-x)$ و $f(x+2\pi)$ مع $f(x)$

واستنتج أنه يكفي دراسة f على $[0,\overline{\pi}]$

2) أثبت أن $f`(x) = 6\cos x\,\sin x\,(1 - 2\cos x)$ عند x عدد حقيقي .

3) ادرس تغيرات f على $[0,\overline{\pi}]$

4) ارسم الخط البياني لـــــــ f على $[-\overline{\pi},\overline{\pi}]$

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$

1) أوجد D_f

2) أثبت أن $A\,(2,0)$ مركز تناظر لـــــــ C

3) ادرس تغيرات f عند اطراف مجموعة تعريفه واستنتج حالة من مقاربات

4) هل يملك f قيمة حدية أم لا ؟ علل ذلك؟

5) ارسم C في معلم متجانس ؟ 6) ماعدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

7) استنتج رسم الخط البياني للتابع $g(x)=\ln(x-1)-\ln(3-x)$

-انتهت الأسئلة –

من أراد النجاح والتفوق عليه ان يتغلب على النوم والخوف والكسل والتسويف والغضب ان لم تسعى نحو حلمك سيجعلك الأخرون سلما ليصعدوا نحو أحلامهم

أ. محمد رسول صباغ

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مذاكرة الجزء الأول كاملاً «فحص نصفي»

التمرين الأول :

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{x.\sin x}$$

$$= \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x.2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$$

2) $f(x) = x + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + \ln(1) = +\infty$$

التمرين الثاني :

1) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2(1-\cos 2x)}\,dx$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2.2\sin^2 x}\,dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2|\sin x|\,dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 2|\sin x| + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2|\sin x|$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} -2\sin x + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x$$

$$= [2\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + [-2\cos x]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2 - 0 + (-0 + 2) = 4$$

2) $I = \int_1^e \ln x\,dx$

$u = \ln x \qquad u' = \frac{1}{x}$

$v' = 1 \qquad v = x$

$$I = [uv]_1^e - \int_1^e vu'$$

$$= [x.\ln x]_1^e - \int_1^e 1\,dx$$

$$= e - [x]_1^e = 1$$

التمرين الثالث

$C \ni (1,-1)$ مِنْه تحقق معادلته .

$-1 = 1 + a + b \Rightarrow a + b = -2$ (1)

كذلك $f'(1) = 0$

$f'(x) = 2x + a \Rightarrow 0 = 2 + a$

$a = -2 \qquad b = 0$

$f(x) = x^2 - 2x$

التمرين الرابع :

$b = a.q$ ①

$c = b.q = aq^2$ ②

$2(2b) = c + 3a$ ③

نعوض ① و ② في ③

$4a.q = aq^2 + 3a$

$\div\, a \neq 0$

$4q = q^2 + 3 \Rightarrow q^2 - 4q + 3 = 0$

$q = 1$ لا

$q = 3$

ثانياً :

نعرف $h_n = s_n - t_n$

$$\frac{h_{n+1}}{h_n} = \frac{s_{n+1} - t_{n+1}}{s_n - t_n}$$

$$= \frac{\frac{t_n + 3s_n}{4} - \frac{t_n + 2s_n}{3}}{s_n - t_n}$$

$$= \frac{3t_n + 9s_n - 4t_n - 8s_n}{12(s_n - t_n)} = \frac{1}{12}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أي متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{12}$

$$\lim_{n\to+\infty}(s_n-t_n)=0$$

لأنها هندسية أساسها $-1<q<1$

2)

$$t_{n+1}-t_n=\frac{t_n+2s_n}{3}-t_n$$

$$=\frac{2s_n-2t_n}{3}=\frac{2}{3}(s_n-t_n)>0$$

لأن $s_0-t_0=11$ موجب

وكل حد ينتج عن سابقه بالضرب بـ $\frac{1}{12}$ إذن

$$s_n-t_n>0$$

$$s_{n+1}-s_n=\frac{t_n+3s_n}{4}-s_n$$

$$=\frac{t_n-s_n}{4}=-\frac{1}{4}(s_n-t_n)<0$$

ومنه t_n متزايدة تماماً و s_n متناقصة تماماً

فالشرط الأول محقق.

ومن حسابنا في الطلب السابق أن

$$\lim_{n\to+\infty}(s_n-t_n)=0$$

فالشرط الثاني محقق

إذن s_n و t_n متجاورتان.

3) $u_{n+1}-u_n=3t_{n+1}+8s_{n+1}-(3t_n+8s_n)$

$$=t_n+2s_n+2t_n+6s_n-3t_n-8s_n$$

$$=0$$

إذن المتتالية u_n ثابتة.

السؤال الثاني:

$$f(x)=x\cdot e^{x\ln 2}$$

f معرفة ومستمرة واشتقاقية على $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\ln 2}\cdot x\ln 2\, e^{x\ln 2}\right)=0$$

$$f'(x)=e^{x\ln 2}+\ln 2\, e^{x\ln 2}\cdot x$$

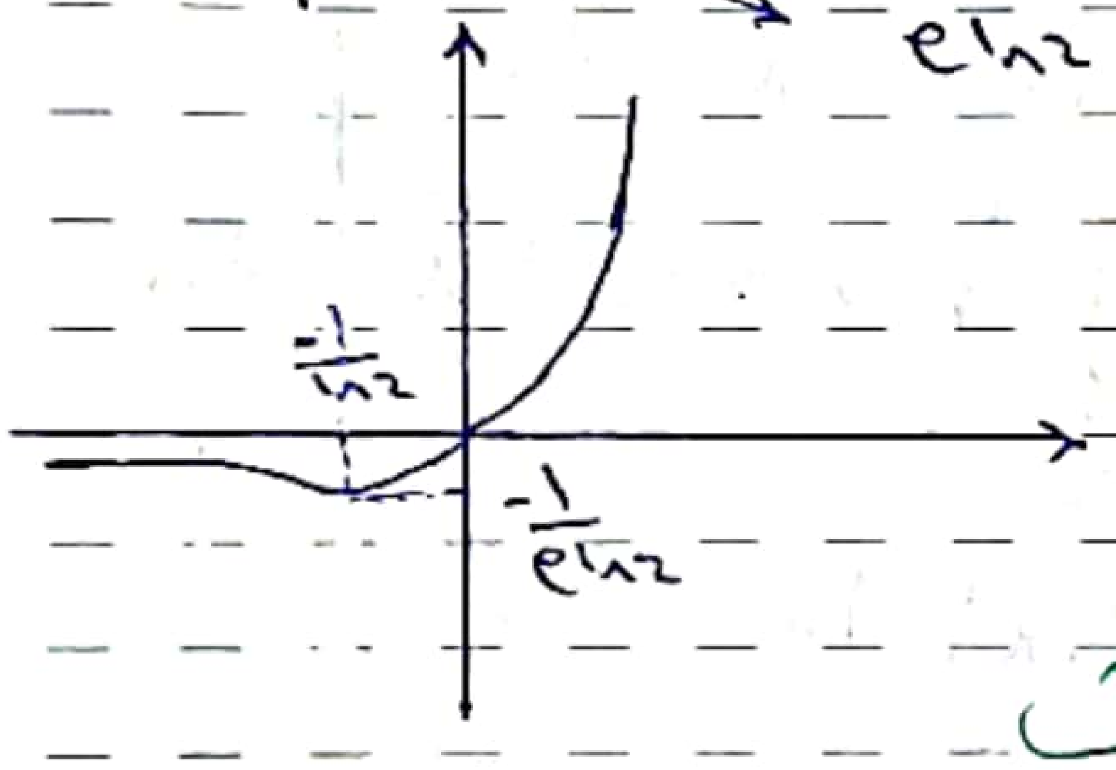
$$=e^{x\ln 2}(1+x\ln 2)$$

$$f'=0 \Rightarrow 1+x\ln 2=0$$

$$x=\frac{-1}{\ln 2}$$

$$f\left(\frac{-1}{\ln 2}\right)=\frac{-1}{\ln 2}\,e^{\frac{-1}{\ln 2}\ln 2}=\frac{-1}{e\cdot\ln 2}$$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{\ln 2}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$\frac{-1}{e\ln 2}$	$\nearrow$	$+\infty$



السؤال الثالث

من أجل $n=1$

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$$

نشتق الطرفين

$$f'(x)=\frac{-(-1)(1)}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$$ محقق

الفرض: $f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

الطلب: $f^{(n+1)}(x)=\frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$

الإثبات: نشتق الفرض

$$\left(f^{(n)}(x)\right)'=\frac{-(n+1)(1-x)^n(-1)n!}{\left((1-x)^{n+1}\right)^2}$$

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{(n+1)n!\,(1-x)^n}{(1-x)^{2n+1}}$$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)!\,(1-x)^{n}}{(1-x)^{2n+1}}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+1}}$$

والعلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي صحيحة.

السؤال الرابع:

$E: y'+3y = 2e^{-x}$

$-ae^{-x}+3ae^{-x} = 2e^{-x}$

$2ae^{-x} = 2e^{-x} \Rightarrow \boxed{a=1}$

٤) $h(x) = g(x) - e^{-x}$

الفرض: h حل لـ F

الطلب: g حل لـ E

مبرهنة: لدينا h حل لـ F

$h'+3h=0 \Rightarrow g'+e^{-x}+3g-3e^{-x}=0$

$g'+3g = 2e^{-x}$

ومنه g حل لـ E.

الفرض: g حل لـ E

الطلب: h حل لـ F

البرهان: لدينا g حل لـ E أي

$g'+3g = 2e^{-x}$

$\underbrace{g'+e^{-x}}-e^{-x}+\underbrace{3g-3e^{-x}}+3e^{-x} = 2e^{-x}$

$h'-e^{-x}+3h+3e^{-x} = 2e^{-x}$

$h'+3h=0$

ومنه h حل لـ F

٢) $y' = -3y \xrightarrow{\text{حلها}} y = Ke^{-3x}$

كان h حل لـ F ومنه

$h = y \Leftrightarrow g-e^{-x} = Ke^{-3x}$

$g = Ke^{-3x}+e^{-x}$

ثالثاً: المسألة الدوال..

$f(x) = 3\sin^2 x + 4\cos^3 x \quad \mathbb{R}$

$f(-x) = 3\sin^2(-x)+4\cos^3(-x) = f$

ومنه f تابع زوجي ومخططه البياني متناظر بالنسبة لـ $y'y$.

$f(x+2\pi) = 3\sin^2(x+2\pi)+4\cos^3(x+2\pi)$
$= 3\sin^2 x+4\cos^3 x$
$= f(x)$

ومنه f تابع دوري دوره $T=2\pi$

لذلك يكفي دراسته على المجال $[0,\frac{T}{2}]$
أي على $[0,\pi]$

$f'(x) = 6\sin x\cos x + 12\cos^2 x(-\sin x)$
$= 6\sin x\cdot\cos x\,(1-2\cos x)$

٣) $f(0)=4 \qquad f(\pi)=-4$

$f' = 6\sin x\cos x\,(1-2\cos x)$

$f'=0 \Rightarrow$

إما $\sin x = 0 \qquad x=\pi K$

$x=0 \qquad f(0)=4$

$x=\pi \qquad f(\pi)=-4$

أو $\cos x = 0 \qquad x = \frac{\pi}{2}+\pi K$

$x=\frac{\pi}{2} \qquad f(\frac{\pi}{2})=3$

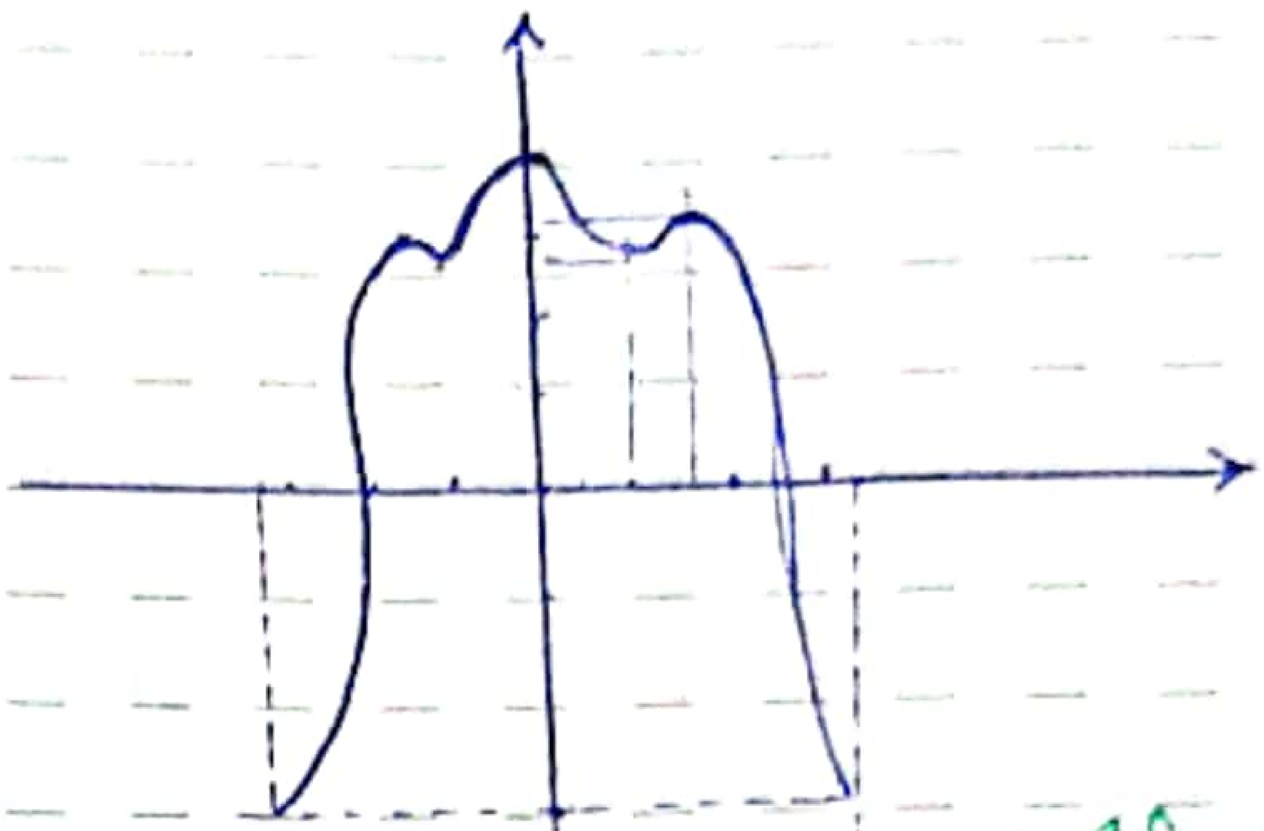
أو $1-2\cos x=0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

إما $x=\frac{\pi}{3} \qquad f(\frac{\pi}{3}) = \frac{11}{4}$

أو $x=-\frac{\pi}{3}$ مرفوض

CamScanner الممسوحة ضوئيا بـ

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
f'	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
f	4	$\searrow$	$\frac{11}{4}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-4



المسألة الثالثة: $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$

1) معرف مجال f: $\frac{x-1}{3-x} > 0$

$D_f =]1,3[$

2) $a = 2 \quad 2a - x = 4 - x$

$b = 0$

$\forall x \in]1,3[\Rightarrow -x \in]-3,-1[$

$4 - x \in]1,3[$

ومنه الشرط الأول محقق.

$f(2a-x) \stackrel{?}{=} 2b - f(x)$

$\ell_1 = f(2a-x) = f(4-x)$

$= \ln\left(\frac{4-x-1}{3-4+x}\right) = \ln\left(\frac{3-x}{-1+x}\right)$

$= \ln\left(\frac{3-x}{x-1}\right) = \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)^{-1} = -f(x)$

$\ell_2 = 2b = -f(x)$

والشرط الثاني محقق.

ومنه $A(2,0)$ مركز تناظر.

3)

$\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 3} f(x) = +\infty$

$f' = \frac{3-x+x-1}{(3-x)^2} \times \frac{3-x}{x-1}$

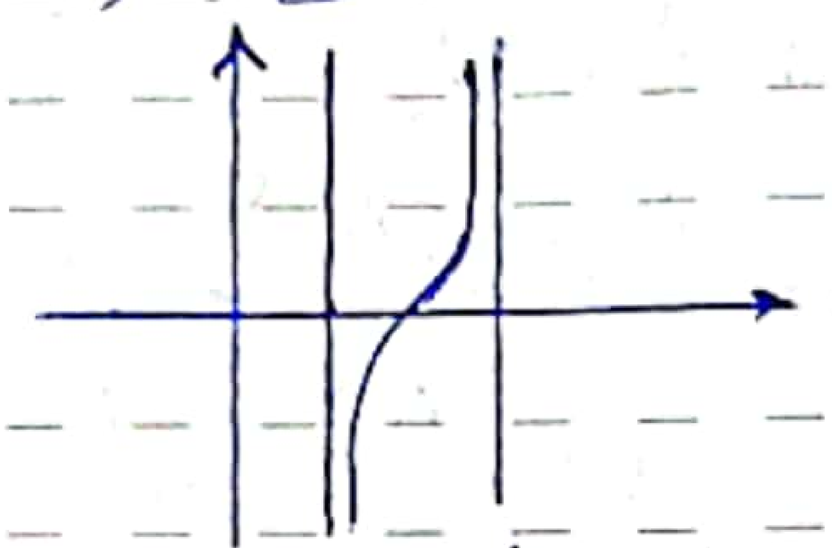
$= \frac{2}{(3-x)(x-1)}$

x	1		3
f'		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$x = 1$ مقارب شاقولي $\parallel y'y$

$x = 3$ " " $\parallel y'y$.

لا تملك أي نقطة حدية لأن f' لم يغير إشارته.



4) نلاحظ من جدول التغيرات أن المعادلة $f(x) = 0$ لها حل وحيد.

5) $g(x) = \ln(x-1) - \ln(3-x)$

$D_g =]1,+\infty[\cap]-\infty,3[$

$=]1,3[$

ومنه f ، g متطابقتان.

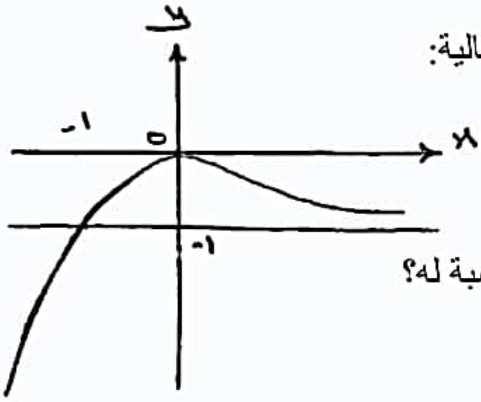
المدرّس: محمد رسول صباغ
0934131159

النموذج الامتحاني الثالث

أولاً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاثة التالية: **(لكل سؤال 45 درجة)**

السؤال الأوّل:

في الشكل المجاور خط بياني C للتابع f ، أجب عن الأسئلة التالية:



1- أوجد D_f و $f(D_f)$.

2- أوجد $f'(0)$ وحل المتراجحة $f'(x) > 0$.

3- ما معادلة المستقيم المقارب للخط C؟ وما وضع C بالنسبة له؟

4- ناقش بحسب K عدد حلول المعادلة $f(x) = K$.

5- عدد القيم الحدية للتابع مبيّناً نوعها.

السؤال الثاني:

لتكن لدينا المجموعة $S = \{2,3,5,6,7,9\}$ ، المطلوب:

1- ما عدد الأعداد المكونة من ثلاث خانات مختلفة مثنى مثنى وأرقامها مأخوذة من S؟

2- ما عدد الأعداد المؤلفة من ثلاث خانات مختلفة مثنى مثنى المضاعفة للعدد 5 والأصغر من 500 وأرقامها مأخوذة من S؟

السؤال الثالث:

لتكن المتتاليات $(u_n)_{n\geq1}, (v_n)_{n\geq1}$ المعرفتان كما يأتي:

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \ , v_n = u_n + \frac{1}{4n}$$

أثبت أن هاتين المتتاليتان متجاورتان.

ثانياً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاثة التالية: **(لكل سؤال 45 درجة)**

السؤال الأول:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x) = \frac{x^3+4-4\cos x}{x^2}$،المطلوب:

1- أوجد $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$.

2- أثبت أن المستقيم $y = x$ مقارب لـ C .

RIE RASOUL INTERNATIONAL EDUCATION
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المدرّس: محمد رسول صباغ
0934131159

السؤال الثاني:

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-(1+2i)z+3+3i=0$

السؤال الثالث:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقطتين $A(0,-2,2),B(4,2,0)$ ، المطلوب:

اكتب معادلة للكرة التي تقبل (AB) قطراً لها .

ثالثاً: حل التمارين الثلاثة التالية: **(80 للأول – 70 للثاني – 70 للثالث)**

التمرين الأول:

في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس لدينا النقاط A,B,C التي تمثلها الأعداد العقدية التالية:

$$Z_A=-4\,,Z_B=-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i\,,Z_C=-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$$

1- اكتب العدد العقدي $\frac{Z_B-Z_A}{Z_C-Z_A}$ بالشكل الجبري ثم الأسي واستنتج طبيعة المثلث ABC .

2- عين Z_D,Z_E ليكون الرباعي $BCDE$ مربعاً مركزه A .

3- عين Γ_1 مجموعة النقاط M التي تحقق: $\|\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=10\sqrt{2}$

4- لتكن Γ_2 مجموعة النقاط التي تحقق $\arg(Z+4)=\frac{\pi}{4}$ ، تحقق أن $B\in\Gamma_2$.

التمرين الثاني:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=x(\ln x)^2$ ، المطلوب:

1- أثبت أن $f(x)$ يكتب بالشكل $f(x)=4\left(\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right)^2$.

2- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها واستنتج خطه البياني .

التمرين الثالث:

نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ كما يأتي: $u_{n+1}=\frac{5u_n+4}{u_n+2}\,,u_0=\frac{1}{2}$ ، المطلوب:

1- مثل الحدود الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ ثم خمن جهة تغيرها ونهايتها المحتملة .

2- نعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ بالعلاقة: $v_n=\frac{u_n-4}{u_n+1}$

a) بيّن أن $(v_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية ، عيّن أساسها .

b) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n وعين نهاية u_n .

RIE RASOUL INTERNATIONAL EDUCATION
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المدرّس: محمد رسول صباغ
0934131159

ربعاً: حل المسألتين الآتيتين: **(100 درجة لكل مسألة)**

المسألة الأولى:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وفق: $f(x)=\frac{2x}{(x-1)^2}$ ، المطلوب:

1- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها واستنتج ما لـ C من تغيرات وادرس الوضع النسبي لكل مقارب وجدته وعين القيم الحدية في حال وجودها.

2- اكتب معادلة المماس d لـ C في نقطة منه فاصلتها $x=0$ ثم ابحث عن النقط المشتركة بين الخط C وهذا المماس .

3- ارسم كل مقارب وجدته وارسم d ثم ارسم C ، واستنتج C_1 الخط البياني للتابع f_1 المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق: $f_1(x)=-\frac{2x}{(x+1)^2}$.

4- استنتج من الرسم البياني للتابع f عدد حلول المعادلة $mx^2-2(m+1)x+m=0$

5- استنتج بيانياً حلول المتراجحة $x \le 2(x-1)^2$.

المسألة الثانية:

في المعلم المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكون النقطة $A(6,1,1)$ والمستويان: $\begin{cases} P_1: x-2y=5 \\ P_2: y+z=4 \end{cases}$

1- أثبت أن المستويان متقاطعان .

2- جد المعادلات الوسيطية للمستقيم Δ الفصل المشترك للمستويين P_1, P_2 .

3- أوجد معادلة المستوي Q المار بـ A العمودي على الفصل المشترك Δ .

4- أوجد إحداثيات B نقطة تقاطع الفصل المشترك Δ مع المستوي Q .

5- احسب بعد النقطة A عن الفصل المشترك Δ .

انتهت الأسئلة

RIE RASOUL INTERNATIONAL EDUCATION
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حل النموذج الرسمي الثالث ..

أولاً : السؤال الأول

1) ج : أي مركبة C على محور الفواصل

$f =]-\infty , +\infty[$

ج) $f($ج$)$ أي مركبة C على محور التراتيب

$f($ج$) =]-\infty , 0]$

2) $f'(0)$ أي المماس أفقي (صفر)

$f'(0) = 0$

$f'(x) > 0$ أي f متزايدة تماماً

$x \in]-\infty , 0[$

3) $y = -1$

4)
$K \in]-\infty , -1[$ حل وحيد

$K = -1$ " "

$K \in]-1 , 0[$ حلين

$K = 0$ حل وحيد

$K \in]0 , +\infty[$ مستحيلة الحل .

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{4(n+1)} - u_n - \frac{1}{4n}$$

$$= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{4(n+1)} - \frac{1}{4n}$$

$$= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} + \frac{-1}{4n(n+1)}$$

$2n \qquad 2n+1$

$$= \frac{-1}{4n(n+1)(2n+1)} < 0$$

فهي متناقصة تماماً

فالشرط الأول محقق

$$v_n - u_n = \frac{1}{4n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4n}\right) = 0$$

والشرط الثاني محقق

فالمتتاليتان متجاورتان .

السؤال الثاني

وحسب المبدأ الأساسي بالعد

الخانة الأولى $= 6$

الثانية " $= 5$

الثالثة " $= 4$

$6 \times 5 \times 4 = 120$

الآحاد $= 1$

العشرات $= 2$

المئات $= 4$

وحسب المبدأ الأساسي بالعد

$1 \times 2 \times 4 = 8$

ثانياً : السؤال الأول

$$f(x) = \frac{x^3 + 4(1-\cos x)}{x^2} = \frac{x^3 + 4 \cdot 2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= \frac{x^3}{x^2} + 8\,\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= x + 8\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2$$

$$= x + 8\left(\frac{\sin x/2}{2\,\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 + 8\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3$$

$$f(x) - y_\Delta = 8\left(\frac{\sin x/2}{x}\right)^2$$

$$0 \le \sin^2\frac{x}{2} \le 1$$

$$0 \le \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$$

السؤال الثالث

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n+2}$$

$+\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}$

$$- \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \dots - \frac{1}{2n}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

$1 \qquad 2$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{-1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} > 0$$

$2n+2 \qquad 2n+1$

فهي متزايدة تماماً .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$0 \leq \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2 \leq \frac{1}{x^2}$$

$$0 \leq 8\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2 \leq \frac{8}{x^2}$$

$$0 \leq f - y \leq \frac{8}{x^2}$$

حسب مبرهنة الإحاطة (1) $\lim_{x \to +\infty}(f - y) = 0$

ومنه $y = x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

السؤال الثالث

مركز الكرة في منتصف [AB]

$\Omega(2, 0, 1)$

$2R = AB = \sqrt{16 + 16 + 4} = \sqrt{36} = 6$

$R = 3$

$(x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 36$

ثانياً:

التمرين المحلول

1)

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i + 4}{-\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i + 4}$$

$$= \frac{\frac{5}{2} + \frac{5}{2}i}{\frac{5}{2} - \frac{5}{2}i} = \frac{1+i}{1-i}$$

$$= \frac{(1+i)^2}{1+1} = i = e^{\frac{\pi}{2}i}$$

المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين.

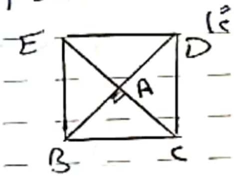
2)

D نظيرة B بالنسبة لـ A

$z_D = 2z_A - z_B$

$= -8 + \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$

$= -\frac{13}{2} - \frac{5}{2}i$



E نظيرة C بالنسبة لـ A.

$z_E = 2z_A - z_C = -8 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$

$= \frac{-13}{2} + \frac{5}{2}i$

3) A مركز أبعاد متناسبة $(B,1)(C,1)(D,1)(E,1)$

M نقطة من الفراغ

$\vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} + \vec{ME} = 4\vec{MA}$

نعوض في علاقة السابقة

$\|4\vec{MA}\| = 10\sqrt{2} \Rightarrow \|\vec{MA}\| = \frac{5}{2}\sqrt{2}$

سطح كرة مركزها A

ونصف قطرها

$R = \frac{25}{4}$

4)

$z_B + 4 = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i + 4 = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}i$

$\arg(z_B + 4) = \frac{\pi}{4}$

ومنه $z_B \in \Gamma_2$.

السؤال الثاني

$a = 1 \quad b = -(1 + 2i) \quad c = 3 + 3i$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (1 + 2i)^2 - 4(3 + 3i)$

$= 1 + 4i - 4 - 12 - 12i$

$= -15 - 8i$

نفرض $\sqrt{\Delta} = x + iy$

$x^2 - y^2 = -15 \quad (1)$

$x^2 + y^2 = 17 \quad (2)$

$2xy = -8 \quad (3)$

نجمع (1) و(2) $2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1$

$x = \mp 1$

نعوض في (2) $y^2 = 16 \Rightarrow y = \mp 4$

من (3) الإشارات مختلفة

$\sqrt{\Delta_1} = 1 - 4i$

$\sqrt{\Delta_2} = -1 + 4i$

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta_1}}{2a} = \frac{1 + 2i - 1 + 4i}{2} = 3i$$

$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta_2}}{2a} = \frac{1 + 2i + 1 - 4i}{2a} = 1 - 2i$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

التمرين الثاني

$f(x) = x(\ln x)^2$

$= (\sqrt{x}\ln x)^2$

$= (\sqrt{x}\cdot 2\cdot \frac{1}{2}\ln x)^2$

$= (2\sqrt{x}\ln x^{\frac{1}{2}})^2 = 4(\sqrt{x}\ln\sqrt{x})^2$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,\infty[$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 4(\sqrt{x}\ln\sqrt{x})^2 = 4(0) = 0$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = (\ln x)^2 + 2(\ln x)(\frac{1}{x})(x)$

$= (\ln x)^2 + 2\ln x$

$f' = 0 \Rightarrow (\ln x)^2 + 2\ln x = 0$

$\ln x(\ln x + 2) = 0$

إما $\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

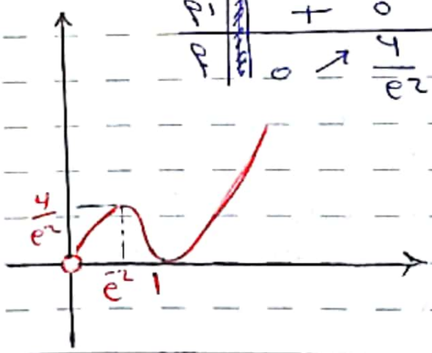
$f(1) = 1(0) = 0$

أو $\ln x = -2 \Rightarrow x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

$f(e^{-2}) = e^{-2}(4)$

$= \frac{4}{e^2}$

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



التمرين الثالث

$u_{n+1} = f(u_n)$

$f(x) = \frac{5x+4}{x+2}$ ، $]-2,+\infty[$

$\lim_{x\to -2} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 5$

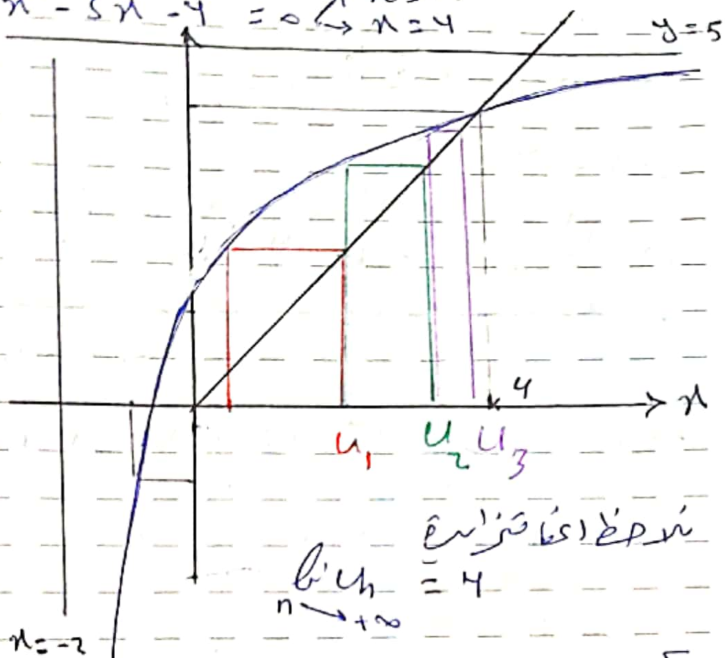
$f'(x) = \frac{5x+10-5x-4}{(x+2)^2} = \frac{6}{(x+2)^2} > 0$

x	-2		$+\infty$
f'		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	5

نحل المعادلة $f(x) = x$

$\frac{5x+4}{x+2} = x \Rightarrow 5x+4 = x^2+2x$

$x^2 - 3x - 4 = 0$ ، $x = -1$ ، $x = 4$



نلاحظ أنها متزايدة

$\lim_{n\to+\infty} u_n = 4$

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}-4}{u_{n+1}+1} \times \frac{u_n+1}{u_n-4}$

$= \frac{\frac{5u_n+4}{u_n+2}-4}{\frac{5u_n+4}{u_n+2}+1} \times \frac{u_n+1}{u_n-4}$

$= \frac{5u_n+4-4u_n-8}{5u_n+4+u_n+2} \times \frac{u_n+1}{u_n-4}$

$= \frac{u_n-4}{6u_n+6} \times \frac{u_n+1}{u_n-4} = \frac{1}{6}$

v_n متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{6}$

$v_n = v_0 \cdot q^n$ لكن $v_0 = \frac{u_0-4}{u_0+1} = \frac{-\frac{7}{2}}{\frac{3}{2}}$

$= -\frac{7}{3}$

$v_n = -\frac{7}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

للوصل $u_n = \frac{v_n - 4}{v_n + 1}$ ⇒

$u_n v_n + u_n = v_n - 4$

$u_n v_n - v_n = -u_n - 4$

$v_n = \frac{-u_n - 4}{u_n - 1}$

$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{-4-4}{-4-1} = \frac{-8}{-5} = \frac{8}{5}$

المسألة الأولى :

١) $f(x) = \frac{2x}{(x-1)^2}$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$

$f'(x) = \frac{2(x-1)^2 - 2(x-1)(2x)}{(x-1)^4}$

$= \frac{2(x-1)(-1-x)}{(x-1)^4} = \frac{-1-x}{(x-1)^3}$

$f' = 0 \Rightarrow x = -1$ $x = -1$

$f(-1) = -\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	‖	$-$	
f	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗ $+\infty$	‖ $+\infty$	↘	0

$y = 0$ مقارب أفقي منطبق على $x'x$

لدراسة الوضع $f(x) - y = \frac{2x}{(x-1)^2}$

$x > 0$ $f - y > 0$ C فوق Δ

$x < 0$ $f - y < 0$ C تحت Δ

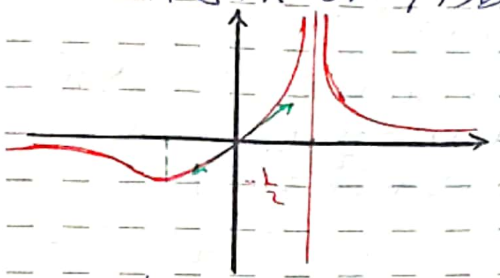
المقام موجب فالبسط هو صاحب القرار بالإشارة.

$f(-1) = -\frac{1}{2}$ قيمة حدية صغرى.

٢) $f(0) = 0$ نقطة التماس $(0,0)$

$m = f'(0) = 1$

نرسم معادلة المماس $T: y = x$



لإيجاد نقاط تقاطع C مع المماس نحل جملة معادلة المماس والمنحني حيث مشتركة.

$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{2x}{(x-1)^2} = x$

$2x = x(x-1)^2$

$x(2-(x-1)^2) = 0$ إما $x = 0$

أو $(x-1)^2 = 2$

إما $x - 1 = \sqrt{2} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{2}$

أو $x - 1 = -\sqrt{2} \Rightarrow x = 1 - \sqrt{2}$

أي هنالك ثلاث نقاط مشتركة

$f_1(x) = -\frac{2x}{(x+1)^2} = f(-x)$

$(x, y) \to (-x, y)$

C_1 نظير C بالنسبة لـ $y'y$.

٤) $mx^2 - 2(m+1)x + m = 0$

$mx^2 - 2mx - 2x + m = 0$

$mx^2 - 2mx + m = 2x$

$m(x^2 - 2x + 1) = 2x$

$m = \frac{2x}{x^2 - 2x + 1}$ ⟸

$f(x) = m$

$m \in]-\infty, -\frac{1}{2}[$ مستحيلة الحل

$m = -\frac{1}{2}$ حل وحيد

$m \in]-\frac{1}{2}, 0[$ حلين

$m = 0$ حل وحيد

$m \in]0, +\infty[$ حلين

٥) $x < 2(x-1)^2 \Leftrightarrow \frac{2x}{(x-1)^2} < 4$

نضرب الطرفين بـ 2

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$\Rightarrow f(x) \le 4$

$\frac{2x}{(x-1)^2} = 4$

$x = 2(x-1)^2 \Rightarrow x = 2x^2 - 4x + 2$

$2x^2 - 5x + 2 = 0$

$\Delta = 25 - 16 = 9$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+3}{4} = 2$

ومنه حل المتراجحة $f(x) \le 4$

$x \in]-\infty, \frac{1}{2}] \cup [2, +\infty[$

ثانياً) Δ عمودي على المستوي P

Δ يقطع P في B.

A تنتمي لـ P ومنه بعد A عن Δ هو المسافة بين A و B

$AB = \sqrt{1+0+4} = \sqrt{5}$

طريقة 2

نختار النقطة K من الفصل المشترك

$M(\quad K(5+2t, t, 4-t)$

$AK = \sqrt{(1-2t)^2 + (t-1)^2 + (3-t)^2}$

$= \sqrt{1 - 4t + 4t^2 + t^2 - 2t + 1 + 9 - 6t + t^2}$

$= \sqrt{6t^2 - 12t + 11}$

$= \sqrt{6(t^2 - 2t + 1 - 1) + 11}$

$= \sqrt{6(t-1)^2 + 11 - 6} =$

نختار أقصر مسافة وذلك من أجل $t = 1$

$AK = \sqrt{5}$

وهو بعد A عن Δ.

المسألة الثانية :

$A(6, 1, 1)$

1)

$x - 2y = 5 \quad (1)$

$y + z = 4 \quad (2)$

$\vec{n}_1(1, -2, 0)$, $\vec{n}_2(0, 1, 1)$ } غير مرتبطين خطياً فالمستويان متقاطعان

2)

من (1) $x = 5 + 2y$

من (2) $z = 4 - y$

بفرض $y = t$ نجد

$x = 5 + 2t$

$y = t \qquad t \in \mathbb{R}$

$z = 4 - t$

3) Q عمودي على الفصل المشترك لـ P_1, P_2

$\vec{n}_Q = \vec{u}(2, 1, -1)$

$Q: 2x + y - z + d = 0$

نعوض A

$12 + 1 - 1 + d = 0 \Rightarrow d = -12$

$Q: 2x + y - z - 12 = 0$

4) نعوض المعادلات الوسيطية للفصل المشترك في Q

$10 + 4t + t - 4 + t = 12$

$6t = 6 \Rightarrow t = 1$

$B(7, 1, 3)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المدرّس: محمد رسول صباغ
0934131159

النموذج الامتحاني الثاني

أولاً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاثة التالية: **(لكل سؤال 45 درجة)**

السؤال الأوّل:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقطتين $A(2,5,3), B(-1,0,-1)$ ومستوياً P يقبل $\vec{u}(1,1,-2), \vec{v}(3,-1,-1)$ شعاعا توجيه له. أثبت أن المستقيم AB عمودي على المستوي P.

السؤال الثاني:

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفه على $\mathbb{N}^*$ وفق: $u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ ، المطلوب:

1- جد نهاية هذه المتتالية .

2- نضع $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$:

a) أثبت أن $S_n = \ln(n+1)$.

b) ما نهاية $(S_n)_{n\geq 0}$؟

السؤال الثالث:

ليكن f تابع معرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وفق: $f(x) = \frac{ax^2+bx+1}{x-1}$ حيث $a,b \in \mathbb{R}$ ، المطلوب:

عين a,b ليكون للتابع قيمة حدية هي $f(-1) = 0$.

ثانياً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاثة التالية: **(لكل سؤال 45 درجة)**

السؤال الأول:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ ، المطلوب:

1- ادرس نهاية f عند $-\infty$ واشرح التأويل الهندسي لهذه النتيجة.

2- أثبت أن المستقيم $y = 2x$ مقارب لـ C في جوار $+\infty$ وادرس وضعه النسبي

السؤال الثاني:

كم كلمة من ثلاث حروف يمكننا تكوينها انطلاقاً من كلمة $SYRIA$؟

RIE RASOUL INTERNATIONAL EDUCATION
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

السؤال الثالث:

اكتب معادلة للمخروط الذي رأسه $A(1,0,0)$ ومحوره $(O,\vec{i})$ وقاعدته الدائرة التي مركزها $B(4,0,0)$ ونصف قطرها 3.

ثالثاً: حل التمارين الثلاثة التالية: **(80 للأول – 70 للثاني – 70 للثالث)**

التمرين الأول:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \frac{2x^2-x-1}{x^2+x+1}$، المطلوب:

1- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها واستنتج مقارب C الموازي لـ $x'x$.

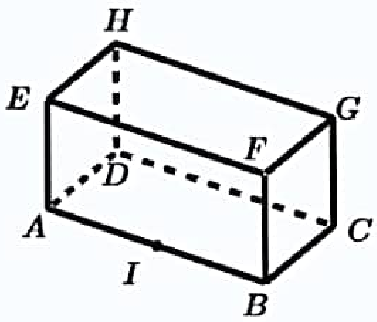
2- ادرس الوضع النسبي لهذا المقارب وعيّن ما له من قيم حدية.

3- ارسم كل مقارب وجدته، ثم ارسم C.

4- برهن أن التابع $h(x) = f(|x|)$ تابع زوجي ثم استنتج رسم C' الخط البياني للتابع h .

التمرين الثاني:

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه: $AB = 2, BC = CG = 1$ ، ولتكن I منتصف $[AB]$ ، المطلوب:



1- أعطِ معلماً متجانساً مبدؤه A.

2- اكتب معادلة للمستوي (IFH).

3- احسب بعد G عن المستوي (IFH) ، أينتمي المسقط القائم للنقطة G على المستوي (IFH) إلى المستقيم (IH)؟

التمرين الثالث:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}^*$ وفق: $f(x) = \frac{1}{x}$ ، المطلوب:

1- اكتب معادلة المماس لـ f في نقطة منه فاصلتها $x = 1$.

2- أثبت أنه أيّاً كانت $n \in \mathbb{N}^*$ فإن: $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}$.

3- ليكن g التابع المعرف على $]0,+\infty[$ وفق: $g(x) = \ln x$. احسب $g'(x)$ وبالاستناد إلى الطلب السابق استنتج أنّه أيّاً تكن $n \in \mathbb{N}^*$ كان $g^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$.

RIE RASOUL INTERNATIONAL EDUCATION
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المدرّس: محمد رسول صباغ
0934131159

ربعاً: حل المسألتين الآتيتين: **(100 درجة لكل مسألة)**

المسألة الأولى:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على D_f وفق: $f(x) = \ln(ax+b)$، المطلوب:

1- عيّن a, b علماً أن المستقيم $x = \frac{1}{2}$ مقارب لـ C وأن C يقطع المحور

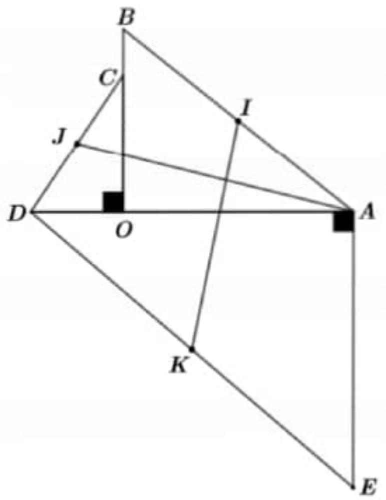
2- من أجل $a = 2, b = -1$:

a) أوجد D_f ثم ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

b) ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C واستنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع f_1 المعرف بالعلاقة: $f_1(x) = |\ln(2x-1)|$.

3- برهن أن f تقابل ثم عين تقابله العكسي f^{-1} واستنتج رسم الخط البياني لـ f^{-1}.

المسألة الثانية:



نتأمل في المستوي الموجه الشكل المجاور المثلثات $ADE - OCD - OAB$ مثلثات النقاط I, J, K هي منتصفات أوتار هذه المثلثات، نهدف إلى إثبات تعامد وتساوي المستقيمين IK, AJ . نختار معلماً متجانساً مباشراً مبدؤه O ونرمز c, a إلى العددين العقديين الممثلين للنقطتين C, A.

1- a) عبر بدلالة c, a عن الأعداد العقدية التي تمثل النقاط E, D, B.

b) استنتج الأعداد العقدية Z_K, Z_J, Z_I التي تمثل النقاط K, J, I.

2- أثبت أن $Z_K - Z_I = i(Z_J - a)$ ثم استنتج الخواص المطلوبة

انتهت الأسئلة

RIE RASOUL INTERNATIONAL EDUCATION
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حل النموذج الرسولي الثالث ...

أولاً: السؤال الأول

$\vec{AB}(-3,-5,-4)$

$\vec{u}(1,1,-2)$, $\vec{v}(3,-1,-1)$ $\Big\}$ غير مرتبطان خطياً $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{-1}$

$\vec{AB}\cdot\vec{u} = -3-5+8=0 \Rightarrow AB \perp u$

$\vec{AB}\cdot\vec{v} = -9+5+4=0 \Rightarrow AB \perp v$

AB عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطياً فهو عمودي على مستويهما.

السؤال الثاني

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln(1) = 0$

2)

$u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$

$u_1 = \ln(2)$

$u_2 = \ln(3) - \ln(2)$

$u_3 = \ln(4) - \ln(3)$

$\vdots$

$u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$ +

$u_1+u_2+u_3+\dots+u_n = \ln(n+1)$

$S_n = \ln(n+1)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

السؤال الثالث

$C \ni (-1,0)$ يحقق معادلته

$0 = \frac{a-b+1}{-1-1} \Rightarrow a-b+1=0$ الآن

نعلم أن $f'(-1)=0$

$f'(x) = \frac{(2ax+b)(x-1)-(ax^2+bx+c)}{(x-1)^2}$ معدوم بسبب (1)

$0 = \frac{(-2a+b)(-2)-(a-b+1)}{(-1-1)^2}$

$\Rightarrow (-2a+b)(-2) = 0 \Rightarrow$

$-2a+b=0$ ... (2)

نحل (1) و (2) نجد

$-a=-1 \Rightarrow a=1$

$b=2$

$f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x-1}$

ثانياً:

$f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty+\infty$ عدم تعيين

نضرب بالمرافق.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x^2-1}{\underbrace{x-\sqrt{x^2+1}}_{-\infty}}\right) = 0$

ومنه الخط الذي معادلته $y=0$ مقارب أفقي منطبق على $x'x$ في جوار $-\infty$.

$y = 2x$

$f(x) - y = x + \sqrt{x^2+1} - 2x$
$= -x + \sqrt{x^2+1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f-y) = -\infty+\infty$ عدم تعيين

نضرب بالمرافق.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y) = \lim\left(\frac{x^2-x^2-1}{\underbrace{-x-\sqrt{x^2+1}}_{+\infty}}\right) = 0$

إذن $y=2x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

ولدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة الفرق

$f(x) - y = \sqrt{x^2+1} - x > 0$

لأن $x^2+1 > x^2$

$\sqrt{x^2+1} > x \Rightarrow \sqrt{x^2+1} - x > 0$

$f(x) - y > 0$

ومنه C فوق Δ.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

السؤال الثاني

وحسب المبدأ الأساسي بالعد

الخانة الأولى $= 5$

〃 الثانية $= 5$

〃 الثالثة $= 5$

عدد الكلمات $= 5 \times 5 \times 5 = 125$ كلمة

السؤال الثالث :

$$y^2 + z^2 = \frac{R^2}{h^2} x^2 \qquad \underset{\text{سفلي}}{x} \le x \le \underset{\text{علوي}}{x}$$

$$h = x_B - x_A = 4 - 1 = 3$$

$$R = 3$$

$$y^2 + z^2 = \frac{9}{9} x^2 \qquad 1 \le x \le 4$$

ثالثاً : التمرين الأول

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 + x + 1} \qquad \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 2$$

$y = 2$ مقارب أفقي للخط .

$$f'(x) = \frac{(4x-1)(x^2+x+1) - (2x+1)(2x^2-x-1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{\cancel{4x^3} + 4x^2 + 4x - x^2 - \cancel{x} - 1 - \cancel{4x^3} + \cancel{2x^2} + 2x - \cancel{2x^2} + \cancel{x} + 1}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{3x^2 + 6x}{(x^2+x+1)^2} \qquad f' = 0$$

$$3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0$$

إما $x = 0 \qquad f(0) = -1$

أو $x = -2 \qquad f(-2) = \frac{9}{3} = 3$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2

$f(-2) = 3$ قيمة حدية كبرى

$f(0) = -1$ 〃 〃 صغرى

لدراسة الوضع النسبي للمقارب ندرس إشارة الفرق .

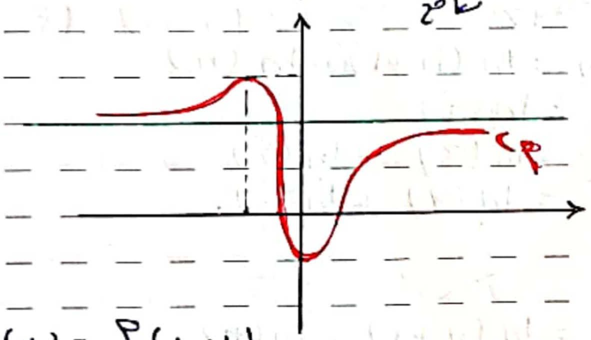
$$f(x) - y_\Delta = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 + x + 1} - 2$$

$$= \frac{-3x - 3}{x^2 + x + 1}$$

$f - y = 0 \Rightarrow x = -1$

المقام موجب دائماً لأنه معادلة مستحيلة الحل مميزها سالب تماثل إشارة أمثال x^2

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f - y$		$+$	0	$-$	
الوضع		C_f فوق Δ	نقطة تقاطع	C_f تحت Δ	



$$h(x) = f(|x|)$$

$$h(-x) = f(|-x|) = f(|-1|\cdot|x|)$$

$$= f(|x|)$$

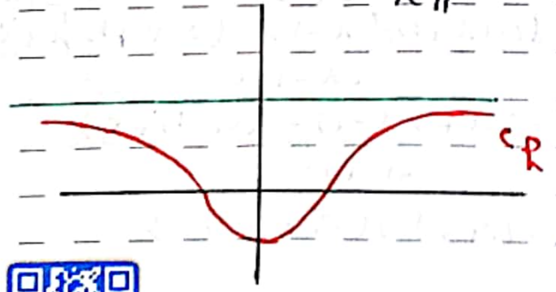
ومنه h تابع زوجي وخطه البياني متناظر بالنسبة لـ $y'y$.

* في حال $x \in [0, +\infty[$ نجد

$h(x) = f(x)$ أي

C_f و C_h منطبقان في هذا المجال

وبما أن h زوجي فهو متناظر بالنسبة لـ $y'y$ أي في حال $x < 0$ نأخذ نظير النقاط عند $x \ge 0$



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

التمرين الثاني: أ) $(A; \frac{1}{2}\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

$A(0,0,0)$ $B(2,0,0)$ $C(2,1,0)$

$D(0,1,0)$ $E(0,0,1)$ $F(2,0,1)$

$H(0,1,1)$ $G(2,1,1)$ $I(1,0,0)$

٢) غير مرتبطان خطياً.

$\vec{IF}(1,0,1)$, $\vec{IH}(-1,1,1)$

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n}\cdot\vec{IF}=0 \Rightarrow a+c=0$ ...1

$\vec{n}\cdot\vec{IH}=0 \Rightarrow -a+b+c=0$ ...2

نفرض $a=1 \rightarrow c=-1$, $b=2$

$\vec{n}(1,2,-1)$

$IFH: x+2y-z+d=0$

نعوض I

$1+d=0 \Rightarrow d=-1$

$IFH: x+2y-z-1=0$

$$dist(G,IFH)=\frac{|2+2-1-1|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{2}{\sqrt{6}}$$

* لنحسب البعد G عن (IH)

$\vec{u}=\vec{IH}(-1,1,1)$

$x=x_I+at=1-t$

$y=y_I+bt=t$ $\quad t\in\mathbb{R}$

$z=z_I+ct=t$

لتكن K من المستقيم IH اذن

$K(1-t,t,t)$

$$GK=\sqrt{(1+t)^2+(t-1)^2+(t-1)^2}$$

$$=\sqrt{3t^2-2t+3}$$

$$=\sqrt{3\left(t^2-\frac{2}{3}t+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\right)+3}$$

$$=\sqrt{3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}+3}$$

$$=\sqrt{3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{3}}$$

نحصل على أصغر قيمة وذلك من أجل $t=\frac{1}{3}$

وهو البعد G عن المستقيم (IH) $\quad GK=\sqrt{\frac{8}{3}}$

وبما أن البعد G عن المستوي لا يساوي البعد G عن المستقيم.

اذن المسقط القائم لـ G على المستوي IFH لا ينتمي للمستقيم (IH).

التمرين الثالث:

$f(1)=1$

نقطة تماس $(1,1)$

$f'(x)=\frac{-1}{x^2}$

$m=f'(1)=-1$

$y-1=-1(x-1)$ معادلة المماس

$y=-x+2$

* من أجل $n=1$

$f'(x)=\frac{(-1)^1\cdot 1!}{x^{1+1}}=\frac{-1}{x^2}$

وهي محققة

الفرض: $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n\cdot n!}{x^{n+1}}$

الطلب: $f^{(n+1)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n+1)!}{x^{n+2}}$

الاثبات: نشتق الفرض

$$\left(f^{(n)}(x)\right)'=\frac{0-(n+1)x^n(-1)^n n!}{(x^{n+1})^2}$$

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{(-1)(-1)^n(n+1)n!\,\cancel{x^n}}{x^{2n+2}}$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n+1)!}{x^{n+2}}$$

والعلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي صحيحة.

$g(x)=\ln(x)$

$g'(x)=\frac{1}{x}=f(x)$

لذلك نستبدل كل n بـ $n-1$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المسألة الأولى: لإيجاد a و b علماً أن المستقيم $x=\frac{1}{2}$ مقارب لـ C وأن C يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها $x=1$

(1) $D =]-\frac{b}{a}, +\infty[$

$\lim_{x\to -\frac{b}{a}} f(x) = -\infty$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x=-\frac{b}{a} & \text{مقارب} \\ x=\frac{1}{2} & \text{"} \end{cases}$

$-\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{a=-2b}$ ...(1)

C يقطع $x'x$ $\Rightarrow$ $f(1)=0$

$\ln(a+b) = 0 = \ln(1)$

$a+b=1$ ...(2)

نعوض (1) في (2)

$-2b+b=1 \Rightarrow b=-1$, $a=2$

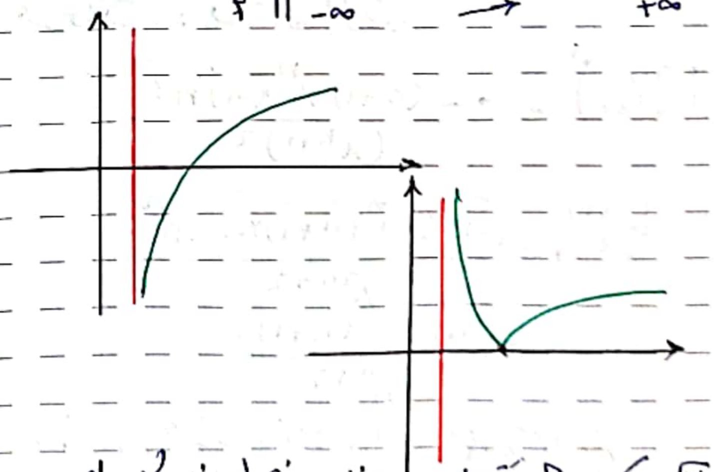
$f(x) = \ln(2x-1)$

(2) a) $D_f =]\frac{1}{2}, +\infty[$

$\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = -\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \frac{2}{2x-1} > 0$

x	$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'	||	$+$	
f	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



(3) يكون f تقابل إذا وفقط إذا كان للمعادلة $y=f(x)$ حل وحيد

$\ln(2x-1) = y$

$e^{\ln(2x-1)} = e^y$

$2x-1 = e^y \Rightarrow x = \frac{e^y+1}{2}$

للمعادلة حل وحيد

ومنه f تقابل

$f^{-1}(x) = \frac{e^x+1}{2}$ وتابعه العكسي

$C_{f^{-1}}$ نظير C_f بالنسبة لمنصف الربعين الأول والثالث

المسألة الثانية:

نختار معلماً عقدياً متجانساً $(O, \vec{u}, \vec{v})$

في المثلث القائم OAB لدينا

B: نظيرة A وفق دوران مركزه (O) وزاويته $\frac{\pi}{2}$ وبالاتجاه المباشر

$z'-w = e^{i\theta}(z-w)$

$b = ia \xrightarrow{\times(-i)} -ib = a$

في المثلث القائم OCD لدينا

D: نظيرة C وفق دوران مركزه (O) وزاويته $\frac{\pi}{2}$ وبالاتجاه المباشر

$d = ic \xrightarrow{\times(-i)} -id = c$

في المثلث القائم ADE لدينا

E: نظيرة D وفق دوران مركزه (A) وزاويته $\frac{\pi}{2}$ وبالاتجاه المباشر

$e - a = i(d-a)$

$e = id - ia + a$

$I = \frac{a+b}{2}$ $\quad$ $J = \frac{d+c}{2}$

$K = \frac{e+d}{2}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$\vec{IK} = K - I = \frac{e+d}{2} - \frac{a+b}{2} = \frac{e+d-a-b}{2}$

$= \frac{id - ia + \cancel{a} + d - \cancel{a} - b}{2} = \frac{id - ia + d - ia}{2} = \frac{id + d - 2ia}{2}$

$\vec{IK} = \frac{1}{2}d(1 + i) - ia \quad \ldots *$

$\vec{AJ} = J - a = \frac{d+c}{2} - a = \frac{d - id}{2} - a = \frac{1}{2}d(1 - i) - a \quad \ldots **$

نضرب ** بـ i $\qquad i\vec{AJ} = \frac{1}{2}d(i+1) - ia$

$= \vec{IK}$

$\vec{IK} = i\vec{AJ} \rightarrow \vec{IK} \perp \vec{AJ}$

$\rightarrow IK = AJ$

نستبدل c بـ i بالسار كما وذلك
لكي يكون هنالك توافق بين
مقدار العقدية الموجودة في * و **

$\vec{ت} = i\,\vec{ق} \rightarrow \vec{ق} \perp \vec{ت}$

$\rightarrow |\vec{ت}| = |\vec{ق}|$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المدرّس: محمد رسول صباغ
RIE RASOUL
0934131159

النموذج الامتحاني الأول

أولاً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاثة التالية: **(لكل سؤال 45 درجة)**

السؤال الأوّل:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق: $f(x)=\frac{x^2-5x+1}{x+1}$ ، المطلوب:

1- جد الأعداد التي تحقق: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$.

2- أثبت أن $y=ax+b$ مقارب مائل في جوار $\pm\infty$ وادرس الوضع النسبي .

السؤال الثاني:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $(\ln x)^2+3\ln x+2=0$

السؤال الثالث:

اكتب بالشكل المثلثي العدد العقدي $Z=\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$.

ثانياً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاثة التالية: **(لكل سؤال 45 درجة)**

السؤال الأول:

$ABCD$ رباعي وجوه ، G مركز ثقل المثلث BCD ، جد مجموعة النقاط من الفراغ التي تحقق:

$$\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}\right\|$$

السؤال الثاني:

عين قيمة n في الحالة الآتية: $P_n^2=5P_{n-1}^1$.

السؤال الثالث:

لتكن لدينا المتتالية $u_n=4n+1$ ، أثبت أن المتتالية حسابية ، عين أساسها واحسب

$$u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{10}$$

RIE RASOUL INTERNATIONAL EDUCATION
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المدرّس: محمد رسول صباغ
0934131159

ثالثاً: حل التمارين الثلاثة التالية: (80 للأول – 70 للثاني – 70 للثالث)

التمرين الأول:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \frac{x+2}{|x|+1}$ ، المطلوب:

1- ادرس قابلية f للاشتقاق عند الصفر من اليمين، ثم اكتب معادلة نصف المماس من اليمين لخطه البياني C_f في النقطة $A(0,2)$.

2- ادرس قابلية f للاشتقاق عند الصفر من اليسار، ثم اكتب معادلة نصف المماس من اليسار لخط البياني C_f في النقطة $A(0,2)$.

3- ارسم نصفي المماسين السابقين وارسم C_f في المجال $[-2,2]$.

التمرين الثاني:

ليكن $\alpha = e^{\frac{2\pi}{5}i}$ ، $A = \alpha + \alpha^4$ ، $B = \alpha^2 + \alpha^3$ ، المطلوب:

1- أثبت أن $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$ ، استنتج أن A, B هما جذرا المعادلة من الدرجة الثانية $x^2 + x - 1 = 0$.

2- عبر عن A بدلالة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

3- حل المعادلة $x^2 + x - 1 = 0$ ، واستنتج قيمة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

التمرين الثالث:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كما يأتي: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2} \end{cases}$ ، المطلوب:

1- أثبت أن $(u_n)_{n\geq 0}$ تحقق $0 \leq u_n \leq 1$.

2- أثبت أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة .

3- علل تقارب المتتالية u_n واحسب نهايتها .

RIE RASOUL INTERNATIONAL EDUCATION
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المدرّس: محمد رسول صباغ
0934131159

رابعاً: حل المسألتين الآتيتين: **(100 درجة لكل مسألة)**

المسألة الأولى:

نتأمل النقطتين $A(1,1,1), B(3,2,0)$ في الفراغ، وليكن P المستوي المار بالنقطة B ويقبل $\overrightarrow{AB}$ ناظماً له ، Q المستوي الذي معادلته $Q: x - y + 2z + 4 = 0$ ، ولتكن s الكرة التي مركزها A ونصف قطرها AB ، المطلوب:

1- أوجد معادلة المستوي P .

2- جد معادلة الكرة .

3- أثبت أن المستوي Q يمس الكرة s .

4- أثبت أن النقطة $C(0,2,-1)$ هي مسقط النقطة A القائم على المستوي Q .

5- جد المعادلات الوسيطية للفصل المشترك d للمستويين P, Q .

6- أثبت أن d محتوى في المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$.

التمرين الثاني:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0, +\infty[$ وفق: $f(x) = x + x(\ln x)^2$ وليكن $g(x) = (\ln x + 1)^2$ ، المطلوب:

1- أوجد نهاية التابع f عند الصفر وعند $+\infty$.

2- أثبت أن $f'(x) = g(x)$.

3- حل المعادلة $g(x) = 0$.

4- نظم جدول تغيرات f .

5- اكتب معادلة المماس Δ للخط C في نقطة فاصلتها $x = \frac{1}{e}$ وارسم المماس Δ وارسم C .

انتهت الأسئلة

RIE RASOUL INTERNATIONAL EDUCATION
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حل النموذج الرسمي الأول ..

أولاً :

السؤال الأول : نستخدم القسمة الإقليدية لإيجاد معادلة المستقيم المقارب المائل

$$\begin{array}{r|l} & x-6 \\ x+1 & x^2-5x+1 \\ & \underline{x^2+x} \\ & -6x+1 \\ & \underline{-6x-6} \\ & 7 \end{array}$$

$f(x) = x-6+\frac{7}{x+1}$ $\left\{ \begin{array}{l} a=1 \\ b=-6 \\ c=7 \end{array} \right.$

$f(x) = ax+b+\frac{c}{x+1}$

[2] $f(x)-y_\Delta = x-6+\frac{7}{x+1}-x+6$

$= \frac{7}{x+1}$

$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-y_\Delta) = 0$

ومنه $\Delta: y = x-6$ مقارب مائل في جوار $\pm\infty$

ولدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة الفرق

$f(x)-y_\Delta = \frac{7}{x+1}$; $x \neq -1$

$0 < f - y_\Delta$ $x > -1$ C فوق Δ

$0 > f - y_\Delta$ $x < -1$ C تحت Δ

السؤال الثالث : نكتب العدد العقدي بالشكل المثلثي

$$Z = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{2(\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3}))}{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})}$$

$= \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}))$

$= \sqrt{2}(\cos(\frac{-7\pi}{12})+i\sin(-\frac{7\pi}{12}))$

ثانياً : السؤال الأول

بفرض G مركز الأبعاد المتناسبة للجملة $(A,1),(B,1),(C,1),(D,1)$ و M نقطة ما من الفراغ

$\vec{MB}+\vec{MD}+\vec{MC} = 3\vec{MG}$ ... ①

$-\vec{MB}-\vec{MD}-\vec{MC} = -3\vec{MG}$

$3\vec{MA}-\vec{MB}-\vec{MD}-\vec{MC} = 3\vec{MA}-3\vec{MG}$

$= 3(\vec{MA}-\vec{MG})$

$= 3\vec{GA}$ ... ②

نعوض ② و ① في المسألة

$\|3\vec{MG}\| = \|3\vec{GA}\| \Rightarrow$

$\|\vec{MG}\| = \|\vec{GA}\|$

وهي معادلة كرة مركزها G ونصف قطرها

$R = \|\vec{GA}\|$

السؤال الثاني : شرط الحل $x > 0$

بفرض $\ln x = X \Rightarrow$

$X^2+3\ln X+2 = 0$

إما $X = -1$

$\ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$

أو $X = -2$

$\ln x = -2 \Rightarrow x = e^{-2}$

السؤال الثالث

شرط الحل $n \geq 2$

$n-1 \geq 1 \Rightarrow n \geq 2$ $\Big\} \Rightarrow n \geq 2$

$n(n-1) = 5(n-1)$

$n = 5$ مقبول

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

السؤال الثالث :

$u_n = 4n+1$

$u_{n+1} - u_n = 4(n+1)+1-(4n+1)$

$= 4n+4+1-4n-1$

$= 4$

متتالية حسابية أساسها $r=4$

$u_0 = 4(0)+1 = 1 = a$

$u_{10} = 4(10)+1 = 41 = \ell$

$n = 10-0+1 = 11$

$u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$

$S = n\,\frac{a+\ell}{2} = 11\,\frac{1+41}{2}$

$= 11(21) = 231$

ثالثاً : التمرين الأول .

ق1

$t(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\frac{x+2}{|x|+1}-2}{x}$

$|x| = x \Leftarrow x>0$

$t(x) = \dfrac{\frac{x+2}{x+1}-2}{x} = \dfrac{\frac{x+2-2x-2}{x+1}}{x}$

$= \dfrac{-x}{x(x+1)} = \dfrac{-1}{x+1}$

$\lim_{x\to 0^+} t(x) = -1$

إذن f اشتقاقي عند 0^+

$|x| = -x \Leftarrow x<0$

$t(x) = \dfrac{\frac{x+2}{-x+1}-2}{x} = \dfrac{\frac{x+2+2x-2}{-x+1}}{x}$

$= \dfrac{3x}{x(-x+1)} = \dfrac{3}{-x+1}$

$\lim_{x\to 0^-} t(x) = 3$

إذن f اشتقاقي عند 0^-

لكن f ليس اشتقاقي عند (0) لماذا

$\lim_{x\to 0^+} t(x) \neq \lim_{x\to 0^-} t(x)$

0^+ نقطة التماس $A(0,2)$

$m_1 = \lim_{x\to 0^+} t(x) = -1$

ومنه معادلة المماس

$T_1 : y-2 = -1(x-0)$

$T_1 : y = -x+2$

0^- نقطة التماس $A(0,2)$

$m_2 = \lim_{x\to 0^-} t(x) = 3$

ومنه معادلة المماس

$T_2 : y-2 = 3(x-0)$

$T_2 : y = 3x+2$

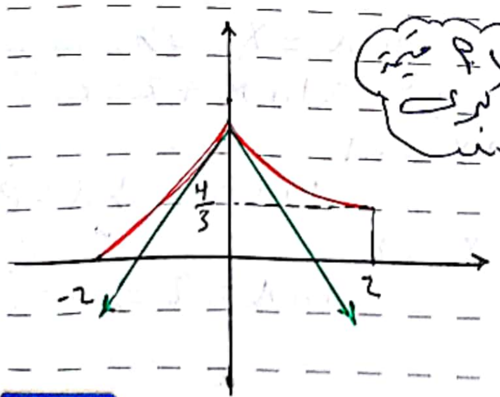
$f(x) = \dfrac{x+2}{|x|+1}$ $[-2,2]$

$f(-2) = 0$ $f(2) = \frac{4}{3}$

$$f = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x+1} & x \geq 0 \\ \dfrac{x+2}{-x+1} & x \leq 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(x+1)^2} & x \geq 0 \\ \dfrac{3}{(-x+1)^2} & x \leq 0 \end{cases}$$

x	-2		0		2
f'		$+$	$3 \Vert -1$	$-$	
f	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{4}{3}$



$f(0)=2$ قيمة حدية كبرى

المدرس : محمد رسول صباغ
0934131159
0956659541

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$x^2 + x - 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 5$

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2} = B$

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} = A$

لدينا $A = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ $\qquad \frac{2\pi}{5} = \frac{360}{5} = 72$

نلاحظ ان العدد الأول cos موجب ومنه نختار الحل الموجب لـ A .

$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = A \Rightarrow \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = 2\cos\frac{2\pi}{5}$

$\cos\frac{2\pi}{5} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

نعلم أن $\cos^2\frac{2\pi}{5} + \sin^2\frac{2\pi}{5} = 1$

$\sin^2\frac{2\pi}{5} = 1 - \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$

$= \dfrac{16 - 1 + 2\sqrt{5} - 5}{16}$

$= \dfrac{10 + 2\sqrt{5}}{16}$

$\sin\frac{2\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$

التمرين الثاني

$\underbrace{1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4}_{} = a\dfrac{1 - q^n}{1 - q}$

مجموع متتالية هندسية أساسها α وحدها الأول (1) وعدد الحدود 5

$= 1\,\dfrac{1 - \alpha^5}{1 - \alpha}$

لدينا $\alpha^5 = \left(e^{2\pi/5\, i}\right)^5 = e^{2\pi i} = 1$

ومنه

$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = \dfrac{1 - 1}{1 - \alpha} = 0$

$*\ x^2 + x - 1 = 0$

$A^2 + A - 1 \stackrel{?}{=} 0$

$\alpha^2 + 2\alpha^5 + \alpha^8 + \alpha + \alpha^4 - 1 \stackrel{?}{=} 0$

$\alpha^8 = \alpha^5\alpha^3 = \alpha^3 \quad ; \quad \alpha^5 = 1$

ومنه

$\alpha^2 + 2 + \alpha^3 + \alpha + \alpha^4 - 1 \stackrel{?}{=} 0$

$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 0 = 0$

ومنه A جذر للمعادلة .

$*\ B^2 + B - 1 \stackrel{?}{=} 0$

$\alpha^4 + 2\alpha^5 + \alpha^6 + \alpha^2 + \alpha^3 - 1 \stackrel{?}{=} 0$

$\alpha^6 = \alpha^5 \cdot \alpha = \alpha \quad ; \quad \alpha^5 = 1$

ومنه

$\alpha^4 + 2 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 - 1 \stackrel{?}{=} 0$

$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 0 = 0$

ومنه B جذر للمعادلة .

$A = \alpha + \alpha^4 = e^{\frac{2\pi}{5}i} + e^{\frac{8\pi}{5}i}$

$\dfrac{8\pi}{5} = \dfrac{10\pi - 2\pi}{5} = 2\pi - \dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{-2\pi}{5}$

$A = e^{\frac{2\pi}{5}i} + e^{-\frac{2\pi}{5}i} = 2\cos\frac{2\pi}{5}$

حسب دستور اولير

$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$

$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

التمرين الثالث:

$u_{n+1} = f(u_n)$

$f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$

$f'(x) = \frac{2x+4-2x-1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$

ومنه f متزايد تماماً.

[1] $E(n): \quad 0 \leq u_n \leq 1$

من أجل $n=0$

محققة $0 \leq u_0 = 0 \leq 1$

الفرض: $0 \leq u_n \leq 1$

الطلب: $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

الإثبات: لدينا

$0 \leq u_n \leq 1$

$f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$

$\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq \frac{3}{4} \Rightarrow$

$0 \leq u_{n+1} \leq 1$

ومنه القضية محققة من أجل $n+1$ هي صحيحة.

[2] $E(n): \quad u_{n+1} \geq u_n$

$u_1 = \frac{2u_0+1}{u_0+2} = \frac{1}{2}$

$u_1 - u_0 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} > 0$

محققة

الفرض: $u_{n+1} \geq u_n$

الطلب: $u_{n+2} \geq u_{n+1}$

الإثبات: لدينا $u_{n+1} \geq u_n$

$f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$

$u_{n+2} \geq u_{n+1}$

وهي محققة من أجل $n+1$ فهي صحيحة.

[3] المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى إذن متقاربة.

لإيجاد نهايتها نحل المعادلة $f(x) = x$

$\frac{2x+1}{x+2} = x$

$x^2 + 2x = 2x + 1$

$x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1$

ومنه

$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$

رابعاً: المسألة الأولى ...

$A(1,1,1) \quad B(3,2,0)$

$Q: x - y + 2z + 4 = 0$

[1]

$\vec{n} = \vec{AB}(2,1,-1)$

$P: 2x + y - z + d = 0$

نعوض B

$6 + 2 - 0 + d = 0 \Rightarrow d = -8$

$P: 2x + y - z - 8 = 0$

[2]

$R = AB = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

ومنه $(x-x_A)^2 + (y-y_A)^2 + (z-z_A)^2 = R^2$

$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 6$

[3]

$dist(A,Q) = \frac{|1-1+2+4|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

$dist(A,Q) = R$

ومنه Q مماس للكرة S

[4]

$\vec{AC}(-1,1,-2)$

$\vec{n}_Q(1,-1,2)$

مرتبطان خطياً فهما متوازيان

إذن C هي المسقط القائم لـ A على Q

[5]

$P: 2x + y - z - 8 = 0$

$Q: x - y + 2z + 4 = 0$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بالجمع $3x+z-4=0$

ومنه $z=4-3x$ ... (I)

نعوض (I)

$2x+y-4+3x-8=0$

$y=12-5x$ ... (II)

بفرض $x=t$

$x=t$

$y=12-5t \qquad t\in\mathbb{R}$

$z=4-3t$

[3] لتوجيه معادلة المستوي المحوري لـ $[BC]$

بفرض $M \in$ محوري $[BC]$

$MB=MC \Rightarrow MB^2=MC^2$

$(x-3)^2+(y-2)^2+z^2=x^2+(y-2)^2+(z+1)^2$

$x^2+y^2+z^2-6x-4y+13=x^2+y^2+z^2-4y+2z+5$

$-6x-4y+13=-4y+2z+5$

$6x+2z-8=0 \Rightarrow$

معادلة المستوي المحوري للقطعة $[BC]$: $3x+z-4=0$

$3t+4-3t-4 \stackrel{?}{=} 0$

$0=0$

ومنه d محتوى في المستوي المحوري لـ $[BC]$

المسألة الثانية:

$f(x)=x+x(\ln x)^2 \quad]0,+\infty[$

$g(x)=(\ln x+1)^2 \quad]0,+\infty[$

أ)

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$r\cdot\ln x=\ln x^r$

* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0(-\infty)^2$ عدم تعيين

$=\lim\limits_{x\to 0}(x+(\sqrt{x}\ln x)^2)$

$\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\ln x=0$

$=\lim\limits_{x\to 0}(x+(\sqrt{x}\cdot 2\cdot \frac{1}{2}\ln x)^2)$

$=\lim\limits_{x\to 0}(x+(2\sqrt{x}\ln\sqrt{x})^2) \quad 0+0=0$

[2] $f'(x)=1+1(\ln x)^2+2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot x$

$=1+(\ln x)^2+2\ln x$

مطابقة

$=(1+\ln x)^2$

[4] f معرف ومستمر واشتقاقي على

$f'=0 \Rightarrow (1+\ln x)^2=0$

$\ln x=-1 \Rightarrow x=e^{-1}=\frac{1}{e}$

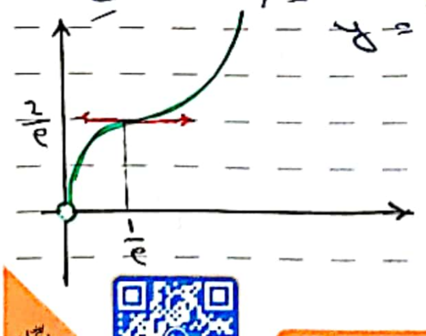
$f(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}+\frac{1}{e}(\ln\frac{1}{e})^2$

$=\frac{1}{e}+\frac{1}{e}(-1)^2=\frac{2}{e}$

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
f'	$+$	0	$+$
f	0 ↗	$\frac{2}{e}$	↗ $+\infty$

[5] النقطة التي فاصلتها $\frac{1}{e}$ كعدم المشتق لا يغير إشارته أي المماس أفقي

معادلته $y=\frac{2}{e}$



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

النموذج الامتحاني الرابع

أولاً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاثة التالية: (لكل سؤال 45 درجة)

السؤال الأوّل:

نجد جانباً جدول تغيرات التابع f ، المطلوب:

x	-2			0			$+2$
$f'(x)$		$+$	3	$\|\|$	-1	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		2		$\searrow$	$\frac{4}{3}$

1- أوجد D_f .

2- هل f اشتقاقي عند (0)؟ علل ذلك؟

3- اكتب معادلة نصف المماس من اليمين لخطه البياني في النقطة $A(0,2)$

4- اكتب معادلة نصف المماس من اليسار لخطه البياني في النقطة $A(0,2)$

5- ارسم نصفي المماسين السابقين وارسم C_f .

السؤال الثاني:

ليكن z عدداً عقدياً ما ، وليكن ω عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد . أثبت أن $\frac{\omega\bar{z}-\bar{z}}{i\omega-i}$ تخيلي بحت.

السؤال الثالث:

اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ بحيث: $A(2,-1,3), B(4,3,-1)$

ثانياً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاثة التالية: (لكل سؤال 45 درجة)

السؤال الأول:

نريد تأليف لجنة مكونة من (مدير ونائب مدير وأمين سر) من مجموعة تضم خمسة أشخاص، بكم طريقة يمكن اختيار هذه اللجنة علماً أن في المجموعة شخصين متخاصمين لا يجتمعان في اللجنة ذاتها.

السؤال الثاني:

ليكن θ عدداً من المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ ، أعطِ الشكل الأسي للعدد العقدي $Z = 1 + e^{2i\theta}$.

RIE RASOUL INTERNATIONAL EDUCATION
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

السؤال الثالث:

احسب نهاية التابع f المعطى بالعلاقة $f(x)=\frac{(5x-1)}{x-1}$ عند $+\infty$ ، ثم أعط عدداً A يحقق الشرط: إذا كان $x>A$ كان $f(x)$ في المجال $]4.9,5.1[$.

<u>ثالثاً: حل التمارين الثلاثة التالية:</u> **(80 للأول – 70 للثاني – 70 للثالث)**

التمرين الأول:

لنضع في حالة عدد طبيعي موجب تماماً n: $u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ ، المطلوب:

1- أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماماً

2- اكتب $u_{2n}-u_n$ واستنتج أن $u_{2n}-u_n\geq\frac{1}{2}$

3- أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أن $u_{2^n}\geq\frac{n}{2}$ أيّاً يكن العدد الطبيعي n غير المعدوم .

4- هل للمتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ نهاية حقيقية؟ علل ذلك

التمرين الثاني:

نزود المستوي بمعلم متجانس مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$ نقرن كل نقطة $M(Z)$ حيث $Z\neq i$ بالنقطة $M(Z')$ حيث: $Z'=\frac{Z+2}{Z-i}$

1- عين Δ مجموعة النقاط M التي يكون عندها Z' عدداً حقيقياً .

2- عين ε مجموعة النقاط M التي يكون عندها Z' عدداً تخيلياً بحتاً .

التمرين الثالث:

في معلم متجانس C_f و C_g على التوالي الخطان البيانيان للتابعين f و g المعرفين على المجال $I=]-1,+\infty[$ وفق: $f(x)=\ln(x+1)$ و $g(x)=\frac{x}{x+1}$ ، المطلوب:

1- أثبت أن $g(x)\leq f(x)$ أيّاً يكن x من I .

2- أثبت أن C_f,C_g متماسان في النقطة $(x=0)$ وأوجد معادلة المماس المشترك .

3- ادرس تغيرات f وارسم خطه البياني .

4- ادرس تغيرات g وارسم بنفس المعلم C_g .

RIE RASOUL INTERNATIONAL EDUCATION
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ربعاً: حل المسألتين الآتيتين: **(100 درجة لكل مسألة)**

المسألة الأولى:

لنتأمل التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ ، المطلوب:

1- تحقق أن f دوري دوره 2π .

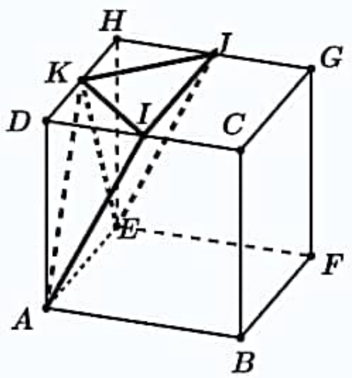
2- ادرس الصفة الزوجية أو الفردية لـ f ، واستنتج إمكانية دراسة f على $[0,\pi]$.

3- أثبت في حالة عدد حقيقي x لدينا: $f(x) = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$.

4- ادرس تغيرات f على المجال $[0,\pi]$ وارسم خطه البياني على المجال $[-\pi,\pi]$.

المسألة الثانية:

نتأمل مكعباً $ABCDEFGH$ ولتكن I,J,K منتصفات أضلاعه $[DC],[HG],[DH]$ بالترتيب، نتخذ $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$ معلماً متجانساً في الفراغ ، المطلوب:



1- أوجد إحداثيات النقاط A,I,E .

2- اكتب معادلة المستوي $AIJE$.

3- احسب بعد K عن المستوي $(AIJE)$ وحجم الهرم $KAIJE$.

4- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d العمودي على المستوي $(AIJE)$ والمار بالنقطة K .

5- احسب إحداثيات N نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي $AIJE$.

6- أثبت أن N هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha),(I,\beta),(E,\gamma)$ حيث α,β,γ هي أعداد يطلب تعيينها .

انتهت الأسئلة

RIE RASOUL INTERNATIONAL EDUCATION
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حل النموذج الوزاري الرابع ...

أولاً: السؤال الأول ...

1) $D_f = [-2, +2]$

2) f غير مستمر عند (0) لأن

$\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$

3) $m = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = -1$

معادلة المماس في A من اليمين

$y - 2 = -1(x-0)$

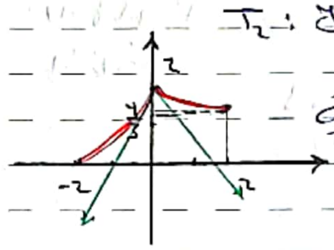
$T_1 : y = -x + 2$

$m = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 3$

معادلة المماس في A من اليسار

$y - 2 = 3(x - 0)$

$T_2 : y = 3x + 2$



$f(0) = 2$ قيمة حدية كبرى

السؤال الثاني:

$u = \frac{w Z - \bar{Z}}{i - i w}$

$|w| = 1$

لكي يكون u تخيلي بحت يجب أن يكون $\bar{u} = -u$

$\bar{u} = \frac{\bar{w}\bar{Z} - Z}{-i\bar{w} + i}$ ، $|w| = 1 \Rightarrow \bar{w} = \frac{1}{w}$

$= \frac{\frac{1}{w}\bar{Z} - Z}{-i\frac{1}{w} + i}$

$\bar{u} = \frac{\bar{Z} - wZ}{-i + iw} = \frac{-(wZ - \bar{Z})}{iw - i} = -u$

ومنه u تخيلي بحت.

السؤال الثالث: $A(2,-1,3)$ $B(4,3,-1)$

لتكن M نقطة من المستوي المحوري

$\Rightarrow AM = BM \Rightarrow AM^2 = BM^2$

$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = (x-4)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2$

$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z + 14 = x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y + 2z + 26$

$-4x + 2y - 6z + 14 = -8x - 6y + 2z + 26$

$4x + 8y - 8z - 12 = 0$

$\div 4$

$x + 2y - 2z - 3 = 0$

ثانياً: السؤال الأول:

متماثلين	غير متماثلين
2	3

$P_3^3 + P_2^1 \times P_3^2 \times 3$

$= 6 + 2 \times 6 \times 3$

$= 6 + 36 = 42$

السؤال الثاني:

$Z = 1 + e^{2i\theta} =$

$= e^{i\theta}\cdot e^{-i\theta} + e^{i\theta}\cdot e^{i\theta}$

$= (e^{i\theta} + e^{-i\theta})\, e^{i\theta}$ حسب أويلر

$= 2\cos\theta \cdot e^{i\theta}$ ، $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

لأن $0 < \cos\theta$

السؤال الثالث:

$$\begin{array}{r|l} & 5 \\ x-1 & 5x-1 \\ & 5x-5 \\ \hline & 4 \end{array}$$

$f(x) = 5 + \frac{4}{x-1}$

لدينا $4.9 < f(x) < 5.1$

$4.9 < 5 + \frac{4}{x-1} < 5.1$

$-0.1 < \frac{4}{x-1} < 0.1$

$\frac{4}{x-1} < \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{x-1}{4} > 10$

$\left.\begin{array}{l} x > 41 \\ x > A \end{array}\right\} A = 41$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ثالثاً:

التمرين الأول

$u_{n+1} = \underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}}+\frac{1}{n+1}$

$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} > 0$

متتالية متزايدة تماماً.

$u_{2n} - u_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$

$+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\dots-\frac{1}{n}$

$u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}$

$u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2n}\times n$

$u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$

$E(n):\ u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$

من أجل $n=1$

$u_2 = 1+\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$ محققة

الفرض: $u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$

الطلب: $u_{2^{n+1}} \geq \frac{n+1}{2}$

البرهان:

$u_{2^{n+1}} = \underbrace{u_{2\cdot 2^n} - u_{2^n}} + u_{2^n}$

من الطلب السابق بفرض $2^n = n$

من الفرض

$u_{2^{n+1}} \geq \frac{1}{2} + \frac{n}{2}$

$u_{2^{n+1}} \geq \frac{n+1}{2}$

$u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$

إذاً ليس للمتتالية نهاية حقيقية.

التمرين الثاني: بفرض $z' = X + iY$

$z = x + iy$

$X + iY = \frac{x+2+iy}{x+i(y-1)}$

$= \frac{(x+2+iy)(x-iy+i)}{x^2+(y-1)^2}$

$= \frac{x^2 \cancel{-ixy} + ix + 2x - 2iy + 2i \cancel{+iyx} + y^2 - y}{x^2+(y-1)^2}$

$= \frac{x^2+y^2+2x-y+i(x-2y+2)}{x^2+(y-1)^2}$

$= \frac{x^2+y^2+2x-y}{x^2+(y-1)^2} + i\,\frac{x-2y+2}{x^2+(y-1)^2}$

بالمطابقة

$X = \frac{x^2+y^2+2x-y}{x^2+(y-1)^2}$

$Y = \frac{x-2y+2}{x^2+(y-1)^2}$

a: z' حقيقي $\Leftrightarrow Y = 0 \Leftarrow$

$x - 2y + 2 = 0$

وهي معادلة مستقيم نستثني منه النقطة $(0,1)$

b: z' تخيلي بحت $\Leftrightarrow X = 0 \Leftarrow$

$x^2+y^2+2x-y=0$

وهي معادلة دائرة مركزها $\Omega(-1,\frac{1}{2})$

$R = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ونستثني منها $(0,1)$

التمرين الثالث: أ:

$f(0) = \ln(1) = 0$
$g(0) = \frac{0}{1} = 0$ } والشرط الأول محقق

$f'(x) = \frac{1}{x+1}$, $f'(0) = 1$

$g'(x) = \frac{x+1-x}{x^2} = \frac{1}{x^2}$, $g'(0) = 1$ } والشرط الثاني محقق

إذاً C_f و C_g متماسان في $(0,0)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

معادلة المماس المشترك هي

$y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x$

أ) $h(x) = f(x) - g(x)$

$= \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$ $\quad]-1,\infty[$

$h'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$

$h'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \qquad h(0) = 0$

واضح من جدول الاطراد

x	-1		0		$+\infty$
h'	‖	$-$	0	$+$	
h	‖	$\searrow$	0	$\nearrow$	

$h(x) \geq 0$

$\Rightarrow f(x) - g(x) \geq 0$

$f(x) \geq g(x)$

ب) $f(x) = \ln(x+1) \quad]-1,\infty[$

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \frac{1}{x+1} > 0$

x	-1		$+\infty$
f'	‖	$+$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

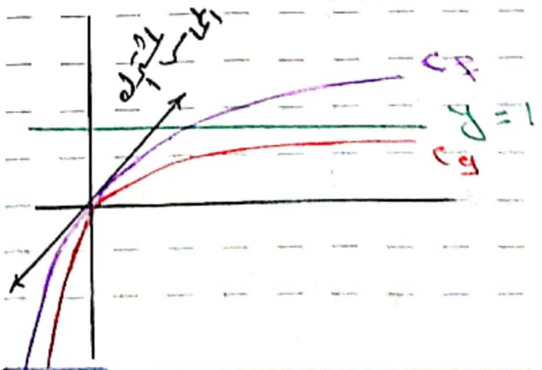
$g(x) = \frac{x}{x+1} \quad]-1,\infty[$

$\lim\limits_{x\to -1} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 1$

$g'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$

x	-1		$+\infty$
g'	‖	$+$	
g	‖ $-\infty$	$\nearrow$	1



المسألة الأولى : $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$

$f(x+2\pi) = 2\sin(x+2\pi) + \sin 2(x+2\pi)$

$= 2\sin x + \sin 2x = f(x)$

ومنه f تابع

$f(-x) = 2\sin(-x) + \sin 2(-x)$

$= -2\sin x - \sin 2x = -f(x)$

ومنه f تابع فردي ومنحنيه البياني متناظر بالنسبة للمبدأ.

اذاً يكفي دراسته على $[0, \frac{T}{2}] = [0, \pi]$

$f(0) = 0 \qquad f(\pi) = 0$

$f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x$

$= 2\cos x + 2(2\cos^2 x - 1)$

$= 4\cos^2 x + 2\cos x - 2$

$= 2(2\cos^2 x + \cos x - 1)$

$= 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$

$f' = 0 \Rightarrow (2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$

إما $\cos x = -1 \quad x = \pi + 2\pi k$

$k = 0 \quad x = \pi \quad f(\pi) = 0$

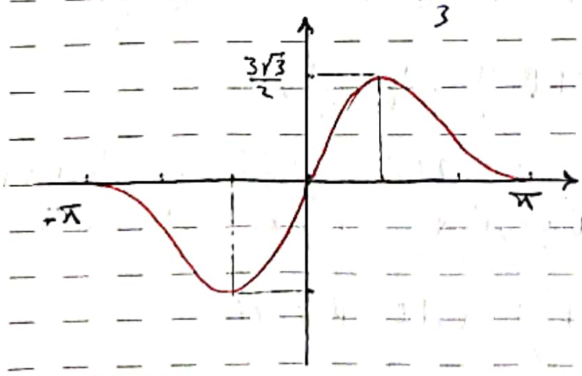
أو $2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$

$\cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \qquad f(\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

أو $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ مرفوض

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
f'		$+$	0	$-$	0
f	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	0



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المسألة الثانية:

أ) $A(0,0,0)$ $B(1,0,0)$ $E(0,1,0)$

$I(\frac{1}{2},0,1)$ $J(\frac{1}{2},1,1)$

٢) معادلة المستوي $AIJE$

$ax+by+cz+d=0$

A يحقق $\Rightarrow d=0$

E يحقق $\Rightarrow b=0$

I " $\Rightarrow \frac{1}{2}a+c=0$ بفرض $a=2$

J " $\Rightarrow \frac{1}{2}a+c=0$ $c=-1$

$\boxed{AIJE: 2x-z=0}$

$K(0,\frac{1}{2},1)$

٣) $dist(K,AIJE)=\frac{|0+0-1|}{\sqrt{4+1}}=\frac{1}{\sqrt5}$

الرباعي $IJEA$ مستطيل

$S=AE\times AI=\sqrt1\times\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\frac{\sqrt5}{2}$

$v=\frac{1}{3}S.h=\frac{1}{3}\frac{\sqrt5}{2}\times\frac{1}{\sqrt5}=\frac{1}{6}$ واحدة مكعب

٤) d عمودي على $AIJE$ اذاً

$\vec{v}=\vec{n}(2,0,-1)$

$x=2t$

$y=\frac{1}{2}$ $\quad t\in\mathbb{R}$

$z=1-t$

٥) نعوض المعادلات الوسيطية لـ d في معادلة المستوي $AIJE$

$4t-1+t=0 \Rightarrow t=\frac{1}{5}$

$N(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{4}{5})$

N نقطة من المستوي AIE اذاً

يوجد عددان حقيقيان α,β يحققان

$\vec{AN}=\alpha\vec{AI}+\beta\vec{AE}$

$\vec{AN}=\alpha(\frac{1}{2},0,1)+\beta(0,1,0)$

$=(\frac{\alpha}{2},0,\alpha)+(0,\beta,0)$

$(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{4}{5})=(\frac{\alpha}{2},\beta,\alpha)$

$\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{5} \Rightarrow \alpha=\frac{4}{5}$

$\beta=\frac{1}{2}$

$\vec{AN}=\frac{4}{5}\vec{AI}+\frac{1}{2}\vec{AE}$

ومنه N مركز ابعاد متناسبة للنقاط

$(I,\frac{4}{5}),(E,\frac{1}{2})$

$(A,1-\frac{4}{5}-\frac{1}{2})=(A,\frac{-3}{10})$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner